

## SPIS TREŚCI

Głęboka struktura Ziemi  
w świetle badań metodami  
sejsmologii eksplozyjnej  
*Doc. dr hab. Aleksander Guterch* str. 2

O przestrzeniach metrycznych  
*Doc. dr hab. Maria Moszyńska* str. 4

Przygoda w fizyce  
*Prof. Marian Danysz* str. 5

Ankieta-konkurs str. 7

Zadania str. 8

Mała «Delta» str. 9

«Delta» z wizytą w Instytucie  
Chemii Przemysłowej str. 12

Laboratorium w domu  
*Dr Jan A. Gaj* str. 14

Czytelnicy proponują str. 15

O zbiorach rozmytych  
*Dr hab. W. Marek,*  
*mgr inż. M. Sobolewski* str. 16

**W następnym numerze:**  
Zegar bez wskazówek  
Matematyka w naukach społecznych

**Nasza okładka:**  
Spektrometr masowy (patrz str. 12)  
Przekrój geologiczny w rejonie  
rowu tektonicznego (patrz str. 2)

„Delta”  
matematyczno-fizyczny miesięcznik  
popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego i Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego  
wydawany przy poparciu  
Polskiej Akademii Nauk oraz  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
prof. dr G. Białkowski  
doc. dr A. Blikle  
prof. dr A. Hryniewicz  
doc. dr B. Iwazkiewicz  
prof. dr J. Janik  
doc. dr J. Jatzak  
prof. dr Leon Jeśmanowicz —  
przewodniczący  
prof. dr Z. Krygowska  
prof. dr K. Leibler  
mgr W. Łuczniak  
mgr A. Mąkowski  
prof. dr A. Pełczyński  
prof. dr Arkadiusz Piekara —  
wiceprzewodniczący  
prof. dr J. Rayski  
prof. dr A. Schinzel

prof. dr Z. Semadeni  
prof. dr M. Subotowicz  
dr A. Wakulicz  
doc. dr W. Zawadowski

Redaguje Kolegium w składzie:  
T. Deskur — red. techn. graf.  
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.  
mgr T. B. Iwiński  
dr M. Kordos — red. nac.  
dr Z. Płochocki  
D. Tys — sekr. red.

opracowanie okładki  
art. graf. K. Dobrowolski  
Adres Redakcji  
ul. Śniadeckich 8,  
00-656 Warszawa, PTM

Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo.  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 30000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl., 80g, 61 × 84  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej,  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 1428/74 W-121

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej  
zł 30,—

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW-Prasa-Książka-Ruch, w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW-Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowo właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
Sprzedaż gotówką i wysyłką, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Zdarza się nam słyszeć:

„Rzecz jest zbyt złożona, abym mógł ją tu wyjaśnić”,  
„Niestety bez przygotowania nie można tego zrozumieć”,  
„Tylko specjalista może dostrzec tu problem”  
i wiele, wiele innych zdań tego rodzaju.

Tych, którzy tak mówią,  
często uważa się za ludzi  
o głębokim umyśle i rozległej wiedzy.

Tymczasem są to mętniacy,  
co z lenistwa, niesprawności bądź braku informacji  
ułatwiają sobie życie.  
Bywa też, że to pycha  
każe im w ten sposób zaznaczyć swą przewagę,  
podkreślić to, że mogą traktować innych  
jak głupszych, gorszych od siebie.

W każdym jednak przypadku  
wznoszą w ten sposób barierę  
oddzielającą tych, co daną informację zdobyli,  
od tych, co jej jeszcze nie posiadli.  
I głoszą, że sforsowanie tej bariery  
jest dla większości niemożliwe.

Nie wolno im wierzyć!  
Rzetelna wiedza jest dostępna dla wszystkich!

Zdobycie jej wymaga oczywiście pewnego czasu i wysiłku.  
Od roku pracujemy nad usuwaniem barier,  
jakie zostały wzniesione i powstają nadal  
między społeczeństwem a nauką.  
Możemy obiecać, że tak jak dotychczas  
nikt z autorów ani redaktorów «Delty»  
nie schowa się za zasłonę  
szkodliwego hasła  
„To nie jest takie proste”.

# Głęboka struktura Ziemi w świetle badań metodami sejsmologii eksplozyjnej

*Doc. dr hab. Aleksander GUTERCH*

Wstępne badania głębokiej struktury skorupy i górnego płaszczka Ziemi w strefie brzeżnej platformy prekambryjskiej Wschodniej Europy na obszarze Polski zostały przeprowadzone w latach 1964–1965. Szczegółowe prace badawcze, które doprowadziły do określenia głębokiej struktury Ziemi w tym rejonie, zostały wykonane w Instytucie Geofizyki PAN w latach 1971–1974 przez zespół w składzie: doc. dr A. Guterch, mgr inż. R. Materzok, mgr J. Pajchel, mgr E. Perchuć.

Powszechnie znanym paradoksem jest stwierdzenie, że aktualnie znamy o wiele dokładniej własności fizyczne przestrzeni okołoziemskiej na wysokości sięgającej wielu setek km niż strukturę wewnętrzną Ziemi na głębokości rzędu kilku km. Sytuacja ta jest wynikiem nie tylko dużej atrakcyjności programu badań kosmicznych, ale także niezwykle dużych trudności, jakie występują w badaniach głębokich stref Ziemi.

Koncentracja wysiłków oraz zwrócenie uwagi dużych ośrodków naukowych na całym świecie — jakie zaznaczyło się w ostatnim 10-leciu — na badania fizyki wnętrza Ziemi przyniosło wręcz rewelacyjne zmiany określane często mianem rewolucji w naukach o Ziemi. Zmiany te były w dużym stopniu zasługą Międzynarodowego Programu Badań Górnego Płaszczka Ziemi, który aktualnie jest kontynuowany w ramach międzynarodowego Projektu Badań Geodynamicznych. Przedmiotem intensywnych badań jest przede wszystkim skorupa i górny płaszcz Ziemi sięgający do głębokości około 700 km. W górnym płaszczu zachodziły i zachodzą istotne procesy fizyczne, które kształtowały i kształtują współczesne oblicze powierzchni Ziemi.

Osiągnięcia, które są wynikiem realizacji wymienionych wyżej programów badawczych, zainspirowały liczne projekty badań teoretycznych, modelowych i laboratoryjnych, przy szerokim zastosowaniu osiągnięć i metod fizyki wysokich ciśnień. W rezultacie przedstawiono nowe fizyczno-matematyczne modele całej Ziemi oraz poszczególnych jej stref. Należy podkreślić, że sukcesy, które osiągnięto, były w dużym stopniu wynikiem nie tylko intensyfikacji i koncentracji badań w zakresie fizyki litosfery, ale także szerokiego zastosowania matematyczno-fizycznych metod badawczych.

Wiodącą rolę w badaniach głębokich struktur skorupy i górnego płaszczka Ziemi spełnia sejsmologia. Jej narzędziem badawczym są fale sejsmiczne rozchodzące się we wnętrzu Ziemi we wszystkich kierunkach z obszaru ich generacji. Fale sejsmiczne niosą informacje o własnościach fizycznych ośrodka, o „defektach” występujących w jego strukturze i o nieciągłościach parametrów sprężystych we wnętrzu Ziemi. Przedmiotem szczególnych zainteresowań fizyki wnętrza Ziemi są przede wszystkim powierzchnie nieciągłości parametrów sprężystych, nazywane granicami sejsmicznymi. Na granicach tych prędkości fal podłużnych zmieniają się skokowo o około 0,5 do 1,5 km/s. Fale sprężyste padając na granice sejsmiczne ulegają normalnym procesom odbicia–załamania i wracają na powierzchnię Ziemi, gdzie są rejestrowane na stacjach sejsmologicznych lub przez aparaty sejsmiczne ustawione specjalnie wzdłuż określonego kierunku, czyli wzdłuż tzw. profilu badań.

Prędkości fal sejsmicznych pod kontynentami rosną w ogólności od około 3–4 km/s w warstwach przypowierzchniowych do około 8,0 km/s na głębokościach rzędu 40 km i do około 13,6 km/s w centrum Ziemi. Jest to jednak tylko ogólna tendencja, gdyż w rzeczywistości we wnętrzu Ziemi oprócz wspomnianych już granic sejsmicznych występują także strefy inwersji prędkości. Natura głębokich granic sejsmicznych nie jest jeszcze dostatecznie jasna. Dominuje pogląd, że granice sejsmiczne występujące na głębokościach kilkudziesięciu i kilkuset km są „frontami” procesów fazowych zachodzących w określonych warunkach ciśnienia i temperatury. W wyniku procesu fazowego zmienia się skład mineralogiczny materii bez zmiany składu chemicznego. Tego typu procesy fazowe są realizowane w warunkach laboratoryjnych.

W procesie złożonej interpretacji sejsmicznego pola falowego otrzymuje się dane o granicach sejsmicznych i głębokiej strukturze Ziemi. Fale sejsmiczne spełniają więc w fizyce wnętrza Ziemi rolę podobną do promieni Röntgena w fizyce ciała stałego.

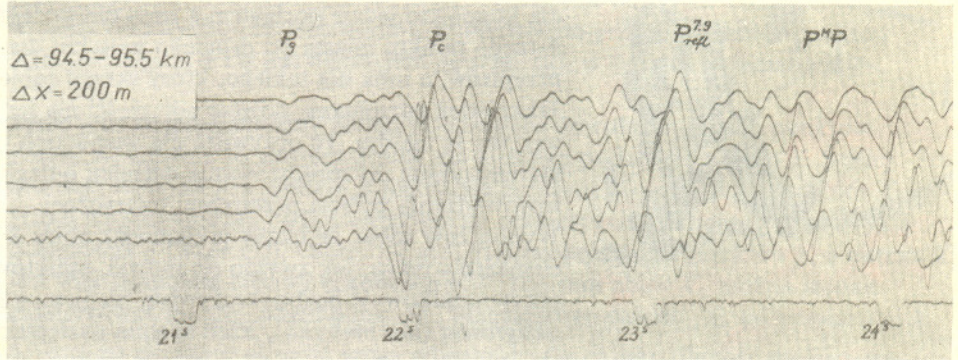
Źródłem fal sejsmicznych są przede wszystkim ogniska trzęsień ziemi. Są to jednak źródła niekontrolowane i stąd dwa podstawowe parametry — czas i współrzędne — są znane tylko w przybliżeniu, często niewystarczającym dla dokładnego określenia struktury Ziemi. Dlatego też, szczególnie w ostatnich kilkunastu latach, rozwinęły się metody tzw. sejsmologii eksplozyjnej, która dla celów badawczych skorupy i górnego płaszczka Ziemi stosuje eksplozje



Skorupa ziemna jest zewnętrzną powłoką Ziemi; jej dolną granicę określa tzw. nieciągłość Mohorovičića. Na granicy Mohorovičića prędkość sprężystych fal podłużnych wzrasta skokowo od około 7,0 km/s do około 8,0–8,3 km/s.

chemiczne i jądrowe będące źródłem fal sejsmicznych. W tym przypadku obydwa wymienione wyżej parametry (czas i współrzędne) można poznać praktycznie z dowolną dokładnością. Wielkości ładunków wybuchowych są funkcją odległości punktów rejestracji od źródła fal. Przy badaniach skorupy sejsmicznej, sięgającej średnio do głębokości około 40 km, maksymalne wielkości ładunków wynoszą około 1500 do 2000 kg dla rejestracji w odległości około 250 do 300 km. Przykład rejestracji fal sejsmicznych załamanych i odbitych od nieciągłości występujących na obszarze przedsudeckim w Polsce przedstawiono na rys. 1.

