Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2024

Zadania z matematyki nr 877, 878

Redaguje Marcin E. KUCZMA

877. Wyjaśnić, czy istnieje na płaszczyźnie konfiguracja pięciu różnych punktów A, B, C, P, Q, w której zachodzą równości

$$PA = AB = BQ, \quad PB = BC = CQ, \quad PC = CA = AQ,$$

a punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta
(**a**) ostrokątnego,
(**b**) rozwartokątnego.

878. Znaleźć liczbę naturalną $r > 2$, dla której istnieje nieskończenie wiele r-elementowych zbiorów różnych liczb pierwszych $\{p_1, \ldots, p_r\}$ takich, że każda z liczb $2^{p_i-1} - 1$ $(i = 1, \ldots, r)$ jest podzielna przez iloczyn $p_1 \ldots p_r$. Im większa liczba r, tym cenniejsze rozwiązanie.

Zadanie 878 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna w nawiązaniu do zadania 678 (naszej ligi: Δ^7_{14}; omówienie: Δ^2_{15}), a także do zadania 8 z obozu OM (Zwardoń 2010) `<om.sem.edu.pl>`, *zakładka* Obóz naukowy.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2023

Przypominamy treść zadań:

869. Funkcja g przyporządkowuje każdej (uporządkowanej) parze x, y liczb rzeczywistych dodatnich wartość $g(x, y)$, określoną jako najmniejsza liczba z trójki x, $1/y$, $(xy + 1)/x$. Wyznaczyć kres górny wartości $g(x, y)$, gdy x oraz y przebiegają zbiór wszystkich liczb dodatnich.

870. (**a**) Wykazać, że z odcinków łączących dowolny punkt płaszczyzny z wierzchołkami trójkąta równobocznego (leżącego w tej płaszczyźnie) można zbudować pewien trójkąt (być może zdegenerowany).
(**b**) Trójkąt równoboczny jest zanurzony w przestrzeni (trójwymiarowej). Wyjaśnić, czy – analogicznie – zawsze można z odcinków łączących dowolny punkt przestrzeni z wierzchołkami tego trójkąta zbudować pewien trójkąt (być może zdegenerowany).

869. Wartości funkcji g są dodatnie. Niech s będzie dowolną jej wartością. Istnieją więc liczby $x, y > 0$, dla których $s = g(x, y)$. Zgodnie z określeniem funkcji g spełnione są jednocześnie nierówności

$$x \geqslant s, \qquad \frac{1}{y} \geqslant s, \qquad \frac{xy+1}{x} \geqslant s$$

(jedna z nich staje się równością). Wynika z nich, że

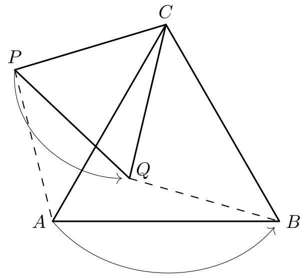
$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{s}, \quad y \leqslant \frac{1}{s}, \quad s \leqslant \frac{xy+1}{x} = y + \frac{1}{x} \leqslant \frac{2}{s}.$$

Ostatnia nierówność pokazuje, że $s^2 \leqslant 2$, czyli $s \leqslant \sqrt{2}$. Tak więc wartości funkcji g nie przekraczają $\sqrt{2}$. Przy tym

$$g\Big(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \min\Big\{\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1+1}{\sqrt{2}}\Big\} = \sqrt{2}.$$

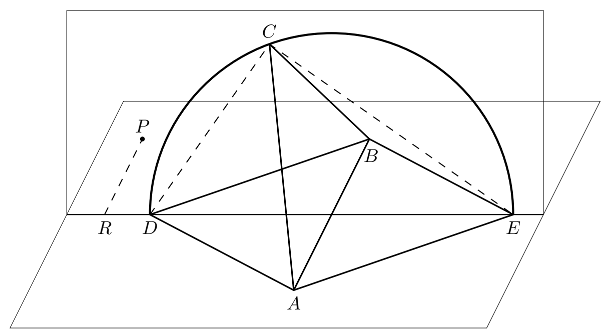
Zatem liczba $\sqrt{2}$ jest szukanym kresem górnym wartości funkcji g.

