

## SPIS TREŚCI

Czwarty stan <i>Doc. dr Michał Gryziński</i>	str. 1
Ciężkie jony <i>Dr Krystyna Siwek-Wilczyńska</i>	str. 2
Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna <i>Jan Dereziński</i>	str. 5
Laboratorium w domu <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 6
O przestrzeniach metrycznych (II) <i>Doc. dr Maria Moszyńska</i>	str. 7
Mała «Delta»	str. 9
O wzorze Eulera <i>Krzysztof Jerzyk</i>	str. 12
«Delta» z wizytą w Zespole Szkół Zawodowych w Ostródzie <i>Mgr. Jan Dąbrowski</i>	str. 14
Sztuka wygrywania Czy można zmierzyć egoizm? <i>Mgr. Tadeusz B. Iwiński</i>	str. 16
Zadania	str. 17

**W następnym numerze:**

O nowej cząstce J

Jak się optymalizuje w praktyce

„Delta”  
matematyczno-fizyczny miesięcznik  
popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego i Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
prof. dr G. Białkowski  
doc. dr A. Blikle  
prof. dr A. Hryniewicz  
doc. dr B. Iwaszkiewicz  
prof. dr J. Janik  
doc. dr J. Jatzak  
prof. dr Leon Jeśmanowicz —  
przewodniczący  
prof. dr Z. Krygowska  
prof. dr K. Leibler  
mgr W. Łuczniak  
mgr A. Mąkowski  
prof. dr A. Pelczyński  
prof. dr Arkadiusz Piekara —  
wiceprzewodniczący  
prof. dr J. Rayski  
prof. dr A. Schinzel

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

**WARUNKI PRENUMERATY** Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW-Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW-Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowo właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

**Sprzedż numerów bieżących i uprzednich**

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
Sprzedż gotówką i wysyłką, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5,—

nr indeksu 35723/35550

prof. dr Z. Semadeni  
prof. dr M. Subotowicz  
dr A. Wakulicz  
doc. dr W. Zawadowski

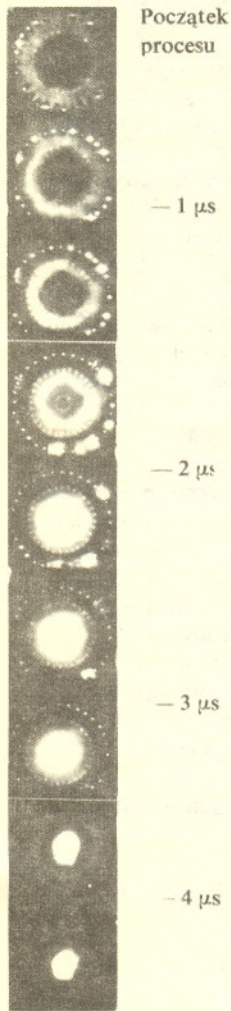
Redaguje Kolegium w składzie:  
T. Deskur — red. techn. graf.  
doc. dr T. Hofmoki — z-ca red. nac.  
mgr T. B. Iwiński  
dr M. Kordos — red. nac.  
dr Z. Płochocki  
D. Tys — sekr. red.

Adres Redakcji  
ul. Śniadeckich 8,  
00-656 Warszawa, PTM

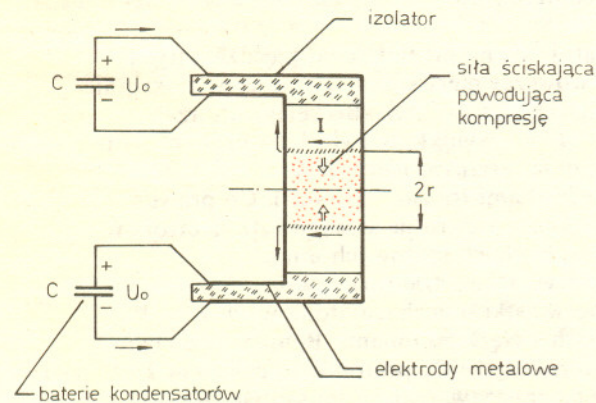
Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo.  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 30000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl., 80g, 61 × 86  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej,  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 174/75 B-58



Doc. dr Michał GRZYŃSKI



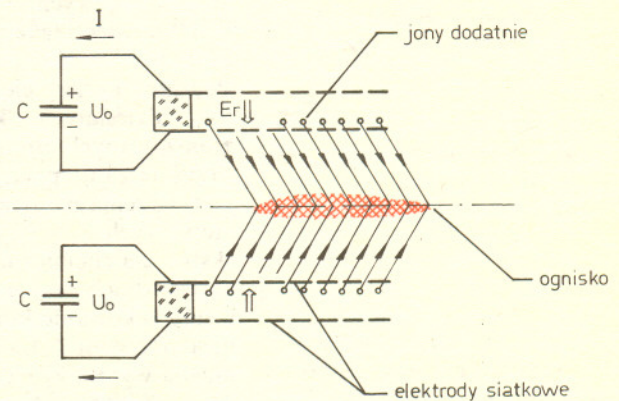
Kolejne fazy tworzenia się ogniska plazmowego (widok wzdłuż osi urządzenia), odpowiadające różnym chwilom (szybkość robienia zdjęć 2 mln. kadrów/s)



Rys. 1. Powszechnie stosowanym sposobem uzyskania gęstej i gorącej plazmy jest samościskanie się sznura plazmowego przewodzącego prąd (siła samościskania się jest proporcjonalna do kwadratu natężenia prądu i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu promienia sznura  $F_{sc} \sim (I/r)^2$ )

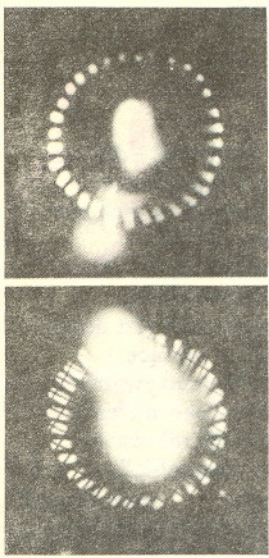
Wielką intuicję mieli nasi przodkowie sprowadzając cały świat materialny do czterech żywiołów: ziemi, wody, powietrza i ognia. Po upływie kilkudziesięciu wieków klasyfikacja ta nie straciła nic ze swej aktualności. W żywiołach tych nie trudno przecież jest doszukać się czterech podstawowych stanów materii — stałego, ciekłego, lotnego i... plazmy. Wiemy, że zmiana fazy wiąże się z przekazywaniem ciepła, a w rezultacie — ze zmianą temperatury ośrodka. W obszarze temperatur najwyższych podstawowa cegiełka materii, jaką jest atom, ulega rozbiciu, a jego składniki — ujemnie naładowane elektrony i nosące dodatni ładunek jądra atomowe — tworzą luźne zbiorowisko, które nazywamy plazmą. W odróżnieniu od fazy skondensowanej, w której zbiorowisko narzuca pewne normy jednostce (ruch każdego elektronu w kryształach jest skorelowany z ruchem pozostałych elektronów), w plazmie panuje całkowita „anarchia”. Stąd właśnie wywodzą się trudności eksperymentów plazmowych, eksperymentów, które mają doprowadzić do wyzwolenia energii w kontrolowanej reakcji termojądrowej. Synteza termojądrowa, tzn. proces spalania paliwa termojądrowego, może zachodzić dopiero przy temperaturze wielu milionów kelwinów, a więc dopiero wtedy, kiedy energie kinetyczne jąder są wystarczająco duże, aby jądra mogły pokonać barierę kulombowskiego odpychania. Nadanie cząstkom plazmy odpowiednio wielkich energii (ogrzanie plazmy do odpowiednio wysokiej temperatury) jest naczelnym problemem eksperymentów termojądrowych. Drugim kapitalnym zagadnieniem eksperymentów termojądrowych jest wytworzenie plazmy o odpowiednio dużej gęstości. Już kilka lat temu narodziła się w Zakładzie Fizyki Plazmy Wysokotemperaturowej Instytutu Badań Jądrowych oryginalna koncepcja rozwiązania obu tych problemów naraz, w urządzeniu wytwarzającym radialnie zbieżny strumień plazmy. Jak widać na zamieszczonych rysunkach, koncepcja urządzenia jest bardzo prosta, można by rzec — trywialna. Eksperymentalna realizacja tej tak prostej koncepcji napotkała niemałe trudności. Zmuszenie „krnąbrnych” indywiduali plazmy do uporządkowanego radialnego ruchu nie było łatwe. Aby wymusić właściwy ruch cząstek plazmy, wynikający z przepływu prądu między elektrodami, należało przede wszystkim zbudować nadzwyczaj silne źródła energii elektrycznej. Dla uzyskania pożądanego efektu niezbędne okazały się moce chwilowe przekraczające dziesiątki milionów megawatów (natężenie prądu sięga miliona amperów). Wreszcie po kilku latach zmagania trud został nagrodzony.

Jak widać na zamieszczonych obok zdjęciach, wykonanych ultraszybką kamerą fotograficzną, udało się wytworzyć ognisko gęstej plazmy. Oczywiście, informacje uzyskane na tej drodze, poza stwierdzeniem występowania efektu i poza charakterystyką pewnych ogólnych własności wytwarzanej plazmy, są niewystarczające dla rozszyfrowania całokształtu zachodzących zjawisk. Aby określić bliżej własności ogniska plazmowego, trzeba uciekać się do innych metod pomiarowych



Rys. 2. Urządzenie do wytwarzania gęstej i gorącej plazmy, skonstruowane w Zakładzie Fizyki Plazmy Wysokotemperaturowej IBJ. Jony przyspieszone radialnie w polu elektrycznym  $E_r$ , przechodząc przez wewnętrzną elektrodę siatkową, warunkują powstanie ogniska plazmowego na osi.





I tak, bezpośrednim wskaźnikiem dużej energii elektronów (wysokiej temperatury elektronowej) jest obecność promieniowania rentgenowskiego. Istotnie, owinięta w metalowe folie różnej grubości (dla oceny twardości promieniowania rentgenowskiego, a w konsekwencji — energii elektronów) błona fotograficzna uległa zaczernieniu. Z analizy stopnia zaczernienia wynikało, że temperatury elektronowe kształtują się na poziomie kilku milionów kelwinów. Naświetlając błonę fotograficzną poprzez maleńki otworek wykonany w znajdującej się w pewnej odległości osłonie ołowianej (fotografia metoda *camera obscura*) można było uzyskać obraz plazmy w świetle promieniowania rentgenowskiego (patrz zdjęcie obok). Korzystając z układów scyntylacyjnych z fotopowielaczami można było dowiedzieć się o zmianach temperatury elektronowej w czasie. Przy szybko zachodzących procesach — a z takimi mamy do czynienia, gdyż całe zjawisko trwa milionowe części sekundy — nieodzowne jest wykonanie innego typu pomiarów dla określenia temperatury jonowej. Aby wnioskować o temperaturze jonów, obserwowano poszerzenie doplerowskie linii widmowych. Pomiaru te wskazywały, że temperatura jonów jest rzędu wielu milionów kelwinów. Obserwacje spektroskopowe pozwoliły zorientować się w wielkości innego ważnego parametru, jakim jest gęstość plazmy. Otóż przy dużych gęstościach plazmy w poszerzeniu linii widmowych zaczyna odgrywać rolę inne zjawisko, tzw. zjawisko Starka. Dokładna analiza konturów linii widmowych wskazywała na znaczny stopień radialnej kumulacji (blisko stukrotny) i tworzenie się ogniska plazmowego o gęstości  $\sim 10^{17}$  cząstek/cm<sup>3</sup>.

Dla precyzyjnego określenia przestrzennych rozkładów gęstości plazmy niezmiernie użyteczna jest interferometria laserowa i sondowanie plazmy wiązkami atomowymi. Dla pełnego rozpoznania procesów zachodzących w plazmie korzystamy z całej gamy jeszcze innych metod diagnostycznych. Powszechnie stosowane są sondy Langmuira, sondy magnetyczne, interferometria mikrofalowa, spektroskopia rentgenowska, analiza promieniowania jądrowego (pomiar neutronowe). Generalnie rzecz biorąc, technika pomiaru parametrów plazmy jest skomplikowana, a zarazem nadzwyczaj interesująca. Każda z przytoczonych metod warta jest poświęcenia jej specjalnego artykułu. Do niektórych z nich, jak też i innych prac prowadzonych w Zakładzie — takich, jak na przykład wytwarzanie supergęstej plazmy w eksperymencie *Plasma Focus* czy utrzymywanie plazmy w pułapkach magnetycznych — powrócimy jeszcze na łamach «Denty».