Rys. 1. Przykład rejestracji fal sejsmicznych wzbudzonych przy pomocy ładunku dynamitu  $Q = 500$  kg  
 $\Delta$  — odległość od punktu wybuchu,  
 $\Delta x$  — odległość między odbiornikami drgań sejsmicznych,  
 $P_0$  — fala załamana na granicy sejsmicznej położonej na głębokości około 5 km,  
 $P_c$  — fala odbita na granicy sejsmicznej położonej na głębokości około 18 km,  
 $P_{7,9}^{refl}$  — fala odbita na granicy sejsmicznej, charakteryzującej się prędkością fal podłużnych 7,9 km/s i położonej na głębokości około 28 km,  
 $P^{M}P$  — fala odbita od podłoża skorupy ziemskiej (= granica Mohorovičića) charakteryzującej się prędkością fal podłużnych 8,2 km/s i położonej na głębokości około 33 km,  
 $21^s$  — czas w sekundach

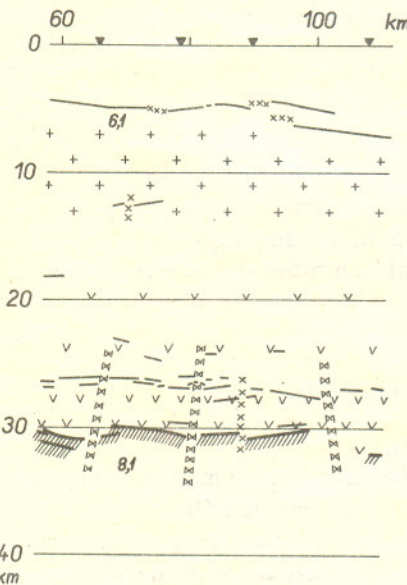


Obraz falowy jest wynikiem rejestracji przeprowadzonej w odległości 94,5 km od źródła drgań, w którym dokonano eksplozji około 500 kg dynamitu. Głęboką strukturę skorupy ziemskiej na wymienionym obszarze można scharakteryzować na przykładzie wycinka przekroju skorupy, przedstawionego na rys. 2. Jest to przykład wyjątkowo złożonej i skomplikowanej struktury podłoża skorupy ziemskiej, unikalny w skali europejskiej. Obok wielu granic sejsmicznych, na wymienionym obszarze występują niezwykle liczne tzw. głębokie rozłamy tnące strukturę skorupy, a będące jak gdyby „defektami” jej budowy. Dla tego typu struktury ośrodka przedstawiono pogląd, że jest ona wynikiem procesu wewnętrznej erozji przez analogię do procesów erozyjnych na powierzchni Ziemi. Oczywiście, źródłem wewnętrznej erozji skorupy ziemskiej są procesy fizyczne zachodzące w jej wnętrzu.

Prowadzone przez Instytut Geofizyki PAN, na szeroką skalę zakrojone badania wewnętrznej struktury Ziemi metodami seismologii eksplozyjnej, wzdłuż tzw. VII profilu międzynarodowego biegnącego przez obszar Polski, Związku Radzieckiego, Czechosłowacji i Republiki Federalnej Niemiec, dostarczyły unikalnych informacji o głębokiej strukturze skorupy ziemskiej. Część profilu przechodząca przez obszar Polski wzdłuż kierunku Śnieżka (w Sudetach)–Toruń–Kaliningrad w ZSRR, ma wyjątkowe znaczenie. Na obszarze Polski przecinają się bowiem trzy wielkie jednostki tektoniczne Europy. Stąd głęboka budowa skorupy i górnego płaszcza na terenie Polski jest kluczem do zrozumienia wielu zasadniczych procesów kształtujących kontynent europejski. W tej sytuacji obszar Polski jest jak gdyby naturalnym laboratorium do badań procesów fizycznych zachodzących w górnym płaszczu Ziemi oraz na styku wielkich bloków skorupy ziemskiej.

Najbardziej interesującą strefę wzdłuż VII profilu międzynarodowego wykryto na obszarze środkowej Polski w rejonie Inowrocławia. (Fragment budowy skorupy ziemskiej w tym rejonie przedstawiono na IV str. okładki). Występuje tutaj głęboki rów tektoniczny o szerokości około 50 km i amplitudzie zmian grubości skorupy ziemskiej około 12 km. Podłoże skorupy ziemskiej znajduje się w tym rejonie na ogromnej głębokości, bo wynoszącej około 50 km. Wymieniony rów tektoniczny ograniczony jest głębokimi rozłamami, których lokalizacja ma zasadnicze znaczenie dla określenia południowo-zachodniego brzegu tzw. platformy prekambryjskiej wschodniej Europy. Jest to problem, którego rozwiązania poszukuje się już od kilkadziesiąt lat.

Niezwykle skomplikowany obraz falowy, jaki otrzymano w badaniach sejsmicznych w tym rejonie, długo nie mógł być jednoznacznie zinterpretowany. Dopiero niespodziewane wydzielenie pewnego typu fali sejsmicznej, którą zinterpretowano jako falę odbitą, pozwoliło na lokalizację granicy sejsmicznej na głębokości około 50 km, stanowiącej podłoże skorupy ziemskiej w tym rejonie. Wyniki przedstawionych badań sejsmicznych są podstawą dla prac nad określeniem dynamiki procesów kierujących rozwojem Ziemi. Na szczególne podkreślenie zasługuje również ich duże znaczenie dla geologii surowcowej.



Rys. 2. Przykład złożonej struktury skorupy ziemskiej na obszarze przedsudeckim w Polsce  
 Oznaczenia jak na IV stronie okładki, oraz  
 +++ — tzw. warstwa granitowa,  
 v v v — tzw. warstwa bazaltowa z dolną strefą przejściową między skorupą i górnym płaszczem Ziemi.

Doc. dr hab, Maria MOSZYŃSKA



Każdy z nas styka się w codziennym życiu z pojęciem odległości, jednak zapytany, co przez to rozumie, miałby zapewne kłopot z udzieleniem precyzyjnej odpowiedzi. Nic dziwnego, przecież odległość z Warszawy do Krakowa jest inna dla kogoś kto jedzie pociągiem a inna dla podróżującego samolotem; odległość jednego punktu miasta od drugiego inna jest dla przechodnia, który przestrzega przepisów, a inna dla takiego, który skraca sobie drogę przez jezdnie i trawniki. Jakkolwiek rozumiane, pojęcie odległości ma jednak pewne cechy, co do których wszyscy są zgodni. Te oczywiście dla wszystkich własności posłużyły matematykom do sprecyzowania definicji odległości, a ściślej mówiąc, do wprowadzenia pojęcia przestrzeni metrycznej.

Wyobraźmy sobie, że mamy jakikolwiek zbiór  $X$  oraz funkcję, która każdej parze elementów (czyli, jak zwykle się mówi, punktów)  $a, b$  ze zbioru  $X$  przyporządkowuje liczbę rzeczywistą nieujemną  $\rho(a, b)$ . Funkcja ta nazywa się *odległością* (lub *metryką*), jeżeli spełnia następujące trzy warunki:

- (i)  $\rho(a, b) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a = b$ ,
- (ii)  $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ ,
- (iii)  $\rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c)$ .

Na mocy warunku (i) odległość dwóch punktów jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy te punkty są identyczne. Zgodnie z warunkiem (ii) odległość punktu  $a$  od  $b$  jest taka sama, jak  $b$  od  $a$ . Na mocy warunku (iii) suma odległości punktu  $a$  od  $b$  i punktu  $b$  od  $c$  nie może być mniejsza niż odległość  $a$  od  $c$ . Warunek ten nosi nazwę *nierówności trójkąta*, co nikomu nie wyda się dziwne, jeżeli zgodzi się rozumieć przez „trójkąt” dowolną trójkę punktów zbioru  $X$ .

Para  $(X, \rho)$  złożona ze zbioru  $X$  i metryki  $\rho$  nazywa się *przestrzenią metryczną*.

Łatwo się przekonać, że warunki (i)–(iii) bynajmniej nie wyznaczają jednoznacznie metryki  $\rho$  w danym zbiorze  $X$ . Inaczej mówiąc, dowolny zbiór można *zmetryzować* na wiele różnych sposobów, tzn. można na wiele sposobów mierzyć w nim odległość. Zilustrujemy to na przykładach.

Płaszczyznę euklidesową najczęściej metryzuje się określając odległość  $\rho$  tzw. wzorem Pitagorasa. Mianowicie, jeżeli punkty  $p$  i  $q$  mają odpowiednio współrzędne  $(x_1, x_2)$  i  $(y_1, y_2)$ , to

$$(1) \quad \rho(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

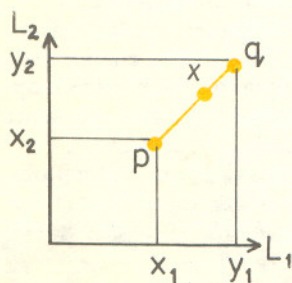
Można łatwo dowiedzieć, że taka funkcja  $\rho$  spełnia warunki (i)–(iii), a więc jest metryką. Jest to tzw. *metryka kartezjańska* na płaszczyźnie. Odcinek  $pq$ , przedstawiony na rys. 1, jest zbiorem wszystkich punktów spełniających równanie  $\rho(p, x) + \rho(x, q) = \rho(p, q)$ . O takich punktach mówi się, że *leżą między*  $p$  i  $q$ .

Funkcja  $\bar{\rho}$  określona przez wzór

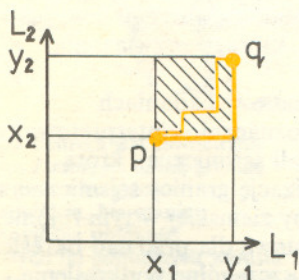
$$(2) \quad \bar{\rho}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

również jest metryką. Jest to tzw. *metryka miejska*.

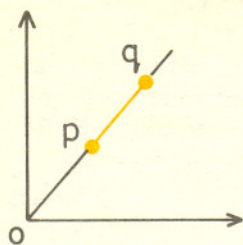
Łatwo się domyśleć, skąd pochodzi ta nazwa. Wyobraźmy sobie miasto, w którym wszystkie ulice biegną ze wschodu na zachód lub z południa na północ. Żeby dostać się z jednego punktu do drugiego trzeba na ogół przebyć drogę, która jest pewną łamaną. W szczególnym przypadku, gdy oba punkty są położone na tej samej ulicy, łamana ta jest po prostu odcinkiem. Oczywiście zamiast drogą zaznaczoną na rys. 2 grubą kreską, można od  $p$  do  $q$  przejść drogą „cienką” o tej samej długości. Takich możliwych dróg od  $p$  do  $q$  o długości  $\bar{\rho}(p, q)$  dla  $p, q$  nie leżących na jednej ulicy jest nieskończenie wiele, wypełniają one prostokąt o bokach równoległych do osi  $L_1$  i  $L_2$  i o przeciwległych wierzchołkach  $p, q$ . Prostokąt ten jest — jak łatwo sprawdzić — zbiorem wszystkich punktów leżących między  $p$  i  $q$  w sensie metryki  $\bar{\rho}$ .



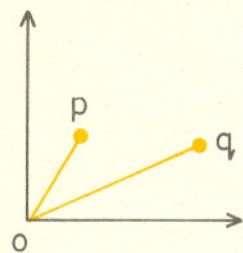
Rys. 1



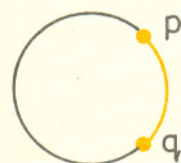
Rys. 2



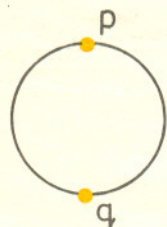
Rys. 3a



Rys. 3b



Rys. 4a



Rys. 4b

Innym przykładem metryzacji płaszczyzny jest tzw. *metryka kolejowa*, określona wzorem

$$(3) \quad \rho^*(p, q) = \begin{cases} \rho(p, q) & \text{jeżeli punkty } o, p, q \\ & \text{są współliniowe (rys. 3a)} \\ \rho(p, o) + \rho(o, q) & \text{jeżeli punkty } o, p, q \\ & \text{nie są współliniowe (rys. 3b).} \end{cases}$$

Punkt  $o$  odgrywa tu rolę węzła kolejowego. Jeżeli punkty  $p$  i  $q$  leżą na jednym torze, przejechanie koleją z  $p$  do  $q$  nie wymaga nakładania drogi. Jeżeli leżą na różnych torach, trzeba przejechać przez węzeł, więc odległość kolejowa jest wtedy większa od zwykłej (kartezjańskiej). W pierwszym przypadku zbiór punktów leżących między  $p$  i  $q$  jest odcinkiem  $pq$  (rys. 3a), w drugim — łamaną  $poq$  (rys. 3b).

Jasne jest, że jeżeli umiemy zmierzyć odległość dowolnych dwóch punktów zbioru  $X$ , umiemy to również zrobić dla każdego podzbioru zbioru  $X$ . Ścisłej mówiąc, metryka  $\rho$  w zbiorze  $X$  metryzuje zarazem dowolny jego podzbiór  $X_0$ . Niech na przykład  $X_0$  będzie okręgiem na płaszczyźnie euklidesowej ze zwykłą odległością  $\rho$  (wzór (1)). Odległość  $\rho(p, q)$  dowolnych dwu punktów  $p, q$  okręgu  $X_0$  jest więc długością cięciwy o końcach  $p, q$ . Ten sam zbiór  $X_0$  można jednak zmetryzować inaczej, abstrahując od „otaczającego świata”, tj. od przestrzeni  $X$ .

Można na przykład określić nową odległość  $\check{\rho}(p, q)$  jako długość mniejszego z dwóch łuków o końcach  $p, q$ . Odpowiada to sytuacji, w której okrąg  $X_0$  byłby brzegiem jeziora, a osoba mierząca odległość nie umiałaby pływać. Łatwo sprawdzić, że przy takiej metryzacji okręgu zbiór punktów leżących między  $p$  i  $q$  jest na ogół krótszym łukiem o końcach  $p, q$  (rys. 4a). Na ogół, ale nie zawsze — wyjątek stanowią pary tzw. punktów antypodycznych (maksymalnie oddalonych); między takimi antypodami leżą wszystkie punkty okręgu (rys. 4b).