870. (**a**) Niech P będzie dowolnym punktem w płaszczyźnie trójkąta równobocznego ABC. Rozważmy obrót płaszczyzny wokół punktu C o kąt $60°$, przenoszący punkt A do pozycji punktu B.



Obraz punktu P nazwijmy Q. Odcinki CP i CQ są równej długości i tworzą kąt $60°$, więc trójkąt CPQ jest równoboczny. Odcinek AP przechodzi na odcinek BQ. Trójkąt BPQ (być może zdegenerowany do odcinka) ma boki długości $BQ = AP$, BP, $PQ = CP$; jest więc trójkątem, którego istnienie należało uzasadnić.

(**b**) Niech teraz P będzie dowolnym punktem w przestrzeni, leżącym poza płaszczyzną trójkąta równobocznego ABC. Wykażemy, że i teraz istnieje trójkąt o bokach długości AP, BP, CP. Przyjmijmy (b.s.o.), że najdłuższy z tej trójki jest odcinek CP. Wystarczy dowieść, że wówczas $CP \leqslant AP + BP$.



W płaszczyźnie ABP budujemy trójkąty równoboczne ABD i ABE; dobieramy oznaczenia tak, by $PD \leqslant PE$. Wierzchołki C, D, E trójkątów foremnych o wspólnym boku AB leżą na płaszczyźnie symetralnej odcinka AB, na okręgu o średnicy DE; trójkąt CDE jest prostokątny. Niech R będzie rzutem punktu P na prostą DE. Płaszczyzny CDE i PDE są prostopadłe, więc $CR \perp PR$. Stąd $DR = \sqrt{PD^2 - PR^2} \leqslant \sqrt{PE^2 - PR^2} = ER$. To znaczy, że (w płaszczyźnie CDE) punkty C i R leżą po jednej stronie prostej symetralnej odcinka CE (która połowi przeciwprostokątną DE); czyli $CR \leqslant ER$. Stąd $CP = \sqrt{CR^2 + PR^2} \leqslant \sqrt{ER^2 + PR^2} = EP$.

Z części (**a**), zastosowanej do trójkąta ABE i punktu P (leżącego w jego płaszczyźnie) wiadomo, że z odcinków AP, BP, EP można zbudować trójkąt. Zatem $EP \leqslant AP + BP$, więc tym bardziej $CP \leqslant AP + BP$.

[Istnieją różne rachunkowe metody rozwiązania zadania, tak w części (**a**), jak i (**b**).]

Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2024

Zadania z fizyki nr 774, 775

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

774. Długi klocek o podstawie kwadratowej pływa w wodzie tak, że jedna z jego powierzchni bocznych znajduje się nad powierzchnią wody i jest do niej równoległa, a klocek znajduje się w stanie równowagi trwałej. Dla jakiej gęstości materiału, z którego wykonano klocek, jest to możliwe?

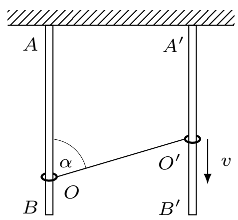
775. Cienki pierścień gumowy rozkręcono wokół osi symetrii prostopadłej do płaszczyzny pierścienia. Prędkość liniowa jego elementów wynosi v. Z jaką prędkością będą rozprzestrzeniać się w tym pierścieniu monochromatyczne fale poprzeczne o małej amplitudzie?

