SPIS TREŚCI

W następnym numerze:

Rów tektoniczny pod centrum Polski
«Mała Delta» — już na stałe

„Delta”
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego wydawany przy poparciu Polskiej Akademii Nauk oraz Ministerstwa Oświaty i Wychowania

opracowanie okładki
art. graf. K. Dobrowolski

Adres Redakcji
ul. Śniadeckich 8,
00-656 Warszawa, PTM

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo. Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 30000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.; papier offsetowy III kl., 80g, 61×86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej, Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 1245/74 W-121

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW-Prasa-Książka-Ruch, w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW-Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowo właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5,— nr indeksu 35723

Od szczególnego przypadku do uogólnienia cz. (II)
Wariacje na temat „Problem A — zamki i klucze"

Prof. dr Zofia KRYGOWSKA

Punktem wyjścia do naszych rozważań będzie jedno z zadań ostatniego etapu Olimpiady Matematycznej z roku 1971. Nazwiemy je „Problemem A — zamki i klucze". Oto jego treść.

Należy zabezpieczyć przez zainstalowanie zamków urządzenie sygnalizacyjne oraz rozdać klucze do tych zamków jedenastu wybranym osobom tak, aby każdy co najmniej sześcioosobowy zespół tych osób miał klucze do wszystkich zamków oraz aby każdemu mniej licznemu zespołowi brakowało klucza do przynajmniej jednego z tych zamków. Jaką najmniejszą liczbę zamków trzeba zainstalować oraz jak rozdać do nich klucze? Dla uproszczenia będziemy te zespoły, rozporządzające wszystkimi kluczami (a więc zespoły co najmniej sześcioosobowe), nazywać dalej zespołami uprawnionymi, zespoły zaś mniej liczne, nie mające dostępu do wszystkich zamków — nieuprawnionymi. Każdy zespół sześcioosobowy — to minimalny zespół uprawniony, każdy zespół pięciosobowy — to maksymalny zespół nieuprawniony.

Poszukajmy rozwiązania problemu A. Przypuszczamy, że rozwiązanie to istnieje. Niechaj S będzie minimalnym zespołem uprawnionym. Wtedy zespół $\overline{S}$, dopełniający S do pełnej jedenastki, nie jest zespołem uprawnionym, bo pięcioosobowym, a więc musi istnieć zamek, do którego klucza nie posiada żadna z osób tego zespołu. Natomiast każda z osób należących do zespołu S ma klucz do tego zamka, gdyby bowiem choć jedna z nich takiego klucza nie miała, to dołączając ją do zespołu $\overline{S}$, otrzymalibyśmy zespół sześcioosobowy, nie mający dostępu do tego zamka wbrew warunkom zadania. Stwierdzamy: jeżeli zadanie A ma rozwiązanie, to dla każdego maksymalnego zespołu uprawnionego istnieje zamek, do którego klucz otrzyma każda z osób tego zespołu i do którego nie otrzyma klucza żadna inna osoba. Wobec tego, jeżeli z jest zamkiem przydzielonym w ten sposób zespołowi sześcioosobowemu S, zaś S' jest zespołem sześcioosobowym różnym od S, to w zespole S' musi się znaleźć osoba nie mająca klucza do zamka z. Zespołowi S' trzeba więc przydzielić w opisany sposób zamek z' różny od zamka z. Musimy zatem mieć co najmniej tyle zamków, ile jest zespołów sześcioosobowych, a więc $\binom{11}{6}$, czyli 462. Są to konieczne warunki istnienia rozwiązania; czy wystarczy je zrealizować, aby otrzymać rozwiązanie spełniające warunki zadania?

Numerujemy zespoły sześcioosobowe (minimalne zespoły uprawnione) i tworzymy następujące ciągi: a) ciąg $S_1, S_2, \ldots, S_{462}$ zespołów sześcioosobowych, b) ciąg $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots, \overline{S}_{462}$ zespołów dopełniających odpowiednie zespoły sześcioosobowe do pełnej jedenastki (a więc ciąg maksymalnych zespołów nieuprawnionych), c) ciąg zamków $z_1, z_2, \ldots, z_{462}$. Osobom zespołu S_i, i tylko tym osobom, dajemy klucze do zamka z_i. Wtedy oczywiście zespół $\overline{S}_i$ nie będzie rozporządzał kluczem do zamka z_i. Natomiast każdy zespół S_j $(j \neq i)$ będzie już miał klucz do tego zamka, do zespołu bowiem S_j należy przynajmniej jedna osoba zespołu S_i (każdy z tych zespołów liczy 6 osób, a wszystkich osób jest 11). Udowodniliśmy więc, żę przydzielając klucze do zamków w opisany sposób, zrealizujemy warunki zadania: każdy zespół sześcioosobowy, a więc też każdy zespół uprawniony, rozporządzać będzie kluczami do wszystkich zamków; żaden z zespołów pięcioosobowych, a więc też żaden z zespołów nieuprawnionych, nie będzie rozporządzał wszystkimi takimi kluczami. Zauważmy przy tym, że jest to rozwiązanie jedyne przy minimalnej liczbie zainstalowanych zamków.

Rozwiązaliśmy nasze zadanie i teraz „spoglądamy wstecz" na przebytą drogę. Czy liczby 11, 5, 6 były istotne dla rozumowania? Spostrzegamy od razu, że możemy przenieść rozwiązanie do ogólniejszego przypadku bez zmian, przyjmując,

OSOBY / ZAMKI	a	b	c	d	e	f
1					+	+
2			+	+		
3	+	+				

że pełny zespół liczy $2n+1$ osób, maksymalne zespoły nieuprawnione po n osób, minimalne zespoły uprawnione po $n+1$ osób.

Zauważmy także, że warunki:

a) minimalny zespół uprawniony liczy o jedną osobę więcej niż maksymalny zespół nieuprawniony,

oraz

b) zespół jest uprawniony wtedy i tylko wtedy, gdy uzupełniający go zespół jest nieuprawniony

nie mogłyby być zrealizowane, gdyby pełny zespół liczył parzystą liczbę osób. A z tych założeń korzystaliśmy w sposób istotny w naszym rozumowaniu. Te warunki wydają się nam bardzo ciasne i bardzo ograniczające wybór zespołów uprawnionych. Nie można na przykład przy ich zachowaniu uwzględnić różnic w kompetencjach osób uczestniczących w pełnym zespole.

Spróbujmy skonstruować problem B, w którym właśnie kompetencje odgrywałyby istotną rolę w wyborze zespołów uprawnionych. Proponujemy zespół sześciu osób: a, b, c, d, e, f. Osoby a, b — to specjaliści w jednej dziedzinie; c, d — w innej; e, f — w jeszcze innej. Uznamy, że zespół jest uprawniony wtedy i tylko wtedy, gdy należy doń choć jedna osoba z każdej z tych specjalności. Jak rozwiążemy w tym przypadku „problem zamków i kluczy"?

Rozwiązanie przedstawia tabelka. Rozumujemy w sposób następujący: Zespół osób a, b, c, d jest jednym z maksymalnych zespołów nieuprawnionych, musi więc istnieć zamek, do którego kluczy nie otrzyma żadna z tych osób, ale do którego otrzyma klucze każda z pozostałych osób, ponieważ każda trójka specjalistów z różnych dziedzin jest już zespołem uprawnionym. Kontynuujemy to rozumowanie aż do wyczerpania wszystkich maksymalnych zespołów nieuprawnionych. Moglibyśmy oczywiście postępować mniej „oszczędnie" i zamiast rozważać tylko maksymalne zespoły nieuprawnione uwzględnić w tabeli kolejno wszystkie zespoły nieuprawnione (byłoby to jednak marnowaniem zamków i kluczy).

Zauważmy, że rozwiązania otrzymanego w przypadku problemu A nie moglibyśmy zastosować do problemu B. Zespół $\{a, c, e\}$ jest uprawniony, ale nie ma zamka, do którego klucze otrzymałyby wszystkie te, i tylko te, osoby. Natomiast, na odwrót, rozwiązanie zadania B możemy przystosować do warunków zadania A. W tym bowiem przypadku przyporządkowując każdemu maksymalnemu zespołowi nieuprawnionemu zamek, do którego klucza nie otrzymuje żadna z osób tego zespołu — do którego natomiast otrzymuje klucz każda pozostała osoba — przyporządkowujemy tym samym każdemu minimalnemu zespołowi uprawnionemu zamek, do którego klucz otrzymuje każda osoba tego zespołu i nie otrzymuje klucza żadna z pozostałych osób. Wynika to stąd, że w przypadku A zespół jest uprawniony wtedy, i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie do całej jedenastki jest zespołem nieuprawnionym. Ten warunek bardzo szczególny nie jest spełniony w przypadku B. Rozwiązanie zadania B ma więc charakter ogólniejszy. Nasuwa nam to pomysł nowego wariantu „problemu zamków i kluczy", a mianowicie wariantu C, w którym pozostawimy zupełną swobodę w wyborze zespołów uprawnionych z jednym naturalnym warunkiem, że każdy zespół, którego część jest zespołem uprawnionym, jest też zespołem uprawnionym. W języku matematyki rodzinę podzbiorów pewnego zbioru o takiej własności, że każdy podzbiór tego zbioru, zawierający jakiś zbiór należący do tej rodziny, sam też do tej rodziny należy — nazywamy *ideałem podzbiorów* pełnego zbioru.

Żądamy więc tylko, aby rodzina wyróżnionych zespołów uprawnionych była ideałem podzbiorów pełnego zbioru. Tak będzie zawsze w praktyce naszego „problemu zamków i kluczy", niezależnie od kryteriów, którymi kierowaliśmy się, wybierając zespoły uprawnione. Zakładamy, że ten warunek jest spełniony oraz że istnieją zarówno zespoły uprawnione, jak i nieuprawnione w pełnym zespole. Instalujemy tyle zamków, ile jest zespołów nieuprawnionych. Każdemu zespołowi nieuprawnionemu przyporządkowujemy dokładnie jeden zamek i dajemy klucze do tego zamka wszystkim osobom nie należącym do tego zespołu, i tylko tym osobom. Różnym zespołom nieuprawnionym przyporządkowujemy w ten sposób różne klucze. Oczywiście wtedy żaden z zespołów nieuprawnionych nie będzie miał kluczy do wszystkich zamków. Jeżeli zaś S jest dowolnym zespołem

uprawnionym, z dowolnym zamkiem, zaś S' zespołem nieuprawnionym, któremu przyporządkowano zamek z, to S nie jest częścią S', bo S jako zespół uprawniony nie może się zawierać w żadnym zespole nieuprawnionym (tu korzystamy z tego warunku, że rodzina zespołów uprawnionych jest ideałem podzbiorów pełnego zbioru). Do zespołu S należy więc przynajmniej jedna osoba nie należąca do S', a więc mająca klucz do zamka z. Zespół S rozporządza kluczami do wszystkich zamków.

Uwolniliśmy więc nasz „problem zamków i kluczy" od wszystkich warunków ograniczających wybór zespołów uprawnionych (warunek, że zespół zawierający zespół uprawniony jest zespołem uprawnionym, jest praktycznie zawsze spełniony, gdy dostęp do urządzenia zależy od posiadania kluczy do wszystkich zamków zabezpieczających to urządzenie). Jakkolwiek te zespoły wyznaczymy, zawsze będzie można tak zainstalować zamki i tak rozdać klucze, że zespoły uprawnione, i tylko te zespoły, będą miały możliwość nadania sygnału.

Spoglądając wstecz na przebytą drogę dostrzegamy, jak „przedłużanie" pierwszego problemu, rozważanie jego wariantów, pozwoliło nam odkryć to, co jest istotne dla rozwiązania — pewną strukturę matematyczną, którą wprowadzamy do zbioru wszystkich możliwych zespołów, wybierając z nich zespoły uprawnione według dowolnie ustalonych zasad. Dane numeryczne w pierwszym zadaniu skierowały nas nie na najbardziej ogólną drogę. To, co się nam wydawało początkowo ważne, i z czego korzystaliśmy wyraźnie w rozumowaniu, okazało się nieistotne dzięki temu, że postępowaliśmy tak, jak to zaleca G. Polya: „Żaden problem nie jest nigdy wyczerpany całkowicie. Zawsze coś pozostaje jeszcze do zrobienia; badając problem dostatecznie wnikliwie, możemy ulepszyć każde rozwiązanie, a w każdym razie zawsze udoskonalić nasze rozumienie rozwiązania".