Przedstawiona tu relacja leżenia między jest jednym z wielu pojęć, które można zdefiniować przy pomocy odległości, to jest tzw. pojęć metrycznych. Innym przykładem takiego pojęcia jest pojęcie środka pary punktów.

Rozważmy dowolną przestrzeń metryczną  $(X, \rho)$ .

Punkt  $x$  zbioru  $X$  jest środkiem pary punktów  $p, q$  (w sensie metryki  $\rho$ ) wtedy i tylko wtedy gdy  $\rho(p, x) = \frac{1}{2} \rho(p, q) = \rho(x, q)$ .

A więc środek jest to taki punkt  $x$ , który leży między  $p$  i  $q$  i jest równo odległy od  $p$  i  $q$ . Na płaszczyźnie z metryką kartezjańską lub kolejową każda para punktów ma dokładnie jeden środek, natomiast na płaszczyźnie z metryką miejską każda para punktów nie leżących na jednej „ulicy” ma nieskończenie wiele środków. Znalezienie takiego zbioru środków pozostawiamy Czytelnikowi. Na okręgu z metryką kartezjańską żadna para punktów nie ma środka, na okręgu z metryką łukową  $\check{\rho}$  każda para posiada środek, a pary antypodów mają po dwa środki. Przestrzeń metryczna, w której każda para punktów ma co najmniej jeden środek, nazywa się *wypukłą*, a taka, w której każda para punktów ma dokładnie jeden środek — *mocno wypukłą*. A więc płaszczyzna z metryką  $\rho$  lub  $\rho^*$  jest mocno wypukła, a z metryką  $\check{\rho}$  jest wprawdzie wypukła, ale nie jest mocno wypukła. Przykładem przestrzeni, która nie jest wypukła, jest okrąg z metryką  $\rho$ .

CDN

## Przygoda w fizyce

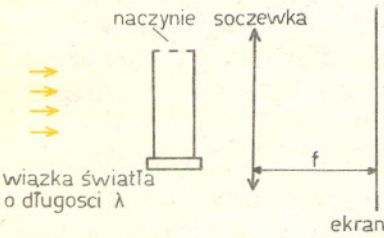
### Prof. Marian DANYSZ, członek rzeczywisty PAN

Ludwik Wertenstein (ur. 16 IV 1887, zm. 18 I 1945) studiował w Paryżu, był asystentem Marii Skłodowskiej-Curie. W jej zastępstwie kierował Pracownią Radiologiczną Warszawskiego Towarzystwa Naukowego. Prof. M. Danysz (ur. 17 III 1909) jest znany naszym Czytelnikom z artykułów omawiających odkrycie hiperjader («Delta», 1974, nr 10) oraz podwójnego hiperfragmentu («Delta» 1974, nr 1), w których to odkryciach uczestniczył.

Z górą chyba czterdzieści lat temu byłem zatrudniony w Pracowni Radiologicznej w Warszawie, kierowanej przez profesora Ludwika Wertensteina. Głównym wyposażeniem pracowni był właściwie dar Marii Skłodowskiej-Curie w postaci 60 mg radu. Rad ten stanowił źródło wszystkich aktywności, z którymi, pracowano w laboratorium. Lata trzydzieste, kiedy pracowałem w laboratorium były okresem bardzo ciekawym. Wtedy właśnie odkryto neutron, pozyton, a Fryderyk Joliot-Curie odkrył promieniotwórczość wzbudzoną przez naświetlanie rozmaitych materiałów cząstkami  $\alpha$ . Pamiętam, że kiedyś zwróciłem

Rozwiązanie zadania F13.

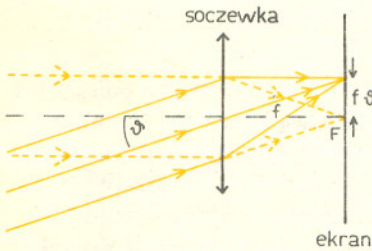
Na skutek wytworzenia się fali stojącej w cieczy gęstość cieczy nie będzie stała, lecz będzie się zmieniać okresowo wraz z odległością od dna naczynia. Łatwo zauważyć, że punkty maksymalnego rozrzedzenia cieczy są odległe o  $L$ , gdzie  $L$  jest równe połowie długości fali ultradźwiękowej w cieczy. W punktach maksymalnego zgęszczenia ciecz będzie przepuszczać światło znacznie gorzej niż w punktach jej maksymalnego rozrzedzenia. Jeśli oświetlimy naczynie wiązką równoległą światła, to zgęszczenia cieczy będą odgrywać rolę identyczną jak rysy na siatce dyfrakcyjnej (długość fali ultradźwiękowej jest rzędu dziesiątych części milimetra). Szybkość zmian gęstości cieczy możemy zaniedbać w porównaniu



z prędkością światła. Układ zestawiamy więc w sposób następujący: Naczynie z cieczą działa jak siatka dyfrakcyjna i w wiązku z tym maksima dyfrakcyjne powinniśmy obserwować pod kątem względem kierunku wiązki spełniającym warunek

$$L \sin \theta_m = m \lambda, \quad m = 1, 2, \dots$$

Dla małych kątów  $\theta$  możemy przybliżyć  $\sin \theta \approx \theta$ . Wiązka światła równoległego padająca na soczewkę pod małym kątem jest skupiona w płaszczyźnie ogniskowej soczewki w odległości w przybliżeniu równej  $f \theta$  od ogniska. W płaszczyźnie



ogniskowej umieszczony jest ekran, na którym powinniśmy obserwować prążki dyfrakcyjne w punktach odległych o  $x_m$  od ogniska, przy czym dla małych  $\theta$

$$x_m = f \theta_m = \frac{f \lambda}{L} \cdot m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Mierząc odległość  $\Delta x$  prążków dyfrakcyjnych na ekranie, która dana jest wzorem

$$\Delta x = \frac{f \lambda}{L},$$

możemy wyznaczyć długość fali ultradźwiękowej  $2L$ , a stąd jej prędkość rozchodzenia  $v$ , gdyż oczywiście

$$v = \frac{2f \lambda}{x}$$

Dobrze jest wiedzieć, jakiej odległości  $\Delta x$  między prążkami dyfrakcyjnymi należy oczekiwać na ekranie. Przyjmując, że  $v = 4000$  kHz,  $f = 30$  cm,  $\lambda = 589$  nm (żółta linia sodu), zaś  $v$  jest rzędu tysiąca metrów na sekundę (dźwięk biegnie w cieczach kilka razy szybciej niż w powietrzu), co zapisujemy:  $v \rightarrow 1006$  m/s, otrzymujemy:

$$\Delta x \approx \frac{2 \cdot 4000 \cdot 0,3 \cdot 589 \cdot 10^{-9}}{1000} \text{ m} \approx$$

$= 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,5 \text{ mm}$ ; przy przyjętych warunkach odległości między prążkami dyfrakcyjnymi powinny więc być rzędu milimetra. 1 nm (nanometr) =  $10^{-9}$  m

się do prof. Wertensteina mówiąc z pewnym żalem: „Panie Profesorze, to właściwie wszystko wiemy. Wiemy, że cały świat nas otaczający składa się z atomów, atomy z jąder, dookoła których krążą elektrony, jądra z protonów i neutronów. Właściwie to pozostały nam detale”. Wertenstein uśmiechnął się, poklepał mnie po ramieniu i powiedział: „Nie bój się, starczy jeszcze dla Was”.

W kilka miesięcy po odkryciu przez Joliota promieniotwórczości wzbudzonej **naświetlaniem** cząstkami  $\alpha$  pracowałem z Michałem Żywym używając małego źródła cząstek alfa. Przygotowaliśmy je zresztą sami w aparaturze szklanej, w której znajdowało się w roztworze wodnym te 60 mg radu w postaci chlorku radu. Wyciągaliśmy znad roztworu emanację radu, oczyszczaliśmy ją i kondensowaliśmy w małej szklanej rurce, w której końcu wtopiona była płytka platynowa.

Po jakimś dniu, dwóch dniach pozostawiania płytki w atmosferze radonu powierzchnia jej była aktywowana produktami jego rozpadu. Po usunięciu radonu, odcięciu rurki, wyjęciu płytki i umieszczeniu jej w odpowiedniej osłonie naprzeciwko cienkiego okienka, które przepuszczało cząstki alfa i zatrzymywało jądra odskoku, mieliśmy źródło cząstek alfa.

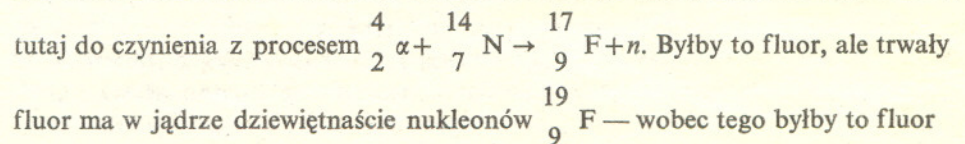
Otóż naświetlając różne tarcze cząstkami alfa stwierdziliśmy bardzo dziwny efekt, którego nie rozumieliśmy. Niezależnie od tego, co naświetlaliśmy, materiał stawał się radioaktywny. Z absorpcji wynikało, że w wyniku rozpadu emitowane są elektrony. Co zaś było najbardziej uderzające — to że czas połowicznego zaniku niezależnie od materiału naświetlanego był zawsze ten sam, około jednej minuty.

Wertenstein nawet sugerował, że może dzieje się coś z cząstką alfa. Otóż kiedyś wieczorem zastanawialiśmy się nad tym i doszliśmy do przekonania, że jeszcze jeden czynnik jest wspólny we wszystkich tych eksperymentach, mianowicie atmosfera powietrza. Myśmy naświetlali w powietrzu — może był to wynik oddziaływania cząstek alfa z jądrami składników powietrza?

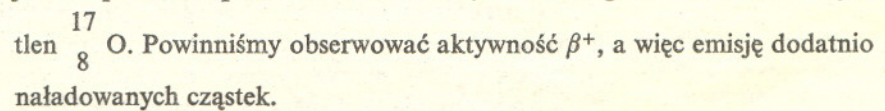
No i zaczęliśmy zadawać pytania. Naświetliliśmy tarczę w próżni — efekt zagał.

No dobrze, efekt zależy od powietrza. Naświetliliśmy w atmosferze tlenu — efektu nie było. Po naświetleniu w atmosferze azotu efekt pojawił się.

Wiedzieliśmy wobec tego, że jest to oddziaływanie alfa-azot. W tym czasie wiedzieliśmy również, że bombardowane cząstkami alfa substancje zawierające azot stają się źródłem neutronów. Można wobec tego było przypuszczać, że mamy



z niedomiarem neutronów. Jeżeli jest niedomiar neutronów, to jest to prawdopodobnie jądro nietrwałe. Jeżeli jądro jest nietrwałe, to prawdopodobnie jeden z protonów przechodzi w neutron, wobec czego fluor zamienia się w trwały



Wzięliśmy wobec tego nasze naświetlone płytki, licznik Geigera (sami go zresztą zrobiliśmy) i umieściliśmy w polu magnetycznym w taki sposób, że przy określonym kierunku pola magnetycznego licznik faworyzował detekcję cząstek ujemnych; przy zmianie pola faworyzowana była detekcja cząstek dodatnich. Pomiar wykazał, że mamy do czynienia z emisją cząstek naładowanych dodatnio. Mieliśmy rację: dziwny efekt powodowało oddziaływanie cząstek alfa z azotem w powietrzu.

Nasze doświadczenia skończyliśmy koło dziewiątej rano, to znaczy spędziliśmy w laboratorium całą noc. Pamiętam, że kiedy wychodziłem z rana z pracowni, byłem pod niesłychanie silnym wrażeniem możliwości takiego dialogu z przyrodą, zadawania pytań, uzyskiwania odpowiedzi i tego, że w ciągu jednej nocy można było rozwiązać zagadnienie, potwierdzić lub odrzucić taką czy inną hipotezę.

Gdy patrzę wstecz na swoje przeżycia z różnych czasów, jeżeli chodzi o pracę doświadczalną, to muszę przyznać, że to była chyba najfantastyczniejsza przygoda, jaka mnie spotkała.

# Ankieta — konkurs

Znamy się już ponad rok. W tym czasie Czytelnicy zdołali zapewne wyrobić sobie opinię o «Delcie». Pragniemy ją poznać — i to jest cel naszej ankiety-konkursu.

Wypowiedzi prosimy nadsyłać na adres Redakcji, z dopiskiem na kopercie: „Ankieta-konkurs”. Wśród Czytelników, którzy nadesłali wypowiedzi do dnia 1 marca br., będą rozlosowane nagrody rzeczowe.

