

## SPIS TREŚCI

«Delta» z wizytą u Marii w IBJ	str. 1
O przestrzeniach metrycznych (III)	
<i>Doc. dr Maria Moszyńska</i>	str. 4
Wstęp do teorii „zajączka świetlnego”	str. 6
Mała Delta	str. 8
Zagadnienie Catalana	
<i>Dr Andrzej Rotkiewicz</i>	str. 12
Laboratorium w domu	
<i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 14
Ciekawe, i nie tylko	str. 15
Izometrie	
<i>Mgr Jerzy Bednarczuk</i>	str. 16
Zadania	str. 17

„Delta”  
matematyczno-fizyczny miesięcznik  
popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego i Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
prof. dr G. Białkowski  
doc. dr A. Blikle  
prof. dr A. Hrynkiewicz  
doc. dr B. Iwaskiewicz  
prof. dr J. Janik  
doc. dr J. Jatzczak  
prof. dr Leon Jeśmanowicz —  
przewodniczący  
prof. dr Z. Krygowska  
prof. dr K. Leibler  
mgr W. Łuczniak  
mgr A. Mąkowski  
prof. dr A. Pelczyński  
prof. dr Arkadiusz Piekara —  
wiceprzewodniczący  
prof. dr J. Rayski  
prof. dr A. Schinzel

prof. dr Z. Semadeni  
prof. dr M. Subotowicz  
dr A. Wakulicz  
doc. dr W. Zawadowski

Redaguje Kolegium w składzie:  
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. naczk.  
dr T. B. Iwiński  
dr M. Kordos — red. naczk.  
W. Puczyński — red. techn. graf.  
doc. dr M. Świącki  
D. Tys — sekr. red.

Adres Redakcji  
ul. Śniadeckich 8,  
00-656 Warszawa, PTM

Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo.  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl., 80 g, 61 × 86  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej,  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 632/75 B-58

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenie właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5,—

nr indeksu 35723/35550

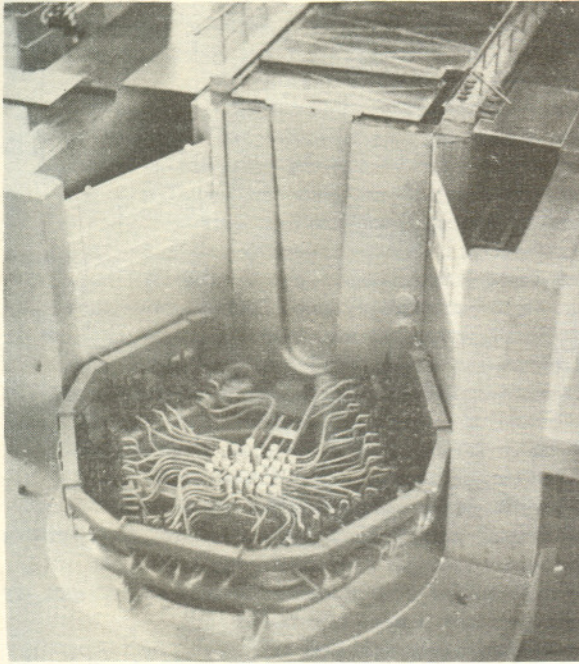
**W następnym numerze:**

**Gry wielochodowe  
Interferencja światła**

**Nasza okładka (IV str.):**

Reaktor Ewa — fot. J. Kicman  
Rdzeń reaktora Maria  
Sterownia reaktora Maria  
fot. S. Ciesielska

## «Delta» z wizytą u Marii w IBJ



Makieta rdzenia reaktora Maria (za rdzeniem widoczna służa do komory, w której dokonuje się wymiany prętów paliwowych)

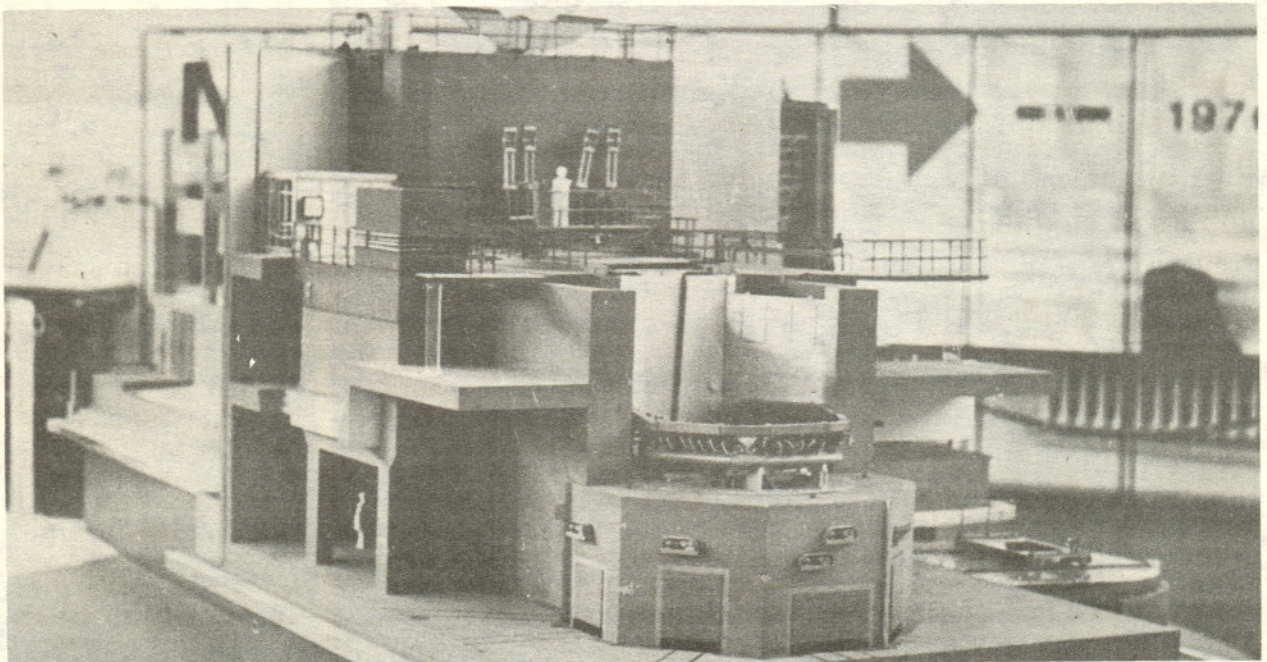
W 1958 r. w Instytucie Badań Jądrowych w Świerku pod Warszawą rozpoczął pracę pierwszy polski reaktor jądrowy Ewa (zob. IV str. okładki). Trzy lata temu uruchomiono zestaw reaktorowy Agata, będący studialnym modelem następnego polskiego reaktora — Marii — którego rozruch technologiczny rozpoczął się w lipcu zeszłego roku (a zakończony ma być w roku bieżącym). Kilka słów prezentacji. Maria (zob. IV str. okładki i zdjęcia obok) jest reaktorem jądrowym zaprojektowanym i zbudowanym całkowicie przez polskich specjalistów. Paliwem jest w nim uran w postaci stopu z glinem, wzbogaceny do 80% w izotop rozszczepialny U-235. Do moderacji (spowalniania) neutronów służą woda i beryl. Rdzeń reaktora otoczony jest reflektorem grafitowym („odbijającym” z powrotem neutrony uciekające z rdzenia). Reaktor chłodzony jest wodą (myśli się o ciekłym sodzie w przyszłości). Oslonę biologiczną stanowi od góry 7-metrowa warstwa wody, z boku zaś — reflektor grafitowy i ściana z ciężkiego betonu (tzn. betonu z dużym dodatkiem składników silnie pochłaniających neutrony). Reaktor ma po zakończeniu rozruchu osiągnąć moc 30 MW, a w dalszej perspektywie — 66 MW.

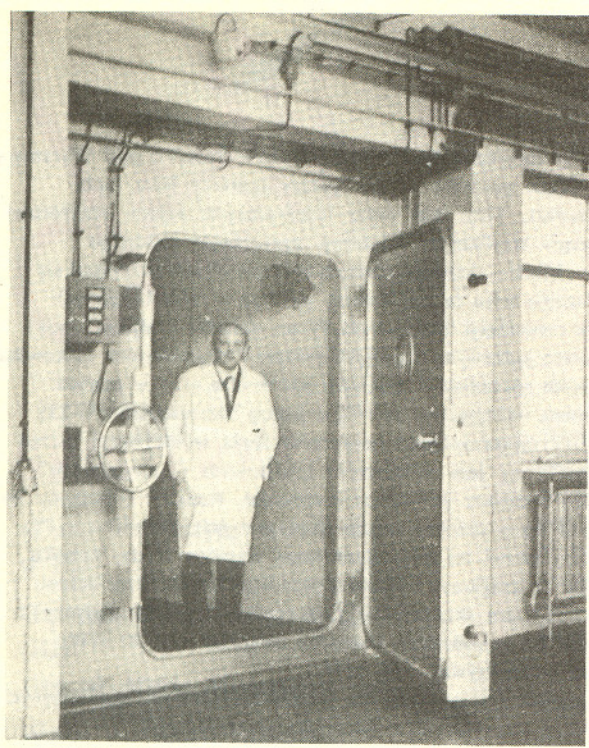
Oprócz kanałów (pionowych) dla prętów paliwowych, regulacyjnych, kontrolnych i awaryjnych, a także dla wprowadzenia substancji do napromieniowania neutronami, reaktor ma osiem kanałów poziomych, w tym dwa radialne (biegnące ku rdzeniowi reaktora) i sześć tak zwanych stycznych.

Podstawowy cel, jakemu ma służyć Maria, to badania materiałów reaktorowych, elementów i zestawów dla przyszłych polskich elektrowni jądrowych. Dlatego Maria została zaprojektowana elastycznie, to znaczy, że będzie można w niej badać nie tylko własności różnych materiałów i elementów, ale nawet większych zestawów, zmieniając za każdym razem odpowiednio konstrukcję nawet samego rdzenia reaktora.

Druga funkcja to produkcja izotopów promieniotwórczych. Maria przejmie część obowiązków Ewy, umożliwiając tym samym zwiększenie ilości i asortymentu wytwarzanych izotopów.

Makieta reaktora Maria. Na pierwszym planie bunkier samego rdzenia reaktora





Maria będzie wreszcie służyć swymi kanałami poziomymi badaniami fizycznym o charakterze podstawowym. Łatwo się chyba domyśleć, że będą one dotyczyły m. in. mechanizmów reakcji jądrowych, w tym przede wszystkim — zachodzących pod wpływem neutronów. Nie każdy jednak wie, że neutrony to subtelne i w licznych przypadkach wręcz niezastąpione narzędzie badania struktury i własności ciał stałych. Otóż badania dyfrakcji neutronów na sieciach krystalicznych umożliwiają uzyskanie szeregu bardzo wartościowych informacji o tym, co się dzieje w kryształach. A dzieje się tam wiele interesujących rzeczy. Przede wszystkim sieć drga — tym intensywniej, im wyższą ma temperaturę. W języku kwantowym drgania sieci i fale mechaniczne, jakie się w niej rozchodzą, opisuje się jako fonony; są to kwanty pola drgań sieci krystalicznej, podobnie jak fotony to kwanty pola elektromagnetycznego. Neutronografia, czyli dziedzina zajmująca się badaniami struktury ciał za pomocą powolnych neutronów, pozwala wyznaczyć doświadczalnie widmo częstości drgań sieci, krzywe dyspersji (czyli zależności częstości drgań od długości fali) dla różnych kierunków w kryształach, a także uzyskać szereg innych informacji o procesach mikroskopowych w kryształach, takich jak na przykład zależność średniego czasu życia fononu od temperatury kryształu. Wyniki takich badań umożliwiają weryfikację teorii drgań sieci, jak również uzyskanie szeregu odpowiednich danych niezbędnych dla określenia i opisanego zarówno mikroskopowych, jak i makroskopowych własności kryształów (np. procesów oddziaływania fononów między sobą czy termodynamicznych funkcji stanu kryształów).