Czy nasze problemy A, B i C są jednak rzeczywiście problemami matematycznymi? Moglibyśmy je od razu sformułować w języku teorii mnogości i wtedy ich matematyczny charakter byłby od razu widoczny. Czytelnikowi obeznanemu z językiem mnogościowym proponujemy powiązanie z naszymi rozważaniami następującego zadania D: Dany jest zbiór K i niepusta rodzina $\mathbf{U}$ jego niepustych podzbiorów, będąca ideałem podzbiorów zbioru K. Z jest zbiorem równolicznym z rodziną pozostałych podzbiorów zbioru K. Zdefiniować takie odwzorowanie f zbioru K w zbiór $\mathbf{P}(Z)$, aby dla każdego podzbioru X zbioru K spełniony był warunek:

$$X \in \mathbf{U} \Leftrightarrow \Big[\bigcup_{a \in X} f(a) = Z\Big].$$

Rozwiązanie tego ogólnego zadania będzie polegać tylko na odpowiednim zapisie rozwiązania zadania C.

Zauważmy, że rozwiązując zadanie C przydzielaliśmy zamki i klucze nieoszczędnie. Przyporządkowywaliśmy zamki wszystkim zespołom nieuprawnionym, nie tylko maksymalnym, choć mogliśmy wybrać to oszczędniejsze przyporządkowanie. Ale zrezygnowaliśmy z tego celowo, aby uzyskać rozwiązanie ogólniejszego problemu D, w którym nie będziemy już zakładać, że rozważane zbiory są skończone. Gdy tego nie zakładamy, nie mamy pewności, że istnieją minimalne zespoły w rodzinie $\mathbf{U}$ i maksymalne zespoły w rodzinie pozostałych podzbiorów zbioru pełnego K. Na przykład, jeżeli K jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, $\mathbf{U}$ rodziną jego podzbiorów, z których każdy zawiera w sobie jakiś przedział otwarty, to w rodzinie $\mathbf{U}$ nie ma minimalnych zbiorów (to znaczy takich, że wyłączając jeden element otrzymujemy już zbiór nie należący do $\mathbf{U}$ i że każdy zbiór tej rodziny jest nadzbiorem pewnego zbioru minimalnego), nie ma też maksymalnych zbiorów w rodzinie zbiorów nie należących do $\mathbf{U}$.

Ale problem abstrakcyjnego już przydziału zamków i kluczy i tu ma zarówno matematyczny sens, jak i rozwiązanie, które bez kłopotu przeniesiemy z bardziej praktycznie ujętego zadania C.

Rozwiązanie zadania F12:

Przez kondensator płynie prąd o natężeniu:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{VS}{(\varrho_1 d_1 + \varrho_2 d_2)},$$

gdzie S jest powierzchnią okładek kondensatora.

Prawo Ohma w ujęciu molekularnym (patrz *Fizyka dla klasy II*, 1969, s. 150) przestawia związek pomiędzy natężeniem pola elektrycznego w danym punkcie E a gęstością prądu w tym punkcie (natężenie prądu przypadające na jednostkę powierzchn prostopadłej do kierunku prądu). Mianowicie:

$$E = \varrho \frac{I}{S}.$$

Stąd otrzymujemy związek dla natężenia pola elektrycznego w obu warstwach dielektryka:

$$E_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} E_2.$$

Widać, że natężenie pola jest różne w obu warstwach. Gęstości powierzchniowe ładunku na okładkach kondensatora będą różne i wyniosą odpowiednio:

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 \quad \text{i} \quad \sigma_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2$$

(ε_0 — przenikliwość elektryczna próżni). „Brakujący" ładunek zgromadzi się na powierzchni rozdzielającej obie warstwy dielektryka z gęstością powierzchniową σ:

$$\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_1 E_1 - \varepsilon_2 E_2) =$$

$$= \varepsilon_0(\varepsilon_1 \varrho_1 - \varepsilon_2 \varrho_2) \frac{E_1}{\varrho_1}.$$

Ponieważ

$$\frac{E_1}{\varrho_1} = \frac{I}{S} = \frac{V}{\varrho_1 d_1 + \varrho_2 d_2},$$

więc

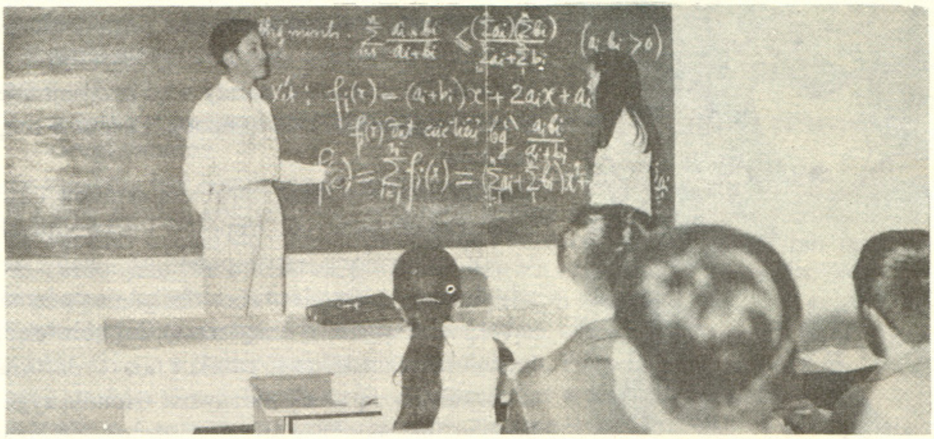
$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 V(\varepsilon_1 \varrho_1 - \varepsilon_2 \varrho_2)}{\varrho_1 d_1 + \varrho_2 d_2}.$$

Ładunek nie zgromadzi się na granicy dwu dielektryków tylko wówczas, gdy parametry ośrodków spełniają związek

$$\varepsilon_1 \varrho_1 = \varepsilon_2 \varrho_2.$$

Specjalna szkoła matematyczna przy uniwersytecie w Hanoi

Dr LE DINH THINH



Prosiliśmy dra Le Dinh Thinh z Uniwersytetu w Hanoi o wypowiedź na temat nauczania matematyki w Wietnamie. Otrzymany artykuł w języku wietnamskim przetłumaczył studiujący w Polsce fizyk Cao Long Van.

W celu zapewnienia odpowiednich warunków do nauki najbardziej uzdolnionym w kierunku matematycznym uczniom wietnamskim — otwarto w 1965 roku specjalną szkołę matematyczną przy uniwersytecie w Hanoi. Fakt ten wzbudził ogromne zainteresowanie wśród młodzieży wietnamskiej, a zwłaszcza wśród uczniów pasjonujących się matematyką. W tym czasie w całym kraju wybuchły zaciekłe walki przeciwko amerykańskim agresorom. Samoloty amerykańskie w dzień i w nocy bombardowały miasta i wsie północnego Wietnamu. Mimo bomb przeprowadzono we wszystkich województwach rzetelne egzaminy konkursowe do szkoły matematycznej. Wszyscy uczniowie, którzy zdobyli największą liczbę punktów, żegnając rodziny i znajomych pojechali do Hanoi, a później wraz ze swoją szkołą wyewakuowali się w bezpieczne miejsca (w górach albo na wsi), aby móc spokojniej się uczyć. Dom szkoły był otoczony grubymi ścianami, stoliki do pisania i krzesła znajdowały się nad schronami przeciwlotniczymi. Uczniowie i uczennice uczyli się pilnie nawet pod bombami. Nauczycielami są zdolni pracownicy naukowi uniwersytetu (większość ma tytuł doktora nauk fizyko-matematycznych), o wielkim doświadczeniu dydaktycznym i wychowawczym. W obowiązującym programie znajdują się wszystkie przedmioty, jak w normalnym liceum, ale matematyka jest wykładana według specjalnego kursu.

Głównym celem tej szkoły jest nauczenie samodzielności, metodyki studiowania matematyki, nauka podstawowych pojęć matematyki współczesnej — by później absolwenci tej szkoły mogli stać się wartościowymi pracownikami naukowymi. W programie nauczania matematyki wszystkie pojęcia matematyczne są wprowadzane w sposób bardziej precyzyjny niż w zwykłym liceum. Mówi się też o zagadnieniach wybiegających poza normalny program, jak np. teoria liczb, równania funkcyjne, rachunek wektorów, pojęcie funkcji odwrotnych (np. funkcji odwrotnych do trygonometrycznych), teoria mnogości, algebra Boole'a i logika matematyczna. Co tydzień odbywają się specjalne wykłady, dyskusje i seminaria. W ten sposób zdolności uczniów są rozwijane w stopniu maksymalnym.

Co roku, od listopada do stycznia, odbywają się specjalne eliminacje w celu wyłonienia najzdolniejszych do olimpiady matematycznej. Na olimpiadach wielu uczniów wykazuje wielkie zdolności i bardzo pomysłowo rozwiązuje zadania. Np. w latach 1971—1972 na drugim etapie olimpiady było takie zadanie: Znaleźć wszystkie funkcje $f(x)$ ciągłe na $(0, \infty)$, monotonicznie rosnące, znikające w $x = 1$ i spełniające warunek

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

Zadanie to nawiązuje do własności funkcji $\log_a x$, dla $a > 1$. Uczennica X klasy, Hong Ha, znalazła rozwiązanie: $f(x) = c\log_a x$, przy $a \neq 1$, $a > 0$, gdzie c jest odpowiednią stałą. Uczeń Chinh (z tej samej klasy) znalazł rodzinę funkcji, nieoczekiwaną dla Komisji:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i - \frac{1}{x^i}\right).$$

Nguyen Le Anh, uczeń IX klasy, udowodnił, że wszystkie funkcje ciągłe, monotonicznie rosnące w $(1, \alpha)$ i znikające w $x = 1$, mogą być przedłużone do funkcji, które spełniają warunki zadania. Wszystkie te ciekawe rozwiązania bardzo się podobały komisji egzaminacyjnej.

System kształcenia zdolnych uczniów jest wprowadzony nie tylko w szkole przy uniwersytecie w Hanoi, lecz także przy dwóch wyższych szkołach pedagogicznych w Hanoi i Vinh. Uczniowie tych szkół zdobyli wiele nagród na olimpiadach, a wielu z nich studiuje za granicą, zwłaszcza w ZSRR, Polsce i NRD. Uczniowie mają specjalne warunki do nauki: stypendia, książki itd. i podlegają bezpośrednio ministerstwu szkolnictwa wyższego, a nie ministerstwu oświaty.

Poza zajęciami szkolnymi uczniowie i uczennice pomagali miejscowej ludności w pracy i w walce przeciwko amerykańskim samolotom. W latach wojny niektórzy starsi uczniowie wstąpili do wojska i odznaczyli się wielką odwagą w walce przeciwko agresorom.
Po zakończeniu działań wojennych przeniesiono szkołę z powrotem do Hanoi, gdzie warunki do nauki są korzystniejsze. Liczni absolwenci tej szkoły skończyli studia wyższe i stali się pracownikami naukowymi w wielu instytutach i ośrodkach maszyn cyfrowych; niektórzy z nich zostali nowymi nauczycielami, by kształcić młodszych kolegów. Z roku na rok rośnie liczba absolwentów szkoły. Odgrywają oni coraz poważniejszą rolę w rozwoju zarówno matematyki, jak i innych dyscyplin nauki i techniki w naszym kraju.
Teraz zapraszamy Czytelników do rozwiązania z nami kilku zadań z eliminacji w naszej szkole:

I. Udowodnić, że wartość bezwzględna wielomianu $T(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ nie przekracza 1, gdy $|x| \leqslant 1$ (etap pierwszy, 1971—1972).