Fotografie ogniska plazmowego w świetle promieniowania rentgenowskiego. Oprócz promieniowania rentgenowskiego, pochodzącego z obłoku plazmowego (w pobliżu osi urządzenia), widoczne jest promieniowanie pochodzące z bombardowania elektronami zewnętrznej elektrody siatkowej wykonanej z prętów rozmieszczonych tak, że tworzą powierzchnię cylindryczną (fotografie różnią się grubością filtra aluminium, co pozwoliło oszacować temperaturę plazmy na około 2–3 mln. kelwinów)

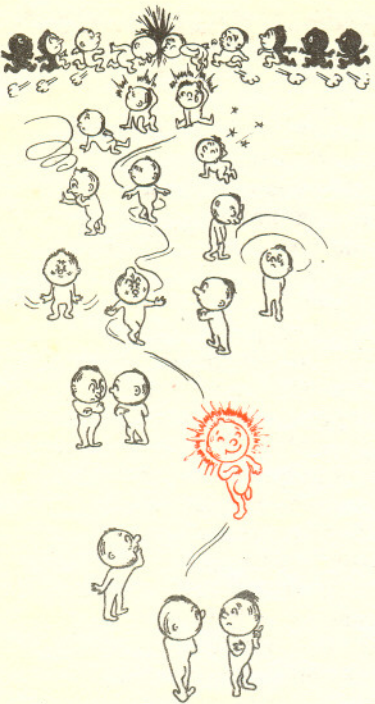
## Ciężkie jony

*Dr Krystyna SIWEK-WILCZYŃSKA*

Terminem „ciężkie jony” przyjęto nazywać zjonizowane atomy pierwiastków cięższych od helu (a więc o liczbie atomowej  $Z > 2$ ), przyśpieszane do stosunkowo wysokich energii; atomy te wykorzystuje się do bombardowania jąder atomowych. Popularnie stosowana nazwa „reakcje z ciężkimi jonami” oznacza więc reakcje pomiędzy wielonukleonowymi układami będącymi jądrami atomów.

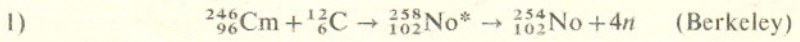
Początek kariery ciężkich jonów datuje się na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych. Skonstruowano wówczas pierwsze akceleratory wielokrotnie zjonizowanych atomów — w ZSRR (Dubna) i USA (Berkeley). Potrzeba przyśpieszania pocisków cięższych od <sup>4</sup>He wynikała w związku z próbami sztucznego wytworzenia nie istniejących w stanie naturalnym pierwiastków o liczbach atomowych  $Z > 92$  (zwanymi pierwiastkami transuranowymi). Co prawda ekstrakcja chemiczna produktów reakcji wielokrotnego wychwytu neutronów w reaktorach oraz w podziemnych wybuchach jądrowych umożliwiła wyprodukowanie kilku kolejnych pierwiastków transuranowych, dalszy jednakże postęp tą drogą jest niemożliwy. Pierwiastki o liczbach atomowych  $Z > 100$  można wytworzyć jedynie w reakcjach z ciężkimi jonami. Bombardując jądro  $X(A_1, Z_1)$  (o liczbie masowej  $A_1$  i posiadające  $Z_1$  protonów) pociskiem  $Y(A_2, Z_2)$  możemy doprowadzić do fuzji obu jąder, wytwarzając tym samym produkt  $P(A_1 + A_2, Z_1 + Z_2)$ . Tak utworzone jądro jest silnie wzbudzone. Przechodząc do stanu podstawowego, wzbudzone jądro emituje głównie neutrony i kwanty  $\gamma$ . Jeżeli uniknie ono konkurencyjnego procesu rozszczepiania ze stanów wzbudzonych, to osiągnie w końcu stan podstawowy jądra  $T(A, Z)$ , którego



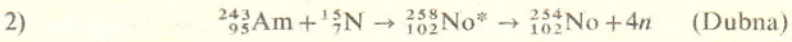


liczba masowa  $A$  różni się niewiele od  $A_1 + A_2$ , a  $Z = Z_1 + Z_2$ . Zadaniem fizyków poszukujących nowych pierwiastków transuranowych jest zidentyfikowanie jądra atomowego o danej liczbie protonów, znajdującego się właśnie w stanie podstawowym.

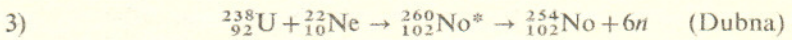
Fakt osiągnięcia stanu podstawowego wcale nie gwarantuje stabilności jądrowej transuranowych nuklidów. Rozpadają się one najczęściej przez emisję cząstek  $\alpha$  lub też drogą rozszczepiania spontanicznego. Zbadanie charakterystyk rozpadu (energii rozpadu, czasu połowicznego rozpadu) stanowi jedyną drogę identyfikacji nowo odkrytych nuklidów. Oto, dla przykładu, trzy różne reakcje, w których dokonano syntezy jednego z izotopów pierwiastka o liczbie atomowej  $Z = 102$ , zwanego nobelium — No:



(zmierzone czas połowicznego rozpadu  $T_{1/2} = (55 \pm 5)$  s oraz energie emitowanych cząstek  $\alpha$  ( $E_\alpha = 8,10$  MeV));



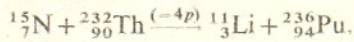
(zmierzone  $E_\alpha = 8,11$  MeV);



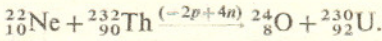
(zmierzone  $T_{1/2} = (56 \pm 10)$  s); gwiazdka oznacza tu jądro wzbudzone. Stosując reakcje z ciężkimi jonami udało się wyprodukować w ostatnich latach kilkanaście izotopów pierwiastków o liczbach atomowych  $Z = 102, 103, 104$  i  $105$ . Ostatnio, jak poinformowano na konferencji w Nashville (USA), grupa fizyków z Dubny dokonała syntezy pierwiastka o liczbie atomowej  $Z = 106$ . W reakcjach z ciężkimi jonami napotkali fizycy wiele zjawisk i procesów jądrowych nie obserwowanych w reakcjach z lekkimi cząstkami bombardującymi. Poza wspomnianymi reakcjami fuzji oraz reakcjami elastycznego i nieelastycznego rozpraszania zaobserwowano również szeroką klasę procesów, w których uczestniczące jądra wymieniają jeden, dwa i więcej nukleonów. Przy spełnieniu odpowiednich warunków dynamicznych liczba przekazywanych nukleonów może być stosunkowo duża. W wielu przypadkach obserwuje się więc bardzo egzotyczne reakcje prowadzące do utworzenia końcowych produktów znacznie oddalonych od tzw. „ścieżki  $\beta$ -stabilności” (zobacz IV str. okładki). Produkty te posiadają duży „deficyt” lub też „nadmiar” neutronów w stosunku do nuklidów występujących w przyrodzie. Wyprodukowanie ich w reakcjach z lekkimi cząstkami bombardującymi jest na ogół praktycznie niemożliwe.

Obserwowane produkty reakcji przekazania wielu nukleonów, które są stabilne jądrowo, tzn. nie emitują spontanicznie nukleonów, ale w większości przypadków ulegają przemianom jądrowym polegającym na emisji elektronów lub pozytonów (rozpad  $\beta$ ), a także fotonów (rozpad  $\gamma$ ). Technika pomiarowa, którą stosuje się do identyfikacji produktów reakcji przekazu nukleonów, umożliwia rejestrowanie tych produktów w czasie krótszym niż  $10^{-7}$  sekundy, licząc od chwili ich utworzenia, tj. zanim mogą one ulec przemianom  $\beta$ , dla których najkrótsze półokresy rozpadu są rzędu  $10^{-3}$  sekundy.

W reakcjach z ciężkimi jonami można stosunkowo łatwo wyprodukować tak egzotyczne nuklidy, jak  ${}^8\text{He}$ ,  ${}^{11}\text{Li}$ ,  ${}^{18}\text{C}$  czy  ${}^{24}\text{O}$ . Jądro  ${}^{11}\text{Li}$  obserwowano na przykład w reakcji oderwania czterech protonów od jądra  ${}^{15}\text{N}$ . W tym celu bombardowano tarczę zawierającą jądro  ${}^{232}\text{Th}$  jonami  ${}^{15}\text{N}$  o energii 145 MeV:



Inny skrajnie neutronowo-nadmiarowy nuklid  ${}^{24}\text{O}$  wyprodukowano w jeszcze bardziej skomplikowanej reakcji, w której dwa protony przechodzą od jądra-pocisku ( ${}^{22}\text{Ne}$ ) do jądra-tarczy ( ${}^{232}\text{Th}$ ), równocześnie zaś cztery neutrony są przekazywane w przeciwnym kierunku:



Tego typu reakcje były szeroko badane przez fizyków w Zjednoczonym Instytucie Badań Jądrowych w Dubnie. Ogółem wyprodukowano tam około 30 nie znanych przedtem nuklidów lekkich pierwiastków o skrajnie „nadmiarowe” zawartości nukleonów.

Omówiliśmy dwa typy reakcji z ciężkimi jonami: reakcje fuzji (prowadzące do utworzenia tzw. jądra złożonego) oraz reakcje dwuciałowe, w których zderzające się jądra atomowe nie tracą swej „indywidualności”, wymieniają jednak część energii, momentu pędu, masy i ładunku. Jak wykazały szczegółowe badania,



**Rozwiązanie zadania M51.**

Ciągiem takim jest ciąg  $P$  złożony z zera i liczb naturalnych, które są sumami potęg dwójki o wykładnikach parzystych. Wiadomo bowiem, że każda liczba naturalna ma rozwinięcie dwójkowe, tzn. jest sumą potęg liczby 2 o różnych wykładnikach całkowitych  $\geq 0$ , i przedstawienie jej w postaci takiej sumy jest jedyne. Każdą liczbę naturalną  $N$  można więc przedstawić (i to w jeden tylko sposób) jako sumę

$$N = 2^{2n_1} + 2^{2n_2} + \dots + 2^{2n_k} + 2^{2m_1+1} + \dots + 2^{2m_l+1},$$

gdzie  $n_i, m_j$  są liczbami całkowitymi nieujemnymi i liczby  $n_i$  (podobnie liczby  $m_j$ ) są parami różne. Może oczywiście być  $k = 0$  lub  $l = 0$ . Jest więc  $N = 2^{2n_1} + \dots + 2^{2n_k} + 2(2^{2m_1+1} + \dots + 2^{2m_l+1})$ . Każda liczba naturalna jest zatem sumą trzech wyrazów ciągu  $P$ , z których dwa są równe, i przedstawienie jej w postaci takiej sumy jest jedyne.

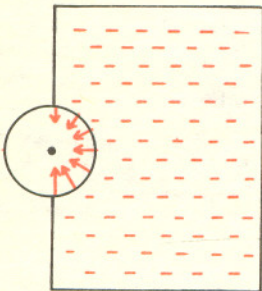




### Rozwiązanie zadania F17.

Błąd w rozumowaniu tkwi w stwierdzeniu, że siła wyporu (działająca na zanurzoną w wodzie połowę walca) jest przyłożona do środka masy tej połówki.

Siła wyporu bowiem, działająca na ciało zanurzone w płynie, jest wypadkową sił parcia działających na wszystkie elementy powierzchni ciała, które znajdują się pod działaniem ciśnienia płynu. Te siły parcia są w każdym punkcie powierzchni ciała prostopadłe do powierzchni ciała.



I więc w naszym przypadku moment każdej z nich (względem osi obrotu walca) jest równy zeru. Także zatem jest równy zeru wypadkowy moment siły wyporu. Siła wyporu nie może więc w żadnym razie spowodować ruchu walca.

Czytelnikowi zawiedzionemu zadaniem, które nie wymagało żadnych rachunków, proponujemy, by obliczył siłę wyporu (jej składowe poziomą i pionową — albo bezwzględną wartość i kąt nachylenia do poziomu), jeśli dane są: długość  $l$  i promień  $R$  walca, gęstość  $\rho$  cieczy oraz wysokość  $h$  poziomu cieczy nad osią obrotu walca, a następnie, aby odpowiedział na pytania: Gdzie znajduje się punkt przyłożenia siły wyporu? Czy siła wyporu będzie skierowana na zewnątrz, czy do wnętrza naczynia? Dlaczego siła wyporu nie zależy od gęstości materiału, z którego wykonany jest walec? I wreszcie pytanie nieco ogólne: Czy zawsze siły powierzchniowe dadzą się zastąpić jedną siłą wypadkową, a jeśli tak, to czy zawsze można określić jej punkt przyłożenia (lub wypadkowy moment sił powierzchniowych)?

reakcje dwuciałowe są procesami peryferyjnymi, zachodzą wtedy, gdy powierzchnie jąder stykają się, tj. przy dużych wartościach względnego momentu pędu. W zderzeniach, w których dochodzi do ściślejszego kontaktu jądrowego, przeważają reakcje fuzji.

Jednym z najbardziej frapujących problemów współczesnej fizyki jąder atomowych jest istnienie stabilnych pierwiastków superciężkich. Obliczenia teoretyczne sugerują mianowicie, że nuklidy posiadające około 114 i więcej protonów i około 184 i więcej neutronów powinny charakteryzować się wyjątkową stabilnością jądrową w stosunku do nuklidów sąsiednich. Mówi się więc o tzw. „wyspie stabilności” wylaniającej się z „morza” niestabilnych nuklidów. (zob. IV str. okładki) Próby dokonania syntezy superciężkich pierwiastków przyczyniły się do systematycznego postępu w technice przyspieszania ciężkich jonów. Fizycy i technicy starają się przyspieszać coraz cięższe cząstki. Dotychczas standardowymi pociskami były jony  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ , ewentualnie  $^{22}\text{Ne}$  i  $^{40}\text{Ar}$ . Od kilku lat działa w Orsay (Francja) urządzenie zwane ALICE, będące połączeniem akceleratora liniowego i cyklotronu, w którym przyspieszane są jony  $^{84}\text{Kr}$ . W 1971 r. rozpoczął pracę dubieński tandem dwóch cyklotronów. Może on przyspieszać jony  $^{136}\text{Xe}$ . W Berkeley nastąpił niedawno rozruch urządzenia zwanego SUPERHILAC, a w bieżącym roku rozpocznie pracę najpotężniejszy i najkosztowniejszy (koszt budowy przekracza 100 milionów dolarów) akcelerator ciężkich jonów UNILAC w Darmstadt (RFN). Zarówno SUPERHILAC, jak i UNILAC będą zdolne przyspieszać jony wszystkich pierwiastków aż do uranu ( $Z = 92$ ).