Forma wypowiedzi jest w zasadzie dowolna, dla Redakcji byłoby jednak wygodniej, gdyby uczestnicy ankiety-konkursu odpowiedzieli na poniższe pytania, uzupełniając ewentualnie swą wypowiedź na osobnej kartce. Oto pytania:

1. Wiek .....
2. Płeć .....
3. Miejsce zamieszkania (miejscowość, z zaznaczeniem: duże miasto, małe miasto, osada, wieś) .....
4. Zawód .....
5. Rodzaj szkoły (w przypadku uczniów) .....
6. Rodzaj miejsca pracy .....
7. Zainteresowania .....
8. Interesuję się fizyką i matematyką\*, gdyż .....
9. Najbardziej interesuje mnie w fizyce i matematyce\* .....
10. Po co czytam «Deltę» .....
11. «Deltę» czytam systematycznie, niesystematycznie\* od .....
12. «Deltę» kupuję w kiosku, prenumeruję, pożyczam\* .....
13. Czego dotychczas było w «Delcie» za wiele, a czego za mało .....
14. Co sądzę ogólnie o poziomie artykułów w «Delcie» .....

\* Niepotrzebne skreślić



## Rozwiązanie zadania M38.

Przypuśćmy, że liczby naturalne  $x, y, z$  spełniają równość  $xy(x+y) = z^3$ . Niech  $d$  będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb  $x$  i  $y$ . Mamy więc  $x = dx_1, y = dy_1$ , gdzie  $x_1$  i  $y_1$  są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi oraz

$$d^3 x_1 y_1 (x_1 + y_1) = z^3,$$

skąd  $x_1 y_1 (x_1 + y_1) = \left(\frac{z}{d}\right)^3$ . Liczba  $\frac{z}{d}$  jest

więc liczbą naturalną, nazwijmy ją  $z_1$ . Zauważmy, że każda z liczb  $x_1, y_1$  jest względnie pierwsza z  $x_1 + y_1$ , jeżeli bowiem  $k|x_1$  i  $k|x_1 + y_1$ , to  $k|y_1$  i  $k$  jest wspólnym dzielnikiem liczb  $x_1$  i  $y_1$ .

Liczba  $z_1^3$  jest więc iloczynem liczb:  $x_1, y_1,$

$x_1 + y_1$ , z których każde dwie są względnie pierwsze. Każda z nich musi więc być sześcianem liczby naturalnej:  $x = a^3, y = b^3, x_1 + y_1 = c^3$ , skąd  $a^3 + b^3 = c^3$ . Równość ta jednak nie może zachodzić dla żadnych liczb naturalnych  $a, b, c$ , co stanowi szczególny przypadek (udowodniony!) wielkiego twierdzenia Fermata (zob. artykuł A. Rotkiewicza, «Delta», 1974, 10).

## Rozwiązanie mini-konkursu z nr 12

Funkcja  $f$  — „mąż” przeprowadza wzajemnie jednoznacznie zbiór  $A, B, D, K$  pań na zbiór  $E, F, H, J$  panów, przy czym pary taneczne to:

- (1)  $E-B,$
- (2)  $f(K)-A,$
- (3)  $f(A)-D,$
- (4)  $F-f^{-1}(J),$
- (5)  $J-f^{-1}(E).$

Z (1)–(3) wynika, że  $f(K) \neq E \neq f(A)$ , zaś z (1) i (5) —  $B \neq f^{-1}(E)$ , czyli  $E \neq f(B)$ . Musi więc być

$$E = f(D).$$

Podstawiając do (5) otrzymujemy  $J-D$  i wobec (3) mamy

$$J = f(A).$$

Po podstawieniu do (4) mamy  $F-A$ , co wobec (2) daje

$$F = f(K).$$

Z konieczności jest zatem

$$H = f(B)$$

oraz  $H-K$ .





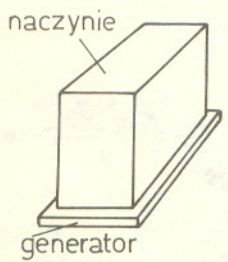
15. Który(-e) z dotychczas opublikowanych artykułów w «Delcie» .....
  - a. najbardziej mi się podobał .....
  - b. nie podobał mi się wcale .....
  - c. był najbardziej pożyteczny .....
  - d. był bezwartościowy .....
  - e. był za łatwy .....
  - f. był za trudny .....
16. Moja ocena zadań .....
  - a. z matematyki .....
  - b. z fizyki .....
17. Moja ocena działu „Laboratorium w Domu” .....
18. Moja ocena reportaży „«Delta» z wizytą...” .....
19. Moja ocena szaty graficznej «Delty» .....
  - a. okładka .....
  - b. ilustracje .....
  - c. układ graficzny .....
  - d. inne .....
20. Moja ocena wkładki «Mała Delta» .....
21. Oczekuję w «Delcie» materiałów dotyczących (ew. w jakiej formie?) .....
22. Inne uwagi i propozycje .....

Czekamy na wasze listy



## Zadania

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI



**F13.** Rysunek przedstawia naczynie szklane wypełnione cieczą, zaopatrzone w generator ultradźwięków o częstotliwości  $\nu$ , umożliwiające wytworzenie w cieczy fali stojącej, której powierzchnie węzłów i strzałek są równoległe do powierzchni cieczy. Jak, dysponując dodatkowo ekranem, soczewką o znanej ogniskowej  $f$ , przyrządem do dokładnego określania odległości oraz monochromatyczną wiązką równoległą światła o znanej długości fali  $\lambda$  określić prędkość  $v$  rozchodzenia się fal ultradźwiękowych w cieczy?

Rozwiązanie na str. 6

(Zadanie nadesłał K. Doroba).

Redaguje mgr A. MAKOWSKI

**M37.** Czy liczba  $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$  jest dodatnia, ujemna, czy równa zero?  
Rozwiązanie na str. 17

**M38.** Udowodnić, że równanie  $xy(x+y) = z^3$  nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych  $x, y, z$ .  
Rozwiązanie na str. 7

**M39.** Dany jest kwadrat  $ABCD$ . Znaleźć takie punkty  $E, F, G, H$ , leżące odpowiednio wewnątrz boków  $AB, BC, CD, DA$ , aby

$$AE = \frac{1}{2} BF = \frac{1}{3} CG = \frac{1}{4} DH$$

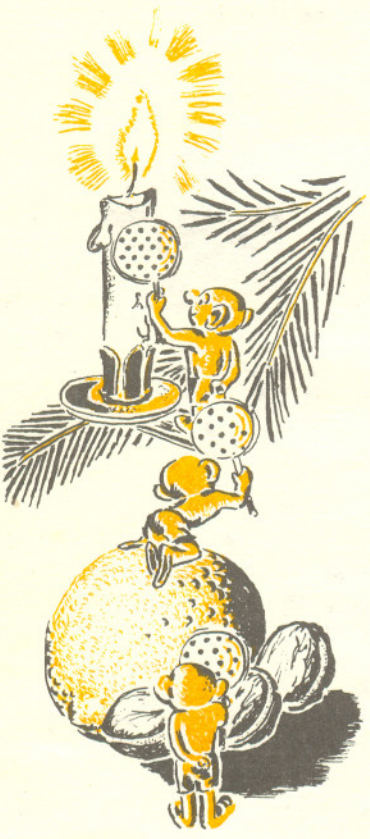
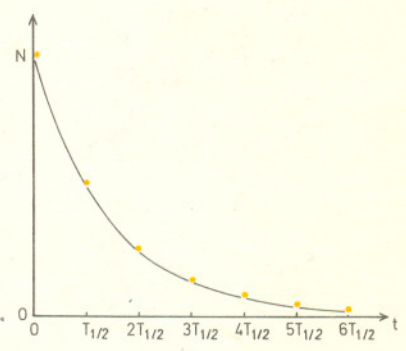
i czworokąt  $EFGH$  był trapezem.  
Rozwiązanie na str. 15

# S mała delta



## Czy jądra atomowe się starzeją

Nie chcę cię straszyć, ale krzesło, na którym siedzisz, jest dziurawe. Co gorsze, również i w podłodze jest pełno dziur. Także twoja ręka, gdyby się jej dobrze przyjrzeć, okazałaby się pustą przestrzenią, w której gdzieś znajdują się małe ciężkie kulki. Są to jądra atomowe. Są one tak małe, że aby je zobaczyć gołym okiem, trzeba je powiększyć milion milionów razy. Oczywiście nikt nie wynalazł takiego mikroskopu, przez który można byłoby zobaczyć jądra atomowe. Mimo że trzeba je badać „po omacku”, fizycy jądrowi wiedzą o nich bardzo dużo. Udało im się na przykład zmierzyć jądra atomowe różnych pierwiastków, określić ich masy. Wiadomo też, że jądra niektórych atomów są nietrwałe. W wyniku ich rozpadu tworzą się jądra innych, lżejszych pierwiastków. Na przykład w rudzie uranowej stale ubywa uranu, a przybywa ołowiu, przy czym z rudy wydobywa się gazowy hel. Bardzo ciekawe jest, jak proces rozpadu jąder nietrwałych (promieniotwórczych) przebiega w czasie. Otóż fizycy stwierdzili, że w równych odcinkach czasu rozpada się zawsze ta sama część poprzednio istniejących jąder. Na przykład spośród wszystkich jednakowych jąder promieniotwórczych, zawartych w danej próbce w pewnej chwili początkowej, w ciągu pewnego określonego czasu  $T_{1/2}$  (zwanego czasem połowicznego zaniku) rozpada się połowa, po czasie  $2T_{1/2}$  pozostaje już tylko 1/4 początkowej liczby, po czasie  $3T_{1/2}$  pozostaje 1/8 — i tak dalej. Za każdym razem pozostaje połowa poprzednio istniejącej liczby. Zależność liczby jąder, które się jeszcze nie rozpadły, od czasu ilustruje wykres:



Spróbujmy zrozumieć, dlaczego tak się dzieje. Jaka to własność jąder promieniotwórczych decyduje o takim zachowaniu się ich liczby w funkcji czasu? Nie jest to wcale łatwe. Fizykom zajęło to 6 lat. Fizyką zajmują się na ogół ludzie dorośli, którzy nie lubią się bawić. Zapominają oni, że zabawa czasem pomaga zrozumieć najtrudniejsze problemy naukowe. A więc do zabawy! Do tej zabawy będą Ci potrzebne monety dziesięcio- lub dwudziestogroszowe, mogą to też być jednakowej wielkości guziki. Musisz ich zebrać bardzo dużo, na przykład 400. Przygotuj jeszcze duży arkusz papieru i kredki. Na papierze narysuj parę zupełnie dowolnych linii. Następnie rozrzuć monety po papierze tak, żeby żadna nie upadła poza arkusz i żeby nie leżały jedna na drugiej. Wyszukaj wszystkie monety, które leżą na liniach lub ich dotykają, policz je i odłóż na bok. Pozostałe monety rzuć jeszcze raz. Powtórz to kilka razy, aż liczba monet zmniejszy się do około 50. Zrób teraz wykres liczby monet, które ci zostały po każdym rzucie w zależności od numeru rzutu. Co otrzymałeś? Porównaj swój wynik z tym, co otrzymał pewien fizyk, który lubi się bawić, mimo że jest dorosły. Uzbierał on 500 dziesięciogroszówek. Monety rzucał 12 razy, za każdym razem zabierając te, które upadły na linię. Oto wyniki, jakie on otrzymał:

liczba monet	500	436	382	332	281	240	203	172	146	128	109	90	78
numer rzutu	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Przyjrzyj się tym liczbom: po każdym rzucie liczba monet jest mniejsza od poprzedniej o prawie ten sam czynnik: 0,86. A więc ubywanie monet w naszej zabawie podlega temu samemu prawu, co rozpad jąder promieniotwórczych. Monety odgrywają tu rolę jąder, a kolejne numery rzutów odpowiadają równym odstępom czasu. Wartość liczby 0,86 jest oczywiście przypadkowa. Ty możesz otrzymać zupełnie inną liczbę, większą lub mniejszą (oczywiście zawartą między 0 a 1), zależnie od tego, jak duży będziesz miał arkusz papieru, jak dużo linii narysujesz i jak dużych monet użyjesz. Otrzymana liczba określa prawdopodobieństwo, że przypadkowo rzucona moneta natrafi na linię.