II. Dany jest czworościan $SABC$, który ma krawędzie $SA = x$, $BC = y$, pozostałe zaś równe 1.
1. Określić x i y, dla których czworościan $SABC$ ma największą objętość $V_{\max}$.
2. Obliczyć $V_{\max}$.
3. Obliczyć promień kuli wpisanej w ten czworościan, gdy ma on objętość największą.
4. Obliczyć promień kuli opisanej na czworościanie, gdy ma on objętość największą (etap trzeci, 1971—1972).

III. Niech dany będzie zbiór $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, którego elementy są parami różne. Budujemy tablicę

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}a_{12}\ldots a_{1m} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1}a_{k2}\ldots a_{km} \end{array}\right\} \quad \text{gdzie} \quad m \leqslant n, \quad k = \binom{n}{m}.$$

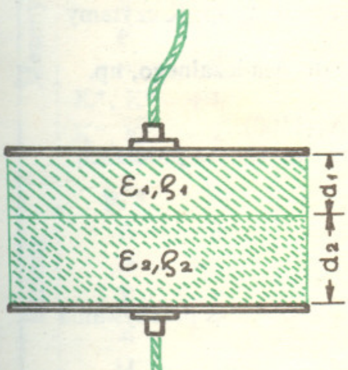
W każdym wierszu elementy są różne, dwa różne wiersze odpowiadają dwom różnym podzbiorom zbioru A. Udowodnić, że liczba różnych elementów w jednej dowolnej kolumnie nie będzie mniejsza niż $n - m + 1$ (etap drugi, 1973—1974).

Przy okazji za pośrednictwem czasopisma «Delta» pozdrawiamy wszystkich młodych kolegów i koleżanki w Polsce. Życzymy Wam wszystkiego najlepszego i wierzymy, że stosunki między nami, uczniami wietnamskimi i uczniami Polski, będą się rozwijać zarówno za pośrednictwem czasopisma jak i listów.

Zadania

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F12. Jeżeli wypełnimy kondensator niejednorodnym dielektrykiem o niewielkiej przewodności elektrycznej, ładunek w nim będzie gromadzić się nie tylko na okładkach kondensatora, lecz również w jego wnętrzu.
Rozwiążcie następujący problem:
Między okładkami kondensatora płaskiego znajdują się dwie równoległe warstwy dielektryka o stałej dielektrycznej ε_1 i ε_2 oraz oporze właściwym ϱ_1 i ϱ_2. Grubości warstw wynoszą odpowiednio d_1 i d_2. Kondensator został podłączony do źródła prądu, które utrzymuje stałą różnicę potencjałów między okładkami, równą V.
Wykażcie, że na powierzchni rozdzielającej obie warstwy dielektryka zgromadził się ładunek elektryczny, i znajdźcie jego gęstość powierzchniową.



Rozwiązanie na str. 3

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M34. Udowodnić, że jeśli w trójkącie równobocznym o boku długości 4 umieścimy 17 punktów, to odległość pewnych dwóch spośród nich nie przekracza 1.
Rozwiązanie na str. 14

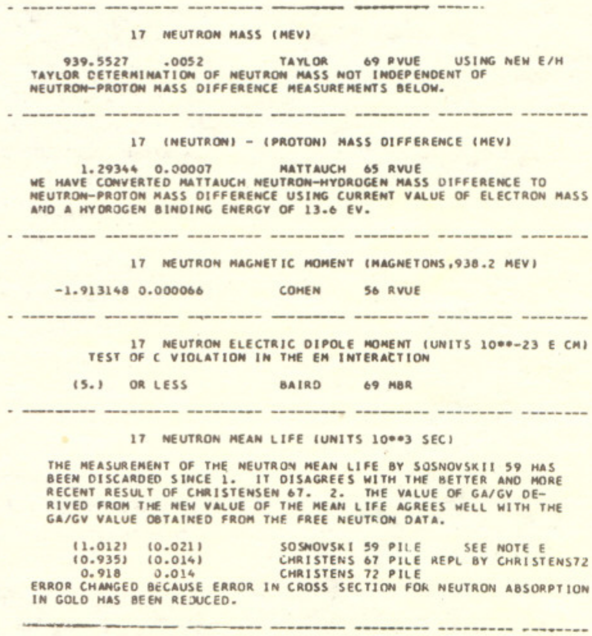
M35. Udowodnić, że pole czworokąta wypukłego nie przekracza $\frac{1}{4}$ sumy kwadratów długości przekątnych.
Rozwiązanie na str. 17

M36. Dana jest lista zawierająca 1975 ponumerowanych zdań. Zdanie o numerze n ($n = 1, 2, \ldots, 1975$) brzmi: Na niniejszej liście jest dokładnie n zdań fałszywych. Które z tych zdań są prawdziwe?
Rozwiązanie na str. 12

Tablice cząstek

Spełniając prośbę wielu Czytelników, wielokrotnie powtarzającą się w listach, publikujemy tablice znanych cząstek, według stanu wiedzy w dniu 1 lutego 1974 r. Radzimy zachować te tablice, będziemy się na nie powoływać w przyszłości w artykułach o cząstkach, jakie ukażą się. Dane zaczerpnięto z pracy publikowanej w „Physics Letters" t. 50 B N₀ 1, przygotowywanej corocznie przez „Grupę Danych o Cząstkach" w składzie:
A. Barbaro-Galtieri, D. M. Chew, R. L. Kelly, T. A. Lasinski, A. Rittenberg, A. H. Rosenfeld, T. G. Trippe, F. Uchiyama — Lawrenc Berkeley Laboratory, USA;
N. Barash-Schmidt — Brandeis University, USA;
P. Söding — DESY, RFN;
M. Roos — Uniwersytet Helsinki, Finlandia.

Wszystkie dane o cząstkach, napływające z laboratoriów na całym świecie, są kodowane na kartach perforowanych. Karty te są analizowane przez komputer zgodnie z zadanym programem. Zestawienie cząstek przygotowywane jest automatycznie. Zdjęcie obok przedstawia fragment wydruku z maszyny cyfrowej zestawienia danych dotyczących neutronu. W tablicach, które podajemy, zamieściliśmy tylko niektóre dane, zestawiliśmy natomiast wszystkie cząstki, nawet te, których istnienie jest niepewne lub których interpretacja jako rezonansu nasuwa trudności (np. A_1 (1100)) — lecz za to wyróżniliśmy je kolorem.
Błąd wyznaczenia podawanej wielkości podany jest pod nią. Na przykład: w kolumnie mas dla mezonu π^+ czytamy $M_{\pi^+} = (139{,}5688 \pm 0{,}0064)$ MeV.
Cząstki zestawione są w czterech tablicach odpowiadających czterem klasom. Foton γ jest jedynym członkiem pierwszej klasy, pozostałe to leptony, mezony i bariony. W tekście celowo używamy terminu „cząstki", pomijając przymiotnik „elementarne". Czytelników zainteresowanych pojęciem elementarności cząstek odsyłamy do artykułu G. Białkowskiego, «Delta», 1974, nr 1, s. 14.



```
        17  NEUTRON MASS (MEV)

   939.5527    .0052          TAYLOR    69 RVUE    USING NEW E/H
TAYLOR DETERMINATION OF NEUTRON MASS NOT INDEPENDENT OF
NEUTRON-PROTON MASS DIFFERENCE MEASUREMENTS BELOW.

        17  (NEUTRON) - (PROTON) MASS DIFFERENCE (MEV)

    1.29344  0.00007          MATTAUCH  65 RVUE
WE HAVE CONVERTED MATTAUCH NEUTRON-HYDROGEN MASS DIFFERENCE TO
NEUTRON-PROTON MASS DIFFERENCE USING CURRENT VALUE OF ELECTRON MASS
AND A HYDROGEN BINDING ENERGY OF 13.6 EV.

        17  NEUTRON MAGNETIC MOMENT (MAGNETONS,938.2 MEV)

  -1.913148 0.000066          COHEN     56 RVUE

        17  NEUTRON ELECTRIC DIPOLE MOMENT (UNITS 10**-23 E CM)
     TEST OF C VIOLATION IN THE EM INTERACTION

    (5.)   OR LESS            BAIRD     69 MBR

        17  NEUTRON MEAN LIFE (UNITS 10**3 SEC)

 THE MEASUREMENT OF THE NEUTRON MEAN LIFE BY SOSNOVSKII 59 HAS
 BEEN DISCARDED SINCE 1.  IT DISAGREES WITH THE BETTER AND MORE
 RECENT RESULT OF CHRISTENSEN 67.  2.  THE VALUE OF GA/GV DE-
 RIVED FROM THE NEW VALUE OF THE MEAN LIFE AGREES WELL WITH THE
 GA/GV VALUE OBTAINED FROM THE FREE NEUTRON DATA.

    (1.012)  (0.021)          SOSNOVSKI 59 PILE     SEE NOTE E
    (0.935)  (0.014)          CHRISTENS 67 PILE REPL BY CHRISTENS72
     0.918    0.014           CHRISTENS 72 PILE
ERROR CHANGED BECAUSE ERROR IN CROSS SECTION FOR NEUTRON ABSORPTION
IN GOLD HAS BEEN REDUCED.
```

UKŁAD TABLIC

W tablicy podano nazwę i symbol cząstki, spin izotopowy I, spin J, parzystość P, masę wyrażoną w MeV, średni czas życia τ w sekundach lub szerokość rozkładu masy Γ w MeV oraz najważniejsze sposoby rozpadu o częstości występowania powyżej 10%. Multiplet izotopowy jest zawsze traktowany jako jedna cząstka, z wyjątkiem przypadku, gdy składniki multipletu różnią się znacząco czasem życia lub masą. W tablicach nie podano odpowiadających antycząstek. W schematach rozpadu antycząstki oznaczono kreską nad symbolem, np. $\overline{K}$ czytamy „mezon anty-K". Cząstki wyróżnione kolorem należą do dwóch klas, które
a) obserwowane były w pojedynczych eksperymentach i brak jeszcze dla nich potwierdzenia doświadczalnego, np. M(940), M(953), N(1700), Δ(1960) itd.,
b) dobrze są znane, ale których nie można interpretować jako „normalne" rezonanse, np. A_1(1100).
Mezony i bariony wyróżnione tłustym drukiem należą do najważniejszych w obserwowanych dotychczas procesach.

1. Jednostki miar

1.1 Masa, energia

1 eV — jeden elektronowolt jest energią nabywaną lub traconą przez ładunek elementarny „e" podczas przebywania różnicy potencjałów 1 V;
1 keV — 1000 eV, 1 MeV = 10^6 eV, 1 GeV = 10^9 eV;
1 MeV — $1{,}6021892 \cdot 10^{-6}$ erg = $1{,}6021892 \cdot 10^{-13}$ J. Masa jest równoważna energii: $E = mc^2$, masę cząstek wyrażamy w MeV; jeden MeV odpowiada $1{,}782678 \cdot 10^{-30}$ kg.

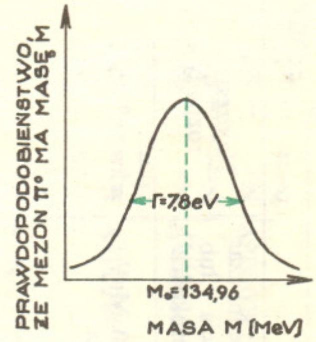
1.2 Średni czas życia

Jeżeli średni czas istnienia nietrwałych cząstek jest dłuższy niż $\sim 10^{-17}$ sekundy, wyrażamy go w sekundach, np. $\tau_{\pi^0} = (0{,}84 \pm 0{,}10) \cdot 10^{-16}$ s. Przy czasach krótszych podajemy szerokość rozkładu masy Γ (szerokość rezonansu). Cząstki są tworami, których zachowanie opisujemy w ramach mechaniki kwantowej; jednym z podstawowych jej twierdzeń jest zasada nieokreśloności (zasada nieoznaczoności). Jeżeli Γ jest całkowitym rozmyciem energii układu wyrażonym w MeV, a τ — czasem charakterystycznym układu, wyrażonym w s, to obu wielkości nie możemy równocześnie znać z dowolną dokładnością

$$\Gamma \cdot \tau \geqslant \hbar,$$

$\hbar = 6{,}582173 \cdot 10^{-22}$ MeV · s (stała Plancka).