Dlaczego do wyprodukowania superciężkich pierwiastków potrzebne są aż tak ciężkie pociski? Otóż — jak mówiliśmy — reakcje fuzji prowadzą do silnie wzbudzonych stanów jądra końcowego. Im większe jest  $Z$  tego końcowego produktu, tym silniejszą konkurencją dla procesów przechodzenia do stanu podstawowego przez emisję neutronów stanowią procesy rozszczepienia od razu ze stanów wzbudzonych. Już w przypadku pierwiastka  $Z = 106$  tylko jedno spośród 10 miliardów wyprodukowanych jąder złożonych osiąga stan podstawowy jądra  $Z = 106$ . Pozostałe jądra złożone ulegają rozszczepieniu, zanim zdołają osiągnąć stan podstawowy. Fizycy poszukują więc innej drogi wyprodukowania pierwiastków superciężkich niż ta, o której mówiliśmy na początku. Jedną z możliwych dróg jest fuzja dwóch bardzo ciężkich jąder (np.  $^{232}_{92}\text{U} + ^{232}_{92}\text{U}$ ) i poszukiwanie nuklidu o  $Z = 114$  wśród produktów rozszczepienia „jądra złożonego” o  $Z = 184$ . Spin tak utworzonego produktu rozszczepienia powinien być stosunkowo mały, co daje większą szansę „przetrwania” poszczególnych etapów „drogi” do stanu podstawowego. Próby syntezy pierwiastka o liczbie atomowej  $Z = 114$  przeprowadza się już kilka lat; jak dotychczas — z wynikiem negatywnym. Jakie mogą być tego przyczyny? Częściową odpowiedź na to pytanie można znaleźć w rezultatach eksperymentów, które polegają na bombardowaniu jąder atomowych coraz cięższymi pociskami. Okazuje się mianowicie, że i na tej drodze napotykamy nieoczekiwane trudności. Otóż reakcje fuzji, które z olbrzymim prawdopodobieństwem zachodzą na przykład w zderzeniu  $^{238}_{92}\text{U} + ^{22}_{10}\text{Ne}$ , stają się procesami niezwykle rzadkimi, gdy zderzamy to samo jądro  $^{238}_{92}\text{U}$  z jonami o wiele cięższymi niż poprzednio, takimi jak np.  $^{84}_{36}\text{Kr}$ . Przyczyna tego zjawiska tkwi w tym, że im większe  $Z$  pocisku, tym większe są siły odpychania kulombowskiego, które w przypadku zderzenia  $^{238}_{92}\text{U} + ^{84}_{36}\text{Kr}$  prawie całkowicie niwelują siły przyciągania jądrowego. Należy oczekiwać, że dwa jądra uranu w ogóle nie mogą ulec fuzji, gdyż potencjał wzajemnego oddziaływania jest już prawdopodobnie dodatni (co odpowiada odpychaniu) w całym zakresie względnych odległości.

Sytuacja nie jest jednak beznadziejna. Jeżeli prawdopodobieństwo reakcji fuzji dla układu  $^{238}_{92}\text{U} + ^{238}_{92}\text{U}$  spada do zera, to automatycznie musi wzrosnąć prawdopodobieństwo reakcji dwuciałowych. W zderzeniu  $^{238}_{92}\text{U} + ^{238}_{92}\text{U}$  będziemy więc obserwować najrozmaitsze reakcje przekazu i wymiany nukleonów, zachodzące z dużym prawdopodobieństwem. Już teraz wiadomo, że liczba przekazywanych nukleonów może w tych reakcjach osiągać wartości w bardzo szerokich granicach. Być może wśród produktów egzotycznych reakcji przekazu i wymiany nukleonów zidentyfikujemy kiedyś jądro nuklidu z obszaru hipotetycznej na razie „wyspy stabilności”.

Prace badawcze trwają. Wciąż istnieje jeszcze wiele problemów, które będą rozwiązywane krok po kroku, w wyniku żmudnych badań prowadzonych w laboratoriach na całym świecie. Poszukiwanie egzotycznych nuklidów, takich jak np. nuklidy pierwiastka  $Z = 114$ , jest tylko jednym z celów. Na drodze do tego celu pogłębimy z pewnością naszą wiedzę o dynamicznych własnościach materii jądrowej — podstawowego składnika otaczającego nas świata.



Jan DEREZIŃSKI

Autor jest uczniem XIV Liceum Ogólnokształcącego im. K. Gottwalda w Warszawie, zwycięzcą XXV Krajowej Olimpiady Matematycznej.

Gospodarzem tegorocznej Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej była Niemiecka Republika Demokratyczna. Do Erfurtu, stolicy Turynii, przyjechała nasza drużyna 6 lipca. Tam też, 8 lipca, odbyła się oficjalna inauguracja Olimpiady.

Na rozwiązanie sześciu zadań mieliśmy do dyspozycji dziewięć godzin rozłożonych na dwa dni. W opinii większości uczestników najłatwiejsze były zadania 1 i 4. Pozostałe okazały się znacznie trudniejsze, ale interesujące. Niektóre z problemów miały całkiem zaskakujące, nieszablonowe rozwiązania. Na przykład w zadaniu 3 konstrukcja odpowiedniego ciągu rekurencyjnego pomogła doskonale w dowodzie podzielności sumy przez 5. Istniały również kapitalne rozwiązania ostatnich zadań, zajmujące dosłownie kilkanaście linijek, choć niektóre prace na te tematy osiągnęły monstrualne rozmiary.

Bezpośrednio za zawodach członkowie komisji przystąpili do sprawdzania i oceniania naszych prac. W tym czasie wszystkie drużyny zwiedzały NRD. Oglądaliśmy Erfurt, Weimar, zamek Wartburg, Poczdam i Berlin. Nawiązaliśmy bardzo wiele znajomości i przyjaźni. Kontaktom towarzyskim sprzyjały wspólne wycieczki oraz wymiana problemów matematycznych. Wielki rozgłos i uznanie zdobyło jedno z zadań polskiej drużyny. Brzmiało ono następująco: Dowieść, że dla każdego naturalnego  $n$  większego od 17 spełniona jest nierówność

$$\prod_{\substack{i \neq j \\ i, j = 1 \\ j = 1}}^n \left| \sqrt[i]{i} - \sqrt[j]{j} \right| \leq \frac{1}{\pi n!}.$$

Trzeba przyznać, że Olimpiada zorganizowana została wzorowo. Organizatorzy starali się zapoznać nas z krajem i jego problemami. Urządzono spotkania z niemiecką młodzieżą. Na cześć niektórych moich kolegów urządziły przyjęcia rodziny poznanych przez nich niemieckich koleżanek. Niemieczeni dziennikarze interesowali się wrażeniami uczestników Olimpiady. Cały artykuł w niemieckiej prasie, składający się z kilkunastu mini-wywiadzików, został zatytułowany cytatem z wypowiedzi Marka Lewkowicza: *Czuliśmy się jak u starych przyjaciół*, co trafnie oddaje serdeczność, jaką nas otaczano.

15 lipca, w Berlinie, odbyło się uroczyste zakończenie Olimpiady, połączone z uhonorowaniem zwycięzców. Z naszej drużyny Wiesław Bek i Andrzej Turski zdobyli nagrody trzeciego stopnia. Drużynowo zajęliśmy czternaste miejsce tuż za drużyną Demokratycznej Republiki Wietnamu. Startowała ona pierwszy raz, w niepełnym składzie, wykazując znakomite umiejętności i zdolności. Drugi debiutant Olimpiady, Stany Zjednoczone, także odniósł sukces — zajął drugie miejsce. Zwycięzcą została drużyna Związku Radzieckiego.

Następna Olimpiada Matematyczna odbędzie się w Bułgarii albo Mongolii. Ciekawe, jak tam wypadną Polacy.

## XVI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna — Zadania

1. Trzej gracze  $A, B, C$  używają do gry trzech kart. Na każdej z tych kart napisana jest liczba całkowita na jednej — liczba  $p$ , na drugiej  $q$ , na trzeciej  $r$ , przy czym  $0 < p < q < r$ . Każda tura gry przebiega następująco: karty tasuje się i daje każdemu graczowi po jednej, następnie każdy gracz bierze tyle żetonów, ile wynosi liczba na otrzymanej karcie, po czym karty zbiera się, a żetony pozostają u graczy. Odbyło się  $N$  tur ( $N \geq 2$ ). Po zakończeniu gry gracz  $A$  miał 20 żetonów, gracz  $B$  — 10 żetonów, gracz  $C$  — 9 żetonów. W ostatniej turze gracz  $B$  wziął  $r$  żetonów. Kto otrzymał  $q$  żetonów w pierwszej turze?

2. Udowodnić, że w trójkącie  $ABC$  istnieje taki punkt  $D$  na boku  $\overline{AB}$ , że  $CD$  jest średnią geometryczną  $AD$  i  $DB$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sin A \cdot \sin B \leq \left( \sin \frac{C}{2} \right)^2.$$

3. Udowodnić, że dla żadnej liczby naturalnej  $n$  liczba  $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} \cdot 2^{2k}$  nie dzieli się przez 5.

4. Rozpatrujemy rozkłady szachownicy  $8 \times 8$  na  $p$  niezachodzących na siebie prostokątów spełniające następujące warunki:

1) każdy prostokąt składa się z pewnej liczby pól szachownicy, przy czym liczba pól białych równa jest liczbie pól czarnych,

2) Jeżeli  $a_i$  jest liczbą białych pól w  $i$ -tym prostokącie, to  $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ .

Znaleźć największą wartość  $p$ , przy której jest możliwy taki rozkład i wyznaczyć dla tej wartości  $p$  wszystkie ciągi  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , dla których można taki rozkład zrealizować.

5. Znaleźć zbiór wartości sumy

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d},$$

gdzie  $a, b, c, d$  są dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

6. Niech  $P$  będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych różnym od funkcji stałej, zaś  $n(P)$  niech będzie liczbą wszystkich różnych liczb całkowitych  $k$ , dla których  $[P(k)]^2 = 1$ . Udowodnić, że  $n(P) - \deg(P) \leq 2$ , gdzie  $\deg(P)$  jest stopniem wielomianu  $P$ .



### Rozwiązanie zadania M50.

Zauważmy, że zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} (*) \quad & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \\ & = (x+y)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = \\ & = \frac{1}{2} (x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]. \end{aligned}$$

Podstawiając w tej tożsamości  $x = a$ ,

$y = b\sqrt[3]{5}$ ,  $z = c\sqrt[3]{25}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} a^3 + 5b^3 + 25c^3 - 15abc &= (a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}) \\ & (a^2 + b^2\sqrt[3]{25} + 5c^2\sqrt[3]{5} - ab\sqrt[3]{5} - 5bc - ac\sqrt[3]{25}), \end{aligned}$$

skąd

$$(**) \quad \frac{1}{a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}} =$$

$$= \frac{a^2 - 5bc}{M} + \frac{5c^2 - ab}{M} \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{b^2 - ac}{M} \frac{1}{\sqrt[3]{25}},$$

gdzie  $M = a^3 + 5b^3 + 25c^3 - 15abc$ , jest liczbą wymierną. Wobec tego każde z otrzymanych wyrażeń ułamkowych jest liczbą wymierną.

Należy jeszcze wykazać, że można było dzielić przez  $M$ , czyli że  $M \neq 0$ . Gdyby bowiem  $M = 0$ , to z drugiej części tożsamości (\*)

wobec  $a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25} \neq 0$  wynikałoby,

że drugi czynnik jest równy zeru, co jest możliwe tylko dla  $x = y = z$ , czyli dla

$$a = b\sqrt[3]{5} = c\sqrt[3]{25}. \text{ Wobec niewymierności } \sqrt[3]{5}$$

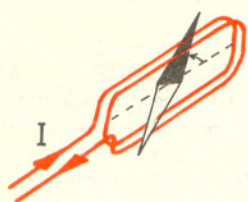
równość  $a = b\sqrt[3]{5} = c\sqrt[3]{25}$  zachodzi tylko dla  $a = b =$

$= 0$ , skąd wynika, że  $c = 0$ , co przy założeniu, że liczba  $a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}$  jest różna od zera.

Przeprowadzone rozumowanie daje sposób znoszenia niewymierności w mianowniku liczb występujących po lewej stronie równości (\*\*).