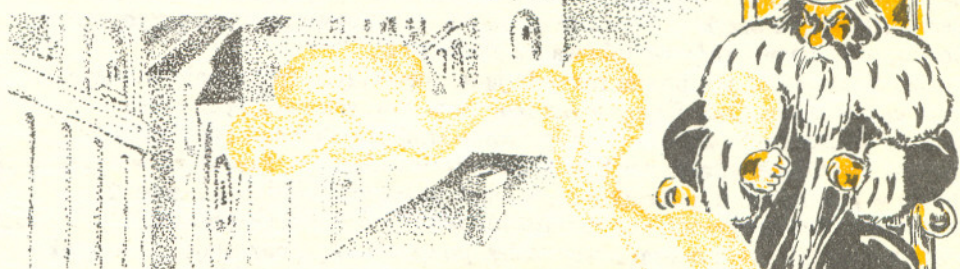


Oczywiście prawdopodobieństwo to jest jednakowe dla wszystkich monet, jeśli są one jednakowych rozmiarów i jednakowe przy każdym rzucie, niezależnie od tego, ile razy już poprzednio rzuciłeś monety.

Domyśliamy się, że podobnie ma się sprawa z jądrami atomowymi. Prawdopodobieństwo rozpadu w jednostce czasu jest jednakowe dla wszystkich jąder tego samego rodzaju, a dla danego jądra nie zależy ono od tego, ile czasu już ono przeżyło. A więc jądro atomowe nie starzeje się! Dla jądra uranu znajdującego się w rudzie uranowej jednakowo prawdopodobny był rozpad kilka miliardów lat temu, kiedy to prawdopodobnie powstawała Ziemia, jak teraz, czy za dalszych parę miliardów lat. Jest to zaskakujący wniosek. Na co dzień mamy przecież do czynienia z czymś przeciwnym. Samochód jeździ dobrze, póki jest nowy, z biegiem czasu coraz bardziej prawdopodobne jest, że coś w nim zacznie „nawalać”. Podobnie jest, niestety, z człowiekiem i wszystkimi istotami żywymi. Trudno było człowiekowi zrozumieć to prawo, skoro on sam jemu nie podlega.



## Kłopoty królewskiego błazna



Błazen Śmieszek nie miał łatwego losu na dworze króla Ponuraka. Ale dowcip i mądrość pomagały Śmieszkowi znaleźć wyjście z najtrudniejszych nawet sytuacji. Zdarzyło się jednak, że król Ponurak rozgniewany zbyt złośliwymi żartami na temat jego królewskiej osoby, skazał błazna na karę chłosty i pobyt w ciemnicy.

— Nic już nie pomogą żarty i sztuczki, zmienić twój los może tylko szczęśliwy traf — powiedział król. — Zrobimy taką próbę: sześć kul, trzy białe i trzy czarne, rozmieścimy w dwóch dzbanach, greckim i perskim. Potem rzucę moją ulubioną złotą kością do gry. Jeśli wyrzucę nieparzystą ilość oczek, wyciągnę jedną kulę z greckiego dzbanu, natomiast jeśli wyrzucę parzystą ilość oczek, wyciągnę jedną kulę z dzbanu perskiego. Wyciągnięta biała kula uwolni cię od kary, natomiast czarna skazuje na chłostę i ciemnicę, co będzie zasłużoną karą za twą zuchwałość. — Królu — rzekł na to błazen — niech mi przynajmniej będzie wolno wybrać samemu swój los.

— O nie — odparł król — sam będę losował. Jeszcze byłbyś gotów spróbować jednej z twoich sztuczek. Pozwolę ci jednak łaskawie samemu wrzucić kule do dzbanów. Dopilnuję tylko, żebyś nie wyrzucił gdzieś czarnych kul. Wszystkie muszą znaleźć się w dzbanach!!

Śmieszek zrobił żalosną minę, ale w duchu nie tracił nadziei. — Król myśli, że mam tylko trzy szanse na sześć — pomyślał. — Wygląda jednak na to, że moje szanse przedstawiają się znacznie lepiej. Muszę tylko zastanowić się jak najmądrzej rozmieścić kule w dzbanach. I tak rozważając, Śmieszek poprosił króla o pewien czas do namysłu, na co ten wspaniałomyślnie przystał.

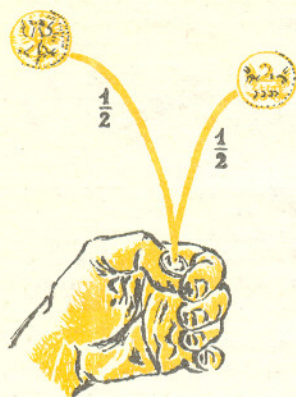


Opowiedzieliśmy wam, drodzy Czytelnicy, tę historyjkę oczywiście po to, żeby wspólnie rozwiązać problem błazna. Zaczniemy jednak od sytuacji trochę prostszych niż mające się odbyć w pałacu króla Ponuraka losowanie. Wyobraźmy sobie np., że ktoś wielokrotnie rzuca monetą, (np. tysiąckrotnie) i notuje za każdym razem wynik: orzeł czy reszka. Po wykonaniu takiego doświadczenia, będziemy mogli mówić o częstości wypadania orła. Określimy ją jako stosunek liczby wyrzuconych orłów do liczby wszystkich rzutów:

$$\text{częstość orła} = \frac{\text{liczba orłów}}{\text{liczba wszystkich rzutów}}$$

Dla zwykłej, nieuszkodzonej monety okaże się, że przy bardzo dużej ilości rzutów częstość orła jest  $1/2$ . Jednokrotny rzut monetą możemy opisać całkowicie przy pomocy takiej oto tabelki:

wynik	orzeł	reszka
prawdopodobieństwo	$1/2$	$1/2$



Ten sam rzut monetą można opisać jeszcze inaczej rysując „rozwidlenie” z taką ilością „gałęzi”, ile jest możliwych wyników, i przy każdej gałęzi pisząc liczbę będącą prawdopodobieństwem odpowiedniego zdarzenia.

Czytelnik może samodzielnie znaleźć prawdopodobieństwo orła i reszki w monecie niesymetrycznej (np. obciążonej z jednej strony kawałeczkiem ołowiu lub plasteliny). Należy w tym celu wykonać bardzo dużą ilość rzutów i co pewien czas liczyć częstości.

Wróćmy teraz do problemu błazna. Zastanówmy się najpierw, jakie jest prawdopodobieństwo, że król będzie ciągnął kulę z dzbanu greckiego, a jakie, że z perskiego. Zależy to od wyniku rzutu kością do gry.

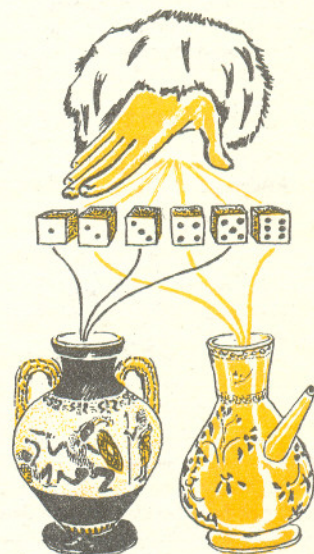
Zakładamy, że kość jest „uczciwa”, to znaczy, że częstości każdego z wyników są takie same. Wynikiem jednego rzutu może być wyrzucenie 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 „oczek”. Gdybyśmy rzut kostką wykonali wiele razy, okazałoby się, że częstość wyrzucania każdej z liczb jest  $1/6$ . Oto tabelka opisująca rzut kostką:

wynik	1	2	3	4	5	6
prawdopodobieństwo	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Możemy także narysować odpowiednie „rozwidlenie”, zaznaczając jednocześnie, które wyniki sprzyjają wyborowi dzbanu greckiego, a które perskiego.

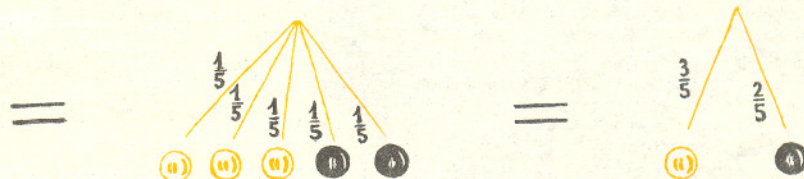
Jeżeli król wyrzuci 1, 3, lub 5, będzie losował z greckiego dzbanu, a więc wyborowi greckiego dzbanu sprzyjają trzy wyniki na sześć wszystkich. Zatem prawdopodobieństwo takiego wyboru jest  $3/6$  czyli  $1/2$ .

Oczywiście prawdopodobieństwo, że król będzie losował z dzbanu perskiego jest również  $1/2$ .



Przypuśćmy teraz, że w jednym z dzbanów jest 5 kul: 3 białe i 2 czarne. Król ciągnie z tego dzbanu jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnie kulę białą?

Każdą z pięciu kul możemy wyciągnąć z takim samym prawdopodobieństwem równym  $1/5$ .



Na powyższym „rozgałęzieniu” trzy gałęzie sprzyjają wyciągnięciu kuli białej, a wszystkich gałęzi jest pięć. Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej jest  $3/5$ . „Rozgałęzienie” możemy dlatego narysować prościej.



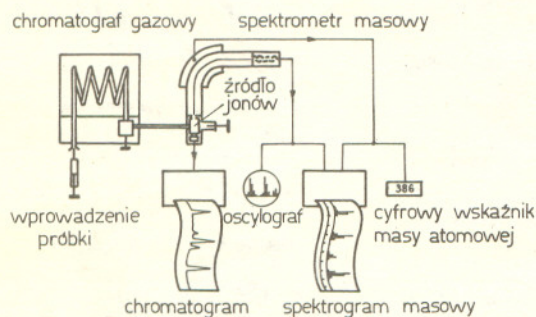
Losowanie, które ma się odbyć w pałacu króla Ponuraka, jest trochę bardziej skomplikowane, niż zagadnienia, którymi zajmowaliśmy się dotąd. Powrócimy do niego w następnym numerze. Na razie proponujemy Czytelnikom zastanowienie się nad prawdopodobieństwem wyciągnięcia białej kulki przy różnych układach kul w dzbanie. Na przykład: dwie białe i trzy czarne, jedna biała i dwie czarne, a także układy z większą ilością kolorów.

# «Delta» z wizytą w Instytucie Chemii Przemysłowej

Przeciętnemu człowiekowi praca chemika kojarzy się na ogół z przelewaniem różnobarwnych płynów z probówki do retorty czy kolby — zwłaszcza gdy mowa o analizach chemicznych, będących jednym z podstawowych zajęć chemika w laboratorium naukowym, badawczym czy fabrycznym. Po chwili namysłu niektórzy dodadzą do tego obrazu jeszcze spektrograf, który służy do analizy widmowej, ale to już na ogół wszystko. Tymczasem probówka i retorta w takim samym stopniu mogą być symbolami współczesnej chemii, w jakim stopniu młotek i obcegi można uznać za symbol dzisiejszej techniki przemysłowej. Obecnie chemia stosuje wiele różnego rodzaju metod badawczych i analitycznych, używając w tych celach wielu różnorodnych i skomplikowanych przyrządów. Postęp w tej dziedzinie byłby chyba niemożliwy bez ścisłej współpracy m.in. z fizyką, gdyż nie tylko budowa, ale i obsługa wielu urządzeń tego rodzaju wymaga zatrudnienia wykwalifikowanych fizyków. Do związków między fizyką i chemią powrócimy jeszcze na łamach «Delt», tymczasem zaś proponujemy wycieczkę do Instytutu Chemii Przemysłowej w Warszawie, by zobaczyć, jak wyglądają probówki nowoczesnej chemii.

Jesteśmy w Zakładzie Spektrometrii Stosowanej Instytutu. Celem Zakładu jest wdrażanie metod fizycznych do analityki chemicznej oraz prowadzenie prac metodycznych nad opanowaniem i udoskonaleniem nowych metod analizy instrumentalnej. Zakład wchodzi w skład Warszawskiego Laboratorium Środowiskowego Aparatury Chemicznej, kierowanego przez prof. Janinę Świątosławską. Istnienie centralnych laboratoriów tego rodzaju jest jedną z cech charakterystycznych współczesnej nauki. W dobie coraz bardziej skomplikowanych i wyspecjalizowanych metod i urządzeń badawczych laboratoria takie mają na celu koncentrację kadry i kosztownej aparatury. Warszawskie Laboratorium prowadzi wszechstronne badania analityczne dla różnych placówek chemicznych. Przeprowadza się tu analizy mieszanin wieloskładnikowych, często bardzo skomplikowanych związków organicznych, identyfikuje produkty nowych syntez, bada się katalizatory, wykonuje analizy śladowych zanieczyszczeń i domieszek, prowadzi prace mające na celu określenie struktur molekuli.