Nie istnieje więc fizycznie dokładna masa π^0; mezon ten może przyjmować różne wartości masy wokół wartości $M_0 = 134{,}9645$ MeV. Rozkład prawdopodobieństwa spotkania π^0 o masie M ma kształt jak na rysunku. Szerokość rozkładu w połowie wysokości oznaczamy grecką literą Γ. Szerokość rozkładu związana jest z czasem życia zasadą nieokreśloności



$$\Gamma_{\pi 0} \approx \frac{\hbar}{\tau_{\pi 0}} = 7{,}8 \text{ eV}.$$

Dla cząstek o jeszcze krótszym czasie życia niż $\tau_{\pi 0}$ podajemy tylko szerokość Γ, którą wyznacza się doświadczalnie. Można stąd łatwo obliczyć średni czas życia. Na przykład mezon ϱ (750) ma szerokość $\Gamma = 146$ MeV. Czas życia wynosi

$$\tau = \frac{6{,}582183 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}}{146 \text{ MeV}} = 5{,}59 \cdot 10^{-24} \text{ s}.$$

2. Spin izotopowy I, spin J, parzystość P (w tablicach oznaczamy I(J^P))

2.1 Spin izotopowy I

Cząstki o tych samych właściwościach, a różniące się tylko ładunkiem elektrycznym, grupuje się w rodziny zwane multipletami (na przykład p, n albo π^+, π^0, π^-, albo K^+, K^0, albo Δ^{++}, Δ^+, Δ^0, Δ^-). Spin izotopowy I określa liczbę cząstek N w multiplecie. $N = 2 \cdot I + 1$. Wszystkie cząstki multipletu traktujemy jako jedną cząstkę w różnych stanach ładunkowych. Pojęcie spinu izotopowego stosujemy tylko do cząstek silnie oddziałujących.

2.2 Spin J

Własny moment pędu cząstek wyrażamy w jednostkach $\hbar$. Cząstki o spinie połówkowym nazywamy fermionami, o spinie całkowitym — bozonami.

2.3 Parzystość P

W mechanice kwantowej stan układu cząstki opisujemy funkcją zwaną funkcją falową. Jeżeli przy zmianie kierunku wszystkich osi współrzędnych funkcja nie zmienia znaku, parzystość $P = +1$. Jeżeli przy takiej operacji zmienia się znak funkcji falowej, $P = -1$.

3. Inne liczby kwantowe przypisywane mezonom i barionom

		Dziwność S	Hiperładunek Y
Mezony	π	0	0
	η	0	0
	ϱ	0	0
	ω	0	0
	K^+, K^0	+1	+1
	K^-, $\overline{K^0}$	−1	−1
Bariony	p, n	0	1
	Δ	0	1
	Λ	−1	0
	Σ	−1	0
	Ξ	−2	−1
	Ω^-	−3	−2

4. Rodzaje oddziaływań

Rodzaj	Stała charakteryzująca siłę oddziaływania	Przykład
Oddziaływanie grawitacyjne	10^{-39}	przyciąganie Ziemi i Słońca;
Oddziaływanie słabe	10^{-7}	rozpad neutronu;
Oddziaływanie elektromagnetyczne	1/137	przyciąganie, odpychanie elektrostatyczne;
Oddziaływanie silne	1	reakcje jądrowe

Mezony i bariony są to cząstki oddziałujące silnie.

OSTRZEŻENIE

Zestawienie wszystkich znanych cząstek jest dużą podnietą do szukania własnych systemów klasyfikacji. Tym, którzy chcą się tym zająć, radzimy usilnie poznać najpierw istniejące próby systematyzacji czytając np. podręcznik: G. Białkowski, R. Sosnowski, *Cząstki elementarne*, PWN, 1971.

Foton

Nazwa	Symbol	J	Masa spoczynkowa [MeV]	Średni czas życia τ lub szerokość Γ	Najczęstsze rozpady
Foton	γ	**1**	$<2 \cdot 10^{-21}$	**trwały**	

Leptony

Nazwa	Symbol	J	Masa [MeV]	Średni czas życia τ lub szerokość Γ	Najczęstsze rozpady
neutrino elektronowe	ν_e	$\frac{1}{2}$	**0**	**trwały**	
neutrino mionowe	ν_μ	$\frac{1}{2}$	**0**	**trwały**	
mion	μ	$\frac{1}{2}$	**105.6595** **3**	$2.199 \cdot 10^{-6}$ **s**	$e\nu\bar{\nu}$
elektron	e^-	$\frac{1}{2}$	**0.5110034** **14**	**trwały**	

Mezony

Nazwa	Symbol	I(J^P)	Masa [MeV]	Średni czas życia τ lub szerokość Γ	Najczęstsze rozpady
pion	$\pi^\pm$	1(0⁻)	**139.5688** **64**	$2.6030 \cdot 10^{-8}$**s** **23**	$\mu\nu_\mu$ ~ **100%**
	π^0		**134.9645** **74**	$0.84 \cdot 10^{-16}$ **s** **10**	π^0 $\gamma\gamma$ ~ **98%**
eton	η	0(0⁻)	**548.8** **6**	**2.63 KeV** **58**	$\gamma\gamma$ 38% $3\pi^0$ 30% $\pi^+\pi^-\pi^0$ 24%
	ε(600)				
ro	ρ	1(1⁻)	770 10	**150 MeV** **10**	$\pi\pi$ ~ **100%**






Mezony

Nazwa	Symbol	I(J^P)	Masa [MeV]	Średni czas życia τ lub szerokość Γ	Najczęstsze rozpady
omega	ω	0(1⁻)	**782.7** **6**	**10 MeV** **4**	$\pi^+\pi^-\pi^0$ **89.6%**
	M(940)				
	M(953)				
	X^0	0( )	**957.6** **3**	< **1 MeV**	$\eta\pi\pi$ **70.6%** $\rho^0\gamma$ **27.4%**
	δ(970)				
	H(990)				
	S*(993)				
fi	Φ	0( )	**1019.7** **3**	**4.2 MeV** **2**	K^+K^- **46.6%** $K^0_L K^0_S$ **34.6%** $\pi^+\pi^-\pi^0$ **15.8%**
	M(1033)				
	B_1(1040)				
	η_N(1080)				
	A_1(1100)				
	M(1150)				
	$A_{1.5}$(1170)				
	B	1(1⁺)	1237 10	120 MeV 20	$\omega\pi$
	f	0(2⁺)	1270 10	170 MeV 30	$\pi\pi$ ~ 83%
	D	0⁺( )	1286 10	30 MeV 20	$K\bar{K}\pi$? $\eta\pi\pi$?
	A_2	1(2⁺)	**1310** **10**	**100 MeV** **10**	$\rho\pi$ **71.5%** $\eta\pi$ **15.2%**
	E	0( )	1416 10	60 MeV 20	$K\bar{K}\pi$ 40% $\left.\begin{matrix}K^*\bar{K}\\ \bar{K}^*K\end{matrix}\right\}$ 20% $\eta\pi\pi$ 60%
	X(1430)				
	X(1440)				
	f	0(2⁺)	1516 3	40 MeV 10	$K\bar{K}$?

Mezony

Nazwa	Symbol	$I(J^P)$	Masa [MeV]	Średni czas życia τ lub szerokość Γ	Najczęstsze rozpady
	F_1	1( )	1540 5	40 MeV 15	$K^*\overline{K}$? $\overline{K}^*K$
	$\rho(1600)$ $A_3(1640)$				
	$\omega(1675)$	0( )	1666 10	142 MeV 20	$\rho\,\pi$ dominuje
	g	$1(3^-)$	1686 20	180 MeV 30	2π 26% 4π 70%
	X(1690) X(1795) S(1930) $A_4$1960 $\rho(2100)$ T(2200) $\rho(2275)$ U(2360) $N\overline{N}(2375)$ X(2500— —3600)				
	$K^\pm$	$\frac{1}{2}(0^-)$	**493.707** **37**	$1.2371 \cdot 10^{-8}$ s 26	$\mu\,\nu$ 63% $\pi\,\pi^0$ 21%
	K^0	$\frac{1}{2}(0^-)$	**497.70** **13**	*	
	K^0_S	$\frac{1}{2}(0^-)$		$0.886 \cdot 10^{-10}$ s 7	$\pi^+\pi^-$ 68% $\pi^0\pi^0$ 31%
	K^0_L	$\frac{1}{2}(0^-)$		$5.179 \cdot 10^{-8}$ s 40	$\pi^0\pi^0\pi^0$ 21.3% $\pi^+\pi^-\pi^0$ 11.9% $\pi\,\mu\,\nu$ 27.5% $\pi\,e\,\nu$ 39.0%
	$K^*(892)$	$\frac{1}{2}(1^-)$	**892.2** **5**		$K\,\pi$ ~ 100%
kappa	$\varkappa$				

* Mezon K° jest superpozycją mezonu krótkożyciowego K^0_s i długożyciowego K^0_L

Mezony

Nazwa	Symbol	$I(J^P)$	Masa [MeV]	Średni czas życia τ lub szerokość Γ	Najczęstsze rozpady
	Q				
	$K^*(1420)$	$\frac{1}{2}(2^+)$	1421 5	100 MeV 10	$K\,\pi$ 55% $K^*\pi$ 29%
	$K_N(1660)$ $K_N(1760)$				
	L(1770)	$\frac{1}{2}$( )	1765 10	140 MeV 50	$K\,\pi\,\pi$
	$K_N(1850)$ $K^*(2200)$ $K^*(2800)$				

Bariony

Nazwa	Symbol	$I(J^P)$	Masa [MeV]	Średni czas życia τ lub szerokość Γ	Najczęstsze rozpady
Nukleon	**p(proton)**	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	**938.2796** **27**	$> 2 \times 10^{28}$ **lat**	
	n(neutron)	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	**939.5737** **27**	$0.918 \cdot 10^3$ **s**	$pe^-\nu$ 100%
	N(1470)	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	~ 1470	165—300 MeV	$N\pi$ 60% $N\pi\pi$ 35%
	N(1520)	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}^-)$	1510—1540	105—150 MeV	$N\pi$ ~ 55% $N\pi\pi$ 45%
	N(1535)	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^-)$	1500—1600	50—160 MeV	$N\pi$ 35% $N\eta$ 55% $N\pi\pi$ ~ 10%
	N(1670)	$\frac{1}{2}(\frac{5}{2}^-)$	1670—1685	115—175 MeV	$N\pi$ 40% $N\pi\pi$ 60%
	N(1688)	$\frac{1}{2}(\frac{5}{2}^+)$	1680—1690	105—180 MeV	$N\pi$ 60% $N\pi\pi$ ~ 40%
	N(1700)	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^-)$	1665—1765	100—300 MeV	$N\pi$ ~ 55% $N\pi\pi$ 25%

Nazwa	Symbol	$I(J^P)$	Masa [MeV]	Średni czas życia τ lub szerokość Γ	Najczęstsze rozpady
	N(1700)				
	N(1780)	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	1650—1860	50—350 MeV	$N\pi\pi$ ~ 40%
	N(1810)	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}^+)$	1770—1860	180—330 MeV	$N\pi$ ~ 25% $N\pi\pi$ > 50%
	N(1990)				
	N(2000)				
	N(2040)				
	N(2100)				
	N(2100)				
	N(2190)	$\frac{1}{2}(\frac{7}{2}^-)$	2000—2260	150—325 MeV	$N\pi$ 25%
	N(2220)	$\frac{1}{2}(\frac{9}{2}^+)$	2200—2245	260—330 MeV	$N\pi$ 15%
	N(2650)	$\frac{1}{2}(?^-)$	~ 2650	~ 360 MeV	$N\pi$?
	N(3030)	$\frac{1}{2}(?)$	~ 3030	~ 400 MeV	$N\pi$?
	N(3245)				
	N(3690)				
	N(3755)				
Delta	**Δ(1232)**	$\frac{3}{2}(\frac{3}{2}^+)$	**1230—1236**	**110—122 MeV**	**$N\pi$ 99.4%**
	Δ(1650)	$\frac{3}{2}(\frac{1}{2}^-)$	1615—1695	140—200 MeV	$N\pi$ 30% $N\pi\pi$ 70%
	Δ(1670)	$\frac{3}{2}(\frac{3}{2}^-)$	1650—1720	190—270 MeV	$N\pi$ 15% $N\pi\pi$ > 60%
	Δ(1690)				
	Δ(1890)	$\frac{3}{2}(\frac{5}{2}^+)$	1840—1920	140—350 MeV	$N\pi\pi$ > 50%
	Δ(1900)				
	Δ(1910)	$\frac{3}{2}(\frac{1}{2}^+)$	1780—1935	200—340 MeV	$N\pi$ 25%
	Δ(1950)	$\frac{3}{2}(\frac{7}{2}^+)$	1930—1980	170—270 MeV	$N\pi$ 40% $N\pi\pi$ > 25% $\Delta\pi$ 16—26%
	Δ(1960)				
	Δ(2160)				
	Δ(2420)	$\frac{3}{2}(\frac{11}{2}^+)$	2320—2450	250—350 MeV	$N\pi$ 11% $N\pi\pi$ > 20%
	Δ(2850)	$\frac{3}{2}(?^+)$	~ 2850	~ 400 MeV	$N\pi$?