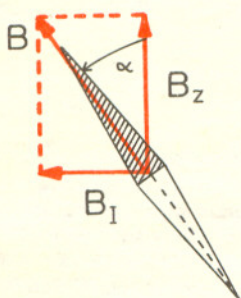
## BUDUJEMY MIERNIK PRĄDU ELEKTRYCZNEGO



Rys. 1

Każdy, kto wykonywał doświadczenia z prądem elektrycznym, zgodzi się, że bez miernika wiele w tej dziedzinie trudno zrobić. Jeśli chcemy badać ilościowo zjawiska elektryczne bez inwestowania znacznej sumy pieniędzy w nasze eksperymenty, musimy sami zrobić najprostszy miernik. Czy to bardzo trudne? Spróbujcie, a przekonacie się, że nie świeci garnki lepią. Podstawową trudnością będzie zdobycie pewnej ilości drutu w cienkiej izolacji, najlepiej nawojowego. Jeśli to Was nie przeraża, z pewnością dacie sobie radę. Wypada więc wyjaśnić, na czym polega

### IDEA DZIAŁANIA MIERNIKA



Rys. 2

Ilustruje ją rys. 1. Pewną liczbę zwojów drutu nawinięto na kompas. Mierząc wychylenie igły kompasu wywołane przepuszczeniem prądu przez drut, możemy określić natężenie tego prądu. Zbyt prymitywny przyrząd? Nie potępiajcie go przedwcześnie, można nim będzie mierzyć prądy nawet poniżej 1 mA. Wróćmy jednak do zasady działania naszego przyrządu, który jest odmianą tzw. busoli stycznych. Przed przepuszczeniem prądu należy ustawić miernik tak, aby ramka z drutem znajdowała się w płaszczyźnie południka magnetycznego, a więc była równoległa do kierunku, jaki wskazuje igła. Wtedy wektor indukcji  $B_I$  pola magnetycznego prądu będzie prostopadły do indukcji  $B_z$  pola ziemskiego (rys. 2). Igła magnetyczna ustawi się oczywiście w kierunku indukcji wypadkowej  $B$ , odchylając się od położenia równowagi o kąt  $\alpha$  spełniający zależność

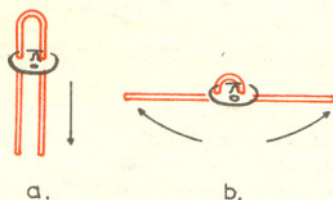
$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{B_I}{B_z},$$

co łatwo można zauważyć na rys. 2. Stąd wywodzi się właśnie nazwa busoli stycznych, styczna bowiem jest archaiczną nazwą tangensa. Wiadomo, że indukcja pola magnetycznego prądu jest proporcjonalna do jego natężenia

$$B_I \sim I,$$

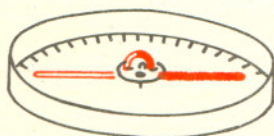
a więc kąt wychylenia igły kompasu wyznacza natężenie prądu. Wszystko jasne? Wobec tego

### PRZYSTĘPUJEMY DO BUDOWY



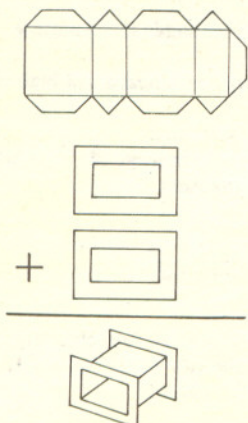
Rys. 3

Ktoś nie ma kompasu? Nic strasznego, można go zrobić we własnym zakresie. Igłę magnetyczną robimy z zatrzasku i kawałka drutu stalowego według rys. 3. Teraz musimy postarać się jeszcze o płaskie pudełko plastikowe z przezroczystym wieczkiem lub bez wieczka, zamocować w jego dnie igłę ostrzem w górę (rozgrzać w płomieniu i wcisnąć — po ostygnięciu będzie się trzymać), zaznaczyć skalę na dnie pudełka i tak osadzić igłę magnetyczną, po jej uprzednim namagnesowaniu, aby mogła swobodnie się obracać na igle-łożysku.



Rys. 4

Z kolei należy nawinąć na pudełko odpowiednią ilość drutu. Ile zwojów? — jak najwięcej, wtedy nasz przyrząd będzie czulszy. Jeśli mamy cienki drut (0,2-milimetrowy lub cieńszy) będziemy mogli nawinąć około 1000 zwojów, co pozwoli na pomiar prądów poniżej 1 mA. Jeśli chcemy mierzyć prądy o natężeniu rzędu 0,1–0,2 A (np. w żaróweczce do latarki), wystarczy nawinąć parę zwojów. Przy dużej liczbie zwojów będziemy mogli używać naszego przyrządu także jako woltomierza, np. do sprawdzania napięcia baterii — trzeba będzie wtedy połączyć go szeregowo z opornikiem o oporności rzędu 1 k $\Omega$ . Wygodnie będzie nawijać drut nie bezpośrednio na kompasie, ale odpowiednim karkasie zrobionym z tektury (rys. 5).

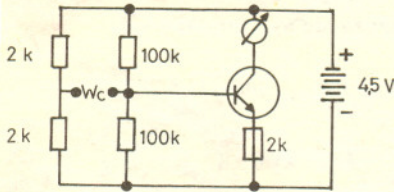


Rys. 5

Ponieważ uzwojenie mogłoby zasłaniać igłę w położeniu równowagi, zrezygnujemy z dokładnego ustawienia uzwojenia w płaszczyźnie południka magnetycznego. Z tego powodu, a także ze względu na niejednorodność pola magnetycznego prądu, wzór (1) nie będzie spełniony. Nie musimy jednak się nim posługiwać — wystarczy nasz miernik wycechować np. przy pomocy bateryjki o znanej sile elektromotorycznej i kilku oporników o znanym oporze. Może się zdarzyć, że będziecie chcieli zmierzyć jeszcze mniejsze natężenie prądu. Spytacie wtedy zapewne:



## A MOŻE BY TO JESZCZE POPRAWIĆ?



Rys. 6

Można. Jeżeli postaracie się o odpowiedni tranzystor, zbudowany z niego i paru oporników wzmacniacz prądu stałego powiększy czułość przyrządu. Trzeba tylko połączyć schemat według rys. 6. Tranzystor może być np. typu BCP109C lub inny o podobnym wzmocnieniu. Położenie zerowe igły magnetycznej przy użyciu wzmacniacza będzie inne niż bez niego, ale przy cechowaniu weźmiemy to pod uwagę. Jeżeli będziecie lutowali tranzystory, pamiętajcie o uchwyceniu wyprowadzeń szczypcami między tranzystorem a miejscem lutowania w celu odprowadzenia ciepła, tranzystory bowiem nie lubią wysokiej temperatury! Jeżeli pójdziecie za moją radą, wyposażycie swoje domowe laboratorium w przyrząd niezbyt precyzyjny, ale za to umożliwiający wykonanie szeregu ciekawych doświadczeń. Jakich? Nad tym zastanowimy się wspólnie w przyszłości.

## O przestrzeniach metrycznych (II)

Doc. dr Maria MOSZYŃSKA

Jednym z podstawowych pojęć metrycznych jest pojęcie kuli. Jest to naturalne uogólnienie na dowolną przestrzeń metryczną pojęcia dobrze wszystkim znanego. Rozważmy najpierw przestrzeń euklidesową trójwymiarową  $E^3$  ze zwykłą metryką, tzn. z metryką określoną przez wzór

$$\rho(p, q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

dla punktów  $p$  i  $q$  o współrzędnych  $(x_1, x_2, x_3)$  i  $(y_1, y_2, y_3)$ . Kulą o środku  $a$  i promieniu  $\lambda > 0$  jest — w potocznym sensie — podzbiór tej przestrzeni złożony z punktów odległych od  $a$  nie więcej niż o  $\lambda$  (tj. takich  $x$ , dla których  $\rho(x, a) \leq \lambda$ ). Nam będzie chodziło o zbiór tych punktów  $x$ , dla których

$$\rho(x, a) < \lambda.$$

Tak czy inaczej wyraz „kula” kojarzy się u większości ludzi z figurą przedstawioną na rys. 1.

Pojęcie kuli w dowolnej przestrzeni metrycznej stanowi uogólnienie pojęcia takiej właśnie zwykłej kuli. Rozważmy przestrzeń metryczną  $(X, \rho)$ , punkt  $a$  ze zbioru  $X$  i liczbę  $\lambda > 0$ . Kulą o środku  $a$  i promieniu  $\lambda$  (w przestrzeni  $(X, \rho)$ ) nazywamy zbiór wszystkich punktów  $x$  zbioru  $X$  spełniających nierówność

$$\rho(x, a) < \lambda.$$

Zbiór ten będziemy oznaczać symbolem  $K_{(X, \rho)}(a, \lambda)$  lub — jeśli to nie prowadzi do nieporozumienia — po prostu  $K(a, \lambda)$ .

Jasne jest, że kulami na płaszczyźnie z metryką kartezjańską (tzn. zwykłą) są koła bez brzegu. A jak wyglądają kule w innych przestrzeniach metrycznych, o których była mowa w I części tego artykułu? Niech na przykład  $(E^2, \bar{\rho})$  będzie płaszczyzną z metryką miejską; sprawdźmy, czym jest kula o środku w początku układu współrzędnych  $O$  i o promieniu  $\lambda = 1$ . Jest to zbiór opisany przez nierówność

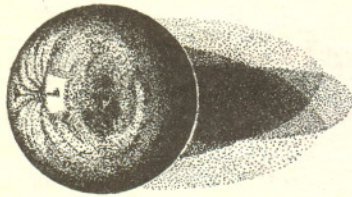
$$|x_1| + |x_2| < 1,$$

która jest równoważna z alternatywą następujących czterech formuł:

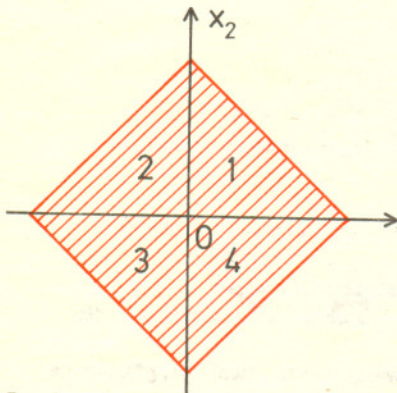
- (1)  $x_1 \geq 0$  i  $x_2 \geq 0$  i  $x_1 + x_2 - 1 < 0$ ,
- (2)  $x_1 \leq 0$  i  $x_2 \geq 0$  i  $-x_1 + x_2 - 1 < 0$ ,
- (3)  $x_1 \leq 0$  i  $x_2 \leq 0$  i  $-x_1 - x_2 - 1 < 0$ ,
- (4)  $x_1 \geq 0$  i  $x_2 \leq 0$  i  $x_1 - x_2 - 1 < 0$ .

Formuły (1)–(4) opisują zbiory zaznaczone odpowiednio na rys. 2. A więc rozważana kula jest kwadratem (bez brzegu), którego przekątne leżą na osiach układu współrzędnych i mają długość 2.

Kształty kul na płaszczyźnie z metryką kolejową  $\rho^*$  są jeszcze mniej podobne do kształtu „zwykłej” kuli, tj. kuli na płaszczyźnie kartezjańskiej (patrz zadanie 1). Posługując się pojęciem kuli można zdefiniować szereg pojęć, które różnią się w sposób bardzo istotny od poznanych dotychczas. Na czym ta różnica polega, postaramy się wyjaśnić w III części tego artykułu.



Rys. 1



Rys. 2



Ustalmy teraz przestrzeń metryczną  $(X, \varrho)$  i weźmy pod uwagę podzbiór  $A$  zbioru  $X$ . Określmy dwa zbiory: *wnętrze* zbioru  $A$ , które oznacza się symbolem  $\text{Int } A$  (łac. *interna*), oraz *domknięcie* zbioru  $A$ , które oznacza się symbolem  $\text{Cl } A$  (łac. *clausura*) bądź też po prostu  $\bar{A}$ .

$\text{Int } A$  jest zbiorem tzw. punktów wewnętrznych zbioru  $A$ , tj. punktów  $x$  ze zbioru  $X$  spełniających następujący warunek:

$$\text{istnieje liczba } \lambda > 0, \text{ taka że } K(x, \lambda) \subset A.$$

Oczywiście mowa tu o kuli w przestrzeni  $(X, \varrho)$ , a więc zbiór  $\text{Int } A$  zależy od przestrzeni, w której dany zbiór  $A$  został umieszczony. Np. wnętrze odcinka traktowanego jako podzbiór prostej euklidesowej składa się ze wszystkich jego punktów z wyjątkiem końców, natomiast wnętrze tego samego odcinka traktowanego jako podzbiór płaszczyzny z metryką kartezjańską jest zbiorem pustym. Dlatego czasem lepiej zaznaczyć, o jaką przestrzeń chodzi, pisząc  $\text{Int}_{(X, \varrho)} A$  zamiast  $\text{Int } A$ .

Warto zauważyć, że dla dowolnego podzbioru  $A$  płaszczyzny  $E^2$  zachodzi równość

$$\text{Int}_{(E^2, \varrho)} A = \text{Int}_{(E^2, \bar{\varrho})} A,$$

tzn. wnętrze zbioru  $A$  jest takie samo w przypadku metryki kartezjańskiej, jak miejskiej, mimo że, jak wiemy, kule w metryce kartezjańskiej i w miejskiej różnią się kształtem. Czytelnik sam zastanowi się nad tym, czy zastępując metrykę miejską  $\bar{\varrho}$  przez kolejową  $\varrho^*$  również nie zmienimy wnętrza dowolnych podzbiórów. Pomoże mu w tym zadanie 3.

$\text{Cl } A$  można zdefiniować tak: Niech  $X - A$  będzie zbiorem tych wszystkich punktów przestrzeni  $X$ , które nie należą do  $A$ , czyli tzw. dopełnieniem zbioru  $A$ . Domknięciem zbioru  $A$  jest dopełnienie zbioru  $\text{Int}(X - A)$ , tzn.

$$\text{Cl } A = X - \text{Int}(X - A).$$

Sens tego pojęcia ilustruje zadanie 4.