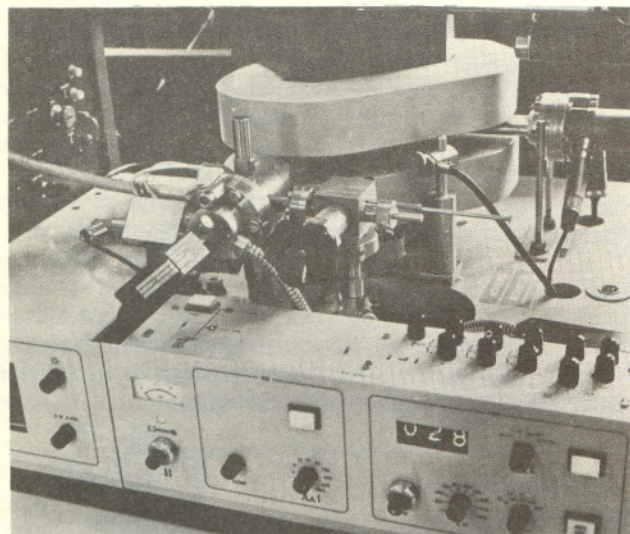
Do tych celów służą skomplikowane aparaty, jak na przykład spektrometr masowy, spektrometr ramanowski ze wzbudzeniem laserowym (za pomocą lasera helowo-neonowego), spektrometr do badania absorpcji atomowej promieniowania analizowanych próbek i inne. Każdy z nich godzien jest uwagi. Dla przykładu poznamy bliżej jeden — spektrometr masowy sprzężony z chromatografem



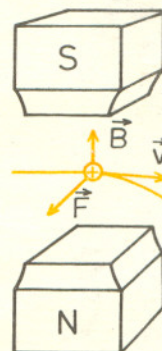
Rys. 1. Schemat blokowy spektrometru gazowego sprzężonego z chromatografem gazowym

gazowym Varian MAT 11 (zdjęcie na pierwszej stronie okładki przedstawia widok ogólny przyrządu). Urządzenie służy do analizy składu badanej próbki metodą wyznaczania mas atomowych wszystkich jej składników (a także do badań struktury molekuł składników — przez wyznaczenie mas atomowych różnych fragmentów molekuli). Schemat organizacyjny urządzenia przedstawia rys. 1. Badaną próbkę (wystarczy jej zaledwie około 1  $\mu\text{g}$ !) wprowadza się za pomocą specjalnej strzykawki do kolumny chromatograficznej. W tym miejscu utrzymywana jest kontrolowana podwyższona temperatura, dzięki czemu próbka paruje. Pary są porywane przez hel (gaz nośny), przepływający przez kolumnę pod ciśnieniem około 3 atm. W kolumnie następuje rozdzielenie próbki na frakcje (idea metody chromatograficznej — zob. «Delta», 1974, nr 11). Każda frakcja kierowana jest dalej do specjalnego separatora, który zatrzymuje znaczną część gazu nośnego, a przepuszcza pary kolejnych frakcji badanej próbki (w spektrometrze masowym musi być względnie bardzo niskie ciśnienie — około 3 miliony razy niższe niż w kolumnie).

Z separatora badane frakcje przechodzą już bezpośrednio do spektrometru masowego (fot. 1). Tą nazwą oznacza się urządzenie, w którym następuje rozdział strumienia cząstek naładowanych na składniki o jednakowych masach atomowych. Rozdziału tego dokonuje się za pomocą pola magnetycznego, które zakrzywia tor poruszającej się cząstki naładowanej (rys. 2). Aby jednak pole magnetyczne mogło zakrzywić tor poruszającej się cząstki, musi ona mieć ładunek elektryczny. W tym celu frakcje próbki wprowadza się najpierw do tzw. źródła jonów. Tu strumień elektronów (przyspieszonych w polu o napięciu około 70 V) z działka elektronowego jonizuje molekuly, a także znaczną ich część rozбивa na fragmenty (gdyby energia elektronów była znacznie większa, molekuly zostałyby rozbite na pojedyncze atomy i na podstawie analizy masowej moglibyśmy jedynie powiedzieć, z jakich atomów składały się molekuly związków zawartych w próbce, nie można byłoby zaś powiedzieć, jakie molekuly znajdowały się w próbce). W tym ostatnim procesie (zwanym fragmentacją) mogą też zachodzić ciekawe przeprowadzenia atomów we fragmentach.

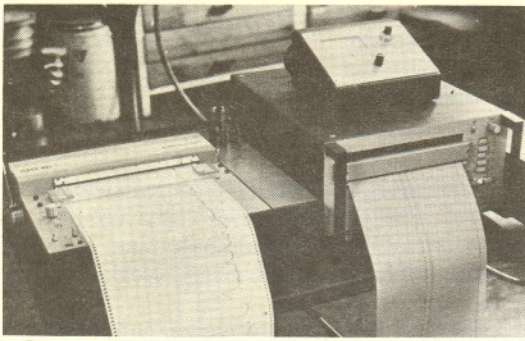


Fot. 1. „Serce” spektrometru masowego

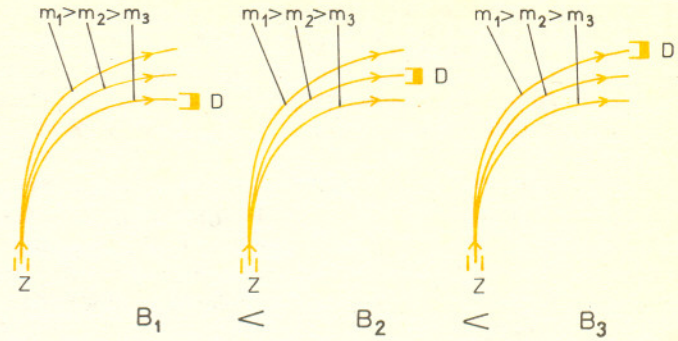


Rys. 2 Siła Lorentza (F) działająca na cząstkę naładowaną (tu: dodatnio) poruszającą się z prędkością  $v$  w polu o indukcji  $B$

Zjonizowane molekuly i fragmenty molekuli zostają następnie przyspieszone w polu o napięciu rzędu kilku kilowoltów. Ich prędkość osiąga dzięki temu wartość znacznie większą od prędkości termicznej, dzięki czemu praktycznie można przyjąć, że ze źródła jonów wybiegają cząstki o takiej samej energii. Początek i koniec okresu, w ciągu którego ze źródła jonów wybiegają jony kolejnej frakcji, można łatwo określić, mierząc całkowity prąd jonowy. Jest on rejestrowany za pomocą standardowego urządzenia piszącego (fot. 2). Jeśli więc pisak zaznacza maksimum tego prądu, to świadczy to, że źródło jonów opuściły zjonizowane molekuly i fragmenty kolejnej frakcji.



Fot. 2. Urządzenia piszące spektrometru masowego: z lewej — chromatogram, z prawej — spektrogram masowy

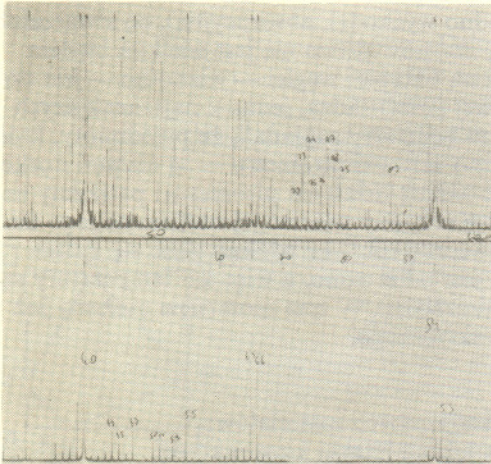


Rys. 3. Tory trzech cząstek naładowanych o różnej masie ( $m_1 > m_2 > m_3$ ) w jednorodnym polu magnetycznym o coraz większej indukcji ( $B_1 > B_2 > B_3$ ); z — źródło jonów, D — detektor cząstek (w stałych położeniach).

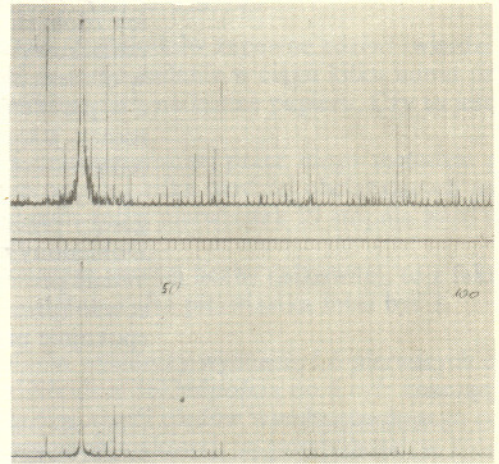
Ze źródła jonów cząstki trafiają do obszaru jednorodnego pola magnetycznego o kontrolowanej indukcji (jego źródłem jest elektromagnes widoczny na fot. 1; indukcję pola zmienia się przez zmianę natężenia prądu płynącego przez uzwojenie elektromagnesu). W obszarze pola cząstka biegnie po okręgu, po czym wpada do detektora cząstek (jest to powielacz elektronowy). Promień cząstki jest tym większy, im większą masę  $m$  ma cząstka. Jeśli więc przy danej indukcji do detektora trafią cząstki o danej masie, to cząstki lżejsze i cięższe trafią obok i detektor ich nie zarejestruje. Zamiast jednak przesuwając detektor cząstek, lepiej jest zmieniać pole magnetyczne (rys. 3). Przy wzroście indukcji do detektora będą trafiały cząstki o coraz większej masie (skrupulatnemu Czytelnikowi radzimy w tym miejscu udowodnić, że stosunek masy  $m$  do ładunku elektrycznego  $e$  cząstki wyraża się następującym wzorem przez indukcję magnetyczną  $B$ , promień toru  $r$  oraz

$$\text{napięcie } U \text{ przyspieszające jony: } \frac{m}{e} = B^2 r / 2U.$$

Wskazania detektora przy wzrastającym  $B$  rejestrowane są przez szybkościowe urządzenie rejestrujące. Liczba cząstek wpadających do detektora generuje w nim prąd elektryczny (tym silniejszy, im więcej cząstek wpada do detektora). Prąd ten powoduje proporcjonalne odchylenie wąskiej smugi światła nadfioletowego, która pada na przesuwający się papier światłoczuły (ulegający od razu wywołaniu). Na wyjściu urządzenia otrzymujemy więc od razu widmo mas atomowych danej frakcji (fot. 2). Aby widma kolejnych frakcji nie pomieszały się ze sobą, każde z nich musi być sporządzone szybko. Obsługujący spektrometr śledzi więc wskazania urządzenia rejestrującego całkowity prąd jonowy. Wzrost tego prądu oznacza, że do spektrometru dotarła kolejna frakcja. Wtedy dopiero uruchamia się zmianę pola magnetycznego i jednocześnie rejestrację widma masowego. Cały proces analizy masowej danej frakcji trwa zaledwie 0,5 s. Po tym czasie urządzenie dokonujące analizy masowej wraca do stanu wyjściowego i czeka na następny sygnał do pracy.



Rys. 4



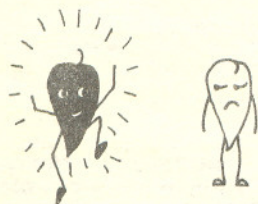
Rys. 5

Efektom analizy masowej danej frakcji jest więc zapis widma masowego frakcji. Przykład fragmentu takiego zapisu przedstawia rys. 4 (jest to oryginał, wraz z roboczymi notatkami). Widoczne są na nim dwie krzywe oraz skala wartości masy atomowej (w jednostkach fizycznych — tzw. atomowych jednostkach masy, przy czym a.j.m. to 1/16 masy atomu tlenu  $O^{16}$ ). Obydwie krzywe przedstawiają te same widma masowe, tyle tylko, że w różnej skali (skale te mają się do siebie jak 1:10). Teraz widmo masowe trzeba zinterpretować, czyli określić, jakim molekułom i ich fragmentom (dokładniej: jonom) odpowiadają poszczególne maksima widma. Opisany przez nas spektrometr masowy pozwala wyznaczyć masę atomową cząstki z dokładnością do  $10^{-5}$  a.j.m. Z taką mniej więcej dokładnością sporządzone są specjalne katalogi widm masowych znanych molekuł i ich fragmentów. Zdarza się jednak, że taką samą masę atomową ma kilka różnych molekuł, choć przy takiej dokładności, jaką gwarantuje spektrometr, w grę może wchodzić zwykle zaledwie kilka możliwości. W takich przypadkach niezwykle pomocna jest analiza mas atomowych fragmentów zarejestrowanych przez spektrometr, każdej bowiem molekułce odpowiada specyficzne widmo masowe fragmentów. Analiza fragmentów pozwala więc już jednoznacznie zidentyfikować nieznaną molekułę. Tytułem próby proponujemy Czytelnikowi, by sprawdził, że widmo na rys. 4 odpowiada fenolowi (wzór globalny:  $C_6H_5OH$ ).