Rozwiązania zadań z numeru 11/2023

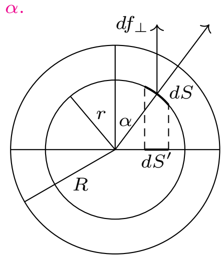
Przypominamy treść zadań:

766. Znaleźć siłę oddziaływania dwóch połówek nieprzewodzącej kuli o promieniu R, naładowanych ze stałą gęstością objętościową, odpowiednio, ρ_1 i ρ_2. Przyjąć, że kula wykonana jest z materiału o stałej dielektrycznej równej jeden.

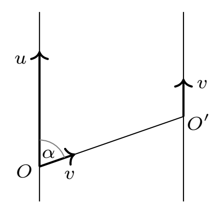
767. Pierścienie O i O' nasunięte są na pionowe, nieruchome pręty AB i $A'B'$. Nierozciągliwa nić umocowana w punkcie A' przewleczona jest przez pierścień O' i przyczepiona do pierścienia O (rys. 1). Pierścień O' porusza się w dół ze stałą prędkością v. Jaka jest prędkość pierścienia O w chwili, gdy kąt AOO' ma wartość α.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

766. W każdym punkcie półkuli o gęstości ρ_1 działa siła od drugiej półkuli $d\vec{f} = \rho_1 \vec{E} dV$, gdzie $\vec{E}$ jest natężeniem pola elektrycznego w danym punkcie od drugiej półkuli, a $\rho_1 dV$ to ładunek elementarnej objętości wokół punktu. Zatem siła działająca na pierwszą półkulę jest proporcjonalna do ρ_1. Analogicznie siła działająca na drugą półkulę ze strony pierwszej jest proporcjonalna do ρ_2. Stąd wniosek, że siła oddziaływania między półkulami

$$F \sim \rho_1 \rho_2 = {\rho_1}^2 \rho_2 / \rho_1.$$

Na pierwszą półkulę działa również jej własne pole, którego wypadkowe działanie wynosi zero. Obliczymy więc siłę oddziaływania F_1 z drugą półkulą o takiej samej gęstości, rozważając pole od całej kuli, a następnie wynik pomnożymy przez czynnik ρ_2/ρ_1.

Zgodnie z prawem Gaussa natężenie pola wewnątrz kuli naładowanej ze stałą gęstością objętościową $\rho_1 > 0$ w odległości r od środka kuli ma wartość $E = \rho_1 r / 3\varepsilon_0$ i jest skierowane wzdłuż promienia. Podzielmy górną półkulę na rysunku 2 na półsferyczne warstwy. Prostopadła do powierzchni rozdziału półkul składowa siły działającej na mały element warstwy o promieniu r i powierzchni dS wynosi:

$$df_\perp = E\rho_1 dS dr \cos\alpha = E\rho_1 dS' dr,$$

gdzie dr jest grubością warstwy, a $dS' = dS\cos\alpha$ rzutem powierzchni dS na powierzchnię rozdziału. Wypadkowa siła działająca na półsferę o promieniu r

$$dF_1 = \pi r^2 df_\perp = \pi {\rho_1}^2 r^3 dr / 3\varepsilon_0.$$

Siła oddziaływania półkul o jednakowych gęstościach dana jest wzorem

$$F_1 = \int_0^R dF_1 = \frac{\pi {\rho_1}^2 R^4}{12\varepsilon_0},$$

a szukana siła oddziaływania półkul o gęstościach ρ_1 i ρ_2

$$F = \pi R^4 \rho_1 \rho_2 / 12\varepsilon_0.$$

767. W układzie odniesienia związanym z pierścieniem O', gdy $\sphericalangle AOO' = \alpha$, nić wyciągana jest w górę z prędkością v (rys. 3). Ponieważ nić jest nierozciągliwa, składowa prędkości pierścienia O wzdłuż nici ma również prędkość v, a wypadkowa prędkość pierścienia w badanej chwili i w wybranym układzie wynosi:

$$u = v / \cos\alpha.$$

W nieruchomym układzie odniesienia szukana prędkość pierścienia jest równa:

$$v_O = u - v = v\left(1/\cos\alpha - 1\right).$$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.