Pojęcia wnętrza i domknięcia pozwalają wyróżnić pewne klasy podzbiórów przestrzeni  $(X, \varrho)$ . Zbiór  $A$  jest *otwarty* w przestrzeni  $(X, \varrho)$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest identyczny ze swoim wnętrzem, tj.  $A = \text{Int}_{(X, \varrho)} A$ , a jest *domknięty*, jeżeli pokrywa się ze swym domknięciem, tj.  $A = \text{Cl}_{(X, \varrho)} A$ . Zbiór  $A$  jest *brzegowy*, jeżeli jego wnętrze jest puste, tj.  $\text{Int}_{(X, \varrho)} A = \emptyset$ , a jest *gęsty*, jeżeli jego domknięcie jest całym zbiorem  $X$ , tj.  $\text{Cl}_{(X, \varrho)} A = X$ .

Stąd i z definicji domknięcia wynikają bezpośrednio następujące związki:

- Zbiór  $A$  jest domknięty w  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $X - A$  jest otwarty.
- Zbiór  $A$  jest gęsty w  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $X - A$  jest brzegowy.

Zauważmy, że przestrzenie  $(E^2, \varrho)$  i  $(E^2, \bar{\varrho})$  mają te same klasy zbiorów otwartych (podobnie: domkniętych, gęstych, brzegowych). Czytelnik może sam się przekonać, że dla przestrzeni  $(E^2, \varrho^*)$  sytuacja jest odmienna (patrz zad. 5).

O takich dwóch metrykach  $\varrho_1$  i  $\varrho_2$  w zbiorze  $X$ , dla których klasy zbiorów otwartych w  $(X, \varrho_1)$  i w  $(X, \varrho_2)$  są identyczne, mówi się, że są *topologicznie równoważne*. A więc metryka kartezjańska jest topologicznie równoważna miejskiej, ale nie jest równoważna kolejowej.

Omawianą tematykę można znaleźć np. w podręczniku K. Kuratowskiego *Wstęp do teorii mnogości i topologii*.

### Zadania

1. Narysować kulę  $K(a, \lambda)$  na płaszczyźnie z metryką kolejową  $\varrho^*$ , przyjmując

- jako  $a$  — początek układu  $o$  oraz  $\lambda$  dowolne,
- jako  $a$  — punkt różny od  $o$  oraz  $\lambda \leq \varrho^*(a, o)$
- jako  $a$  — punkt różny od  $o$  oraz  $\lambda > \varrho^*(a, o)$ .

2. Dowieść, że w dowolnej przestrzeni metrycznej

$$\text{Int } K(a, \lambda) = K(a, \lambda).$$

3. Dane są dwie metryki w zbiorze  $X$ ,  $\varrho_1$  i  $\varrho_2$ . Dowieść, że następujące dwa warunki są równoważne:

- $\text{Int}_{(X, \varrho_1)} A = \text{Int}_{(X, \varrho_2)} A$  dla każdego podzbioru  $A$ ,
- każda kula  $K_{(X, \varrho_1)}(a, \lambda)$  zawiera pewną kulę  $K_{(X, \varrho_2)}(a, \lambda')$  i, na odwrót, każda kula  $K_{(X, \varrho_2)}(a, \lambda)$  zawiera pewną kulę  $K_{(X, \varrho_1)}(a, \lambda')$ .

Wskazówka. W dowodzie implikacji (1)  $\rightarrow$  (2) wygodnie jest skorzystać z zad. 2.

4. Wykazać, że zbiór  $\text{Cl}(K_{(X, \varrho)}(a, \lambda))$  składa się z tych wszystkich punktów  $x$  zbioru  $X$ , dla których  $\varrho(x, a) \leq \lambda$ .

5. Podać przykład podzbioru płaszczyzny  $E^2$ , który jest otwarty w przestrzeni  $(E^2, \varrho^*)$ , ale nie jest otwarty w przestrzeni  $(E^2, \varrho)$ . Czy może być na odwrót?



### Rozwiązanie zadania M49.

Takimi prędkościami są  $\frac{v}{2k+1}$ , gdzie  $k$  jest liczbą naturalną. Wykażemy to dla  $k = 1$  (dowód dla innych  $k$  jest podobny). Załóżmy mianowicie, że wraz z samochodem A

jadącym z prędkością  $\frac{v}{3}$  wjeżdża na

skrzyżowanie X (przy zielonym świetle) samochód B jadący z prędkością  $v$ . Samochód B dojeżdża do kolejnego skrzyżowania, wraca do X i jeszcze raz zmienia kierunek jazdy. Dojedzie on oczywiście do drugiego skrzyżowania razem z samochodem A, który napotka wobec tego zielone światło.



# S mała delta

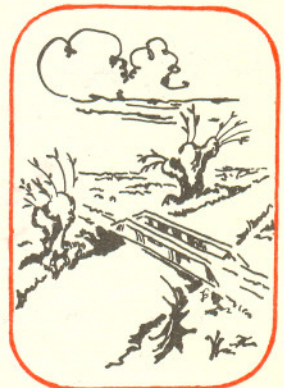


## Lewy czy prawy

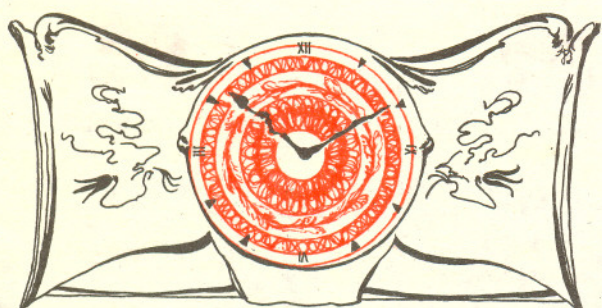
Może nasz młodszy braciszek ma jeszcze kłopoty z odróżnieniem lewego buta od prawego, ale — my? A jednak... zastanówmy się, jaka jest różnica między butem lewym a prawym. Zapewniam was, że sprawa nie jest taka prosta, jak by się mogło wydawać. Nie wierzycie? Spójrzcie w takim razie na rysunki.



Cień pana Kowalskiego pada na ścianę. Którą to właściwie rękę trzyma pan Kowalski w górę, lewą czy prawą?



Na lewym brzegu tej rzeki mamy rozbić namioty. Zaraz, zaraz, ale gdzie jest lewy brzeg?

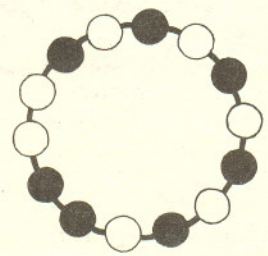


Odróżnianie lewej strony od prawej jest bardzo potrzebną umiejętnością. Na przykład kierowca musi pamiętać, żeby jechać prawą stroną ulicy, a stolarz, żeby do prawych drzwi szafy wstawić prawy zamek, nie na odwrót. Przyda się każdemu, jeśli będzie pamiętał, w którą stronę odkręcać pokrywkę słoika, a w którą wkręcać śrubkę. Odróżniamy lewą stronę od prawej bez zastanowienia. Ma to swoje zalety, ale ma też i wady, gdyż wskutek tego wielu ciekawych rzeczy nie zdążamy nawet zauważyć. Czy próbowaliście na przykład wyobrazić sobie „odwrócony” zegarek? Jeśli nie, to zastanówcie się, jaką godzinę wskazuje zegarek pana Opaczego.

A jak podobałaby się wam taka sztuczka: Na kawałku przezroczystej taśmy (na przykład celuloidowej) piszę słowo „mucha”. Kładę następnie taśmę na stole, odwracam się na chwilę tyłem, a potem bezbłędnie zgaduję, czy ktoś z was odwrócił taśmę na drugą stronę, czy też nie w czasie, gdy byłem zwrócony do stołu tyłem. — Też mi sztuczka — pewno odpowiecie. — Przecież każdy odróżni napis odwrócony od nie odwróconego.

mucha

dmuch

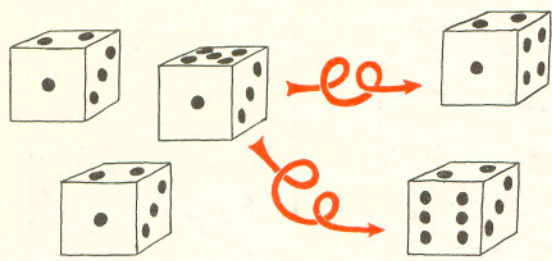


Mam jednak nadzieję zdobyć sobie wasze uznanie podobną, ale już znacznie lepszą sztuczką. Na kawałku przezroczystej taśmy rysuję teraz taki wzór jak obok. Wystarczy mi rzut oka, żeby stwierdzić, czy odwróciliście taśmę na drugą stronę, czy nie. Na czym polega tajemnica tej sztuczki? A czy wiecie, że kostki do gry mogą być „lewostronne” albo „prawostronne”? Odkryłem to kiedyś podczas zabawy. Prawidłowa kostka do gry powinna mieć oczka rozmieszczone na ściankach w ten sposób, żeby suma oczek na ściankach przeciwległych równała się zawsze 7. Tak więc: naprzeciwko jedynki ma być szóstka, naprzeciwko dwójki piątka i naprzeciwko trójki czwórka. Bawiłem się kompletem takich prawidłowych kostek.

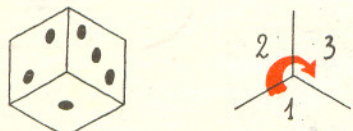


Wziąłem jedną kostkę i postawiłem na stole tak, że na ścianie skierowanej do mnie była jedynka, na ścianie górnej dwójka i na ścianie po mojej prawej ręce trójka. Wziąłem drugą kostkę i postawiłem obok pierwszej w ten sam sposób. Ale z trzecią kostką miałem kłopot. Kiedy już na wprost mnie była jedynka i u góry dwójka, to na prawej ścianie zamiast trójki była czwórka. Kiedy zaś na prawej ścianie była trójka i u góry dwójka, to na wprost mnie była szóstka.

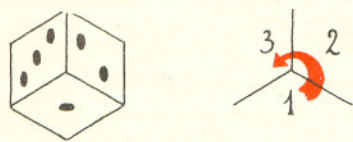
Zrozumiałem wreszcie, że jest to zupełnie inna kostka niż dwie pierwsze. Odkryłem także, że są dokładnie dwa typy prawidłowych kostek — prawoskrętne i lewoskrętne.



Kostkę prawoskrętną zawsze można ustawić tak:



Natomiast lewoskrętną zawsze można ustawić tak:



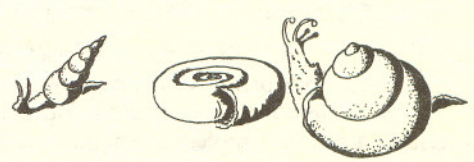
Na zakończenie mam kilka pytań.

Co się stanie, jeśli normalną płytę spróbujemy przegrać na „odwrotnym” adapterze (który zamiast w prawo obraca się w lewo)?

Wokół krętego jeziora prowadzi jedna jedyna ścieżka, a dookoła rośnie las nie do przebycia. Wzdłuż brzegu jeziora biegnie ścieżką lis, mając brzeg po swojej lewej stronie. Na przeciwnym brzegu na ścieżce, stoi zając.

Jak radzilibyście mu uciekać przed lisem?

Który z dwóch rodzajów narysowanych obok muszli można podzielić na lewoskrętne i prawoskrętne? Czy wiecie, jakie muszle — lewoskrętne czy prawoskrętne — występują częściej w naturze? (Bo na przykład wiadomo, że ludzi z sercem po prawej stronie jest znacznie mniej niż ludzi z sercem po lewej stronie).



## Ciecz w stanie nieważkości

Jaki kształt ma woda?... Dziwne pytanie! Woda w butelce ma kształt butelki, a nalana do szklanki ma kształt szklanki. Cechą cieczy jest to, że przyjmuje kształt naczynia, w którym się znajduje. Ponadto ciecz ma określoną powierzchnię w płaszczyźnie poziomej.

Dlaczego tak jest? Jaka siła każe cząsteczkom cieczy wypełnić naczynie do pewnej wysokości, zamiast, na przykład, zbić się w kulę pozostawiając brzegi suche? Odpowiedź jest bardzo łatwa. Cząsteczki cieczy doznają przyciągania ziemskiego. Ponieważ mogą one poruszać się względem siebie, układają się tak, by każda cząsteczka na powierzchni cieczy zajmowała możliwie najniższe położenie.

Ciekawe, jak zachowywałyby się herbata w szklance w warunkach nieważkości. Nic nie zmuszałoby jej do wypełnienia dolnej części szklanki. Co więcej, można by usunąć szklankę, a herbata unosiłaby się w powietrzu.

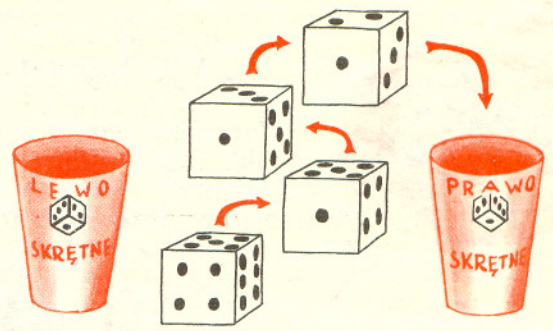
Czy miałyby wtedy określony kształt? Może wyglądałyby jak brązowa, przezroczysta chmurka?

Zamiast zgadywać, podejźmy do tego naukowo.