Wynikną pewne przy tym kłopoty, wielu Czytelników z pewnością doszuka się jeszcze innych składników. Istotnie. Spektrometr jest urządzeniem niezwykle precyzyjnym, rejestrującym wszystko, co się doń wprowadzi. A oprócz badanej próbki dostaje się doń hel z wszystkimi swymi zanieczyszczeniami (argonem, azotem, tlenem i inn.) oraz wszelkie inne zanieczyszczenia z próbek, w których przechowuje się próbki, ze strzykawkę, z par oleju pomp utrzymujących w spektrometrze próżnię itp. Przy pracy ze spektrometrem trzeba więc zachować bardzo daleko idącą czystość i ostrożność. Mimo to tych nieproszonych zanieczyszczeń całkowicie wyeliminować się nie da. Spektrometr będzie więc zawsze coś rejestrował, nawet gdyby niczego doń nie wprowadzano. Nie obciążony spektrometr zarejestruje więc widmo masowe własnych zanieczyszczeń, czyli — tzw. tła. I dla kontroli trzeba systematycznie sprawdzać tło własne urządzenia. Oryginalny fragment zapisu takiego tła przedstawia rys. 5. Mamy nadzieję, że Czytelnik bez większych kłopotów potrafi sam zidentyfikować większość pierwiastków stanowiących zanieczyszczenia spektrometru.

## TYLKO DLA CZARNOWIDZÓW: BUDUJEMY PIROMETR

Czy interesowało Was kiedy, jaką temperaturę może mieć płomień świecy? A płomień lampy naftowej lub rozżarzony węgiel? Na pewno zbyt wysoką, żeby ją zmierzyć szklanym termometrem rtęciowym. Doskonale natomiast nadaje się do tego pirometr, który każdy z Was może sobie zbudować z żaróweczki, spirali grzejnej i paru innych łatwych do zdobycia elementów. Nie będziemy oczywiście bezmyślnie budowaliśmy przyrządu nie zaznajomiwszy się z fizycznymi zjawiskami, dzięki którym może on działać. A więc do fizyki.



## NAJJAŚNIEJ ŚWIECI ... CIAŁO CZARNE.

Nic na to nie poradzę, tak jest naprawdę. Ale zacznijmy po kolei: bywają ciała bardziej lub mniej czarne. Fizyk mierzy czarność jakiegoś ciała przez określenie jego zdolności absorpcyjnej  $A$ . Jest to ułamek wyrażający część energii padającego promieniowania, jaką ciało pochłania. Ciała, które całkowicie pochłaniają padające promieniowanie, nazywa się ciałem doskonale czarnym. Oczywiście jego zdolność absorpcyjna równa się jedności. Wiadomo, że jeżeli ogrzejemy silnie jakieś ciało, zaczyna ono świecić. Promieniowanie wysyłane przez ciało doskonale czarne ma tę przyjemną cechę, że zależy ono jedynie od temperatury tego ciała.

Badając promieniowanie ciała doskonale czarnego możemy więc określić jego temperaturę. Jak wynika z dokładnych pomiarów, a także z bardzo ogólnego prawa fizycznego — II zasady termodynamiki, wszelkie inne ciała świecą słabiej od ciała doskonale czarnego (w tej samej temperaturze) i to w tym samym stosunku, w jakim słabiej od niego pochłaniają światło. **Zdolność emisyjna ciała  $e$  jest równa jego zdolności absorpcyjnej  $A$ .**

Widać więc już, dlaczego czarnowidz najchętniej zabierze się do budowy pirometru: temperaturę wszystkich ciał (czarnych — w jego mniemaniu) będzie mógł wyznaczać z ich promieniowania. W przypadku innych ciał należałoby jeszcze znać ich zdolność emisyjną (lub, co na jedno wychodzi, absorpcyjną), co stwarzałoby dodatkowy kłopot. Prawdę mówiąc, czarnowidztwo nie jest wielkim błędem w odniesieniu do ciał wymienionych na wstępie; węgiel — wiadomo — jest czarny, a w płomieniu świecy i lampy naftowej świeci sadza, jedna z najczarniejszych rzeczy, jakie znamy. W dalszym ciągu będziemy zakładali, że przedmioty, których temperaturę mierzymy, a także włókno żarówki pirometru — są ciałami doskonale czarnymi. Pozostaje jeszcze wyjaśnić zasadę działania pirometru: patrzmy na gorący przedmiot poprzez żaróweczkę tak, aby widzieć jej włókno na jego tle. Dobieramy prąd płynący przez żaróweczkę tak, aby włókno zlało się z tłem. Wtedy promieniowanie włókna i tła jest takie samo, a więc ich temperatury są równe (przy przyjętym założeniu o czarności). W tym momencie możemy już spokojnie przystąpić do działania praktycznego.

## BUDUJEMY PIROMETR

Rozpoczynamy od zgromadzenia następujących materiałów:

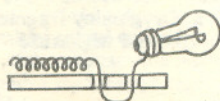
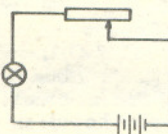
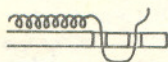
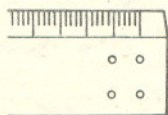
1. Żaróweczka radiowa 6,3 V/0,3 A lub od latarki kieszonkowej.
- Uwaga: przy kupowaniu żaróweczki wybieramy taką, przez którą można widzieć możliwie bez zniekształceń; zazwyczaj najlepsze pod tym względem są żarówki radiowe 6,3 V.
2. Dwie spirale grzejne (po zakończeniu doświadczeń mogą być użyte zgodnie z przeznaczeniem).
3. Dwie baterijki płaskie 4,5 V.
4. Linijka 40–50 cm.
5. Przewód miedziany (izolowany lub nie), 2 wtyczki radiowe, kawałek plastra lub taśmy izolacyjnej.

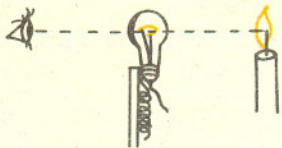
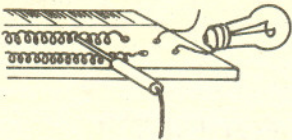
Z narzędzi przyda się lutownica (nie jest absolutnie konieczna), szczypce płaskie i trochę drobnoziarnistego papieru ściernego.

W linijce rozżarzonym drutem lub gwóźdźmi wykonujemy po cztery otwory na każdym końcu według rysunku. Posłużą nam one do zamocowania na linijce obu spirali grzejnych. Jedna ze spirali będzie opornikiem zmiennym do regulowania prądu w żaróweczce. Obwód pirometru wykonamy zgodnie ze schematem, łącząc żaróweczkę i spiralę szeregowo. Jeden koniec spirali łączymy z żaróweczką, najlepiej związując parę zwojów swobodnego końca spirali na ołówku i wkręcając w powstały „gwint” żaróweczkę (patrz rysunek). Drugim końcem zmiennego opornika będzie wtyczka radiowa przesuwana po spirali. Dla polepszenia kontaktu

Po raz pierwszy prawidłowy opis teoretyczny promieniowania ciała doskonale czarnego podał w 1900 r. znakomity fizyk niemiecki Max Planck (1858–1947).

Zdolność emisyjna (względna): stosunek energii promienistej wysyłanej przez jednostkę powierzchni ciała do energii wysyłanej przez jednostkę powierzchni ciała doskonale czarnego o tej samej temperaturze.





spirale należy oczyścić papierem ściernym z warstwy tlenków. W braku wtyczki można użyć na przykład węglowego pręcika ze starej baterijki. Resztę obwodu montujemy zgodnie ze schematem łącząc odpowiednie fragmenty przewodem miedzianym, najlepiej przez lutowanie. Baterijkę przymocujemy do linijki plastrem lub taśmą izolacyjną. Nie martwcie się, że druga spirala grzejna nie została użyta, przyjdzie i na nią czas.

Pirometr w zasadzie jest już gotowy; dla wygody używania go należy jeszcze okopcić połowę bańki szklanej żaróweczki (tę od strony oka) w płomieniu świecy lub zapałki. Będziemy mogli wtedy swobodnie patrzeć na jasno świecące włókno i dobrze je widzieć. Ustawiamy teraz pirometr między okiem a świecącym przedmiotem, którego temperaturę chcemy zmierzyć, i przesuwamy suwak na spirali w takie miejsce, żeby włókno żarówki złało się z tłem. Odczytujemy położenie suwaka — pomiar został wykonany.

Bardzo to wszystko pięknie, ale jaka jest temperatura — zapytacie z pewnością. Na razie pirometr pozwala jedynie porównywać temperaturę różnych ciał. Żeby ją określać w stopniach, musimy nasz przyrząd wycechować. Ale o tym w następnym numerze.

Idea artykułu została zaczerpnięta z zadania doświadczalnego ubiegłorocznej Olimpiady Fizycznej.

## Czytelnicy proponują

Pan Andrzej Więckowski z Poznania twierdzi, że nietrudno zostać „żywym komputerem”.

„Niewiarygodna wydaje się zdolność i pamięć Wima Kleina z Genewy” — pisze on — „który potrafił obliczyć pierwiastek dziewiętnastego stopnia z liczby stutrzydziestocyfrowej w ciągu pięciu minut, podając wynik

$$\sqrt[19]{2354894349 \dots 007} = 9267143$$

(patrz «Delta», 1974, nr 3, str. 5). Wielu Czytelników zapewne zdziwi twierdzenie, że każdy z nich jest w stanie wykonać to samo zadanie w ciągu kilku minut przy pomocy niewielu prostych obliczeń wykonanych na kartce papieru. Czy to jest rzeczywiście takie łatwe?”

Pan Więckowski pokazuje, że tak. W zaproponowanej przez niego metodzie pomyślnie wykorzystuje się kilka faktów prostych i kilka bardziej obciążających pamięć: — skoro dana liczba ma  $133 = 19 \cdot 7$  cyfr, to jej pierwiastek 19 stopnia musi mieć 7 cyfr przed przecinkiem (dlaczego?);

— jeśli wiemy, że dana liczba jest 19 potęgą pewnej liczby całkowitej, to z faktu, że ostatnią jej cyfrą jest 7 wynika, iż ostatnią cyfrą pierwiastka musi być 3 (dlaczego?);

— wynika stąd, że do wykonania zadania wystarczy wyznaczyć 6 pierwszych cyfr pierwiastka, a więc znaleźć jego przybliżenie z dokładnością do 6 cyfr znaczących;

— z prostych faktów dowodzonych w tzw. teorii błędów wynika, że do tego celu wystarczy rozważać, zamiast liczby podpierwiastkowej, jej przybliżenie, w którym jest tylko 6 pierwszych cyfr znaczących, tzn. liczbę  $0,235489 \cdot 10^{133}$ .

Wartość przybliżoną pierwiastka 19 stopnia z liczby 0,235489 można już obliczyć bez większych kłopotów, jeśli

— zna się proste wzory przybliżone na obliczanie logarytmów i antylogarytmów:

$$\lg x \approx 0,86863 \frac{x-1}{x+1} \quad (\text{dla } 0,9765 < x < 1,024),$$

$$\text{Nlg } \alpha \approx 1 + 2 \frac{\alpha}{0,86863 - \alpha} \quad (\text{dla } -0,0103 < \alpha < 0,0103);$$

— pamięta się, że  $\lg 2 \approx 0,30103$ ,  $\lg 1,024 \approx 0,0103$ ;

— oraz zauważy się, że

$$0,235489 \cdot 2^2 \cdot (1,924)^2$$

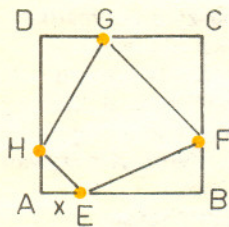
jest liczbą, do której można zastosować podany wyżej wzór przybliżony na obliczenie logarytmów.

„Nie wiemy dokładnie, jaki algorytm wyciągania pierwiastka 19 stopnia zastosował Wim Klein. Czy znał on może jeszcze prostszy algorytm rozwiązywania tego zagadnienia?” — kończy swój list pan Więckowski.



Rozwiązanie zadania M39.

Niech punkty  $E, F, G, H$  spełniają warunki zadania. Niech  $AB = a$ ,  $AE = x$ . Możliwe są dwa przypadki: 1)  $EF \parallel GH$ , 2)  $EH \parallel FG$ .