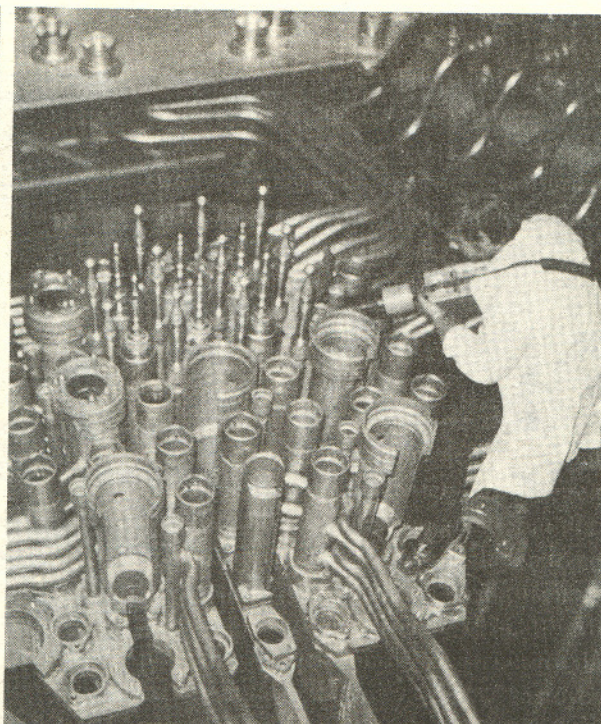
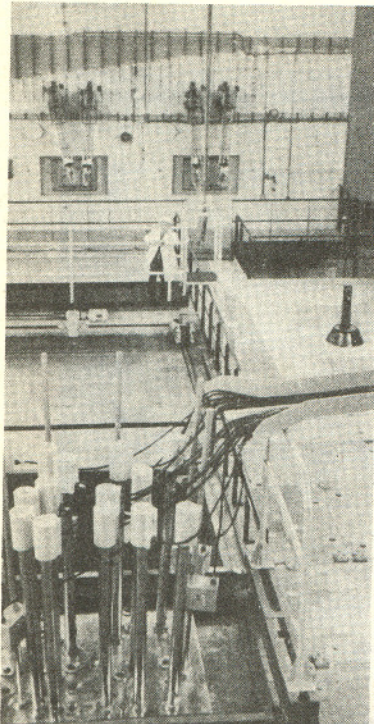
O ile jednak dla badań dynamiki sieci krystalicznej neutronografia to jedna z wielu metod badawczych — prawda, że pod wieloma względami najlepsza — o tyle dla badań dynamiki zjawisk magnetycznych w kryształach jest ona w wielu przypadkach narzędziem jedynym. Właśnie dzięki niej można bezpośrednio badać dynamikę zjawisk magnetycznych na, jeśli można tak powiedzieć, najniższym poziomie mikroskopowym. Dotyczy to szczególnie

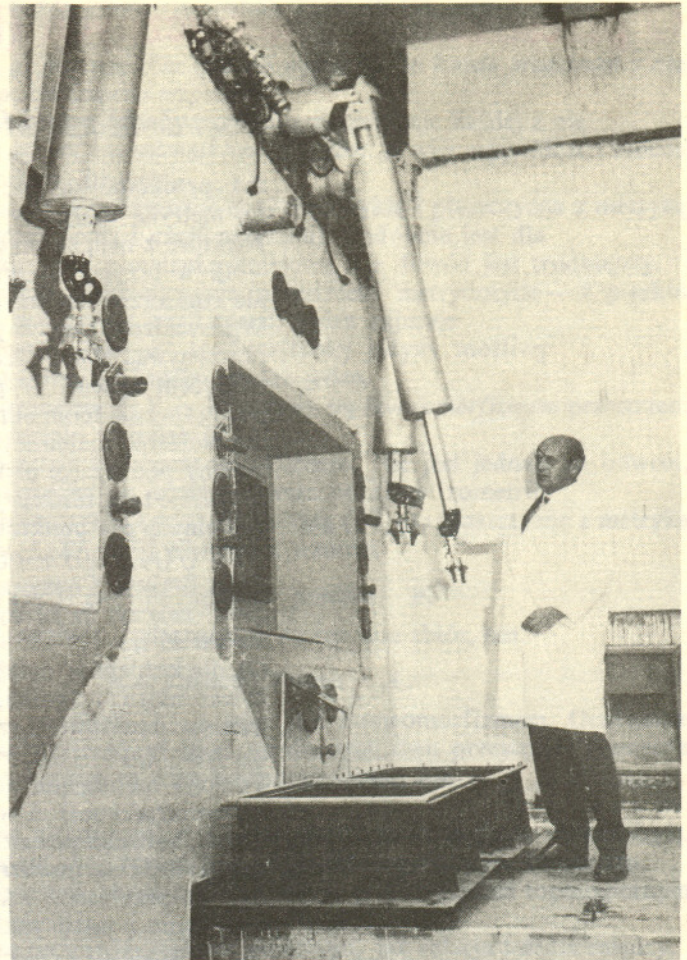
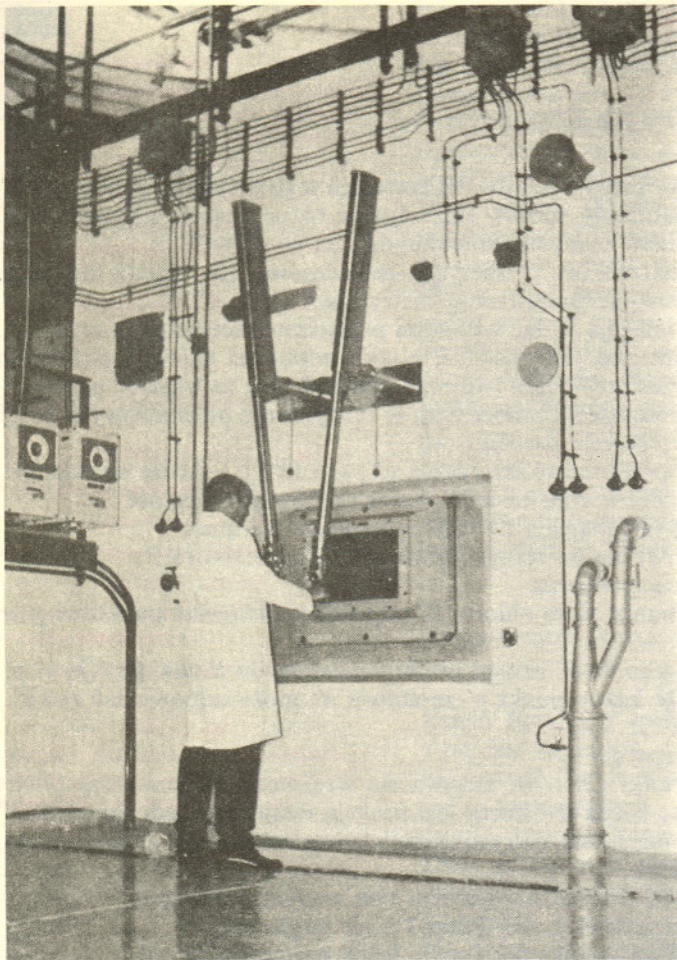
Do hali reaktora Maria wchodzimy przez służę zamykaną grubymi, pancernymi drzwiami

Widok z góry na basen, w którym pod 7-metrową warstwą wody pracować będzie rdzeń reaktora Maria

Kontrola (przed naładowaniem) kanałów pionowych w jeszcze „zimnym” i „niezatopionym” rdzeniu reaktora Maria

Widok „zimnego” i „niezatopionego” rdzenia reaktora Maria przez służę z komory do przeładunku pretów paliwowych



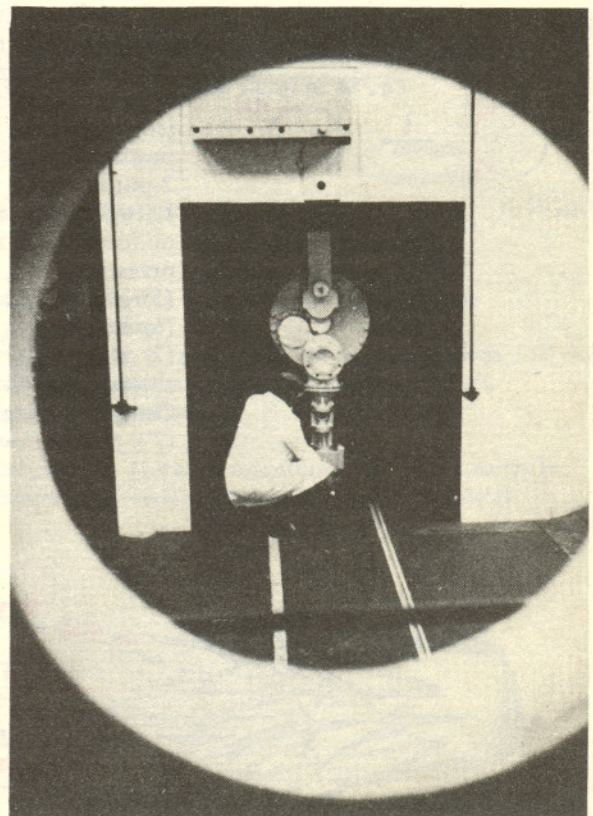


Komora gorąca (a — z zewnątrz, b — wewnątrz)  
do zdalnej obróbki materiałów napromieniowanych  
w reaktorze — za pomocą manipulatorów

antyferromagnetyków, które przy braku metod neutronograficznych można byłoby badać jedynie pośrednio, i to pod warunkiem, że robi się to jednocześnie wieloma metodami. Badania neutronograficzne ciał stałych prowadzono już za pomocą pierwszego reaktora — Ewy. Natężenie wiązek neutronów w tym reaktorze było jednak za małe, by w pełni można było wykorzystać możliwości neutronografii. W uproszczeniu rzecz ujmując, można powiedzieć, że możliwości Ewy sięgały ledwie progu wymogów neutronografii. Maria, dzięki wyższej mocy i, w związku z tym, silniejszym strumieniom neutronów w kanałach badawczych, pozwoli polskim placówkom naukowym znacznie rozszerzyć badania między innymi procesów w ciałach stałych.

[Z.K.P]

Widok wylotów kanałów poziomych — przez  
otwory w drugiej osłonie (pierwsza otacza sam  
reaktor)



# O przestrzeniach metrycznych (III)

Doc. dr Maria MOSZYŃSKA

Jak przekonaliśmy się w pierwszych dwóch częściach tego artykułu, posługując się metryką można w naturalny sposób zdefiniować różne pojęcia geometryczne. Niektóre z nich są pojęciami znanymi i używanymi „na co dzień”, — tj. w przypadku przestrzeni lub płaszczyzny euklidesowej (ze zwykłą metryką), ale rozszerzonymi na dowolne przestrzenie metryczne.

Wprowadzone pojęcia pomagają badać własności przestrzeni metrycznych oraz porównywać różne przestrzenie. Zapyta ktoś, o jakie własności chodzi i pod jakim względem chcemy te przestrzenie porównywać. Słusznie. Na to właśnie pytanie postaramy się teraz odpowiedzieć. Pomoże nam w tym jedno z podstawowych pojęć współczesnej matematyki; pojęcie *funkcji*.

Weźmy pod uwagę dwie przestrzenie metryczne  $(X, \varrho)$  i  $(X', \varrho')$ . Może się zdarzyć, że istnieje taka funkcja  $f$  zbioru  $X$  na zbiór  $X'$ , która zachowuje odległość dowolnych par punktów, tj. funkcja  $f: X \rightarrow X'$  spełniająca warunek

$$(1) \varrho'(f(p), f(q)) = \varrho(p, q) \text{ dla dowolnych punktów } p \text{ i } q \text{ ze zbioru } X.$$

Taka funkcja  $f$  nazywa się *izometrią*.

„Na” znaczy, że każdy punkt  $p'$  ze zbioru  $X'$  odpowiada *jakiemuś* punktowi  $p$  ze zbioru  $X$ , tj.

(2) dla każdego  $p'$  należącego do  $X'$  istnieje punkt  $p$  należący do  $X$ , taki że  $f(p) = p'$ . Z warunku (1) wynika, że każdy punkt  $p'$  ze zbioru  $X'$  może odpowiadać *tylko jednemu* punktowi  $p$ , tzn.

(3) jeśli  $f(p) = f(q)$ , to  $p = q$ .

Funkcja spełniająca warunki (2) i (3) nazywa się *wzajemnie jednoznaczna* (albo: *różnowartościowa*). A więc każda izometria jest funkcją wzajemnie jednoznaczna.

O takich dwóch przestrzeniach, dla których istnieje izometria jednej z nich na drugą, mówi się że są *izometryczne*.

Jeśli na przykład  $X$  i  $X'$  są dwoma okręgami o tym samym promieniu, a zarówno  $\varrho$  jak  $\varrho'$  jest metryką łukową (patrz I część artykułu), to przestrzenie  $(X, \varrho)$  i  $(X', \varrho')$  są izometryczne. Jeżeli natomiast  $(X, \varrho)$  jest okręgiem z metryką łukową, a  $(X', \varrho')$  okręgiem ze zwykłą metryką, to  $(X, \varrho)$  i  $(X', \varrho')$  nie są izometryczne. Żeby się o tym przekonać, zauważmy, że dla dowolnej izometrii  $f$  prawdziwa jest następująca implikacja:

(4) jeżeli punkt  $x$  leży między  $a$  i  $b$ , to  $f(x)$  leży między  $f(a)$  i  $f(b)$ .

Gdyby więc istniała izometria  $f$  okręgu  $X$  z metryką łukową  $\varrho$  na okrąg  $X'$  z metryką zwykłą  $\varrho'$ , to izometria ta przeprowadzałaby punkty zbioru  $X$  leżące między  $a$  i  $b$  na punkty zbioru  $X'$  leżące między  $f(a)$  i  $f(b)$ . Tymczasem w zbiorze  $X'$  jedynymi punktami, które leżą między  $f(a)$  i  $f(b)$  (w sensie metryki  $\varrho'$ ), są same punkty  $f(a)$  i  $f(b)$ . A więc cały łuk o końcach  $a, b$  musiałby przejść na zbiór co najwyżej 2-punktowy — wbrew wzajemnej jednoznaczności funkcji  $f$ .