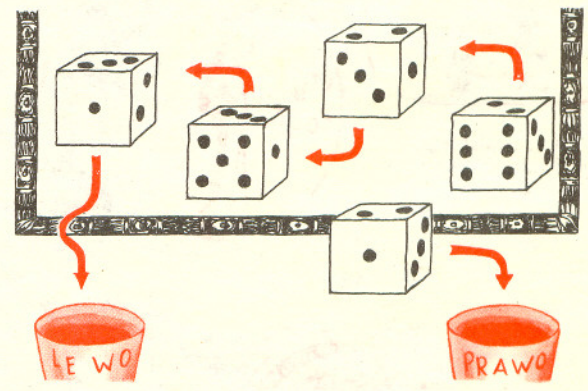
Zbadajmy „naturalny kształt cieczy” doświadczalnie.

Sprawa jest prosta. Musimy zobaczyć pewną ilość dowolnej cieczy w warunkach nieważkości. W tym celu musimy wykazać się idealnym stanem zdrowia, mieć znajomości wśród kosmonautów oraz uzyskać zgodę rodziców na podróż kosmiczną... Trochę to trudne do spełnienia, więc, chociaż nasz problem jest bardzo ciekawy, wątpię, czy ktokolwiek z was jest w stanie rozwiązać go metodą doświadczalną. Może jednak można na Ziemi, we własnym mieszkaniu, stworzyć dla cieczy warunki nieważkości? Jest na to sposób.

Ułatwia to poklasyfikowanie wszystkich prawidłowych kostek. Rysunek wyjaśnia, jak to zrobić.



W majowym numerze «Małej Delt» jest wiele rysunków rozmaitych kostek (wszystkie prawidłowe). Spróbujcie ustalić, które z nich są lewoskrętne, a które prawoskrętne. A jakim typem kostki będzie lustrzane odbicie kostki prawoskrętnej?

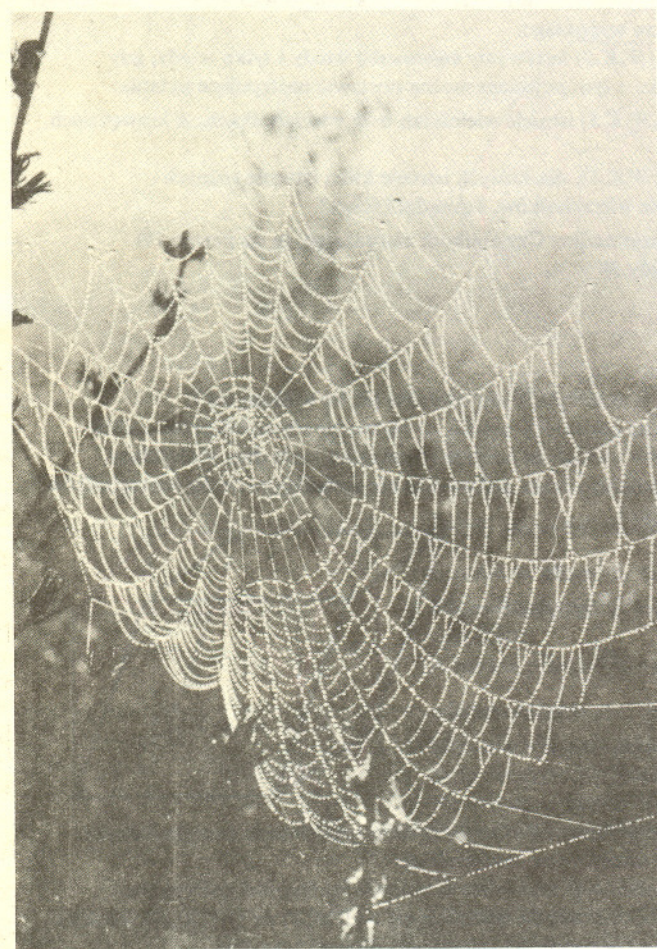




## Nieważka kropla oliwy w szklance

Nalej do szklanki trochę oliwy, a następnie trochę spirytusu. Spirytus, jako lżejszy, pozostanie na wierzchu. Teraz ostrożnie dodawaj wody do spirytusu. Najlepiej użyć do tego kroplomierza. Ważne jest, aby woda nie spływała wzdłuż ścianki szklanki do jej dna, lecz żeby mieszała się ze spirytusem. W miarę wkraplania wody gęstość mieszaniny rośnie. Obserwuj uważnie, co dzieje się z oliwą. W pewnej chwili oliwa uwypukla się, odrywa się od dna, po czym tworzy kulę, która zawisa w mieszaninie wody ze spirytusem. O tej wielkiej „kropli” oliwy można powiedzieć, że znajduje się w warunkach nieważkości; wprawdzie działa na nią siła przyciągania ziemskiego, ale jest ona zrównoważona siłą wyporu. Udało nam się więc przezwyciężyć trudności i zobaczyć nieważką ciecz. Przekonaliśmy się, że ciecz uwolniona od siły ciężkości przybiera swój kształt naturalny — kulisty. Łatwo zrozumieć, dlaczego tak jest. Na nieważką kroplę działa tylko sprężysta błonka powierzchniowa, która sprowadza ciecz do formy o najmniejszej powierzchni. Wiadomo, że ze wszystkich brył o danej objętości najmniejszą powierzchnię ma kula.

Ile razy powierzchnia kostki sześcienniej jest większa od powierzchni kuli o tej samej objętości?



Fot. Z. Gortel

Gdybyśmy przyjrzeni się maleńkim kropelkom cieczy, przekonaliśmy się, że pomimo przyciągania ziemskiego mają one kształt prawie idealnie kulisty. Napięcie powierzchniowe, czyli siła ściągnięta, jest w tym wypadku w stanie pokonać siłę ciężkości, która stara się tę ciecz rozpląszczyć. Na zdjęciu obok widoczne są kropelki rosy zawieszona na nitkach pajęczyny. Rozejrzyjcie się wokół siebie, może znajdziecie inne ciekawe przykłady.

## Jak robi się śrut?

Domyślamy się, że spadająca swobodnie ciecz też powinna przybierać kształt kulisty. Ponieważ wszystkie cząsteczki cieczy spadają z tą samą prędkością, górna warstwa cieczy nie wywiera nacisku na niżej położone cząsteczki, czyli ciecz jest wtedy „nieważka”.

Wykorzystano to przy produkcji śrutu. Ziarenka śrutu — to zastygłe krople ołowiu. Kotły do wytapiania ołowiu umieszcza się na szczycie wysokiej, kilkudziesięciometrowej wieży.

Roztopiony ołów spada kroplami z wieży do zimnej wody. Po drodze zastyga w postaci regularnych kulek.

Skoro już tyle wiemy o zachowaniu się cieczy w warunkach nieważkości, zdajemy sobie sprawę, jakie kłopoty mają kosmonauci podczas podróży kosmicznej. Znany pedagog i popularyzator fizyki J. I. Perelman napisał na ten temat opowiadanie pod tytułem *Śniadanie w nieważkiej kuchni*. Stanowi ono „brakujący” rozdział książki Juliusza Verne’a *Podróż na księżyc*.

J. I. PERELMAN, *Zajmująca fizyka*, tom II, Warszawa 1950, Książka i Wiedza, s. 160 i 161.

### „Śniadanie w nieważkiej kuchni

— Przyjaciele, przecież myśmy jeszcze nie jedli śniadania! — przypomniał Michał Ardan swym towarzyszom podróży. — Z tego, że utraciliśmy wagę w armatnim pocisku, nie wynika wcale, żebyśmy stracili apetyt. Podejmuję się przyrządzić wam nieważkie śniadanie, które na pewno będzie się składało z najlżejszych potraw, jakie kiedykolwiek były sporządzone na świecie.

I nie czekając na odpowiedź wziął się Francuz do roboty.

— Nasza butla z wodą udaje pustą — mrucał do siebie Ardan usiłując odkorkować wielką butlę. — Nie oszukasz mnie: przecież wiem, dlaczegoś taka lekka... Tak, korek wyjęty. Racz wylać do rondla swą nieważką zawartość! Chociaż jednak przechylił butlę, jak tylko mógł, woda się z niej nie wylewała.

— Nie fatyguj się, drogi Ardanie — zawołał Nicholl. — Zrozum, że w naszym pocisku, w którym nie ma ciężkości, woda wylewać się nie może. Musisz ją wytrząsnąć z butli jak gęsty syrop.

Nie myśląc długo Ardan uderzył dłonią w dno odwróconej butli. Nowa niespodzianka: u wylotu szyjki powstała bańka wodna wielkości pięści.

— Cóż się stało z naszą wodą? — zdumiał się Ardan. — To już dla mnie za wiele! Wytłumaczcież, moi uczeni przyjaciele, co tu się dzieje?

— To kropla, drogi Ardanie, zwykła wodna kropla. W świecie bez ciężkości krople mogą być dowolnej wielkości... Przypomnij sobie, że ciecze tylko pod wpływem ciężkości przybierają kształt naczyń, leją się strumieniami itd. Tutaj zaś nie ma ciężkości, ciecze pozostawione swym wewnętrznym siłom molekularnym muszą przybrać kształt kulisty jak olej w słynnym doświadczeniu Plateau [...].”

Książka J. I. Perelmana powstała kilkadziesiąt lat temu, na długo przed pierwszymi podróżami kosmicznymi. Do problemów związanych ze stanem nieważkości powrócimy w następnym numerze, wzbogaceni o doświadczenia współczesnych kosmonautów.

«Małą Deltę» opracowali: Przemysław Nowicki i Daria Ziemińska.







## Krzysztof JERZYK

Autor artykułu jest uczniem II klasy Liceum Ogólnokształcącego im. Marszałka S. Małachowskiego w Płocku.

Znamy rozmaite wielościany: foremne, półforemne, gwiaździste, ostrosłupy i inne, o znanych i nie znanych nam nazwach. W kilku wielościanach policzmy wierzchołki  $W$ , krawędzie  $K$ , ściany  $S$  i idąc za szwajcarskim matematykiem Leonardem Eulerem obliczmy wartość wyrażenia

$$W - K + S:$$

Bryła	W	K	S	$W - K + S$
sześcian 	8	12	6	2
ośmiościan 	6	12	8	2
ostrosłup $n$ -kątny 	$n+1$	$2n$	$n+1$	2
graniastosłup $n$ -kątny 	$2n$	$3n$	$n+2$	2

Za każdym razem otrzymaliśmy zależność

$$(*) \quad W - K + S = 2.$$

Związek ten nie jest przypadkowy i, jak wykazał Euler, dotyczy każdego wielościanu *jednospójnego* w szczególności każdego wielościanu wypukłego.

Dowolną trójkę liczb naturalnych  $(W, K, S)$  nazywamy *eulerowską* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia ona warunek (\*). W związku z tym pojęciem można postawić następujące pytania:

1. Dla jakich trójek eulerowskich  $(W, K, S)$  istnieje wielościan o  $W$  wierzchołkach,  $K$  krawędziach,  $S$  ścianach?
2. Czy są takie trójki eulerowskie  $(W, K, S)$ , dla których istnieje kilka istotnie różnych wielościanów o odpowiedniej liczbie wierzchołków, krawędzi i ścian?

Odpowiedź na pierwsze pytanie pozostawimy Czytelnikom zauważając, że na pewno (?)

— nie istnieje żądany wielościan, gdy  $W < 4$ ,

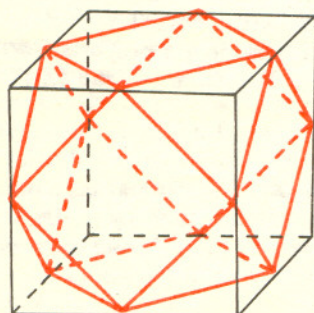
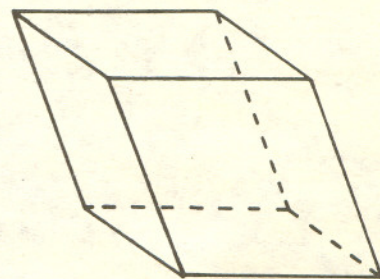
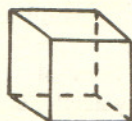
— ani gdy  $K < 6$ ,

— ani gdy  $S < 4$ ,

— ani gdy  $K = 7$ ;

— istnieje wielościan, w którym  $K = 6$  lub też  $K$  jest dowolną liczbą większą od 7.

Aby odpowiedzieć na drugie pytanie, należałoby ustalić, co będziemy rozumieli przez *istotnie różne* wielościany. Otóż nie będziemy uważali za istotnie różne tylko takie dwa wielościany, z których jeden można uzyskać z drugiego przez deformację nie zmieniającą liczby wierzchołków żadnej ze ścian (np. narysowane niżej).



Odpowiedź na pytanie drugie jest pozytywna. Podam tu sposób uzyskiwania istotnie różnych wielościanów odpowiadających tej samej trójce eulerowskiej.