Bariony

Nazwa	Symbol	$I(J^P)$	Masa [MeV]	Średni czas życia τ lub szerokość Γ	Najczęstsze rozpady
	Δ(3230)	$\frac{3}{2}(?)$	~ 3230	~ 440 MeV	$N\pi$?
	ZO(1780)				
	ZO(1865)				
	Z1(1900)				
	Z1(2150)				
	Z1(2500)				
Lambda	**Λ**	$0(\frac{1}{2}^+)$	**1115.60 5**	**$2.578 \cdot 10^{-10}$ s 21**	**$p\pi^-$ 64.2% $n\pi^0$ 35.8%**
	Λ(1405)	$0(\frac{1}{2}^-)$	1405 5	40 MeV 10	$\Sigma\pi$ 100%
	Λ(1520)	$0(\frac{3}{2}^-)$	1518 2	16 MeV 2	$N\bar{K}$ 45% $\Sigma\pi$ 41% $\Lambda\pi\pi$ 10%
	Λ(1670)	$0(\frac{1}{2}^-)$	~ 1670	23—40 MeV	$N\bar{K}$ 15—35% $\Lambda\eta$ 15—25% $\Sigma\pi$ 30—50%
	Λ(1690)	$0(\frac{3}{2}^-)$	~ 1690	30—70 MeV	$N\bar{K}$ 20—30% $\Sigma\pi$ 30—50% $\Lambda\pi\pi$ < 25% $\Sigma\pi\pi$ < 25%
	Λ(1750)				
	Λ(1815)	$0(\frac{5}{2}^+)$	1820 5	70—100 MeV	$N\bar{K}$ 61% $\Sigma\pi$ 11% $\Sigma(1385)\pi$ 15—20%
	Λ(1830)	$0(\frac{5}{2}^-)$	1810—1840	70—120 MeV	$N\bar{K}$ ~ 10% $\Sigma\pi$ 20—60%
	Λ(1860)				
	Λ(1870)				
	Λ(2010)				
	Λ(2020)				
	Λ(2100)	$0(\frac{7}{2}^-)$	2090—2120	80—140 MeV	$N\bar{K}$ 30%
	Λ(2110)				
	Λ(2350)	$0(?)$	~ 2350	140—320 MeV	$N\bar{K}$?
	Λ(2585)	$0(?)$	~ 2585	~ 300 MeV	$N\bar{K}$?

Nazwa	Symbol	I(J^P)	Masa [MeV]	Średni czas życia τ lub szerokość Γ	Najczęstsze rozpady
Sigma	Σ^+		1189.37 6	$0.800 \cdot 10^{-10}$ s	$p\pi^0$ 51.6% $n\pi^+$ 48.4%
	Σ^0	$1(\frac{1}{2}^+)$	1192.48 8	$< 1 \cdot 10^{-14}$ s	$\Lambda\gamma$ 100%
	Σ^-		1197.35 6	$1.482 \cdot 10^{-10}$ s	$n\pi^-$ 100%
	$\Sigma^+(1385)$	$1(\frac{3}{2}^+)$	1383 1	35 MeV 2	$\Lambda\pi$ 88% $\Sigma\pi$ 12%
	$\Sigma^-(1385)$		1387 1	42 MeV 5	
	$\Sigma(1480)$				
	$\Sigma(1620)$	**			
	$\Sigma(1620)$				
	$\Sigma(1620)$				
	$\Sigma(1670)$	$1(\frac{3}{2}^-)$	~ 1670	35—60 MeV	$\Sigma\pi$ 30—60% $\Lambda\pi$ ~ 12%
	$\Sigma(1670)$				
	$\Sigma(1690)$				
	$\Sigma(1750)$	$1(\frac{1}{2}^-)$	1700—1790	50—100 MeV	$N\bar{K}$ 12—45% $\Lambda\pi$ 5—18% $\Sigma\pi$ 6—19%
	$\Sigma(1765)$	$1(\frac{5}{2}^-)$	1765 5	~ 120 MeV	$N\bar{K}$ 41% $\Lambda\pi$ 13% $\Lambda(1520)\pi$ 15% $\Sigma(1385)\pi$ 10%
	$\Sigma(1840)$				
	$\Sigma(1880)$				
	$\Sigma(1915)$	$1(\frac{5}{2}^+)$	1900—1930	50—120 MeV	$N\bar{K}$ ~ 14%
	$\Sigma(1940)$	$1(\frac{3}{2}^-)$	1865—1950	~ 220 MeV	$N\bar{K}$ ~ 21%
	$\Sigma(2030)$	$1(\frac{7}{2}^+)$	2020—2040	120—170 MeV	$N\bar{K}$ 20% $\Lambda\pi$ 20%

** Grupa cząstek o tej samej masie różniąca się spinem

Nazwa	Symbol	I(J^P)	Masa [MeV]	Średni czas życia τ lub szerokość Γ	Najczęstsze rozpady
	$\Sigma(2070)$				
	$\Sigma(2080)$				
	$\Sigma(2100)$				
	$\Sigma(2250)$	1(?)	2245—2280	100—230 MeV	$N\bar{K}$?
	$\Sigma(2455)$	1(?)	~ 2455	~ 120 MeV	$N\bar{K}$?
	$\Sigma(2620)$	1(?)	~2620	~ 175 MeV	$N\bar{K}$?
	$\Sigma(3000)$				
Ksi	Ξ^0	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	1314.9 6	$2.96 \cdot 10^{-10}$ s 12	$\Lambda\pi^0$ 100%
	Ξ^-		1321.29 14	$1.652 \cdot 10^{-10}$ s 23	$\Lambda\pi^-$ 100%
	$\Xi^0(1530)$	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}^+)$	1531.8 3	9.1 MeV 5	$\Xi\pi$ 100%
	$\Xi^-(1530)$	$\frac{1}{2}(?)$	1535.1 7	10.6 MeV 2.6	
	$\Xi(1630)$				
	$\Xi(1820)$	$\frac{1}{2}(?)$	1795—1870	12—100 MeV	$\Lambda\bar{K}$ $\Xi\pi$ $\Xi(1530)\pi$ $\Sigma\bar{K}$
	$\Xi(1940)$	$\frac{1}{2}(?)$	1920—1960	40—140 MeV	$\Xi\pi$ $\Xi(1530)\pi$
	$\Xi(2030)$				
	$\Xi(2250)$				
	$\Xi(2500)$				
Omega	Ω^-	$0(\frac{3}{2}^+)$	1672.2 4	$1.3 \cdot 10^{-10}$ s	$\Xi^0\pi^-$ widziano $\Xi\pi^0$ 41 przypadków $\Lambda\bar{K}$

Równania czy nie równania?

Piotr WOJCIECHOWSKI

Autor w momencie złożenia artykułu w Redakcji był uczniem Szkoły Podstawowej nr 65 w Warszawie. Obecnie uczęszcza do Liceum im. Gottwalda.

Wszystkie zapisane tu liczby niech będą całkowite. Jeżeli mamy trzy liczby: a, b, m, spełniające warunek: $a-b$ jest podzielne przez m, to piszemy wówczas $a \equiv b \pmod{m}$. Ten ostatni zapis czytamy: a przystaje do b według modułu m. W ten sposób określona relacja nosi nazwę relacji *kongruencji*. Przykłady: $5 \equiv 1 \pmod 4$, bo $5-1 = 4$ jest podzielne przez 4; $-1 \equiv 5 \pmod 3$, bo $-1-5 = -6$ jest podzielne przez 3. Oczywistą jest rzeczą, że m nie może być 0. Zapis kongruencji nie został wybrany przypadkowo (mam tu na myśli podobieństwo do zapisu równości liczb). Okazało się, że kongruencje mają wiele cech wspólnych z równościami. Np. każda liczba przystaje do siebie według dowolnego modułu; jeżeli jedna liczba przystaje do drugiej według jakiegoś modułu, to ta druga przystaje do pierwszej według tegoż modułu; i trzecia własność — przechodniości: jeżeli jedna liczba przystaje do drugiej według danego modułu, a druga do trzeciej według tegoż modułu, to i pierwsza przystaje do trzeciej według tegoż modułu. Ponadto kongruencje o tym samym module można mnożyć i dodawać stronami, np. z kongruencji $5 \equiv 1 \pmod 4$ i $6 \equiv 2 \pmod 4$ tworzymy prawdziwe kongruencje $30 \equiv 2 \pmod 4$ i $11 \equiv 3 \pmod 4$. Kongruencję $a \equiv b \pmod m$ można stronami dzielić przez liczbę $p \neq 0$ pod warunkiem, że a i b są podzielne przez p oraz że m i p są względnie pierwsze; np. z $20 \equiv 2 \pmod 9$ wynika $10 \equiv 1 \pmod 9$, bo dzieliliśmy tu przez 2, a 2 jest pierwsze względem 9. Daną kongruencję możemy także pomnożyć przez każdą, różną od 0 liczbę, mnożąc i liczby przystające, i moduł; np. $5 \equiv 1 \pmod 4$ jest równoważne $35 \equiv 7 \pmod{28}$. Widzimy, że kongruencje zbliżone są pod względem własności do równości.

W teorii liczb znane jest określenie „rozwiązywanie kongruencji". Tutaj pod terminem „kongruencja" rozumiane jest wyrażenie $F(x) \equiv 0 \pmod m$, gdzie $F(x)$ jest funkcją zmiennej x. „Rozwiązać" znaczy podać zbiór liczb, które podstawione pod x uczynią powyższy zapis zdaniem prawdziwym. My przez „kongruencję" rozumiemy relację — odpowiednik równości, a tu mamy do czynienia z odpowiednikiem równania. Uniknijmy przeto powstałej dwuznaczności wprowadzając pojęcie „kongruencjonału", które zastąpi „kongruencję" w tym drugim znaczeniu. Kongruencjonałem nazywamy kongruencję, w której występują wyrażenia niewiadome. Czytelnik zwróci uwagę na analogię z definicją równania. Oto przykłady kongruencjonałów z jedną niewiadomą: $2x+3 \equiv 0 \pmod 7$, $x^2+x-2 \equiv 0 \pmod 3$. Umówmy się, że funkcja $F(x)$ jest wielomianem. Jeżeli w kongruencjonale podstawimy jakąś liczbę x_0 i w ten sposób powstanie kongruencja prawdziwa, to mówimy, że liczba x_0 spełnia dany kongruencjonał. Np. wspomniany kongruencjonał $2x+3 \equiv 0 \pmod 7$ spełniają liczby $\dots, -7, 2, 13, \dots$. Nietrudno zorientować się, że liczby spełniające ten kongruencjonał przystają do 2 według modułu 7. Mówimy tu, że kongruencja $x_1 \equiv 2 \pmod 7$ jest pierwiastkiem naszego kongruencjonału. Kongruencjonał $x^2+x-2 \equiv 0 \pmod 3$ spełniają liczby $\dots, -1, 1, 2, 4, 5, 7, \dots$. Zbiór ten, jak łatwo sprawdzić, da się podzielić na takie dwie części, mianowicie na zbiory $\{\dots, -1, 2, 5, \dots\}$ oraz $\{\dots, 1, 4, 7, \dots\}$, że każda liczba z pierwszego zbioru przystaje do -1 według modułu 3 i każda liczba z drugiego zbioru przystaje do 1 według modułu 3. Mówimy tu, że dany kongruencjonał posiada dwa pierwiastki $x_1 \equiv -1 \pmod 3$ i $x_2 \equiv 1 \pmod 3$. Należy podkreślić, że liczba spełniająca kongruencjonał, a jego pierwiastek — to dwa różne pojęcia. Rozwiązać kongruencjonał znaczy podać wszystkie jego pierwiastki.