Łatwo sprawdzić, że z innymi pojęciami wprowadzonymi poprzednio rzecz ma się podobnie, jak z relacją leżenia między. Mianowicie dla dowolnej izometrii  $f$  przestrzeni  $(X, \varrho)$  na  $(X', \varrho')$ :

(5) jeżeli  $x$  jest środkiem pary  $a, b$ , to  $f(x)$  jest środkiem pary  $f(a), f(b)$ ;

(6) kula  $K_{(X, \varrho)}(a, \lambda)$  przechodzi na kulę  $K_{(X', \varrho')}(f(a), \lambda)$ ;

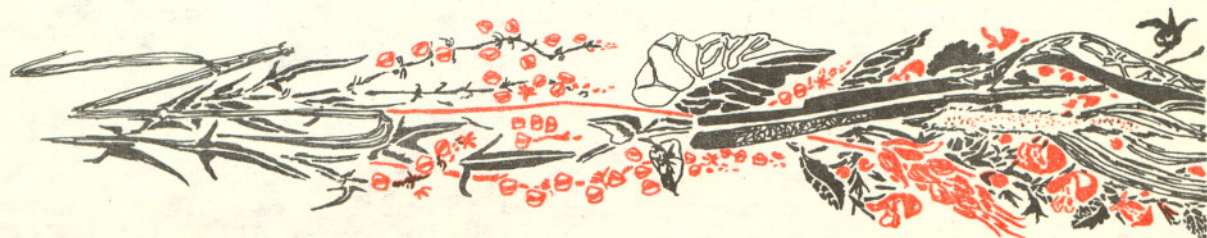
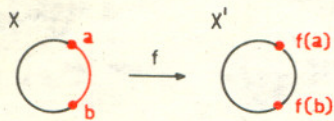
(7) zbiór  $\text{Int}_{(X, \varrho)} A$  przechodzi na zbiór  $\text{Int}_{(X', \varrho')} f(A)$  (przy czym  $f(A)$  jest obrazem zbioru  $A$ , czyli zbiorem punktów postaci  $f(p)$ , dla wszystkich  $p$  należących do  $A$ ).

Ostatni warunek można zapisać w postaci:

(7')  $f(\text{Int} A) = \text{Int} f(A)$ .

Pamiętamy, że  $\varrho(p, q) = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $p = q$ .

$x$  leży między  $a$  i  $b$  w przestrzeni  $(X, \varrho)$ , jeśli  $\varrho(a, x) + \varrho(x, b) = \varrho(a, b)$ .





### Rozwiązanie zadania M58.

Niech  $O$  będzie punktem przecięcia przekątnych danego czworokąta  $ABCD$  i niech  $S_1, S_2, S_3, S_4$  będą odpowiednio polami trójkątów  $AOB, BOC, COD$  i  $DOA$ . Mamy więc

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4,$$

$$S_1 + S_4 = S_2 + S_3.$$

Dodając i odejmując stronami te równości otrzymujemy

$$2S_1 + S_2 + S_4 = 2S_3 + S_2 + S_4,$$

$$S_2 - S_4 = S_4 - S_2$$

skąd  $S_1 = S_3, S_2 = S_4$ .

Ponieważ  $S_1 = \frac{1}{2} AO \cdot BO \sin \alpha$ ,

$$S_3 = \frac{1}{2} CO \cdot DO \sin \alpha, \text{ gdzie } \alpha \text{ jest}$$

kątem między przekątnymi, więc

$$AO \cdot BO = CO \cdot DO.$$

Podobnie otrzymujemy równość

$$BO \cdot CO = AO \cdot DO.$$

Mnożąc i dzieląc stronami ostatnie dwie równości otrzymujemy

$$BO^2 \cdot AO \cdot CO = DO^2 \cdot AO \cdot CO,$$

$$\frac{AO}{CO} = \frac{CO}{AO},$$

skąd  $BO = DO, AO = CO$ . Udowodniliśmy więc, że przekątne w omawianym czworokącie połowią się, a to oznacza, że jest on równoległobokiem.

Jako wniosek z tego, że każda izometria spełnia warunek (5), otrzymujemy następujące twierdzenie:

(8) *Jeżeli przestrzeń  $(X, \rho)$  jest wypukła (mocno wypukła), to każda przestrzeń z nią izometryczna jest też wypukła (mocno wypukła).*

O takiej własności, która wraz z daną przestrzenią przysługuje każdej z nią izometrycznej, mówi się, że jest *niezmiennikiem izometrii*. A więc wypukłość i mocna wypukłość są niezmiennikami izometrii.

Z twierdzenia (8) wynika, że płaszczyzna z metryką zwykłą i płaszczyzna z metryką miejską nie są izometryczne (por. I część artykułu). Podobnie jest dla płaszczyzny z metryką zwykłą i z metryką kolejową, ale dowód jest trudniejszy.

Mamy więc pewien sposób porównywania przestrzeni metrycznych — z punktu widzenia tzw. *geometrii metrycznej*, czyli teorii, która zajmuje się niezmiennikami izometrii. Nie jest to bynajmniej jedyny możliwy punkt widzenia. Przedstawimy tu krótko jeszcze jeden.

Funkcję wzajemnie jednoznaczną  $f: X \rightarrow X'$  nazywa się *homeomorfizmem* przestrzeni  $(X, \rho)$  na  $(X', \rho')$ , jeżeli spełnia warunek (7').

Jasne jest, że każda izometria jest homeomorfizmem. Nie jest jednak na odwrót, a więc klasa homeomorfizmów jest istotnie szersza od klasy izometrii.

Dla dowodu rozważmy płaszczyznę z metryką zwykłą  $(E^2, \rho)$  i płaszczyznę z metryką miejską  $(E^2, \bar{\rho})$ . Funkcja  $f: E^2 \rightarrow E^2$  określona wzorem

$$f(p) = p \text{ dla każdego punktu } p,$$

przeprowadza dowolny podzbiór  $A$  płaszczyzny na ten sam zbiór, tzn.

$$f(A) = A \text{ dla każdego zbioru } A.$$

Zatem funkcja  $f$  spełnia warunek (7'), a więc jest homeomorfizmem. Oczywiście  $f$  nie jest izometrią — pokazaliśmy przecież, że dla tych dwu przestrzeni izometria nie istnieje. Te dwie przestrzenie są więc homeomorficzne, ale nie są izometryczne.

Teoria, która zajmuje się niezmiennikami homeomorfizmów, nazywa się *topologią*. Dwie przestrzenie mogą się więc różnić pod względem metrycznym (z punktu widzenia geometrii metrycznej), chociaż nie różnią się pod względem topologicznym (z punktu widzenia topologii).

Na czym polega różnica pomiędzy takimi pojęciami, jak relacja leżenia między, zbiór środków, kula, a takimi, jak wnętrze, domknięcie, otwartość, domkniętość, gęstość, brzegowość? (por. II część artykułu). Odpowiedź pozostawiamy Czytelnikowi. Pomogą mu zadania 1 i 2.

### Zadania

1. Wykazać, że implikacje (4), (5) i (6) nie są prawdziwe dla dowolnego homeomorfizmu.

2. Dowieść, że dla dowolnego homeomorfizmu  $f$  przestrzeni  $(X, \rho)$  na  $(X', \rho')$

(a)  $f(Cl A) = Cl f(A)$ ,

(b) otwarty

otwarty

(c) domknięty

domknięty

zbiór  $A$  jest

w  $(X, \rho)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f(A)$  jest

w  $(X', \rho')$ .

(d) gęsty

gęsty

(e) brzegowy

brzegowy

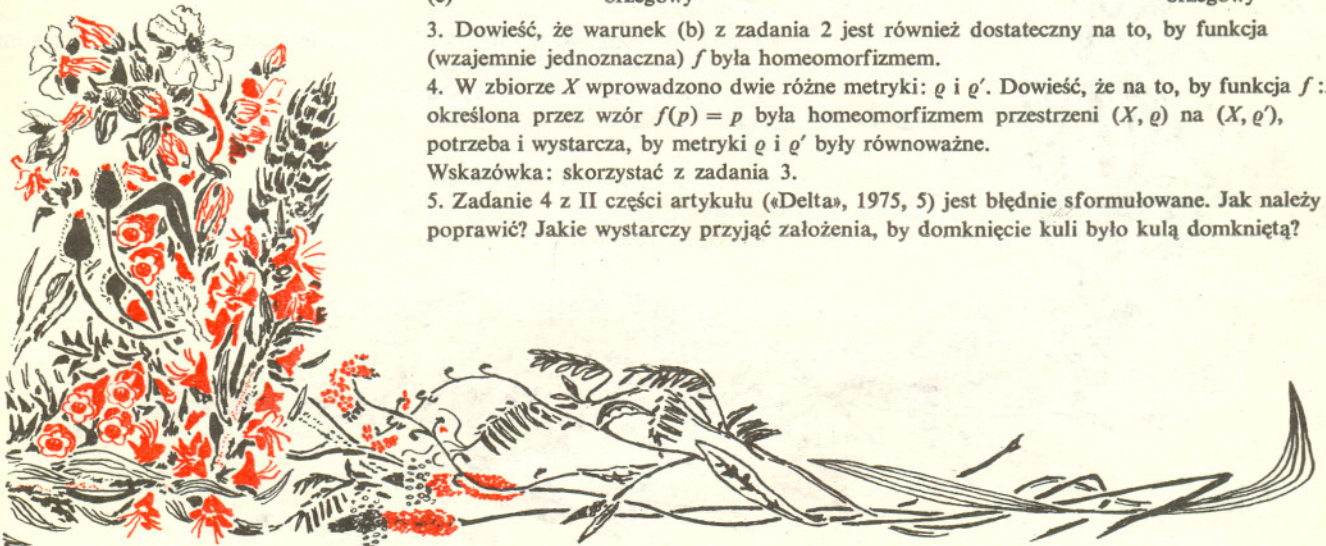
3. Dowieść, że warunek (b) z zadania 2 jest również dostateczny na to, by funkcja (wzajemnie jednoznaczna)  $f$  była homeomorfizmem.

4. W zbiorze  $X$  wprowadzono dwie różne metryki:  $\rho$  i  $\rho'$ . Dowieść, że na to, by funkcja  $f: X \rightarrow X$  określona przez wzór  $f(p) = p$  była homeomorfizmem przestrzeni  $(X, \rho)$  na  $(X, \rho')$ , potrzeba i wystarczy, by metryki  $\rho$  i  $\rho'$  były równoważne.

Wskazówka: skorzystać z zadania 3.

5. Zadanie 4 z II części artykułu («Delta», 1975, 5) jest błędnie sformułowane. Jak należy je poprawić? Jakie wystarczy przyjąć założenia, by domknięcie kuli było kulą domkniętą?

$$Cl A = X - \text{Int}(X - A).$$



# Wstęp do teorii „zajaczka świetlnego“

Kolega K. Kasprzak z Chwarstnicy pyta, czy „zajaczek świetlny” (śląd wiązki świetlnej na ekranie oświetlonym smugą światła z obracającego się źródła — np. smugą światła odbitego od obracającego się zwierciadła) może poruszać się szybciej niż światło (w próżni).

Sądzymy, że teoria zjawiska może zainteresować wielu Czytelników, odpowiadamy więc na łamach pisma. Przy okazji przedstawiamy kilka problemów, związanych z ruchem „zajaczka świetlnego”: jeden z nich będzie stanowił przedmiot konkursu. Dla uniknięcia zbędnych tu dyskusji na temat praw odbicia światła od poruszającego się zwierciadła, będziemy „zajaczka” wytwarzali za pomocą smugi wybiegającej przez szczelinę w kulistej osłonie (o promieniu  $l$ ) obracającej się z prędkością kątową  $\omega$ ; wewnątrz osłony, w jej środku, znajduje się punktowe źródło światła, emitujące światło we wszystkich kierunkach.