Zetniemy wierzchołki wielościanu obcinając krawędzie w połowie jej długości (na rysunku sześcian). Liczby wierzchołków, ścian i krawędzi zmieniają się z  $(W, K, S)$  na  $(W', K', S')$ . Zmiana ta nie jest chaotyczna: każdy „nowy” wierzchołek odpowiada dawnej krawędzi

$$W' = K,$$

a „nowych” ścian będzie tyle, co „starych” ścian i wierzchołków razem wziętych

$$S' = W + S = K + 2$$

i ze wzoru Eulera

$$K' = W' + S' - 2 = 2K.$$

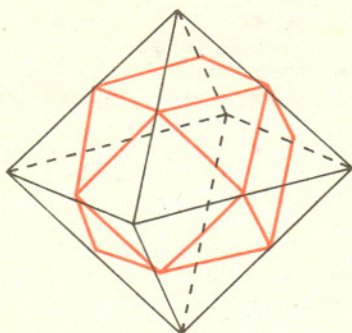
A więc sumarycznie

$$(W', K', S') = (K, 2K, K + 2).$$



Na podstawie tych zależności można wyciągnąć wnioski:

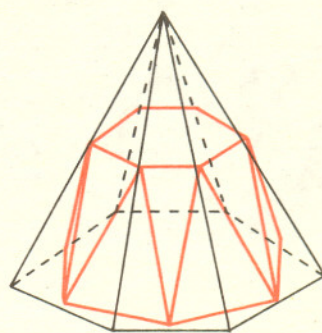
- Liczba wierzchołków, ścian i krawędzi bryły powstałej przez ścięcie wierzchołków zależy *jedynie* od liczby krawędzi bryły, której ścinamy wierzchołki.
- Ścinając tym samym sposobem wierzchołki bryły o takiej samej liczbie krawędzi (mimo że mogą one różnić się liczbą wierzchołków i ścian) otrzymamy bryły odpowiadające tej samej trójce eulerowskiej. Tak można właśnie zbudować przykłady odpowiadające na pytanie 2.



$$S=8 \quad W=6$$

8 trójkątów  
6 czworokątów

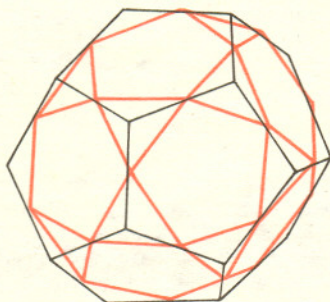
$$K=12$$



$$S=7 \quad W=7$$

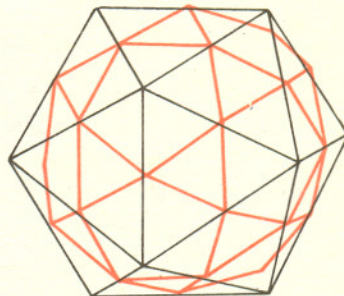
12 trójkątów  
2 sześciokąty

$$W'=12, \quad K'=24, \quad S'=14$$



$$W=20 \quad S=12$$

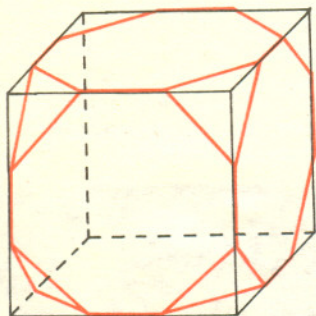
$$K=30$$



$$W=12 \quad S=20$$

$$W'=30, \quad K'=60, \quad S'=32$$

w obu przypadkach 20 trójkątów, 12 pięciokątów



Warto zauważyć, że nie jest w podanej metodzie rzeczą istotną, iż obcinaliśmy krawędzie akurat w połowie długości. Obcinając np. w  $\frac{1}{3}$  długości (z obu stron), otrzymamy z wielościanu odpowiadającego trójce  $(W, K, S)$  wielościan odpowiadający trójce  $(2K, 3K, K+2)$ . Proszę sprawdzić!

A można przecież ścinać wielokrotnie. Z drugiej strony nie musimy ścinać wszystkich wierzchołków bryły. Np. po ścięciu w  $\frac{1}{2}$  dwóch wierzchołków czworoscianu otrzymamy bryłę odpowiadającą tej samej trójce, co sześcian, choć istotnie od sześcianu różną. Ściany jej bowiem będą tworzyły 2 trójkąty, 2 czworokąty i 2 pięciokąty.

Na zakończenie otwarty problem: znaleźć funkcję (trójargumentową) wyznaczającą liczbę istotnie różnych wielościanów odpowiadających danej trójce eulerowskiej.

„Sztuka wygrywania” — rozwiązanie. Łatwo zauważyć, że częstość optymalna istnieje, przy każdej bowiem częstości oczekiwane wypłaty graczy są równe. Jeśli więc jakaś częstość daje maksymalną wypłatę jednemu, to daje taką samą (a więc też maksymalną) drugiemu. Znalazienie częstości optymalnej jest proste. Jeśli obaj stosują  $W$  z częstością  $p$  (ale niezależnie!), to każdy gracz może oczekiwać wypłaty  $u(p)$ :

$$u(p) = p^2 + 2(1-p)^2 + 5p(1-p) = -6p^2 + p + 2,$$

która osiąga maksimum dla  $p = \frac{1}{12}$ . Maksymalna oczekiwana wypłata wynosi  $2 \frac{1}{24}$  gr na jedną gre. a więc każdy z graczy może oczekiwać zysku około 20,5 zł w tysiącu gier.

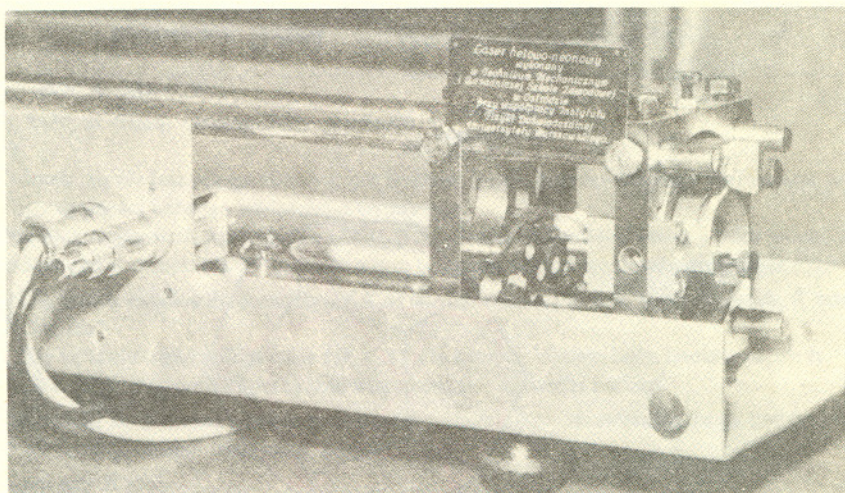


*Mgr Jan DĄBROWSKI*

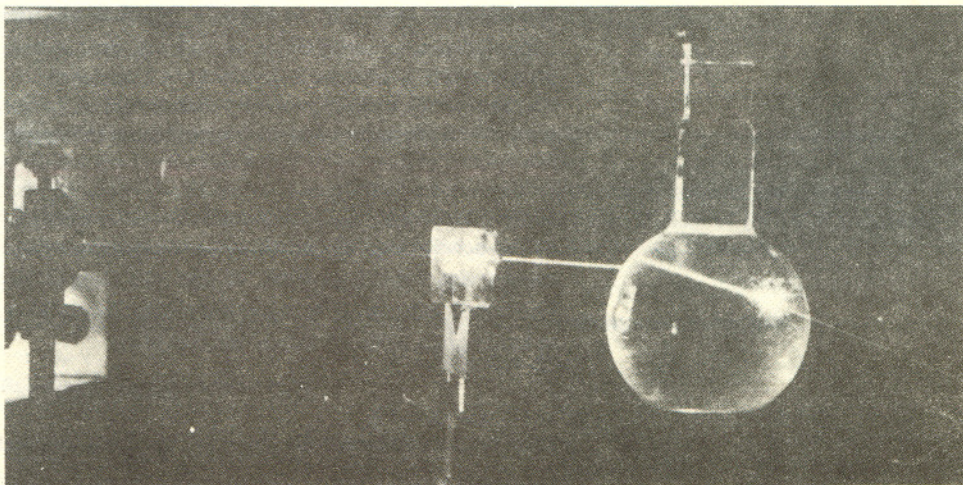


Laser i holografia należą do najbardziej błyskotliwych odkryć XX wieku. Rozwijająca się niezwykle szybko technika laserowa liczy sobie niewiele lat, pierwszy bowiem laser został zbudowany w r. 1960 w Stanach Zjednoczonych przez Theodora Maimana. Poprzednio, w 1954 r., powstał w Stanach Zjednoczonych molekularny maser amoniakalny, zbudowany przez Charlesa Townesa i współpracowników, a w ZSRR generator kwantowy zbudowany przez Nikołaja Basowa i Aleksandra Prochorowa.

Zastosowanie laserów w nauce i technice jest bardzo szerokie. A jakie są możliwości wykorzystania lasera i holografii w szkole? Aby odpowiedzieć na to pytanie, złożyła «Delta» wizytę w Zespole Szkół Zawodowych w Ostródzie. Zespół ten posiada laser helowo-neonowy od 8 grudnia 1973 r., a od 31 sierpnia 1974 r. — pracownię holograficzną. Laser wykonywano w warsztatach szkolnych przy współpracy z Instytutem Fizyki Doświadczalnej UW w Warszawie, natomiast zestaw do wytwarzania hologramów wykonano w całości w szkole według wskazówek pracowników Centralnego Laboratorium Optycznego w Warszawie.

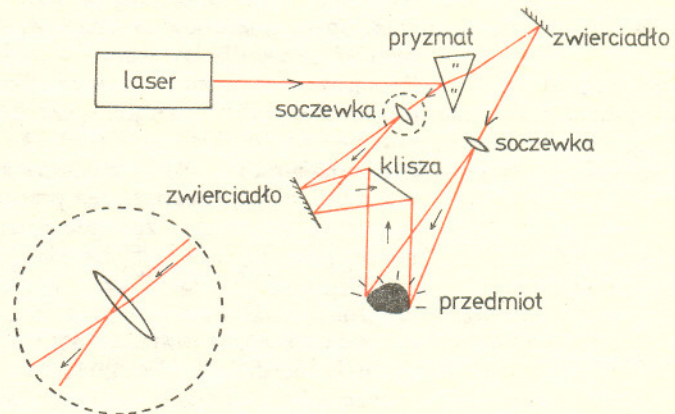


Laser okazał się kapitalną pomocą naukową na lekcjach fizyki. O jego wielkich zaletach w nauczaniu optyki decyduje przede wszystkim monochromatyczność oraz spójność wiązki świetlnej. Jest więc wykorzystywany na lekcjach poświęconych takim tematom, jak: prawo odbicia światła, załamanie światła na granicy dwóch ośrodków, wyznaczenie współczynnika załamania światła, przechodzenie światła jednobarwnego przez pryzmat, wyznaczenie ogniskowej zwierciadła wklęsłego, wyznaczenie ogniskowej soczewki czy wreszcie przechodzenie światła przez filtry. Zjawiska tego rodzaju można badać używając zwykłych źródeł światła, przy zastosowaniu jednak wiązki laserowej są one o wiele lepiej widoczne. Monochromatyczność światła laserowego umożliwia wyznaczenie ogniskowej soczewki z dużą dokładnością. Spójność zaś światła laserowego umożliwia doświadczalne badanie także wielu zjawisk, w których występuje dyfrakcja lub interferencja światła. Jedno z ćwiczeń polega na przepuszczeniu wiązki przez szczelinę w nieprzepuszczalnej przesłonie. Następuje tu ugięcie światła. Szczelinę możemy podzielić w myśli na dużą liczbę punktów, z których każdy jest źródłem fali elementarnej. W wyniku interferencji tych fal na ekranie powstają prążki dyfrakcyjne.





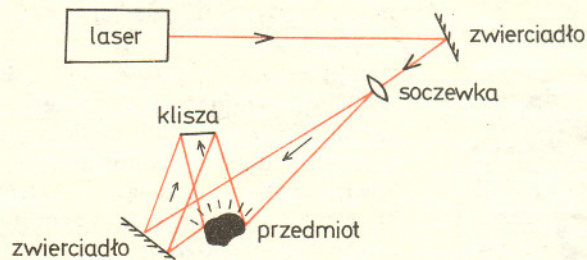
Na lekcjach fizyki w Ostródzie wykonują uczniowie także słynne doświadczenie Younga z dwiema szczelinami. Po przejściu światła spójnego przez dwie blisko siebie położone szczeliny powstają na ekranie prążki interferencyjne. Umieszczając na drodze światła spójnego igłę, otrzymamy obraz dyfrakcyjny z prążkami w obszarach granic cienia i jasnym prążkiem na środku. Doświadczenie to było w czasach Younga koronnym dowodem, że światło ma naturę falową. W swoich eksperymentach Young przepuszczał światło słoneczne przez małe otworki. Otrzymywał w ten sposób światło spójne o bardzo małym natężeniu. Aby zaobserwować efekty optyczne, musiał wykonywać doświadczenia w dobrze zaciemnionych pomieszczeniach. Wszystkie te niedogodności znikają, gdy ma się do dyspozycji laser. W ramach zajęć kółka fizycznego uczniowie pragną przeprowadzić szereg trudnych i interesujących doświadczeń, takich jak pomiar prędkości światła (będzie to powtórzenie doświadczenia Foucault z wirującymi zwierciadłami), czy przenoszenie dźwięku przy pomocy wiązki laserowej. Wykonany w szkole zestaw do wytwarzania hologramów wpisuje się znakomicie. Jakość wykonywanych hologramów jest dobra. W skład zestawu wchodzi również laser jako źródło światła spójnego. Hologramy są wykonywane dwiema metodami. W pierwszej z nich wiązki biegną tak, jak to przedstawia rys. 1.