Nazwa „kongruencjonał" jest pomysłem autora. Nie jest rzeczą oczywistą, że to pojęcie w ogóle zasłużyło sobie na oddzielną nazwę. W artykule jest to jednak wygodny skrót zwrotu definiującego.

Poznane na początku twierdzenia, dotyczące kongruencji, wykorzystałem do udowodnienia bardzo ważnych twierdzeń, które pozwolą rozwiązywać kongruencjonały. Twierdzenia te orzekają, że: 1°, jeżeli do kongruencjonału dodamy stronami tożsamość (tożsamością nazywamy kongruencję prawdziwą dla każdej liczby podstawionej w miejsce występującej tam niewiadomej, np. $2xm \equiv 0 \pmod m$), to otrzymamy kongruencjonał równoważny danemu (tzn. będzie posiadał to samo rozwiązanie); 2°, jeżeli kongruencjonał dany pomnożymy stronami przez stałą pierwszą względem modułu, to otrzymany kongruencjonał pozostanie równoważny danemu; 3°, jeżeli kongruencjonał dany pomnożymy przez dowolną różną od 0 stałą, mnożąc i liczby przystające, i moduł, to otrzymany kongruencjonał pozostanie równoważny danemu.

Podamy po jednym przykładzie na każde twierdzenie. 1°. Kongruencjonał $5x+1 \equiv 0 \pmod 3$ jest równoważny kongruencjałowi $2x+1 \equiv 0 \pmod 3$. Dodaliśmy tu stronami kongruencjonał dany do tożsamości $-3x \equiv 0 \pmod 3$. 2°. Dany wyżej kongruencjonał równoważny jest następującemu: $10x+2 \equiv 0 \pmod 3$, bowiem stronami pomnożyliśmy go przez 2, a 2 jest pierwsze względem 3. 3°. Dany kongruencjonał jest równoważny $15x+3 \equiv 0 \pmod 9$. Można powiedzieć, że twierdzenia 1°—3° ustalają przekształcenia równoważne, jakie wolno stosować do kongruencjonałów. Opierając się na tych twierdzeniach chciałbym zaproponować sposób rozwiązywania kongruencjonałów. Zacznijmy od kongruencjonałów najprostszych, tj. liniowych ($ax+b \equiv 0 \pmod m$, gdzie $a \neq 0$). Postarajmy się rozwiązać kongruencjonał $4x+1 \equiv 0 \pmod 3$. Nasze postępowanie kierujemy w stronę jak najprostszego zapisania owego kongruencjonału. W tym celu zauważmy, że tożsamością jest $-3x \equiv 0 \pmod 3$. Wolno nam na podstawie twierdzenia 1° dodać do danego kongruencjonału tożsamość. A więc dodajmy. Otrzymamy $x+1 \equiv 0 \pmod 3$, a więc $x \equiv -1 \pmod 3$. Zatem pierwiastkiem (i rozwiązaniem) naszego

Rozwiązanie zadania M36:
Zauważmy najpierw, że na liście jest najwyżej jedno zdanie prawdziwe, gdyż koniunkcja dwóch różnych zdań jest fałszywa. Gdyby wszystkie zdania były fałszywe, to zdanie o numerze 1975 byłoby prawdziwe wbrew przypuszczeniu.
Na liście musi więc być co najmniej jedno zdanie prawdziwe, a ponieważ nie może być ich więcej niż jedno, więc dokładnie jedno zdanie jest prawdziwe, pozostałe 1974 są fałszywe. Prawdziwe jest więc tylko zdanie o numerze 1974.

kongruencjonału jest $x_1 \equiv -1 \pmod 3$. Czytelnik łatwo to sprawdzi podstawiając pod x_1 odpowiednie liczby i stwierdzając, że żadna inna liczba nie spełnia naszego kongruencjonału. Inny przykład niech stanowi wspomniany wcześniej kongruencjonał $2x+3 \equiv 0 \pmod 7$. Postępujemy w sposób następujący: mnożymy nasz kongruencjonał stronami przez -3. Dostajemy $-6x-9 \equiv 0 \pmod 7$. Korzystając z tego, że $7x \equiv 0 \pmod 7$ jest tożsamością, dodajemy ją stronami do ostatniego kongruencjonału i w ten sposób mamy $x-9 \equiv 0 \pmod 7$, czyli $x \equiv 9 \pmod 7$. Ponieważ $9 \equiv 2 \pmod 7$, a relacja kongruencji jest przechodnia, więc ostatecznym („najprostszym") zapisem pierwiastka jest $x_1 \equiv 2 \pmod 7$. Pokażę jeszcze, kiedy należy stosować twierdzenie 3°. Weźmy np. kongruencjonał $10x+2 \equiv 0 \pmod 4$. Dzielimy liczby przystające i moduł przez 2. Otrzymujemy $5x+1 \equiv 0 \pmod 2$. Czytelnik łatwo, w sposób analogiczny do poprzednich przykładów, dojdzie do rozwiązania $x_1 \equiv 1 \pmod 2$, a więc do faktu, że każda liczba nieparzysta spełnia ów kongruencjonał. Jak widać, kongruencjonały liniowe, posiadające rozwiązanie, mają dokładnie jeden pierwiastek. Widoczna jest tu analogia do równań. Są też różnice: nie wszystkie kongruencjonały liniowe posiadają rozwiązania, np. kongruencjonał $2x+1 \equiv 0 \pmod 4$ rozwiązania nie posiada; tak samo $12x+5 \equiv 0 \pmod 6$. Ogólnie, kongruencjonały liniowe nie posiadają rozwiązania, gdy współczynnik przy niewiadomej i moduł mają wspólny podzielnik większy od 1, natomiast wyraz wolny już nie dzieli się przez ową liczbę.

Przejdziemy teraz do omawiania niektórych kongruencjonałów stopnia wyższego niż 1. Można dowieść, że gdy moduł jest liczbą pierwszą, to aby rozwiązać taki kongruencjonał, potrzeba i wystarcza rozłożyć występujący wielomian $F(x)$ na czynniki i rozwiązać kongruencjonały, których lewymi stronami są kolejne czynniki, prawą 0, a modułem — moduł wyjściowego kongruencjonału. Otrzymane pierwiastki są pierwiastkami danego kongruencjonału. Podamy przykłady.

Kongruencjonał kwadratowy $x^2+x-2 \equiv 0 \pmod 5$ ma pierwiastki $x_1 \equiv 1 \pmod 5$ i $x_2 \equiv -2 \pmod 5$, bowiem $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$, a kongruencjonały $x-1 \equiv 0 \pmod 5$ i $x+2 \equiv 0 \pmod 5$ dają wymienione pierwiastki. Weźmy teraz kongruencjonał $6x^2+5x+1 \equiv 0 \pmod{11}$. Rozkładamy trójmian na czynniki i otrzymujemy

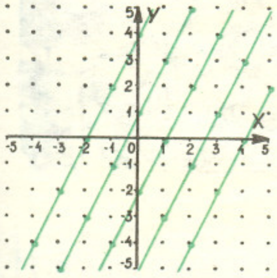
$$6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Pozbywamy się ułamków w czynnikach przedstawiając 6 w postaci iloczynu $2\cdot 3$, a więc $(2x+1)(3x+1) \equiv 0 \pmod{11}$. Pozostały teraz do rozwiązania kongruencjonały liniowe $2x+1 \equiv 0 \pmod{11}$ i $3x+1 \equiv 0 \pmod{11}$. Czytelnik sprawdzi, że ich pierwiastkami są odpowiednio $x_1 \equiv 6 \pmod{11}$ i $x_2 \equiv -4 \pmod{11}$. Kongruencje te stanowią rozwiązanie kongruencjonału wyjściowego.

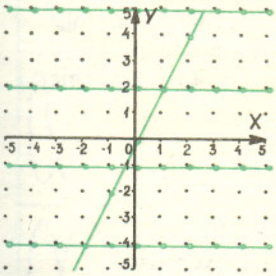
Rozwiążmy jeszcze kongruencjonał trzeciego stopnia $x^3-1 \equiv 0 \pmod 3$. Rozkładamy wyrażenie stojące po lewej stronie znaku przystawania na następujące czynniki: $(x-1)(x^2+x+1)$. Rozwiązujemy kongruencjonał liniowy $x-1 \equiv 0 \pmod 3$ i otrzymujemy $x_1 \equiv 1 \pmod 3$. Rozwiążmy jeszcze kongruencjonał kwadratowy $x^2+x+1 \equiv 0 \pmod 3$. Występujący tu wielomian sam nie rozłoży się na czynniki, ale kongruencjonał jest równoważny $x^2+x-2 \equiv 0 \pmod 3$, bo $2 \equiv -1 \pmod 3$. Kongruencjonał ten ma pierwiastki $x_2 \equiv 1 \pmod 3$ i $x_3 \equiv -2 \pmod 3$. Ale $x_2 \equiv x_3 \equiv 1 \pmod 3$, również $x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv 1 \pmod 3$. Otrzymaliśmy zatem potrójny pierwiastek kongruencjonału. Płynie stąd prawdziwy dla wszystkich dających się rozwiązać kongruencjonałów o module pierwszym wniosek: liczba pierwiastków jest taka, jaki jest stopień tego kongruencjonału.

Wiadomo, że równania można zilustrować graficznie w układzie współrzędnych. Nasunęło mi to pomysł zilustrowania w sposób analogiczny kongruencjonałów. W tym celu obieramy układ współrzędnych na płaszczyźnie kratowej, tzn. zbudowanej z punktów o współrzędnych całkowitych. Nietrudno pokazać, że wykresem wyrażenia $y \equiv F(x) \pmod m$ jest rodzina „linii" równoległych do „linii" $y = F(x)$ i przecinających oś rzędnych w punktach odległych kolejno o m. Np. wykresem wyrażenia liniowego $y \equiv 2x+1 \pmod 3$ jest rodzina „prostych" (rys. 1). Za pomocą ilustracji graficznej kongruencjonały można rozwiązywać podobnie jak równania. W tym celu wykonujemy wykres wyrażenia $y = F(x) \pmod m$, a następnie kładziemy $y = 0$, tj. rozpatrujemy punkty osi odciętych. Jeśli „linie" $y \equiv F(x) \pmod m$ przecinają w punktach kraty $x_1, x_2, x_3, \ldots$ oś odciętych, to odcięte tych punktów spełniają kongruencjonał $F(x) \equiv 0 \pmod m$. Jest to pierwsza metoda, którą zilustrujemy na przykładach. Weźmy cytowany wcześniej kongruencjonał $2x+1 \equiv 0 \pmod 3$. Wykonujemy wykres wyrażenia $y \equiv 2x+1 \pmod 3$, a następnie zaznaczamy punkty przecięcia z osią odciętych „prostych" wykresu. Jak widać na rys. 1, nasz kongruencjonał spełniają liczby: $\ldots, -2, 1, 4, \ldots$, a więc pierwiastek ma postać $x_1 \equiv 1 \pmod 3$. Kongruencjonał kwadratowy $x^2-1 \equiv 0 \pmod 2$ rozwiążemy graficznie na rys. 2. Widać stąd, że kongruencjonał ten spełniają liczby $\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots$, a więc pierwiastki stanowią kongruencje: $x_1 \equiv 1 \pmod 2$ i $x_2 \equiv -1 \pmod 2$. Zauważmy, że $-1 \equiv 1 \pmod 2$, a więc $x_1 \equiv x_2 \equiv 1 \pmod 2$. Metoda druga — przypominająca rozwiązywanie układów równań — polega na tym, że wielomian w kongruencjonale danym rozkładamy na sumę dwóch wielomianów $A(x)$ i $B(x)$ i kładziemy y zamiast jednego z wielomianów sumy (np. $A(x)$). Wykonujemy następnie wykres wyrażenia $y \equiv -B(x) \pmod m$ i wykres funkcji $y \equiv A(x) \pmod m$. Jeżeli punktami przecięcia otrzymanych „linii" są punkty kraty, to ich odcięte spełniają dany kongruencjonał. Rozwiążemy tą metodą wcześniej cytowane kongruencjonały. Mamy $2x+1 \equiv 0 \pmod 3$. Kładziemy $y = 2x$, stąd $y \equiv -1 \pmod 3$. Wykonujemy wykresy (rys. 3) i dochodzimy do tego samego wniosku, co metodą pierwszą graficzną, jak i algebraiczną. Metoda druga znajduje zastosowanie głównie przy rozwiązywaniu kongruencjonałów nieliniowych o module pierwszym. Weźmy $x^2-1 \equiv 0 \pmod 2$. Kładziemy $y = x^2$, a więc $y \equiv 1 \pmod 2$ (rys. 4). Mamy stąd identyczny wynik jak w pierwszej metodzie.