W przypadku 1) mamy  $\sphericalangle BEF = \sphericalangle HGD$  i trójkąty  $DGH$  i  $BEF$  są podobne. Ponieważ  $EB = 2x$ ,  $EB = a - x$ ,  $HD = 4x$ ,  $DG = a - 3x$ , a z podobieństwa trójkątów mamy:

$$\frac{FB}{EB} = \frac{HG}{DG},$$

więc  $\frac{2x}{a-x} = \frac{4x}{a-3x}$ . Ponieważ  $E$  leży

wewnątrz boku  $AB$ , więc  $x > 0$  i z ostatniego równania otrzymujemy  $2x(a+x) = 0$  —

sprzeczność. W przypadku 2) mamy

$\sphericalangle AEH = \sphericalangle FGC$  i z podobieństwa

trójkątów  $AEH$  i  $CGF$  otrzymujemy (wobec

$HA = a - 4x$ ,  $AE = x$ ,  $CF = a - 2x$ ,

$CG = 3x$ ):

$$\frac{a-4x}{x} = \frac{a-2x}{3x},$$

skąd  $x = \frac{a}{5}$ . Jest więc  $AE = \frac{a}{5}$ ,  $BF = \frac{2}{5}a$ ,

$$CG = \frac{3}{5}a, DH = \frac{4}{5}a$$



Dr hab. Wiktor MAREK i mgr inż. Michał SOBOLEWSKI



W kwietniowym numerze «Delt», w primaaprilisowym artykule *Aktualności podstaw matematyki*, nieznanym nam bliżej autor pisał o „różnych rodzajach przynależności do zbioru”, o „słabym byciu elementem” etc. Żartobliwe uwagi autora odnoszą się jednakże — jak to się czasem zdarza — do problematyki nie całkiem pozbawionej sensu. Spotykamy się przecież w rzeczywistości z pojęciami, które nie są dokładnie sprecyzowane. Żeby zrozumieć, gdzie leży problem, trzeba najpierw powiedzieć, czym jest pojęcie. Otóż kiedy zajmujemy się jakąś dziedziną (liczbami naturalnymi na przykład), to pojęciem lub własnością jest nic innego, jak pewien zbiór elementów, o których mówi się w tej dziedzinie (np. pojęcie parzystości może być utożsamiane ze zbiorem liczb parzystych, własność „być liczbą pierwszą” natomiast może być utożsamiana ze zbiorem liczb pierwszych, etc.). Nie znajdziemy się w żadnych kłopotach, dopóki używane przez nas wyrażenia definiujące zbiory należące będą do języka matematyki, sformalizowanego języka służącego do opisu odpowiedniej dziedziny. Kłopoty zaczynają się wtedy, kiedy staramy się poszerzyć klasę wyrażen służących do opisu owych zbiorów i zaczynamy używać języka mniej lub bardziej potocznego. Rozważmy przykład: Definiujemy podzbiór zbioru  $N$  liczb naturalnych złożony z „liczb dużo większych od 7”. Oczywiście opis naszego zbioru nie jest ścisły; zawiera element subiektywizmu. W zależności mianowicie od tego, kto ma do czynienia z powyższym wyrażeniem, zbiór ten może przybierać różne postaci. Ja na przykład sądzę, że liczba 43 należy do rozważanego zbioru, a prawdopodobnie większość Czytelników zgodziłaby się, że liczba  $10^6$  też do niego należy. Jednakże liczba  $10^6 - 1$  jest niewiele mniejsza od  $10^6$ , więc i ją należy również zaliczyć do naszego zbioru; jest właściwie rzeczą oczywistą, że jeśli  $x$  jest dużo większy od 7 to  $x - 1$  też. A stąd już bardzo blisko do konkluzji, że 7 jest dużo większe od 7, co jednak nie jest chyba prawdą. Innym przykładem jest próba zdefiniowania „wysokiego mężczyzny”. Tu powód niejednoznaczności będzie nieco inny, ale widać, że znowu powstają kłopoty. Z problemem nieprecyzyjnego określania przynależności spotkali się inżynierowie zajmujący się komputerowym (automatycznym) rozpoznawaniem postaci. Spójrzmy na przykład na znaczek  $\mathfrak{A}$  i spróbujmy powiedzieć, czy miała to być litera  $a$  czy  $d$ . Laseczka jest za krótka, byśmy byli pewni, że to jest  $d$ , ale za długa, by być pewnym, że jest to  $a$ . Kiedy pojawia się problem, można być pewnym, że zostanie stworzona odpowiednia teoria. Rzeczywiście tak właśnie się stało i w naszym przypadku: powstała nowa teoria, której autorem był nie matematyk, lecz elektronik z Uniwersytetu w Berkeley, L. Zadeh, napisał on szereg artykułów o teorii zbiorów rozmytych (*fuzzy sets*). Poniżej podamy zasadnicze jej pojęcia. Ze zrozumiałych względów nie potraktujemy tej teorii w jej maksymalnej ogólności. Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem. Rozmytym podzbiorem zbioru  $A$  nazywamy dowolną funkcję rzeczywistą określoną na zbiorze  $A$ , o wartościach w przedziale domkniętym  $\langle 0,1 \rangle$ . Jeśli  $f$  jest podzbiorem w takim sensie, to wartość  $f(a)$  nazywamy stopniem przynależności  $a$  do zbioru  $f$ . Zauważmy, że utożsamiając zbiór  $Y \subset A$  z funkcją charakterystyczną zbioru  $Y$ , tj. funkcją  $\chi_Y: A \rightarrow \langle 0,1 \rangle$  i określoną jak następuje:

$$\chi_Y(a) = \begin{cases} 1, & a \in Y, \\ 0, & a \notin Y, \end{cases}$$

możemy zgodzić się, że każdy podzbiór zbioru  $A$  jest w szczególności jego podzbiorem rozmytym. Podzbiórów rozmytych danego zbioru jest dużo; nawet zbiór skończony ma nieskończenie wiele rozmytych podzbiórów. (Dlaczego?). Wróćmy do naszego pierwszego przykładu: określmy  $f$  wzorem

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \leq 7, \\ \frac{(n-7)^2}{1000 + (n-7)^2} & \text{dla } n > 7. \end{cases}$$

A więc:

$$f(8) = \frac{1}{1001}, \quad f(9) = \frac{4}{1004}, \quad \dots, \quad f(1007) = \frac{1000}{1001}.$$

Na przykład: funkcją charakterystyczną przedziału  $\langle 0,2 \rangle$  jest funkcja o następującym wykresie:



Proszę sprawdzić, że funkcja, określona dla każdego  $x$  rzeczywistego wzorem

$$\chi_C(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \pi x)^{2n}$$

jest funkcją charakterystyczną zbioru liczb całkowitych.

Jeśli  $f, g$  są dwiema funkcjami o wartościach rzeczywistych, określonymi na tym samym zbiorze, to symbol  $\max(f, g)$  oznacza taką funkcję, która w każdym punkcie  $a$  tego zbioru przyjmuje wartość będącą większą z dwu liczb:  $f(a)$  i  $g(a)$ . Np. jeśli  $f(x) = x$ ,  $g(x) = -x$ , to  $\max(f, g) = |x|$ .

Warto zauważyć, że jeśli  $X, Y$  są „porządnymi” podzbiórmi zbioru  $A$  to  $\chi_{X \cup Y} =$

$$= \max(\chi_X, \chi_Y), \chi_{X \cap Y} = \min(\chi_X, \chi_Y), \text{ oraz } \chi_{-X} = 1 - \chi_X.$$

Kwadratem kartezjańskim zbioru  $A$  nazywa się zbiór  $A \times A$  — zbiór wszystkich uporządkowanych par elementów zbioru  $A$ . Ogólnie:  $n$ -tą potęgą kartezjańską zbioru  $A$  nazywa się zbiór  $A \times A \times \dots \times A$ , a więc zbiór wszystkich  $n$ -wyrazowych ciągów elementów zbioru  $A$ .

Relację  $n$ -argumentową w zbiorze  $A$  nazywa się dowolny podzbiór  $n$ -tej potęgi kartezjańskiej tego zbioru. Zob. np. W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, 1972.

Przy odrobinie dobrej woli można by się zgodzić, że  $f$  jest właśnie rozmytym podzbiorem zbioru  $N$  złożonym z liczb znacznie większych od 7. Oczywiście na zbiorach rozmytych musimy określić jakieś działania teoriomnogościowe. Zostały one określone jak następuje:

$$f \cap g = \min(f, g),$$

$$f \cup g = \max(f, g),$$

$$-f = 1 - f.$$

Nie wszystkie prawa rachunku zbiorów zachodzą w „środkowisku rozmytym”. Na przykład formuła  $f \cap -f = \emptyset$  nie jest prawdziwa. Z drugiej strony obowiązują tu szereg użytecznych praw, na przykład rozdzielność i łączność działań, a także prawa de Morgana (Czytelniku, nie leń się, sprawdź!).

Rozmyte podzbiory potęgi kartezjańskiej zbioru  $A$  nazywamy rozmytymi relacjami w zbiorze  $A$ . (Na przykład relacja  $x \geq y$ :  $x$  jest znacznie większa od  $y$ ). Szczególnie interesujące w zastosowaniach są relacje podobieństwa, tj. takie rozmyte relacje, które są zwrotne ( $\bigwedge_x R(x, x) = 1$ ), symetryczne ( $\bigwedge_x \bigwedge_y R(x, y) = R(y, x)$ ) i przechodnie ( $\bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z R(x, y) \geq \sup(\min(R(x, z), R(y, z)))$ ).

Niech  $f$  będzie rozmytym podzbiorem zbioru  $A$ . Dla każdego  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$  określamy:  $f_\alpha = \{x: f(x) \geq \alpha\}$ . Oczywiście  $f_\alpha$  jest już „nierozmytym” podzbiorem zbioru  $A$ . Znajomość rodziny  $\{f_\alpha: \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$  jest równoważna znajomości rozmytego zbioru  $A$ . Zbiór  $f_\alpha$  możemy interpretować jako zbiór tych  $x$ , które przynależą do  $f$  w stopniu co najmniej  $\alpha$ .

Jeśli  $R$  jest relacją podobieństwa (rozmytą relacją równoważności) w zbiorze  $A$ , to  $R_\alpha$  jest relacją równoważności; przy coraz to większym  $\alpha$  otrzymujemy coraz „drobniejsze” relacje.

Rozważmy przykład. Określmy rozmytą relację  $R$  na zbiorze  $\{1, \dots, 6\}$  przy pomocy następującej tabelki:

	1	2	3	4	5	6
1	1	0,4	0,4	0,6	0,8	0,9
2	0,4	1	1	0,4	0,4	0,4
3	0,4	1	1	0,4	0,4	0,4
4	0,6	0,4	0,4	1	0,6	0,6
5	0,8	0,4	0,4	0,6	1	0,8
6	0,9	0,4	0,4	0,6	0,8	1

Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że  $R$  jest relacją podobieństwa. Jak mówiliśmy  $R$  reprezentuje rodzinę relacji równoważności  $R_\alpha$ . Rozkłady zbioru  $\{1, \dots, 6\}$  na klasy elementów równoważnych odpowiadające tym relacjom wyglądają następująco:

$$\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}; \{\{1, 4, 5, 6\}, \{2, 3\}\}; \{\{1, 5, 6\}, \{4\}, \{2, 3\}\} \\ \{\{1, 6\}, \{5\}, \{4\}, \{2, 3\}\}; \{\{1\}, \{6\}, \{5\}, \{4\}, \{2, 3\}\}.$$

Zbiory „rozmyte” znalazły szerokie zastosowanie, a z ich teorią (choć może z niezbyt głębokimi jej aspektami) spotkają się na pewno ci spośród naszych Czytelników, którzy zajmą się teorią rozpoznawania obrazów.

## Szanowna Redakcjo!

Podczas wakacji rozwiązywałem z kolegą szereg problemów matematyczno-fizycznych i doszliśmy do wniosku, że warto nawiązać kontakt z kolegami i koleżankami o podobnych zainteresowaniach. Postanowiliśmy więc założyć Amatorski Ośrodek Badań i Problemów Matematyczno-Fizycznych. Proszę więc o zamieszczenie mojego listu, gdyż w ten sposób najłatwiej chyba nawiązać kontakty z kolegami i koleżankami z całego kraju. Mój adres: Marek Snopczyński, ul. Środkowa 6a m. 20, 03-430 Warszawa.

Obiecuję odpisać na każdy list.

Drukujemy list i zachęcamy Czytelników do wymiany poglądów nie tylko listownie, ale też — osobiście. Będziemy systematycznie drukowali nadsyłane adresy zwolenników inicjatywy kolegi Snopczyńskiego.



### Rozwiązanie zadania M37.

Zbadajmy, czemu równa jest liczba  $x\sqrt{2}$ .  
Mamy

$$x\sqrt{2} = \sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} - 2 = \\ = \sqrt{7+2\sqrt{7}+1} - \sqrt{7-2\sqrt{7}+1} - 2 = \\ = \sqrt{(\sqrt{7}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2} - 2 = \\ = (\sqrt{7}+1) - (\sqrt{7}-1) - 2 = 0.$$

\* Tak więc  $x = 0$ .

### Sprostowanie

W zadaniu M23 opuszczone zostało pomyłkowo założenie:  $AB < BC < CA$ . Bez tego założenia podane w numerze 8 «Deltę» rozwiązanie nie jest poprawne, na co zwrócił uwagę Zbigniew Szkutnik z Zarzecza. Warto zauważyć, że rozwiązanie jest poprawne również przy słabszym założeniu, że  $AC$  jest większy od każdego z dwu pozostałych boków.