Rys. 1

Przy zastosowaniu drugiej metody ustawienie zestawu jest prostsze (rys. 2). Czas naświetlania wynosi około 30 s. Po naświetleniu klisza jest wywoływana, a po oplukaniu utrwalona. Aby zdjęcia holograficzne były dobre, drogi optyczne w trakcie naświetlania nie powinny zmieniać się więcej niż o  $1/4$  długości fali światła laserowego. Dlatego bardzo ważna jest amortyzacja uniemożliwiająca przenoszenie drgań budynku na zestaw. Cały zestaw został umieszczony na dużej stalowej płycie. Amortyzację zapewniają warstwy z kawałków mikrogumy, poprzedzielane płytami paździerzowymi.

Podstawki-uchwytów, soczewek, zwierciadeł, hologramów, pryzmatu i stolika, na którym umieszczono przedmioty, są ciężkie i dobrze przylegają do płyty. Jako soczewki zastosowano obiektywy mikroskopu szkolnego. Laser musi wytwarzać wiązkę jednomodową, to jest taką, która po rozproszeniu tworzy na ekranie jednorodną i symetryczną plamę.



Rys. 2

Obrazy „przestrzenne” mogą być cennymi pomocami na lekcjach nie tylko fizyki, ale też innych przedmiotów. Można więc przy pomocy zdjęć holograficznych pokazywać szkielety na lekcjach biologii, dzieła sztuki na lekcjach wychowania plastycznego, modele przestrzenne na lekcjach rysunku itd. Być może jest to propozycja kontrowersyjna. Istnieje jednak pewien rodzaj hologramów, których wykorzystanie w szkole nie powinno budzić wątpliwości. Są to hologramy pokazujące rozkład odkształceń w ciele pod wpływem wywieranej nań niewielkiej siły. Metodę tę stosuje się do wykrywania wad różnych przedmiotów, gdy nie można posłużyć się promieniami rentgenowskimi (tak bada się np. opony samochodowe). Hologramy takie mogą być znakomitą pomocą na lekcjach materiałoznawstwa, maszynoznawstwa, w zajęciach warsztatowych, a także przy ocenie jakości wyrobów wykonanych w warsztatach szkolnych. W Zespole Szkół Zawodowych w Ostródzie przygotowuje się odpowiednią salę lekcyjną, w której wyświetlane będą obrazy przestrzenne na różnych lekcjach. Laser i holografia powiększają w ten sposób zespół środków audiowizualnych wykorzystywanych w szkole. Będzie to niewątpliwie ciekawy eksperyment dydaktyczny.



## CZY MOŻNA ZMIERZYĆ EGOIZM?

Rzecz dzieje się w kraju, w którym obowiązuje specyficzny przepis umożliwiający prokuratorowi całkowite lub częściowe uwolnienie przestępcy od kary w zamian za szczerą przyznanie się do winy lub udzielenie innych interesujących prokuraturę informacji.

Prokurator jest przekonany, że A i B wspólnie obrabowali bank, nie dysponuje jednak wystarczającym materiałem dowodowym. W związku z tym każdemu z podejrzanych z osobna przedstawia identyczną propozycję: jeśli przyznasz się do winy i udowodnisz, że wspólnie dokonaliście rabunku, a twój współnik się nie przyzna, to on dostanie 10 lat, a ciebie zwolnię od kary; jeśli żaden z was się nie przyzna, to każdy dostanie po roku za udowodnione wam drobniejsze przestępstwa; jeśli jednak obaj się przyznacie, to sąd będzie musiał orzec po 5 lat więzienia dla każdego.

Podejrzani nie mogą się porozumiewać. Każdy z nich ma podjąć decyzję: przyznać się (P) czy nie przyznać (N)? Wszystkie możliwe skutki ich decyzji podane są w tabelce obok. (Tabela ta nazywana bywa macierzą wypłat; pierwsza liczba oznacza „wypłatę” lat więzienia dla A, druga — „wypłatę” B).

Z punktu widzenia A sytuacja jest następująca: Jeśli B przyzna się, to i jemu oplać się przyznać — zostanie skazany na 5 lat zamiast na 10. Jeśli natomiast B nie przyzna się, to A tym bardziej powinien się przyznać — zostanie wtedy całkowicie zwolniony od kary. Najlepszą zatem strategią podejrzanego A jest P: przyznać się. Dla podejrzanego B sytuacja wygląda dokładnie tak samo. Najlepsze, co może zrobić, to przyznać się. Cały kłopot w tym, że jeśli obaj się przyznają, to obaj odsiedzą po 5 lat, podczas gdy oferta prokuratora stwarza możliwość znacznie dla każdego z nich dogodniejszą: obaj odsiedzą tylko po roku więzienia, jeśli żaden się nie przyzna.

Przypuśćmy, że udało się im jakoś porozumieć; uzgodnili, że żaden się nie przyzna. Ale przestępcy jak to przestępcy, są niemoralni. Każdy z nich zerwie każdą umowę, jeśli mu się to oplać. A perspektywa zamiany 1 roku więzienia na całkowite zwolnienie od kary jest nęcąca. Każdy musi się więc liczyć z tym, że drugi okaże się nielojalny. Jedyną obroną przed ewentualną nielojalnością kumpla to przyznanie się do winy. Efekt — taki sam, jak w przypadku niemożności porozumiewania się.

Ta niezbyt sympatyczna opowiastka znana jest pod nazwą „dylemat więźnia” i zyskała sobie duży rozgłos. Z dwu co najmniej powodów.

Powód pierwszy: Jeśli całą sytuację pozbawić kryminalnej fabuły i potraktować ją jako ogólny schemat pewnej kategorii gier, to okaże się, że jest to schemat bardzo wielu sytuacji wymagających od ludzi podjęcia decyzji o współdziałaniu. Pod schemat dylematu więźnia można podciągnąć problemy wielkiej polityki (wyścig zbrojeń — jak?), pewne sytuacje produkcyjne (np. tzw. akord zespołowy) i wiele innych.

Powód drugi: Teoria gier — bazująca początkowo właśnie na założeniu, iż gracz postępuje rozsądnie, jeśli wybiera działanie maksymalizujące własny zysk nie licząc się z partnerem i nie licząc na partnera — była wobec dylematu więźnia bezsilna: jedyne proponowane przez nią rozwiązanie jest nieoptymalne, można bowiem pokazać rozwiązanie, które jest lepsze jednocześnie dla obu graczy. Tego typu obserwacje dały początek działaniom postępującym dwiema równoległymi drogami.

Z jednej strony — okazało się niezbędne zmodyfikowanie założeń teorii gier i pojęcia optymalności w taki sposób, by teoria ta m.in. uwzględniała możliwość porozumiewania się graczy oraz zawierania (i dotrzymania) umów. Powstało tu wiele różnych pomysłów. Niektóre z nich omówimy w dalszych odcinkach „Sztuki Wygrywania”.

Z drugiej strony — dylemat więźnia zrobił karierę w eksperymentalnych badaniach psychologicznych. Szukano odpowiedzi na wiele nasuwających się tu pytań: Jak w praktyce wyglądają decyzje ludzi w sytuacjach tego typu? Dlaczego ludzie podejmują te, a nie inne decyzje? Czy sposób podejmowania decyzji zależy od wieku, płci, charakteru, doświadczenia? I tak dalej.

Amerykane A. Rapoport i A. Chammah przeprowadzili badania, w których każda z 210 par studentów rozegrała po 300 razy taką grę:

Każdy z dwu graczy ma do wyboru dwie strategie: W (współpracować) oraz O (odrzuć współpracę). Gracze nie mogą się porozumiewać. Jednocześnie

		B	
		N	P
A	N	(1,1)	(10,0)
	P	(0,10)	(5,5)

		B	
		N	P
A	N	(1	10)
	P	(0	5)

Punkt widzenia A

		B	
		N	P
A	N	(1	0)
	P	(10	5)

Punkt widzenia B





$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} W \\ O \end{array} \\
 \begin{array}{c} W \\ O \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{4}, \frac{1}{4} & -1, 1 \\ 1, -1 & -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

i niezależnie deklarują swoje strategie. Jeśli obaj wybiorą W, to obaj otrzymają (od prowadzącego badania) po 25 centów; jeśli obaj odrzucą współpracę, to każdy będzie musiał zapłacić eksperymentatorowi po 25 centów. Jeśli natomiast jeden wybierze W, a drugi O, to deklarujący współpracę będzie musiał egoiście zapłacić 1 dolara. (Macierz wypłat — obok. W rzeczywistych badaniach wypłaty były znacznie mniejsze).

Łatwo zauważyć, że gra ta jest dylematem więźnia: dla każdego z graczy z osobna bardziej opłacalna jest strategia O; jeśli jednak obaj ją wybiorą, to obaj stracą, podczas gdy przy jednoczesnym wyborze strategii W każdy z nich zarobi.

Dla każdej pary studentów można było, po zakończeniu wszystkich gier (których wyniki notowano), obliczyć pewną miarę tendencji do współpracy: częstość, z jaką w 300 rozegranych grach wydarzyła się para strategii W-W.

Dla każdego gracza z osobna można było również obliczyć częstość, z jaką odrzucał on współpracę, egoistycznie wybierając O.

Wyniki uzyskane w tych badaniach są nader interesujące. W parach mężczyzna-mężczyzna średnia częstość wyborów W-W wynosiła 0,51, a w parach kobieta-kobieta — tylko 0,23. W grach „męskich” każdy gracz odrzucał współpracę średnio w 41 grach na 100, a w grach „damskich” każda uczestniczka gry odrzucała współpracę średnio aż 66 razy na 100 gier.

Czy Rapoport i Chamah rzeczywiście mierzyli egoizm? Jeśli tak, to wyciągnięcie smutnych wniosków z przytoczonych danych pozostawiamy Czytelnikom.

Może jednak taka interpretacja tych wyników jest naciągana i wcale nie o egoizm tu idzie? Zainteresowanym Czytelnikom proponujemy przysłanie do redakcji własnych przemyśleń na ten temat.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} W \\ O \end{array} \\
 \begin{array}{c} W \\ O \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1 & 5,0 \\ 0,5 & 2,2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

**Zadanie.** Mamy dylemat więźnia o macierzy wypłat (w groszach) podanej obok. Gra ta rozgrywana jest 1000 razy. Gracze nie mogą się porozumiewać w trakcie gry, mogą jednak uzgadniać, z jakimi częstościami będą stosowali strategię W, przy czym obaj muszą wybrać tę samą częstość. Pokazać, że istnieje częstość optymalna, tzn. taka, przy której każdy z graczy może oczekiwać wypłaty maksymalnej z możliwych. Znaleźć tę częstość i odpowiadającą jej oczekiwaną wypłatę. (Rozwiązanie na str. 13).



## Zadania

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

**F17.** Oto stosunkowo mało znany pomysł *perpetuum mobile*, czyli takiego urządzenia dostarczającego energię bez zasilania, którego istnienie jest sprzeczne z zasadą zachowania energii. W bocznej ścianie naczynia o podstawie prostokątnej wycięto prostokątny otwór. Jednogłębny walec drewniany o długości prawie równej długości otworu i średnicy prawie równej szerokości otworu osadzono na osi pokrywającej się z osią walca. Oś (z walcem) umocowano w otworze, a następnie do naczynia nalano tyle wody, że jej poziom w naczyniu znajduje się ponad walcem. Rozumowanie wynalazcy jest następujące:

Na obie połówki walca (znajdująca się w wodzie i wystająca z naczynia) działają jednakowe siły ciężkości, przyłożone do środków mas połówek walca, siły te zatem równoważą się; ale na połówkę w wodzie działa jeszcze skierowana pionowo do góry siła wyporu, przyłożona do środka masy tej połówki; pojawia się więc pewien moment siły (względem osi obrotu walca). Można tak dobrać warunki, by moment siły wyporu był większy od momentu sił tarcia, a wtedy walec będzie się obracał ruchem obrotowym jednostajnie przyspieszonym, albo — sprzężony za pomocą przekładni z zewnętrznym odbiornikiem energii mechanicznej — będzie dostarczał, bez zasilania, energię zewnętrznemu odbiornikowi.

Rozwiązanie na str. 4

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

**M49.** Wzdłuż ulicy działa tzw. zielona fala dla prędkości  $v = 60$  km/h. Oznacza to, że jeżeli samochód jadący tą ulicą przejedzie przez jakieś skrzyżowanie przy zielonym świetle i będzie jechać z prędkością  $v$ , to na każdym skrzyżowaniu spotka zielone światło. Zakładamy, że na każdym skrzyżowaniu zielone światła w obu kierunkach ruchu (tej samej ulicy) zapalają się jednocześnie, a czas przejazdu przez skrzyżowanie wynosi 0. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele prędkości, dla których ten system regulacji ruchu jest zieloną falą (Robert Bartoszyński).

Rozwiązanie na str. 8

**M50.** Niech  $K$  będzie zbiorem wszystkich liczb postaci  $a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}$ , gdzie  $a, b, c$  są liczbami wymiernymi. Udowodnić, że odwrotność liczby należącej do  $K$  i większej od zera należy też do  $K$ .

Rozwiązanie na str. 5

**M51.** Podać przykład ciągu rosnącego liczb całkowitych nieujemnych o tej własności, że każda liczba całkowita nieujemna jest sumą trzech wyrazów tego ciągu, z których dwa są równe, i przedstawienie w postaci takiej sumy jest dla każdej liczby jedyne.

Rozwiązanie na str. 3