Celem rozważań powyższych było wskazanie analogii i różnic pomiędzy kongruencjonałami a równaniami o współczynnikach całkowitych. Można się było zorientować, że zapisy $F(x) = 0$ i $F(x) \equiv 0 \pmod m$ mają wiele cech wspólnych. Aż dziw, że tak na pozór różne relacje, jak relacja równości i kongruencji, a co za tym idzie, i podzielności, okazały się tak podobne. Rozszerzając to stwierdzenie należy zauważyć, że można relację kongruencji traktować jako uogólnienie relacji równości określonej w zbiorze liczb całkowitych.

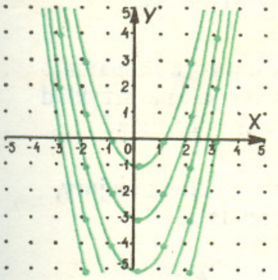


Rys. 1

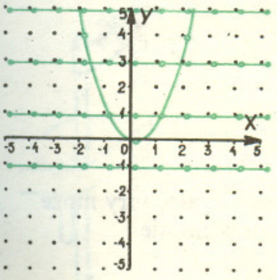


Rys. 2

Gdy moduł jest liczbą złożoną, to prócz „normalnych" pierwiastków pojawiają się jeszcze dodatkowe liczby spełniające ów kongruencjonał.



Rys. 3



Rys. 4

Dr Jan A. GAJ

Upływa już rok naszych wspólnych eksperymentów. A więc... mini-jubileusz. Z tej okazji organizujemy konkurs, którego tematem są szeroko pojęte drgania. Mogą to być drgania mechaniczne, szybkie zmiany natężenia światła czy jakiekolwiek inne okresowe zjawisko. Zadaniem uczestników konkursu jest fotograficzne zarejestrowanie drgań. Każdy uczestnik może nadesłać jedno lub więcej zdjęć czarno-białych wraz ze zwięzłym opisem, jakie drgania te zdjęcia przedstawiają, jak zdjęcia zostały wykonane i jakich informacji dostarczają (nie więcej niż 100 słów o każdym zdjęciu).

KTO I JAK BĘDZIE OCENIAŁ PRACE KONKURSOWE?

Oczywiście jury, jak w każdym przyzwoitym konkursie, a mianowicie:

1) przedstawiciel Zarządu Głównego Polskiego Towarzystwa Fizycznego,

2) przedstawiciel Redakcji,

3) dr Jan Gaj z Instytutu Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Warszawskiego.

Przy ocenie prac będą brane pod uwagę następujące ich cechy:

1) Wartość dydaktyczna — zdjęcie powinno w jasny sposób ukazywać zjawisko, które w zwykłej obserwacji jest niewidoczne lub trudno dostrzegalne. Wartość dydaktyczna jest tym większa, im trudniejsze do obserwacji zjawisko jest przedstawione oraz im lepiej widać jego przebieg.

2) Wartość informacyjna — zdjęcie (przy znanych warunkach jego wykonania) powinno pozwolić na określenie parametrów badanego drgania, jak na przykład amplituda czy częstotliwość. Im więcej informacji zdjęcie dostarczy (podać w opisie!), tym wyżej będzie ocenione.

3) Estetyka wykonania — kryterium wynikające z samolubstwa członków jury, którzy, jeśli już mają oglądać tyle zdjęć, to wolą ładne niż brzydkie.

CO DLA ZWYCIĘZCÓW?

Nagrody, rzecz jasna. Jak konkurs, to konkurs. Oto one:

I — miernik uniwersalny UM-3,

II i III — mikroskop,

IV i V — zestaw do montażu radioodbiornika,

VI—X — zestaw do eksperymentów optycznych.

Jeśli zróżnicowanie poziomu nadesłanych prac będzie tego wymagało, jury może zmienić liczbę i rodzaj nagród, nie umniejszając całkowitej sumy na nie przeznaczonej.

Ponadto najciekawsze zdjęcia zostaną opublikowane w «Delcie».

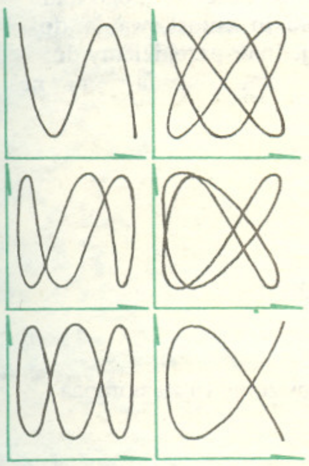
Rozwiązanie zadania M34:
Podzielmy każdy bok na odcinki długości 1 i poprowadźmy przez punkty podziału proste równoległe do boków trójkąta. Trójkąt podzieli się nam na 16 trójkątów równobocznych o boku długości 1. W pewnym z tych 16 trójkątów znajdą się dwa spośród danych 17 punktów. Odległość tych dwóch punktów nie przekracza 1, gdyż odległość między dwoma punktami trójkąta jest nie większa od długości największego boku tego trójkąta (dlaczego?).

A CZY TO W OGÓLE DA SIĘ ZROBIĆ?

Nie chciałbym być posądzony o wzywanie Was do robienia rzeczy nierealnych lub nieciekawych. Dlatego postaram się podać parę przykładów rejestracji drgań. Nie znaczy to oczywiście, że Wasze prace mają być jak najbardziej zbliżone do tych przykładów; korzystajcie ze swobody twórczej, a jury konkursowe oceni Wasze wyniki.
Pierwszy przykład ma Was skłonić do zastanowienia się:

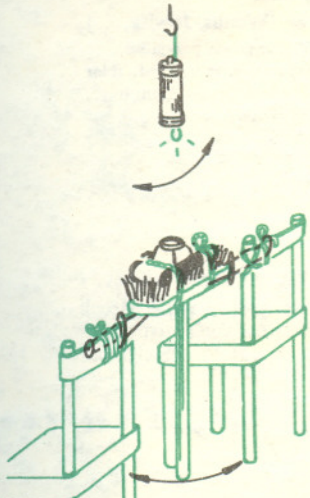
DO CZEGO MOŻE SIĘ PRZYDAĆ TELEWIZOR?

Słyszeliście na pewno, że obraz na ekranie telewizora pojawia się w taki sposób, że wiązka elektronów „rysuje" kolejno poziome linie, z których obraz się składa. Co innego jednak słyszeć od kogoś, a co innego samemu doświadczalnie się przekonać. Wyobraźmy sobie, że w czasie robienia zdjęcia przesuwamy aparat pionowo tak, że „nadąża" on za przesuwającą się linią. Wtedy na filmie nie powinien powstać cały obraz, a tylko linia w jednym miejscu, lub szereg linii, jeżeli fotografujemy z dostatecznie długim czasem naświetlania i aparat znajduje się w dostatecznej odległości od telewizora.
Zastanówcie się sami, co powstanie na fotografii, jeżeli będziemy poruszać aparatem szybciej. A co będzie, jeśli wolniej lub w przeciwną stronę? W praktyce najwygodniej zrealizować jednostajny ruch obrotowy. Należy w tym celu postawić aparat na obracającym się talerzu gramofonu (uwaga na siłę odśrodkową) i fotografować „na czas". Oczywiście jeślibyśmy chcieli zrealizować poprzednio opisaną sytuację, telewizor musiałby stać na boku. A co będzie, jeśli będzie stał normalnie? Zastanówcie się, spróbujcie zobaczyć w doświadczeniu. Nawet bez wykonania zdjęcia możecie zorientować się, co wyjdzie, jeśli zamiast aparatu umocujecie na talerzu adaptera lusterko i będziecie patrzyli na odbicie telewizora w tym lusterku w czasie ruchu talerza.
Korzystając z tego samego gramofonu możemy także sfotografować inne okresowo błyskające źródło, jak np. świetlówka czy lampa rtęciowa. Trzeba oczywiście ustawić rurę świetlówki pionowo i podobnie, jak w przypadku telewizora, fotografować na czas aparatem umieszczonym na obracającym się talerzu gramofonu. Wygodnie używać do tego wężyka, ale przy większości aparatów można się bez niego obejść. Innym okresowo błyskającym źródłem może być zwykła żarówka umieszczona za obracającym się śmigłem wentylatora. Pomyślcie, jak wyznaczać stąd częstość obrotu śmigła.
Inny przykład pola do działania to



FIGURY LISSAJOUS

Ci z Was, którzy czytali „Laboratorium w domu" w numerze wrześniowym, na pewno pamiętają, że składając dwa drgania zachodzące w prostopadłych kierunkach otrzymujemy przy równych częstotliwościach ruch wypadkowy po okręgu, elipsie lub linii prostej. Możemy jednak wyobrazić sobie, a co więcej, wykonać doświadczenie, w którym będziemy składać drgania o różnych częstotliwościach. W takim doświadczeniu możemy otrzymywać najrozmaitszego kształtu figury, z których kilka przedstawiają rysunki. Wszystkie figury w ten sposób otrzymane noszą nazwę „figur Lissajous" od nazwiska francuskiego fizyka (Jules Antoine Lissajous, 1822—1880).



JEDNA Z MOŻLIWYCH METOD REJESTRACJI FOTOGRAFICZNEJ FIGUR

Lissajous jest przedstawiona schematycznie na rysunku. Aparat fotograficzny trzeba przymocować do szczotki tak podpartej, aby mogła się swobodnie wahać (na przykład na ostrzach noży). Fotografujemy „na czas" latarkę kieszonkową (po zdjęciu reflektora) zawieszoną pod sufitem i również wprawioną w ruch wahadłowy w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wahań szczotki z aparatem. Na zdjęciu, w zależności od stosunku częstotliwości i przesunięcia fazowego, otrzymamy różne figury Lissajous.

CO ZROBIĆ Z PRACĄ KONKURSOWĄ, GDY SIĘ JUŻ JĄ WYKONAŁO?

Przysłać do Redakcji «Delty» i czekać na wyniki konkursu. Termin nadsyłania prac upływa 31 I 1975 r. Na kopercie piszemy hasło konkursu: „Drgania są wszędzie". Nie zapomnijcie podać swojego nazwiska i adresu, a jeżeli jesteście uczniami — nazwy szkoły i klasy, do której chodzicie.
Teraz wiecie już naprawdę wszystko. Radzę szybko podjąć decyzję, bo nagrody są warte trudu, i nie zwlekając przystąpić do dzieła. Trzymam kciuki!