Aby odpowiedzieć na pytanie Czytelnika, wystarczy podać przykład sytuacji, w której prędkość „zajaczka” na ekranie przekracza prędkość światła (w próżni)  $c$ . Rozważmy więc najpierw sytuację, jak na rys. 1. Ekran, na którym powstaje „zajaczek”, stanowi powierzchnię kuli (o promieniu  $L+l$ ), w której środku znajduje się źródło światła. Niech w chwili  $t$  ze szczeliny wybiega wiązka w pewnym kierunku. Dotrze ona do ekranu w chwili

$$t' = t + \frac{L}{c}.$$

Po czasie  $dt$  ze szczeliny wybiega wiązka w kierunku tworzącym z poprzednią wiązką kąt  $d\varphi = \omega dt$ ; ta druga wiązka dotrze do ekranu w chwili

$$t' + dt' = t + dt + \frac{L}{c}$$

w punkcie odległym od punktu, do którego dotarła pierwsza wiązka, o  $ds = (L+l)d\varphi = (L+l)\omega dt$ . W czasie  $dt' = dt$  „zajaczek” przebywa drogę  $ds$ , zatem jego prędkość jest równa

$$v = \frac{ds}{dt} = (L+l)\omega.$$

Ponieważ prędkość liniowa szczeliny  $v_{sz} = \omega l$  nie może przekraczać prędkości światła (w próżni)  $c$ , zatem

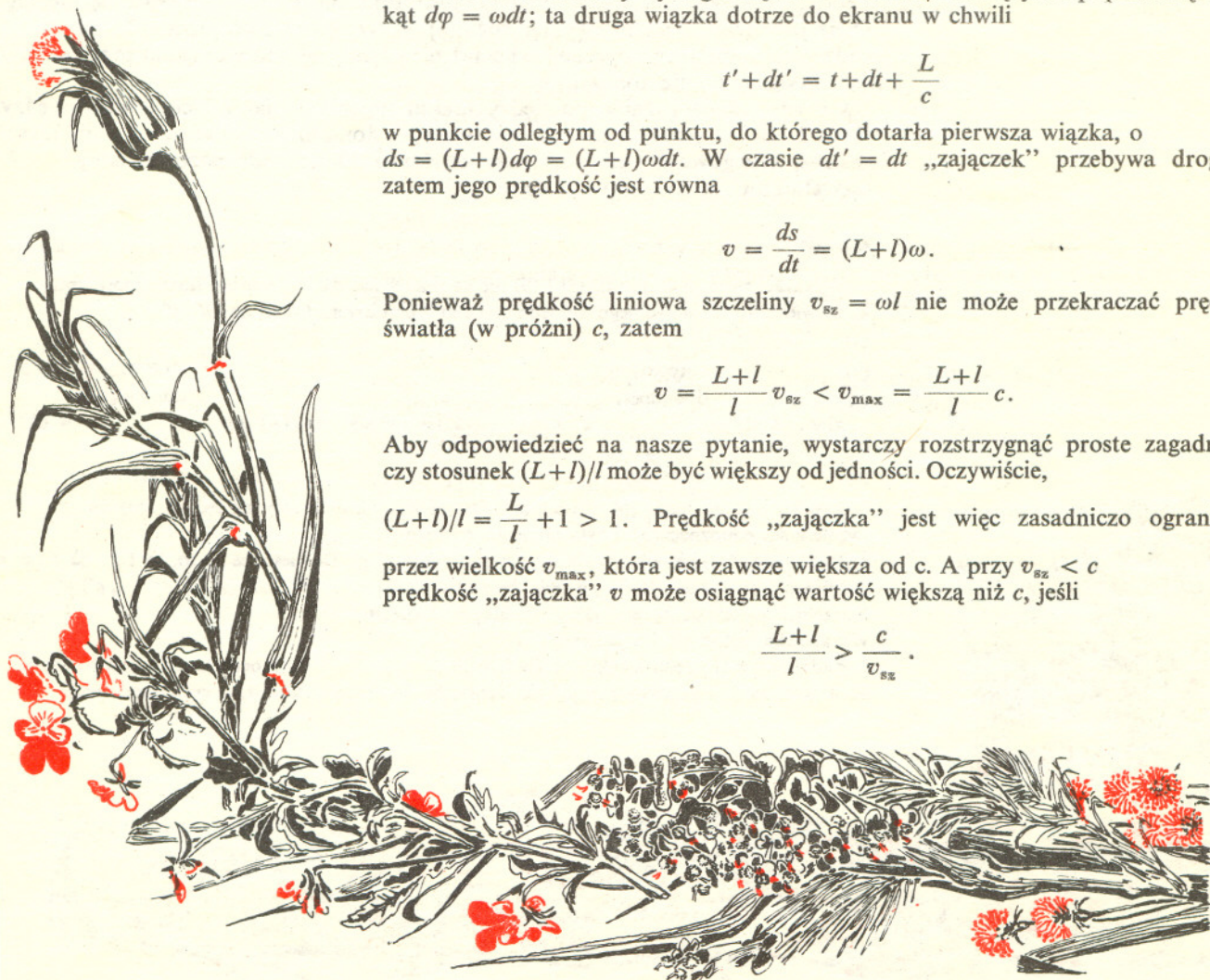
$$v = \frac{L+l}{l} v_{sz} < v_{max} = \frac{L+l}{l} c.$$

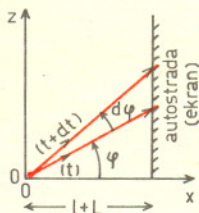
Aby odpowiedzieć na nasze pytanie, wystarczy rozstrzygnąć proste zagadnienie: czy stosunek  $(L+l)/l$  może być większy od jedności. Oczywiście,

$(L+l)/l = \frac{L}{l} + 1 > 1$ . Prędkość „zajaczka” jest więc zasadniczo ograniczona

przez wielkość  $v_{max}$ , która jest zawsze większa od  $c$ . A przy  $v_{sz} < c$  prędkość „zajaczka”  $v$  może osiągnąć wartość większą niż  $c$ , jeśli

$$\frac{L+l}{l} > \frac{c}{v_{sz}}.$$





Rys. 1

**Problem 1.** Rozwiązać powyższe zagadnienie w przypadku płaskiego ekranu. Proponujemy zastanowić się nad następującym zadaniem:

**Zadanie 1.** Z punktu  $(0, 0)$  (rys. 2) wyrusza motocyklista w chwili  $t$ . Jedzie on ze stałą prędkością  $c$  do autostrady  $x = L+l$  po linii prostej nachylonej pod kątem  $\varphi$  do osi  $Ox$ . Po czasie  $dt$  z punktu  $(0, 0)$  wyrusza drugi motocyklista, który jedzie też ku tej samej autostradzie, z taką samą stałą prędkością  $c$ , także wzdłuż linii prostej, ale nachylonej pod kątem  $\varphi + d\varphi$  do osi  $Ox$ , gdzie  $d\varphi = \omega dt$  ( $\omega$  — dane). Z chwilą, gdy pierwszy motocyklista dojedzie do autostrady, z tego samego punktu, do którego on dojechał, wyrusza autostradą tresowany zając. Biegnie on w kierunku punktu, do którego zmierza drugi motocyklista.

Z jaką prędkością  $v$  musi biec zając, aby dobiegł do celu w tej samej chwili, w której dojedzie do autostrady drugi motocyklista?

(Rozwiązując zadanie należy skorzystać z faktu, że  $dt$  jest bardzo małe w porównaniu z  $t$ ). Odpowiedź na str. 13.

Z kolei zastanówmy się, jaką prędkość „zajączka” zarejestruje obserwator. Dla uproszczenia przyjmijmy, że jest to obserwator „punktowy”, znajdujący się w tym samym punkcie, w którym znajduje się źródło światła (możemy przyjąć, że  $l \ll L$ , i wobec tego obserwator znajduje się tuż obok źródła światła na zewnątrz wirującej osłony).

Światło padając na ekran ulega na nim rozproszeniu. Z każdego punktu ekranu, na który padnie światło, rozchodzą się więc we wszystkie strony wiązki rozproszone.

Z każdego takiego punktu jedna wiązka biegnie zatem ku obserwatorowi. Rozumując podobnie jak poprzednio, można wykazać, że sygnały o przekroczeniu przez „zajączka” punktów początkowego i końcowego odcinka o długości  $ds$  (rys. 1) dotrą do obserwatora po czasie  $dt$  jeden po drugim. Obserwator stwierdzi więc, że prędkość „zajączka” jest równa  $v = (L+l)\omega$ .

**Problem 2.** Rozwiązać powyższe zagadnienie w przypadku płaskiego ekranu (zob. rys. 2).

Proponujemy zastanowić się nad odpowiednim zmodyfikowaniem (jak?) zadania 1, traktując je jako zadanie 2.

**Problem 3.** Rozwiązać powyższe zagadnienie w przypadku kulistego ekranu, ale z obserwatorem znajdującym się na zewnątrz kuli, której powierzchnia stanowi ekran.

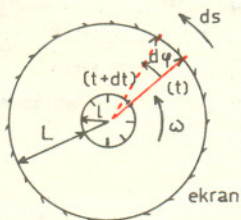
Jest to problem złożony rachunkowo, dlatego radzimy najpierw zastanowić się nad nim z jakościowego punktu widzenia. A jeśli to nie da spodziewanych rezultatów, radzimy zająć się następnym problemem:

**Problem 4.** Rozwiązać powyższe zagadnienie w przypadku płaskiego ekranu, ale z obserwatorem znajdującym się w innym punkcie niż źródło światła (to także jest problem dość złożony, więc na początek przyjmijmy, że obserwator znajduje się na osi  $Oz$  — rys. 3).

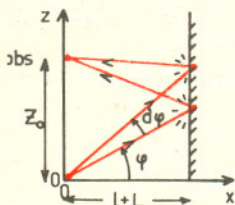
Proponujemy zastanowić się nad odpowiednim zmodyfikowaniem (jak?) zadania 1, traktując je jako zadanie 3.

Zastanówmy się wreszcie, czy fakt, że „zajączek” może poruszać się z prędkością większą niż światło, można wykorzystać do zaprojektowania urządzenia do przesyłania informacji szybciej, niż to jest możliwe przy przesyłaniu informacji bezpośrednio za pomocą impulsów świetlnych biegnących po linii prostej od źródła do obserwatora. To już będzie jednak tematem ostatniego problemu

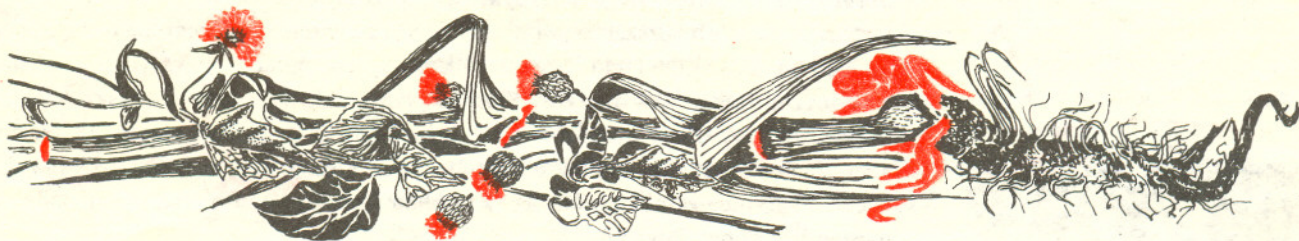
— **problemu konkursowego**, który pozostawiamy do rozstrzygnięcia Czytelnikom. Odpowiedzi konkursowe należy przysyłać na adres Redakcji «Deltę» do dnia 1.XI.75 r. Objętość odpowiedzi nie powinna przekraczać jednej strony papieru podaniowego (dwóch stron kartki z normalnego zeszytu). Trzy najlepsze (wg oceny Redakcji) odpowiedzi konkursowe zostaną uhonorowane nagrodami i ogłoszone (po odpowiednim opracowaniu redakcyjnym) w «Deltcie» wraz z wynikami konkursu.



Rys. 2



Rys. 3





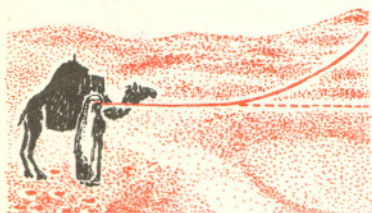
# S mała delta



## Jeziro na pustyni — sen czy jawa?

Słyszałeś z pewnością, jak przykre przygody spotykają wędrowców na pustyni. Kiedy spragnieni wypatrują wody i chłodu, ukazuje im się jezioro. Uradowani podążają w jego kierunku, ale, ku ich rozpacz, okazuje się, że było to złudzenie. Skąd się ono bierze? Czy zmęczeni ludzie snią na jawie? Czy można je naukowo wyjaśnić? Zjawisko to, zwane mirażem, jest bardziej pospolite, niż by się wydawało.

Czy pamiętasz, co mówiliśmy o torze promieni świetlnych w ośrodku, którego gęstość zmienia się od punktu do punktu? Tor ten jest zakrzywiony. Promienie słoneczne, na przykład, docierają do naszych oczu bardziej stromo, niż powinny, gdyby biegły po linii prostej. Dzieje się tak z tego powodu, że atmosfera ziemską jest tym gęstsza, im bliżej znajduje się Ziemi. Tak jest w ogólności, ale w pobliżu powierzchni Ziemi mogą dziać się dziwne rzeczy. W gorące, słoneczne dni powierzchnia Ziemi silnie się nagrzewa. Tuż nad Ziemią powstaje wtedy cienka warstwa rozgrzanego powietrza o znacznie mniejszej gęstości niż warstwy położone wyżej. Promienie światła, biegnące od dalekiego przedmiotu ukośnie do powierzchni Ziemi, przechodząc przez tę warstwę zmieniają w niej swój kierunek tak, że po wyjściu z niej oddalają się od Ziemi i mogą trafić do naszych oczu. Tak więc błękitne jezioro, które ukazuje się podróżnym na pustyni, jest po prostu obrazem nieba powstałym na tle gorącego piasku.

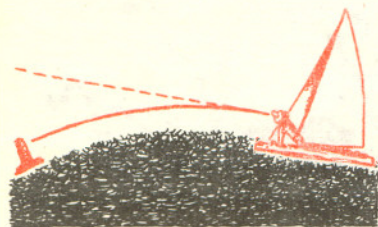


### ZAGADKA

Dlaczego latem, przy upalnej pogodzie, widzimy na szosie daleko przed sobą błyszczące kałuże, które znikają, gdy się do nich zbliżamy?

### RUCHOMY HORYZONT

Często się zdarza, że tuż nad Ziemią tworzy się warstwa powietrza chłodnego, ciężkiego, a nad nią warstwa powietrza cieplejszego, o mniejszej gęstości. Wtedy krajobraz, który normalnie jest niewidoczny, ponieważ leży poniżej linii horyzontu, staje się widoczny. Zjawisko pozornego „podniesienia się horyzontu” obserwujemy najczęściej przy brzegach mórz. Ciekawy opis tego zjawiska podał badacz z Obserwatorium Morskiego w Gdyni: „[...] czasami osada Hel jest w tak nienaturalny sposób rozszerzona i podniesiona, że widać poszczególne domy, chociaż odległość od Gdyni do Helu wynosi 18 km i w warunkach zwykłych osada nie jest widoczna. Obserwowany był również przypadek, gdy cały Gdańsk „wisiał w powietrzu wyraźnie oddzielony od lustra morza [...] Przy zmianach kierunku wiatru zjawisko szybko zanika”. Gdy będziesz kiedyś nad morzem, obserwuj każdego pogodnego dnia krajobraz w pobliżu linii horyzontu. Na pewno uda ci się zobaczyć podobne zjawisko.





Kąt najmniejszego odchylenia  $D$  wiąże się z kątem łamiącym pryzmatu  $A$  i współczynnikiem załamania  $n$  następującym wzorem:

$$\sin \frac{A+D}{2} = n \sin \frac{A}{2}$$

Gdy kąt łamiący pryzmatu  $A$  wynosi  $60^\circ$ , a współczynnik załamania  $n = 1,31$ , mamy

$$\sin \frac{60^\circ + D}{2} = 1,31 \sin 30^\circ = 1,31 \cdot$$

$$\frac{1}{2} = 0,655.$$

Wartość sinusa 0,655 odpowiada

$$\text{kątowni } 40,9^\circ. \text{ Stąd } \frac{60^\circ + D}{2} = 40,9^\circ,$$

a więc  $D = 21,8^\circ$ .



## DLACZEGO GWIAZDY MIGOCZĄ?

Natomiast niezależnie od tego, gdzie się znajdujesz, warto żebyś wybrał się na obserwacje nocnego nieba. Spójrz na gwiazdy położone niezbyt wysoko nad horyzontem. Nie świecą one w sposób ciągły, lecz migoczą. Stale zmienia się ich blask i barwa. Przyczyną migotania gwiazd są szybkie pulsacje powietrza w dolnych warstwach atmosfery, spowodowane promieniowaniem ciepła przez powierzchnię Ziemi. Podobne drganie powietrza, tylko na mniejszą skalę, możesz zobaczyć nad ogniskiem, nad lokomotywą, kominem albo nawet nad ziemią w upalny, słoneczny dzień.

## ZJAWISKO „HALO”

Gwiazdy migoczą w każdą pogodną noc, za to trochę trudniej jest zaobserwować inne, bardzo ciekawe zjawisko na nocnym niebie. Jest nim wielki krąg świetlny wokół Księżyca, tzw. „halo”. Nie należy go mylić z małym wieńcem okalającym Księżyc. Halo jest pierścieniem o promieniu, który widać pod kątem  $22^\circ$ . Jeśli nie wiesz, ile to jest, pomoże ci taka metoda: wyciągnij przed siebie rękę i rozłóż szeroko palec.

Jeśli kciukiem zasłonisz Księżyc, czubkiem małego palca możesz zatoczyć okrąg o promieniu, który widzisz pod kątem około  $20^\circ$ .

Halo nie występuje przy każdej pogodzie. Nie zobaczysz go w bardzo pogodną noc, kiedy niebo jest całkowicie bezchmurne. Podobnie, nie ma co wyruszać na obserwacje przy pełnym zachmurzeniu. Idealne warunki — to lekko zasnutą mgłą niebo.

Warunki sprzyjające utworzeniu się halo wokół Księżyca zdarzają się średnio raz na cztery dni, czyli dosyć często.

Nawet wiosną i latem, kiedy na Ziemi jest ciepło, wysoko w górze panuje mróz. W chmurze znajduje się bardzo wiele małych kryształków lodu, których przekrój ma kształt sześciokąta foremnego.

Te kryształki lodu działają jak pryzmat o kącie łamiącym  $60^\circ$ . Odchylają promień świetlny o pewien kąt, zależny od ich ustawienia względem tego promienia. Obliczono, że kąt ten jest nie mniejszy niż  $22^\circ$ . Dlatego tyle właśnie wynosi kąt odpowiadający wewnętrznej krawędzi pierścienia.

Mówiliśmy dotąd o halo księżycowym, ale podobny krąg możesz zaobserwować wokół Słońca. Musisz być ostrożny, żeby nie oślepiło cię światło biegnące bezpośrednio od Słońca. Najlepiej stanąć w cieniu albo dłonią zasłonić oczy.

Ponieważ halo słoneczne i księżycowe powstaje w tych samych warunkach atmosferycznych, więc przy odrobinie szczęścia możesz zaobserwować oba na raz: jeden pierścień wokół zachodzącego Słońca i drugi — wokół wschodzącego Księżyca. Radzę ci założyć dziennik obserwacji. Notowałbyś w nim datę, pogodę oraz fakt zaobserwowania halo słonecznego i księżycowego. Jeśli jesteś fotoamatorem, spróbuj halo sfotografować. Pamiętaj, że konieczny jest do tego żółty filtr. Podziel się z nami wynikami swoich badań.

# Jak sobie radzić z ułamkami okresowymi

Marek wrócił z wakacji bardzo przejęty — odkrył sprzeczność w matematyce. Zaczęło się od kupowania biletów na pociąg. Na legitymacji szkolnej Marek przeczytał: „uprawnia do zniżki 33%”. — Kto to wymyślił, 33%? — dziwił się.

Mama wyjaśniła mu, że widocznie chodzi o  $\frac{1}{3}$ , lecz nie udało się jej przekonać syna. — Przecież  $3 \cdot 33\%$  to 99%, a nie 100%. — Marek miał coraz więcej wątpliwości. Wreszcie dokonał odkrycia.

— Jeśli rozwinąć  $\frac{1}{3}$  w ułamek dziesiętny — opowiadał z przejęciem — otrzymamy ułamek okresowy 0,333... Pomnóżmy to przez 3: otrzymamy 0,999...

Ale  $\frac{1}{3} \cdot 3$  musi być równe 1, a nie żadne 0,999... — kończył swoje opowiadanie. Wyrażna sprzeczność.

Oczywiście, Marek nie znalazł w matematyce sprzeczności i nie udało się to dotychczas nikomu. Tym niemniej odkrycie Marka jest bardzo ciekawe i warto o nim porozmawiać.

Wszystko wyjaśnia się bardzo prosto: 1 i 0,999... to tylko dwa różne sposoby zapisania tej samej liczby. Spróbuję was o tym przekonać.

Zgodzicie się chyba, że 0,999... nie jest większa od 1. Ale okazuje się, że nie jest też liczbą mniejszą niż 1. Dlaczego?

Sprawdźmy, czy różnica  $1 - 0,999...$  jest większa od zera (tylko wówczas 1 jest większe od 0,999...).

Każda liczba większa od zera jest równocześnie większa od chociażby jednej z liczb:

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots$$

(trzy kropki zastępują zwrot „i tak dalej” wskazując, że wyliczyłem nieskończenie wiele liczb).

Na przykład liczba  $\frac{16}{9275}$  jest większa od  $\frac{1}{10000}$ , liczba  $\frac{2}{783002714}$  jest większa od  $\frac{1}{1000000000}$  a liczba 0,000562 jest większa od  $\frac{1}{10000}$  (dlaczego?).

Tymczasem liczba  $1 - 0,999...$  jest mniejsza od wszystkich liczb:  $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots$  Sprawdźmy dla przykładu, że  $1 - 0,999...$  jest mniejsze od  $\frac{1}{1000}$ :

**Liczba  $1 - 0,999...$  jest mniejsza od  $\frac{1}{1000}$ .**

Sprawdzamy.

0,999... jest liczbą większą od 0,999 (dlaczego?).

Wobec tego  $1 - 0,999...$  jest mniejsze od  $1 - 0,999$

$$1 - 0,999 = \frac{1}{1000}.$$

Ostatecznie:  $1 - 0,999...$  jest mniejsze od  $\frac{1}{1000}$ .

Co wynika z tych obliczeń?

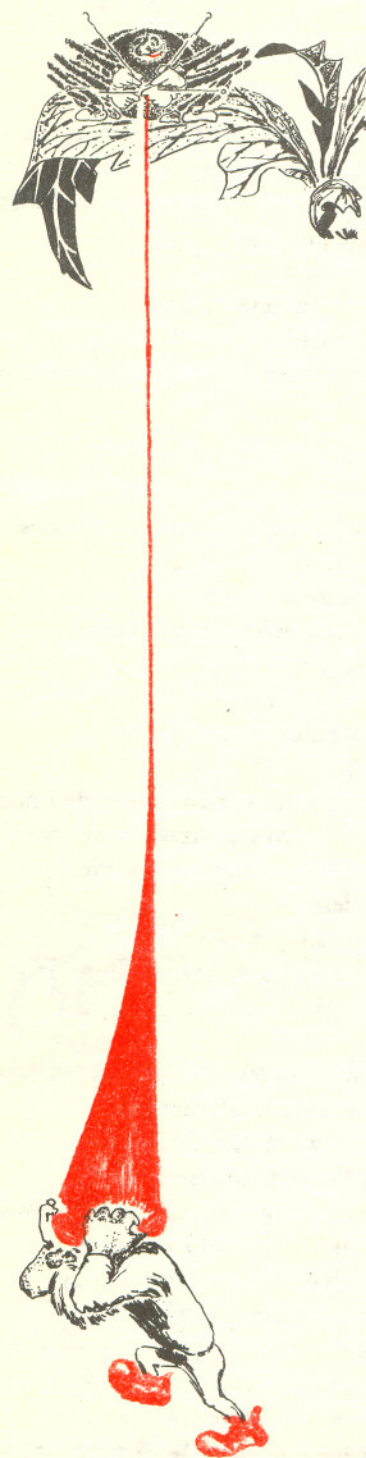
Liczba, która nie jest ani ujemna, ani dodatnia, może być tylko zerem.

$$1 - 0,999... = 0.$$

Zapisując inaczej:

$$1 = 0,999...$$

Ciekawy jestem, jak się wam to podoba?





Moim zdaniem nie trzeba się martwić, że liczba 1 ma dwa różne rozwinięcia dziesiętne: 0,999... i 1,000....

Uważam, że byłoby znacznie gorzej, gdyby nie można było zapisywać liczb różnymi sposobami.

Żeby was o tym przekonać, podam kilka przykładów:

**Przykład 1.**

Jeśli chcę liczbę  $\frac{1}{5}$  dodać do  $\frac{7}{15}$ , najwygodniej przedstawić ją w postaci  $\frac{3}{15}$ .

Natomiast, gdy chcę ją dodać do 0,73, wygodniej będzie użyć zapisu 0,20.

Umiejętność zapisywania liczb w różny sposób przydaje się do działań na ułamkach okresowych.

Pamiętacie zapewne z lekcji szkolnych, że ułamek okresowy 0,333... umówiliśmy się zapisywać krótko: 0,(3). Nawias w tym zapisie oznacza, że trójka powtarza się nieskończenie wiele razy. Czy zwróciliście uwagę, że zamiast 0,(3) można napisać inaczej?

Na przykład: 0,3(3) albo 0,(33), albo 0,33(33333) itp.

Podobnie, 0,747474... można zapisać na wiele sposobów:

$$0,(74) \quad 0,7(47) \quad 0,(70)+0,(04) \quad 0,7(07)+0,(04).$$

A oto dalsze przykłady. Oceńcie sami, czy nie jest wielką wygodą zapisywanie liczby w różny sposób?

**Przykład 2.**

Jak dodać 0,(23) i 0,(405)?

0,(23) zapisujemy w postaci 0,(232323),

0,(405) zapisujemy w postaci 0,(405405).

Teraz już łatwo dodać te liczby:

$$0,(23)+0,(405) = 0,(637728).$$

(Czy nie przypomina to wam sprowadzania do wspólnego mianownika?).

**Przykład 3.**

Jak pomnożyć 0,(83) przez 2?

0,(83) zapisujemy inaczej:  $0,8+0,0(38)$  (sprawdźcie!).

$$2 \cdot 0,(83) = 2 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,0(38) = 1,6 + 0,0(76) = 1,6(76) = 1,(67).$$

**Przykład 4.**

Jak pomnożyć 0,(84) przez 7?

0,(84) zapisujemy inaczej:

$0,8+0,0(08)+0,(04)$  (sprawdźcie!).