O potrzebie aksjomatycznego ujmowania teorii matematycznych

Mgr Robert HAJŁASZ

Załóżmy, że nigdy nic nie słyszeliśmy o teorii mnogości, czyli o teorii zbiorów, i załóżmy również, że nigdy nic a nic nie słyszeliśmy o jakichkolwiek aksjomatach. Startując z tej pozycji — rzec można zerowej — postanawiamy sami stworzyć tę teorię.
Wobec tak przyjętych założeń narzuca się nam tylko jedna droga, którą możemy ruszyć. Jest to droga naturalna, czyli wskazywana przez intuicję. Ruszymy tą drogą, a niebawem zobaczymy, jak z tej drogi trzeba czym prędzej zawrócić, bo prowadzi ona w przepaść, nieco ściślej: w sprzeczność. I wtedy to zobaczymy wyraźnie potrzebę aksjomatycznego ujmowania teorii matematycznych.
A więc zaczynamy.
Rozumujemy tak: Nad pojęciem zbioru nie ma co się zatrzymywać. Jest ono nie tylko dla nas, ale nawet i dla dzieci całkowicie zrozumiałe, nie budzi żadnych wątpliwości. Przecież niejednokrotnie rozważaliśmy w życiu codziennym zbiór książek, zbiór ludzi, zbiór liczb naturalnych, zbiór liczb parzystych, zbiór prostych itp. I wszystko było dla nas jasne. Nie ma również potrzeby zatrzymywać się nad pojęciem przynależności elementu, tj. przedmiotu do zbioru, bo to pojęcie rozumiemy już od dziecka.
A zatem podsumowując stwierdzamy, że takie dwa powiedzenia, jak

X jest zbiorem,

x jest elementem zbioru X

są dla nas całkowicie zrozumiałe, nie budzą żadnych wątpliwości i dlatego nad nimi nie będziemy się zatrzymywać. Czas więc przystąpić do wnioskowania, do formułowania jakichś tez, do budowania teorii. Zanim jednak przejdziemy do wnioskowania, wprowadzimy dla prostszego sposobu porozumiewania się pewne umowy.
Tak więc wyrażenie

x jest elementem zbioru X

będziemy zapisywać symbolicznie:

$$x \in X,$$

zaś wyrażenie

x nie jest elementem zbioru X

zapiszemy za pomocą symbolu:

$$x \notin X.$$

Jeśli elementami zbioru X będą elementy $x_1, x_2, \ldots$, zapiszemy to za pomocą rysunku:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots\}.$$

A teraz przejdziemy do wnioskowania. Zaczniemy od następujących rozważań.

Niech X_0 będzie zbiorem stolic.
Możemy zatem napisać:
X_0 = zbiór stolic = {Paryż, Londyn, ...}.
Tu nie może wystąpić X_0, bo gdyby przypuścić, że występuje, to otrzymalibyśmy, że X_0, czyli zbiór stolic, jest stolicą. A z tym się nie zgadzamy.
Zatem prawdziwe jest zdanie

$$X_0 \notin X_0.$$

Niech X_1 będzie zbiorem planet.
Możemy zatem napisać:
X_1 = zbiór planet = {Wenus, Jowisz, ...}.
Tu nie może wystąpić X_1, bo gdyby przypuścić, że występuje, to otrzymalibyśmy, że X_1, czyli zbiór planet, jest planetą. A z tym się nie zgadzamy.
Zatem prawdziwe jest zdanie

$$X_1 \notin X_1.$$

Rozważmy teraz funkcję zdaniową jednej zmiennej X:

$$X \notin X.$$

Funkcja ta jest spełniona przez X_0, czyli zbiór stolic, oraz przez X_1, czyli zbiór planet.
Nietrudno zauważyć, że elementów spełniających tę funkcję zdaniową jest o wiele więcej.
Intuicja mówi nam, że można pomyśleć o zbiorze wszystkich elementów spełniających ową funkcję zdaniową. Innymi słowy, intuicja mówi nam, że istnieje zbiór wszystkich elementów spełniających tę funkcję zdaniową.
Niech Z będzie tym zbiorem.
Wtedy mamy: W worku Z znajdują się wszystkie elementy spełniające funkcję zdaniową $X \notin X$.
Fakt ten daje się opisać formalnie jak następuje: Dla każdego X_α

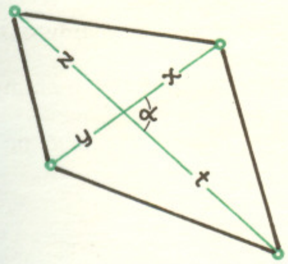
(1) $$X_\alpha \in Z \Leftrightarrow X_\alpha \notin X_\alpha \; .$$

A teraz na dwoje babka wróżyła: albo Z znajduje się w worku, albo nie.
Przypuśćmy, że Z znajduje się w worku. Wtedy prawdą jest, że $Z \in Z$. Skoro zaś prawdą jest, że $Z \in Z$, to na podstawie (1), podstawiając Z zamiast X_α i czytając (1) z lewej do prawej, otrzymujemy, że prawdą też jest, iż $Z \notin Z$; a więc otrzymujemy sprzeczność.

Zatem przypuszczenie, że Z znajduje się w worku, należy odrzucić, gdyż prowadzi do sprzeczności.
Skoro Z nie znajduje się w worku wnosimy automatycznie, że Z znajduje się poza workiem, i nie ma potrzeby sprawdzania tego. Zabawmy się jednak w upartych kontrolerów i sprawdźmy po swojemu, czy rzeczywiście Z znajduje się poza workiem.
Przypuśćmy więc, że Z znajduje się poza workiem. Wtedy prawdą jest, że $Z \notin Z$. Skoro zaś prawdą jest, że $Z \notin Z$, to na podstawie (1), podstawiając Z zamiast X_α i czytając (1) z prawej do lewej, otrzymujemy, że prawdą też jest, iż $Z \in Z$; a więc otrzymujemy sprzeczność.
Zatem przypuszczenie, że Z znajduje się poza workiem, należy odrzucić, bo prowadzi do sprzeczności.
Ostatecznie wykazaliśmy, że Z nie może być ani w worku, ani poza nim! Zatem kontrola, która wydawała się zbyteczna, była potrzebna, dała zadziwiający rezultat.
A jak wytłumaczyć stwierdzony fakt, że Z nie ma ani w worku, ani poza nim, że źle babka wróżyła, wróżąc na dwoje?
Po prostu tym, że Z nie istnieje.
A zatem, jeśli weźmiemy funkcję zdaniową $X \notin X$, to istnieją elementy spełniające tę funkcję zdaniową, np. X_0 = zbiór stolic, X_1 = zbiór planet, ale nie istnieje zbiór wszystkich elementów spełniających tę funkcję zdaniową. (Niesamowite!).

Okazuje się więc, że wbrew temu, co sądziliśmy na początku, zachodzi potrzeba zatrzymania się nad pojęciem zbioru i pojęciem przynależności elementów do zbioru, że nie możemy sobie pozwolić na tworzenie zbiorów z elementów jakich nam się tylko podoba, np. nie możemy sobie pozwolić na utworzenie zbioru z elementów spełniających funkcję zdaniową $X \notin X$.
Wniosek ten jest ciosem wymierzonym w intuicyjne pojmowanie zbioru. Wobec takiej sytuacji trzeba powiedzieć, co to jest zbiór, czyli trzeba podać definicję zbioru, i to taką, ażeby się uchronić od udowodnionej wyżej sprzeczności i od sprzeczności w ogóle.
Tymczasem nie możemy znaleźć takiego zespołu słów, którym by można wyrazić wprost to, co chcemy uznać za zbiór. Skoro nie możemy powiedzieć wprost, co to jest zbiór, więc z konieczności zażądajmy przynajmniej stwierdzenia, jakie własności powinien spełniać twór, który chcemy uznać za zbiór. Własności te wypowiadamy w pewnych zdaniach. Zatem przez zbiór należy rozumieć od tej chwili jakikolwiek twór, który spełnia warunki sformułowane w tych zdaniach. Wobec tego zdania te można uznać za definicję zbioru, ale nie za definicję zwyczajną, bezpośrednią, lecz za definicję uwikłaną, zamaskowaną, niejawną. Ponieważ w zdaniach tych wypowiadamy łącznie własności zbioru i własności pojęcia przynależności elementu do zbioru, przeto zdania te są zarazem definicją uwikłaną pojęcia zbioru i pojęcia przynależności elementu do zbioru. Od tej pory pojęciami tymi wolno posługiwać się jedynie w ten sposób, na jaki pozwalają te zdania.
Zdania te nazywamy „aksjomatami teorii mnogości”. Mówimy, że zbiór i pojęcie przynależności elementu do zbioru definiujemy „aksjomatycznie”.
Z przytoczonych do tej pory rozważań widać wyraźnie, że zachodzi potrzeba aksjomatycznego ujmowania teorii matematycznych. Aksjomaty stanowią fundament każdej teorii. Osobliwość ich polega na tym, że kryją w sobie nieskończenie wiele twierdzeń, które przez zastosowanie odpowiednich środków wnioskowania dają się z tych aksjomatów wyprowadzić.
Teorię mnogości po raz pierwszy zbudował matematyk niemiecki J. Cantor. Zbudował on teorię mnogości nie w sposób aksjomatyczny, lecz intuicyjny. Wówczas angielski logik B. Russell podał przykład, w którym zastosowane intuicyjne rozumienie zbioru, wydające się niewątpliwie pewne, prowadzi do sprzeczności. Właśnie tę sprzeczność, zwaną „antynomią Russella”, przedstawiliśmy wyżej.
Pierwszym, który podał aksjomaty teorii mnogości, był niemiecki matematyk E. Zermelo.
Czytelnik pragnący zapoznać się z tymi aksjomatami znajdzie je np. w *Zarysie logiki matematycznej* A. Grzegorczyka (1973).

Rozwiązanie zadania M35:
Zauważmy najpierw, że pole S czworokąta wypukłego o przekątnych długości d_1 i d_2 i kącie między przekątnymi α jest równe $\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$. Mamy bowiem (zob. rysunek):



$$S = \frac{1}{2} xt \sin\alpha + \frac{1}{2} ty \sin(180° - \alpha) +$$
$$+ \frac{1}{2} yz \sin\alpha + \frac{1}{2} zx \sin(180° - \alpha) =$$
$$= \frac{1}{2} xt \sin\alpha + \frac{1}{2} ty \sin\alpha +$$
$$+ \frac{1}{2} yz \sin\alpha + \frac{1}{2} zx \sin\alpha =$$
$$= \frac{1}{2} (x+y)(z+t) \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha.$$

(Korzystaliśmy z tego, że pole trójkąta jest równe połowie iloczynu dwóch boków przez sinus kąta między nimi zawartego).
Tezą zadania jest więc nierówność

$$\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha \leqslant \frac{1}{4} (d_1^2 + d_2^2),$$

czyli

$$0 \leqslant d_1^2 - 2d_1 d_2 \sin\alpha + d_2^2.$$

Mamy $d_1^2 - 2d_1 d_2 \sin\alpha + d_2^2 =$
$= (d_1 + d_2)^2 + 2d_1 d_2 (1 - \sin\alpha) \geqslant 0$
gdyż $(d_1 - d_2)^2 \geqslant 0$ i $1 - \sin\alpha \geqslant 0$,
$d_1 > 0$, $d_2 > 0$.
Z powyższego rozumowania wynika również, kiedy pole czworokąta wypukłego równe jest $\frac{1}{4}$ sumy kwadratów długości przekątnych. Jest tak mianowicie tylko wtedy, gdy $d_1 = d_2$ i $\sin\alpha = 1$, tzn. gdy przekątne są prostopadłe i równej długości.

Sylwestrowy mini-konkurs!

Czterej koledzy — Edward, Franciszek, Jerzy i Hubert — poszli razem z żonami do klubu na bal noworoczny. Z początku każdy tańczył ze swoją żoną, ale wkrótce pary się przemieszały. Basia tańczyła z Edwardem, Alicja z mężem Karoliny, Dorota z mężem Alicji, Franciszek z żoną Jerzego i Jerzy z żoną Edwarda. Proszę rozsupłać tę mieszaninę par, podając imiona współmałżonków oraz kto z kim tańczył?