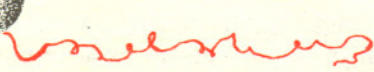
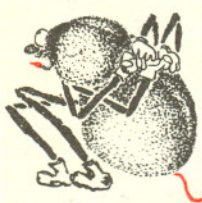
$$\begin{aligned} 7 \cdot 0,(84) &= 7 \cdot 0,8 + 7 \cdot 0,0(08) + 7 \cdot 0,(04) = \\ &= 5,6 + 0,0(56) + 0,(28) = \\ &= 5 + 0,6(56) + 0,(28) = \\ &= 5 + 0,(65) + 0,(28) = \\ &= 5,(93). \end{aligned}$$

Kto nie dowierza, niech sprawdzi:

$$0,(84) = \frac{28}{33} \quad 7 \cdot \frac{28}{33} = \frac{196}{33} = 5,(93).$$

Na zakończenie proponuję kilka zadań:

1. Zastanówcie się, jak dodać 0,(79) do 0,0(48)?
2. Jak mnożyć ułamki okresowe przez 10, 100, 1 000, ...?
3. Spróbujcie obliczyć:
  - $2,(71) \cdot 0,06,$
  - $0,(42) \cdot 158$



Dr Andrzej ROTKIEWICZ

W październikowym numerze «Delt» z ub. roku opowiedzieliśmy o „Wielkim twierdzeniu Fermata”, tzn. problemie rozwiązalności równania  $x^n + y^n = z^n$  (gdzie  $x, y, z$  i  $n$  są liczbami naturalnymi). Tu zajmiemy się innym słynnym zagadnieniem dotyczącym potęg, które do tej pory nie jest jeszcze w pełni rozwiązane, a które znane jest w teorii liczb pod nazwą „Przypuszczenie Catalana”. Dotyczy ono tzw. potęg właściwych. Przez potęgę właściwą będziemy rozumieli potęgę  $a^x$ , gdzie  $a$  i  $x$  są liczbami naturalnymi większymi od jedności. Są to więc potęgi:  $2^3, 3^2, 5^2, \dots$ . „Przypuszczenie Catalana” słowami można wyrazić tak:

Nie istnieją dwie kolejne liczby naturalne  $n$  i  $n+1$  takie, że każda z tych liczb jest potęgą właściwą i  $n \neq 8$ . Catalan sformułował to przypuszczenie w r. 1844. Używając symboliki matematycznej „Przypuszczenie Catalana” możemy wypowiedzieć tak:

Jedynym rozwiązaniem równania

$$a^x - b^y = 1,$$

gdzie  $a, b, x$  i  $y$  są liczbami naturalnymi większymi od 1, jest:  $a = 3, x = 2, b = 2, y = 3$ .

Chociaż Catalan był prawdopodobnie pierwszym matematykiem, który sformułował tę hipotezę w powyżej podanej postaci, to szczególne jej przypadki znane były wcześniej. Już w średniowieczu Levi ben Gerson (1288–1344, zwany także Leo Hebraeus) udowodnił, że jedynym rozwiązaniem równania  $3^x - 2^y = \pm 1$ , gdzie  $x > 1, y > 1$ , jest  $x = 2, y = 3$ . Przeprowadzimy tu najpierw dowód dla równania

$$(1) \quad 3^x - 2^y = 1.$$

Jeżeli  $x = 2k + 1$ , to wobec faktu, że  $4|3^2 - 1|3^{2k} - 1$  jest  $4|3^{2k+1} - 3 = 3^x - 3$ , a ponieważ  $2^y = 3^x - 1 = (3^x - 3) + 2$ , zatem  $4|2^y - 2$ , stąd  $y = 1$  i wobec (1) również  $x = 1$ .

Jeżeli zaś  $x = 2k$ , to  $2^y = 3^x - 1 = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$ , skąd wynika, że  $3^k + 1 | 2^y$  i

$$(2) \quad 3^k + 1 = 2^l.$$

Niech  $k = 2m$ . Oczywiście  $l > 1$ . Mamy  $8|3^2 - 1$ , skąd  $8|3^{2m} - 1 = (3^{2m} + 1) - 2 = 2^l - 2$ , co dla  $l > 1$  jest niemożliwe.

Równanie (2) nie ma więc rozwiązań dla  $k$  parzystego. Jeżeli zaś  $k$  jest nieparzyste, to  $k = 2m - 1$ , gdzie  $m \geq 1$  i  $3^k + 1 = 3^{2m-1} + 1 = 3(3^{2(m-1)} - 1) + 4$ , a ponieważ  $8|3^{2(m-1)} - 1$ , więc  $8|3^k + 1$ . Zatem  $l = 2, k = 1$  i  $x = 2, y = 3$ .

Rozpatrzmy z kolei równanie  $3^x - 2^y = -1$ . Wtedy  $3^x + 1 = 2^y$  i wobec przed chwilą przeprowadzonych rozważań mamy  $x = 1, y = 2$ .

W r. 1657 Frénicle de Bassy udowodnił, że równanie  $a^2 - b^y = 1$ , gdzie  $b$  oznacza dowolną liczbę pierwszą i  $(a, b) \neq (3, 2)$ , nie ma rozwiązań naturalnych takich, że  $y > 1$ .

W r. 1738 Euler udowodnił, że jedynym rozwiązaniem równania  $a^2 - b^3 = 1$  w liczbach naturalnych  $a$  i  $b$  jest  $a = 3, b = 2$ .

W r. 1850 matematyk francuski Lebesgue udowodnił, że równanie  $x^2 + 1 = y^n$  nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych  $x > 1, y > 1$ , gdy  $n \geq 2$ .

W 1921 r. matematyk norweski Nagell pokazał, że nie istnieją rozwiązania równań:  $a^3 - b^y = 1, a^x - b^3 = 1$ , gdzie  $x > 2$ .

Problem pokazania, że nie istnieją rozwiązania równania  $a^4 - b^y = 1$ , został postawiony w r. 1919 przez Nagella i rozwiązany w 1932 przez Selberga.

Tematem wielu prac było równanie  $a^2 - b^y = 1$ . Nagell w 1921 i 1934 r. pokazał, że jeżeli  $a^2 - b^y = 1, (a, b, y) \neq (3, 2, 3)$  i  $p$  jest dzielnikiem pierwszym liczby  $y$ , to  $8|p - 1$ .

Później (1940) matematyk węgierski Obláth udowodnił, że jeżeli  $a^2 - b^y = 1, (a, b, y) \neq (3, 2, 3)$ , to  $p^2 | 2^{p-1} - 1$  i  $p^2 | 3^{p-1} - 1$  dla każdego  $p$  będącego dzielnikiem pierwszym liczby  $y$ .

W latach 1961 i 1964 Hyrrö i Inkeri udowodnili, że jeżeli  $a^2 - b^y = 1, (a, b, y) \neq (3, 2, 3)$ , to  $a$  i  $b$  są bardzo duże, i podali oszacowanie dla liczb  $a$  i  $b$ .

Symbol  $x|y$  oznacza:  $y$  jest podzielny przez  $x$ , symbol zaś  $x \nmid y$  – zaprzeczenie tego faktu.



## Rozwiązanie zadania M59.

Niech w określonym momencie zawodnik  $z_i$  ma rozegrane  $p_i$  partii ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Przypuśćmy, że liczby  $p_i$  są wszystkie różne. Ponieważ żadna z nich nie jest ujemna i każda jest nie większa od  $n-1$ , więc któraś z nich jest równa 0, inna zaś równa  $n-1$ . Istnieje więc zawodnik, który rozegrał partie ze wszystkimi pozostałymi zawodnikami, i istnieje zawodnik, który nie grał jeszcze z żadnym zawodnikiem — a więc sprzeczność. Przypuszczenie nasze było zatem fałszywe.

Uwaga: Zauważmy, że zadanie to różni się tylko sformulowaniem od następującego zadania, danego na XVI Olimpiadzie Matematycznej:

W sali znajduje się  $k$  osób ( $k \geq 2$ ). Udowodnić, że co najmniej dwie z tych osób mają wśród obecnych tę samą liczbę znajomych, (przyjmujemy, że jeżeli osoba  $A$  zna osobę  $B$ , to również  $B$  zna  $A$ ). (Możemy uważać, że znajomi to zawodnicy, którzy grali już ze sobą). Przytoczone zadanie może służyć do rozwiązania następującego zadania danego na XX Olimpiadzie Matematycznej: Dowieść, że każdy wielościan ma co najmniej dwie ściany o tej samej liczbie boków. (Uważamy dwie ściany za „znajome”, jeżeli mają wspólną krawędź).

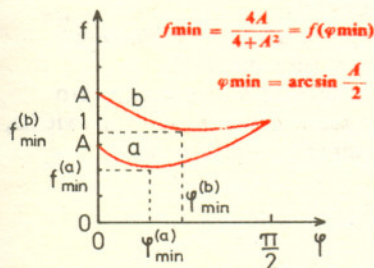
Odpowiedz na pytanie w zadaniu 1 w artykule „Wstęp do teorii łożaczka świetlnego”:

$$v = \frac{A}{\cos^2 \varphi + A \sin \varphi} c,$$

gdzie  $A = (L + l)/c$  i gdzie wykorzystano następujące wzory przybliżone:  
 $d(\cos \varphi \cos(\varphi + d\varphi)) \approx d(\cos^2 \varphi)$ ;  
 $\sin d\varphi \approx d\varphi$ ;

$$2 \sin \frac{d\varphi}{2} \sin \frac{2\varphi + d\varphi}{2} \approx \sin \varphi \cdot d\varphi.$$

Wykres funkcji  $f(\varphi) = v(\varphi)/c$  w przypadkach  $A < 1$  (a) i  $A > 1$  (b) przedstawia poniższy rysunek.



Badania te zostały uwieńczone w końcu elementarnym i niezwykle pomysłowym dowodem matematyka chińskiego Chao Ko, który w 1964 r. udowodnił, że równanie  $a^x - b^y = 1$  nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych  $a > 1, b > 1, y > 1$ , gdzie  $(a, b, y) \neq (3, 2, 3)$ .

Dążono również do tego, aby pokazać, że równanie  $a^x - b^y = 1$  nie ma rozwiązań dla pewnych typów liczb  $a$  i  $b$ .

Pierwszym wynikiem tego rodzaju był wynik Gerona (z 1870 r.), który udowodnił, że nie istnieją rozwiązania równania  $a^x - b^y = 1$ , gdzie  $(a, b, y) \neq (3, 2, 3)$ , gdy  $a$  lub  $b$  jest liczbą pierwszą.

W r. 1941 Obláth pokazał, że jeżeli  $(a, b, x, y) \neq (3, 2, 2, 3)$ , to nie istnieją rozwiązania równania  $a^x - b^y = 1$ , gdy wszystkie dzielniki pierwsze liczb  $a$  i  $b$  są jednej z postaci:  $p = 2^x + 1$  lub  $p = 2^x 3^y + 1$ .

W r. 1956 Hampel pokazał, że nie istnieją rozwiązania równania  $a^x - b^y = 1$  (z wyjątkiem  $3^2 - 2^3 = 1$ ), gdy  $|a - b| = 1$ . Inne dowody wyniku Hampela podali w 1956 r. Schinzel i Rotkiewicz.

W r. 1952 LeVeque dowiódł, że dla danych  $a$  i  $b$  równanie  $a^x - b^y = 1$  ma co najwyżej jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych  $x \geq 1$  i  $y \geq 1$ .

W 1961 r. Rotkiewicz dowiódł, że jeżeli  $a^x - b^y = 1$ , gdzie  $x > 1, y > 1$ , to  $a > 1000$  i  $b > 1000$ .

W 1959 r. matematyk angielski Cassels udowodnił, że jeżeli  $a^p - b^q = 1$ , gdzie  $p$  i  $q$  są liczbami pierwszymi  $p > q \geq 2, a > 1, b > 1$ , to

$$p|b, \quad q|a.$$

Łatwo zauważyć, że cztery kolejne liczby naturalne nie mogą być potęgami właściwymi. Rzeczywiście z czterech kolejnych liczb naturalnych jedna oczywiście daje resztę 2 przy dzieleniu przez 4, a więc nie może być potęgą właściwą.

W r. 1962 A. Mąkowski z twierdzenia Casselsa wywnioskował, że nie istnieją trzy kolejne liczby naturalne, które są potęgami właściwymi.

Rzeczywiście, nie uszczuplając ogólności możemy przyjąć, że wykładniki wymienionych potęg właściwych są liczbami pierwszymi. Niech teraz  $z^r, y^q$  i  $x^p$  będą kolejnymi potęgami właściwymi:

$$(3) \quad x^p - y^q = 1 \quad \text{oraz} \quad y^q - z^r = 1.$$

Na mocy twierdzenia Casselsa mamy  $q|x$  i  $q|z$ , skąd wobec (3) mamy  $q|x^p - z^r = 2$  i  $q = 2$ , a ponieważ  $p > 1, r > 1$ , więc  $4|x^p - z^r = 2$ , co jest oczywiście niemożliwe.

Nasze rozważania kończymy podaniem wyniku matematyka holenderskiego Tijdemana. Otóż w 1974 r. udowodnił on, że równanie  $a^x - b^y = 1$  ma w liczbach naturalnych  $a, b, x, y$  większych od 1 skończoną liczbę rozwiązań.

Istnieje więc liczba naturalna  $M$  taka, że o ile  $a^x - b^y = 1$ , to  $a < M, b < M, x < M, y < M$ .



### Rozwiązanie zadania F20.

Rozwiązanie niniejszego zadania należy porównać z rozwiązaniem zadania F19, zamieszczonym w poprzednim (7) numerze «Deltę». Zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej, w obwodzie kołowym będzie indukowała się siła elektromotoryczna  $\epsilon$  równa 3 V. Ponieważ całkowity opór obwodu wynosi 3  $\Omega$ , w obwodzie będzie płynął prąd o natężeniu  $I$  równym 1 A. Gdyby siła elektromotoryczna w obwodzie była przyłożona przez włączenie baterii (jak w zadaniu F19), wówczas napięcie między punktami  $A$  i  $B$  moglibyśmy wyznaczyć korzystając z prawa Ohma. W tym zadaniu jednak miejsce przyłożenia indukowanej siły elektromotorycznej nie jest określone. Czy można więc jednoznacznie określić napięcia między punktami  $A$  i  $B$ ? Okazuje się, że nie. Rozważmy pomiar napięcia przy pomocy woltmierzera podłączonego do punktów  $A$  i  $B$  według schematów pokazanych na rysunkach 1a i 1b.

Napiszmy prawo Kirchhoffa dla zamkniętych obwodów ACBV i ADBV dla obu schematów podłączeń woltmierzera. Wskazania woltmierzera oznaczamy literą  $U$  oraz zakładamy, że punkt  $A$  łączymy z zaciskiem + woltmierzera, a kierunek indukowanego prądu jest taki, jak zaznaczono na rysunkach.

Otrzymamy:

$$\text{dla schematu 1a:} \quad U = I \cdot R_{ACB} = 1 \text{ V} \quad (\text{obwód ACBV}),$$

$$U = \epsilon - I \cdot R_{ADB} = 1 \text{ V} \quad (\text{obwód ADBV}).$$

Należy zauważyć, że w obwodzie ADBV przy tym schemacie połączeń występuje siła elektromotoryczna indukcji  $\epsilon$ .

$$\text{dla schematu 1b:} \quad U = I \cdot R_{ACB} - \epsilon = -2 \text{ V} \quad (\text{obwód ACBV}),$$

$$U = -I \cdot R_{ADB} = -2 \text{ V} \quad (\text{obwód ADBV}).$$

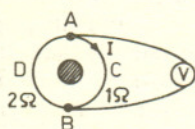
Teraz siła elektromotoryczna indukcji występuje w obwodzie ACBV.

W zależności od sposobu przyłączenia woltmierzera uzyskaliśmy różne wyniki. Czyli w przypadku występowania siły elektromotorycznej indukowanej (ogólniej: gdy istnieją pola magnetyczne zmienne w czasie) nie istnieje jednoznacznie określony elektryczny potencjał skalarny. Gdybyśmy druty łączące woltmierzera z punktami  $A$  i  $B$  obwinęli wielokrotnie wokół walca, woltmierzera wskazywałby jeszcze inne wartości napięcia. Ogólna odpowiedź jest następująca:

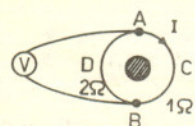
$$U = -(2 + 3n) \text{ V}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

zależnie od tego, jak doprowadzone są druty od punktów  $A$  i  $B$  do zacisków woltmierzera.

Porównując zadania F19 i F20 możemy sobie uświadomić różnicę między siłami elektromotorycznymi: przyłożoną i indukowaną.



Rys. 1a



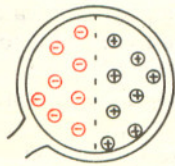
Rys. 1b

A JEDNAK PRZEWODZI!... ALBO BIEG Z PRZESZKODAMI DLA ELEKTRONÓW

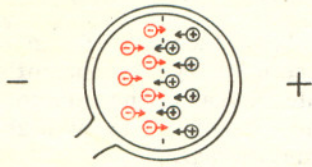
Należy wyjaśnić, że obiektem naszego zainteresowania będzie dioda półprzewodnikowa. No to co z tego, że przewodzi? — zapytacie. Taka natura diod, że przewodzą, i to w dodatku w jedną stronę, a w drugą nie. **Praktycznie nie** — powiedzą ostrożniejsi. Otóż to właśnie. Tytuł świadczy, że chciałbym tym razem być niepraktyczny i zająć się właśnie prądem, który dioda półprzewodnikowa mimo wszystko przewodzi „do tyłu”, to znaczy w kierunku zaporowym. Słyszę już dwa (w zależności od postawy życiowej ich autorów) pytania: **dlaczego** (przewodzi)? oraz **czy warto** (się zająć)? Na drugie pytanie odpowie sam sobie każdy, kto przeczyta ten artykuł do końca; na pierwsze spróbuję dać coś w rodzaju odpowiedzi, zastrzegam się jednak, że charakter miejsca zmusza mnie do podania jej w wielkim uproszczeniu. Zastanówmy się więc,



Rys. 1

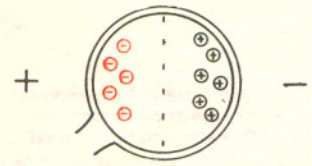


Rys. 2



Rys. 3

Nośnikami prądu w półprzewodnikach są swobodne elektrony i dziury.



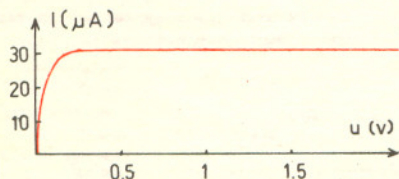
Rys. 4

CO SIĘ DZIEJE W DIODZIE?

Dioda półprzewodnikowa jest, jak wiemy, połączeniem dwóch rodzajów półprzewodnika: typu **n** i typu **p** (rys. 1). Obszar typu **n** zawiera **elektrony swobodne** (a więc zdolne do przewodzenia prądu), w obszarze typu **p** dominują **dziury**, czyli luki po elektronach w wiązaniach międzyatomowych (rys. 2). Dziura może też się poruszać dzięki przeskakiwaniu do niej elektronów sąsiednich wiązań, a więc przewodzi prąd tak, jak cząstka o ładunku dodatnim (porusza się w kierunku przeciwnym do ruchu elektronów). Każdy, kto próbował doświadczeń z dyfuzją, wie, że pozycje dwóch stojących naprzeciw siebie armii z rysunku 2 są nie do utrzymania; poruszające się chaotycznie ruchem cieplnym elektrony zaczną przenikać do obszaru **p**, a dziury do obszaru **n** — żołnierze dwóch armii zaczną się bratać lub, jeśli wolicie, mieszać się w walce wręcz. Niestety obraz militarystyczny jest bardziej adekwatny: wrogowie będą wybijać się wzajemnie — elektrony będą **rekombinować** z dziurami zapełniając luki w wiązaniach. Ubywanie elektronów z obszaru **n** ładuje go dodatnio, dziury opuszczając obszar **p** ładują go ujemnie. Ładunki te narastają, dopóki powstająca różnica potencjałów nie zahamuje przepływu **nośników**. Mówimy, że powstała bariera potencjału. Teraz pora na wkroczenie do akcji dowódców. Jeżeli będą oni dysponować stale nowymi posiłkami, będą mogli w nieskończoność posyłać na rzeź swoich żołnierzy, co w diodzie odpowiada dołączeniu bateryjki plusem do obszaru **p**, a minusem do **n**: będzie ona dostarczać stale nowych nośników do obu obszarów i prąd będzie płynąć bez przeszkód (rys. 3). Może też paść rozkaz wycofania się. Armie opuszczą plac boju i wszelki ruch na nim ustanie — przykładając plus do obszaru **n**, a minus do obszaru **p** spowodujemy cofnięcie się nośników, każdego w stronę swojego obszaru, i prąd nie popłynie; bo co by go miało przewodzić (rys. 4)? Oj, zagalopowałem się. Jednak troszkę popłynie w temperaturze różnej od zera bezwzględnej zawsze istnieje jakieś prawdopodobieństwo, że pobudzony drganiem ciepłymi elektron „wyskoczy” z wiązania, stanie się swobodny i utworzy jednocześnie dziurę. Takie, jak mówimy, **generowane termicznie** elektrony i dziury dadzą jednak pewien prąd w kierunku zaporowym. Jak wykazują szczegółowsze rozważania, a także pomiary, natężenie tego prądu jest praktycznie niezależne od napięcia (rys. 5). Łatwo się też domyślić, że ze względu na przyczynę prądu jego natężenie w bardzo znacznym stopniu zależy od temperatury. Powstaje pytanie:

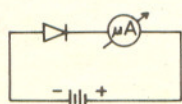
JAK TO SPRAWDZIĆ DOŚWIADCZALNIE?

Niestety trzeba mieć miernik natężenia prądu, i to czuły. Kto nie ma możliwości skorzystania z miernika (w szkole, w klubie radioamatorskim), może go zrobić sam według przepisu podanego w «Delcie», 1975, 5. Następny problem to dioda. Musi być germanowa i niezbyt mała, na przykład typu DZG. Łączymy miernik szeregowo z diodą i dołączamy źródło prądu — baterijkę (uwaga na bieguny!), jak na rys. 6. Dołączając jedno, dwa lub trzy ogniwa możemy zauważyć, że natężenie prądu jest za każdym razem praktycznie takie samo, o ile dioda jest dobra.

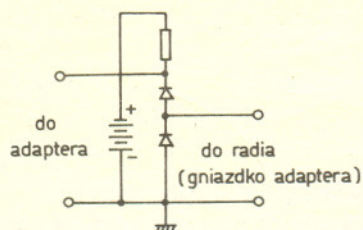


Natężenie prądu zaporowego diody jako funkcja napięcia

Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Weźmy teraz diodę do ręki: wyraźnie widać, że nawet pod wpływem tak niewielkiego ogrzania natężenie prądu wzrasta. Na tej zasadzie można „mierzyć” temperament znajomych, nie wtajemniczając ich w konstrukcję przyrządu. Dioda z precyzyjnym miernikiem umożliwi Wam bardzo dokładny pomiar temperatury. Po wyskalowaniu można nawet używać zestawu jako termometru lekarskiego. Jeżeli ktoś w żaden, ale to w żaden sposób nie może zaopatrzyć się w miernik, może jakościowo badać te zjawiska przy użyciu adaptera i radia. Trzeba jednak mieć dwie diody (najlepiej DZG 7) i opornik o oporze rzędu 100 KΩ. Łączymy obwód według rys. 7 (obie diody w kierunku zaporowym). Ogrzewając lub oziębiając raz jedną diodę, raz drugą, zaobserwujemy duże zmiany natężenia dźwięku z głośnika radia. Dlaczego? Spróbujcie zastanowić się sami. Charakterystyka prądowo-napięciowa z rys. 5 powinna Wam w tym pomóc. Jeszcze uwaga praktyczna: jeśli chcecie uniknąć niemiłego buczenia, musicie ekranować przewody i elementy między adapterem a radiem. Przed dotknięciem ręką diody należy także siebie połączyć z masą całego układu. Oczywiście wszelkie osłony ekranujące muszą też być z nią połączone. W razie braku przewodów ekranowanych można owinąć przewody i elementy (odpowiednio izolowane) folią aluminiową. Można takie dwie diody dać do rąk dwum osobom, żeby sprawdzić, czy wszystko „gra” w ich wspólnych sprawach.

Mam nadzieję, że wszystko będzie „grało” w Waszych doświadczeniach.

## Ciekawe, i nie tylko

W wieku XIX dzięki teoriom Jamesa Clarka Maxwella udało się wykazać, że takie zjawiska, jak elektryczność, magnetyzm, światło i fale radiowe, mają wspólnę pochodzenie — wspólną naturę. Wygląda na to, że w naszym wieku uda się znaleźć wspólną naturę czterech znanych obecnie fundamentalnych oddziaływań fizycznych: grawitacyjnego, elektro-magnetycznego, silnego i słabego. Nadzieje takie pozwala snuć niedawne odkrycie tzw. słabych prądów neutralnych. Jest to klasa takich oddziaływań słabych pomiędzy cząstkami elementarnymi, które wykazują bardzo silne analogie z oddziaływaniami elektromagnetycznymi. Tak więc pierwszy „most” — pomiędzy oddziaływaniami słabymi i elektromagnetycznymi — zarysowuje się nader wyraźnie. Pisze o tym szerzej «Scientific American», 1974, 10. W teorii oddziaływań grawitacyjnych duże nadzieje budzi odkrycie bardzo interesującego pulsara PSR 1913+16, znajdującego się w związanym systemie gwiazdy podwójnej z jakąś inną gwiazdą o dużej masie i małych rozmiarach. Właśnie to, że pulsar ten występuje w tak egzotycznym, a jednocześnie interesującym z punktu widzenia teoretycznego układzie pozwoli sprawdzić, która z istniejących obecnie teorii grawitacji najlepiej opisuje ten obiekt, czyli która z nich jest aktualnie najlepsza. Doniesienie na ten temat znaleźć można w «Physics Today», 1974, 12. Także «Physics Today», 1974, 11, przynosi bardzo interesujący wywiad z dwoma wybitnymi fizykami doby współczesnej: Edoardo Amaldimem i Victorem F. Weisskopfem na temat osiągnięć fizyki europejskiej w okresie po II wojnie światowej. Wywiad jest jeszcze jednym przykładem na to, że wielcy przedstawiciele nauk ścisłych doskonale zdają sobie sprawę ze społecznych uwarunkowań i implikacji współczesnej nauki. Dla nas bardzo przyjemnym momentem jest zaliczenie powstania fizyki hiperjader — ze wskazaniem prof. Jerzego Pniewskiego jako jej współtwórcy — do rzędu faktów o dużym znaczeniu dla fizyki.

Wśród artykułów o metodach i narzędziach współczesnej fizyki interesujący opis tzw. metody cieni badania struktury kryształów i pomiarów bardzo krótkich czasów przynosi «Priroda», 1974, 10. Metoda ta oparta na analizie oddziaływania protonów i elektronów ze strukturą kryształu dostarcza informacji na temat jego budowy, zaś w zastosowaniu do pomiaru czasów trwania procesów jądrowych pozwala śledzić zjawiska rzędu  $10^{-19}$  sek.



### Rozwiązanie zadania M60.

Załóżmy, że punkty  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  należą do rozważanego koła i że każda odległość  $A_i A_j$  ( $i \neq j$ ) jest większa od 1. Żaden z punktów  $A_i$  nie jest wówczas oczywiście środkiem koła i żadne dwa spośród tych punktów nie należą do tego samego promienia. Punkty  $A_i$  leżą więc na sześciu różnych promieniach. Wśród tych promieni istnieją dwa tworzące kąt  $\leq 60^\circ$ . Wówczas odległość punktów leżących na tych promieniach jest  $\leq 1$  (dlaczego?). Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, a więc jest ono fałszywe.



## Mgr Jerzy BEDNARCZUK

Jedno z zadań na pisemnym egzaminie wstępnym na wyższe studia matematyczne miało następującą treść: „Na płaszczyźnie dany jest dowolny czworokąt. Ile elementów może mieć zbiór izometrii przekształcających ten czworokąt na siebie?”.

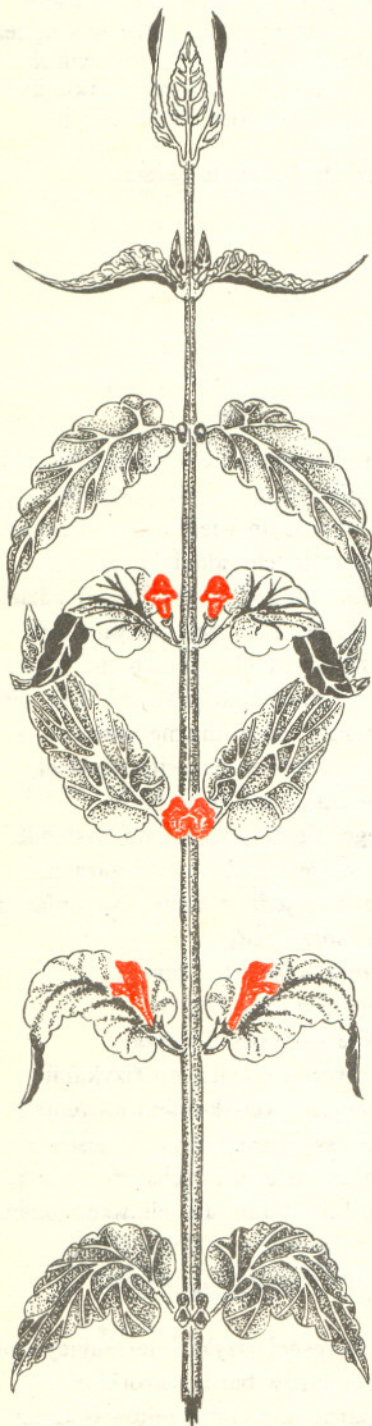
Zadanie to sprawiło większości kandydatów znaczne trudności. Dlatego warto zastanowić się nad kilkoma związanymi z nimi problemami. Potraktujemy przy tym zagadnienie ogólniej, a mianowicie będziemy zajmowali się izometriami przekształcającymi dowolne figury ograniczone (w szczególnym przypadku — wielokąty) na siebie. Na wstępie zasadnicze pytanie: Jakie izometrie mogą przekształcać figurę ograniczoną na siebie? Aby na nie odpowiedzieć, wystarczy znać podstawowe twierdzenia dotyczące izometrii płaszczyzny, które dla ułatwienia przytaczamy na sąsiedniej stronie. W oparciu o nie łatwo stwierdzimy, że izometriami, o które pytaliśmy, są symetrie osiowe i obroty (nietrudno wskazać przykłady odpowiednich figur), nie mogą zaś nimi być ani przesunięcia, ani symetrie z poślizgiem. Weźmy bowiem dowolny punkt rozpatrywanej figury. Gdyby jakieś przesunięcie (symetria z poślizgiem) przekształcało tę figurę na siebie, to również  $n$ -krotne złożenie tego przesunięcia dla dowolnego  $n$  naturalnego miałyby tę własność na mocy  $5^\circ$  (dla symetrii z poślizgiem weźmy  $2n$ -krotne złożenie, aby otrzymać translację — patrz  $6^\circ$ ). Tak więc, wobec dowolności  $n$  odległość rozpatrywanego punktu od jego obrazu, należącego także do tej figury, mogłaby być dowolnie duża, co przeczyłoby założeniu ograniczoneści figury. Twierdzenie to upraszcza nam znacznie sytuację rozpatrywaną w zadaniu przytoczonym na początku artykułu. Uprości się ona jeszcze bardziej, gdy zauważymy, że jeśli i obrót i symetria przekształcają figurę ograniczoną na siebie, to środek obrotu należy do osi symetrii. Gdyby bowiem do osi symetrii nie należał, to złożenie tych przekształceń, będące na mocy  $4^\circ$  symetrią z poślizgiem o wektor niezerowy, przekształcałoby także tę figurę na siebie, co, jak już ustaliliśmy, jest niemożliwe. Podobnie możemy udowodnić, że jeśli dwie symetrie osiowe przekształcają figurę ograniczoną na siebie, to ich osie się przecinają. Tu już nam zapewne intuicja podpowiada, że jeśli dwa obroty przekształcają figurę ograniczoną na siebie, to ich środki się pokrywają. Dowód tego faktu każdy z nas przeprowadzi chyba bez większych trudności (wskazówka: udowodnić, że złożenie dwu obrotów wokół różnych środków złożone ze złożeniem w takiej samej kolejności przekształceń do nich odwrotnych jest przesunięciem).

Ustalmy z kolei, jak wygląda składanie izometrii przekształcających daną figurę ograniczoną na siebie. Z poprzednich rozważań wynika, że wystarczy rozpatrzeć trzy przypadki:

- złożenie dwu symetrii osiowych o osiach przecinających się; w wyniku otrzymamy obrót wokół punktu przecięcia (o jaki kąt?);
- złożenie dwu obrotów o wspólnym środku; w wyniku otrzymamy także obrót wokół tego punktu (o jaki kąt?);
- złożenie obrotu i symetrii osiowej o osi przechodzącej przez środek obrotu; w wyniku otrzymamy oczywiście symetrię osiową (względem jakiej prostej?).

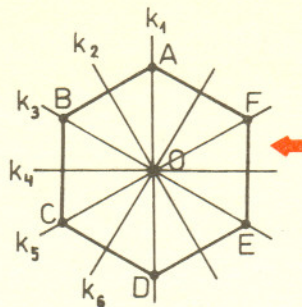
Dla zilustrowania tych zagadnień proponujemy skonstruowanie prostego przyrządu. Potrzebne nam do tego będą: kartka, kawałek tekturki, nożyce, linijka, ołówek. Przyrząd składa się z dwu części. Pierwszą stanowi kartka. Na kartce tej rysujemy figurę, którą będziemy przekształcać, i oznaczamy jej charakterystyczne punkty, środek obrotów i osie symetrii (warto oczywiście wybrać taką figurę, która ma kilka osi symetrii i którą kilka obrotów przekształca na siebie). Narysujmy też obok figury strzałkę, wskazującą na tej figurze dowolne, wybrane przez nas miejsce. Drugą część, ruchomą, będzie stanowiła wycięta z tekturki figura przystająca do narysowanej. Oznaczmy na niej, po obydwu stronach, punkty odpowiadające punktom figury z kartki, oczywiście takimi samymi literami, ale z „primami”.

To będzie obraz naszej figury. Przyłóżmy teraz ruchomą część do narysowanej figury w sposób odpowiadający położeniu tożsamościowemu i w miejscu wskazanym przez strzałkę wpiszmy na części ruchomej wyraz „tożsamość”. Wykonujmy teraz częścią ruchomą ruchy odpowiadające obrotom i symetriom przekształcającym tę figurę na siebie, za każdym razem startując z położenia tożsamościowego i za każdym razem wpisując, także na części ruchomej, w miejscu wskazanym przez strzałkę, jakie przekształcenie wykonaliśmy. I to już wszystko. Przyrząd jest gotowy. Jeśli teraz, startując z położenia tożsamościowego, wykonamy kolejno kilka przekształceń naszej figury, obracając odpowiednio ruchomą część naszego przyrządu, to w miejscu wskazanym przez strzałkę odczytamy, jakie przekształcenie jest wynikiem złożenia tych przekształceń.

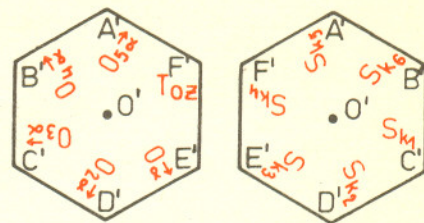


Dla przykładu zamieszczony jest poniżej rysunek takiego przyrządu, w którym wybraną figurą jest sześciokąt foremny.

Oczywiście po wszystkich tych uwagach zadanie, o którym mówiliśmy na początku, każdy sam rozwiąże z łatwością.



część nieruchoma



awers

rewers

część ruchoma

## Co o izometriach płaszczyzny warto wiedzieć

- 1° Każdą izometrię płaszczyzny można przedstawić jako złożenie jednej, dwu lub trzech symetrii osiowych.
- 2° Złożenie dwu symetrii osiowych jest obrotem lub przesunięciem (kiedy, czym?).
- 3° Złożenie trzech symetrii osiowych jest symetrią osiową wtedy i tylko wtedy, gdy osie symetrii są współpękowe, to znaczy przechodzą przez jeden punkt, lub są parami równoległe.
- 4° Złożenie trzech symetrii osiowych jest symetrią z poślizgiem, czyli złożeniem symetrii osiowej i przesunięcia o wektor równoległy do osi symetrii (warto sobie przypomnieć dowód tego faktu). Jeśli osie symetrii nie są współpękowe, to wektor poślizgu jest niezerowy.
- 5° Zbiór izometrii przekształcających daną figurę na siebie z działaniem składania tworzy grupę przekształceń.
- 6° Gdy symetrię z poślizgiem złożymy ze sobą, otrzymamy przesunięcie o wektor równy podwojonemu wektorowi poślizgu.



## Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

**M58.** Udowodnić, że jeżeli każda przekątna czworokąta wypukłego dzieli go na trójkąty o równych polach, to jest on równoległobokiem. (W. Mních)

Rozwiązanie na str. 5.

**M59.** W turnieju szachowym, w którym każdy zawodnik grał z każdym dokładnie jeden raz, uczestniczy  $n$  zawodników ( $n > 1$ ). Udowodnić, że w każdym momencie są co najmniej dwaj zawodnicy, którzy rozegrali tę samą liczbę partii. (W. Mních)

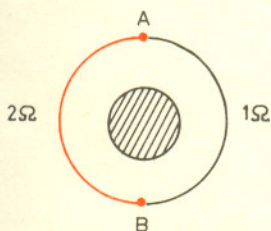
Rozwiązanie na str. 12.

**M60.** Udowodnić, że w kole o promieniu 1 nie można wybrać więcej niż 5 punktów takich, że odległość między dowolnymi dwoma spośród nich jest większa od 1. (W. Mních)

Rozwiązanie na str. 15.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

**F20.** Dany jest pręt żelazny w kształcie nieskończenie długiego prostoliniowego walca o przekroju kołowym. Pręt ten jest magnesowany podłużnie w ten sposób, że przenikający go strumień magnetyczny narasta jednostajnie w czasie o 3 webery na sekundę. W płaszczyźnie prostopadłej do osi walca umieszczono wokół niego obwód kołowy złożony z dwu drutów o oporach odpowiednio  $1 \Omega$  i  $2 \Omega$ . Jakie będą wskazania woltomierza o bardzo dużym oporze, podłączonego do punktów  $A$  i  $B$  (patrz rysunek) leżących na złączach drutów? (Nadesłał J. P.).  
Rozwiązanie na str. 13.



Rysunek układu w płaszczyźnie prostopadłej do osi walca