

## SPIS TREŚCI

Interferencja światła <i>Doc. dr Adam Kujawski, dr Jan Mostowski</i>	str. 1
Analityczne własności zbiorów wypukłych <i>Mgr Ryszard Kopycki</i>	str. 3
Zadania <i>Mgr Ryszard Kopycki</i>	str. 5
„Obliczmy” barwę <i>Dr Lucjan Piela</i>	str. 6
Gry wielochodowe <i>Dr Wojciech Guzicki</i>	str. 7
Metody Monte Carlo <i>Dr Ryszard Zieliński</i>	str. 9
Sztuka wygrywania <i>Dr Tadeusz B. Iwiński</i>	str. 10
Laboratorium w domu <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 13
Mała «Delta» <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 15
Czy wiecie, że <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 17

### W następnym numerze:

Fotografia wiatru  
 Geometria Bolyai — Łobaczewskiego

„Delta”  
 matematyczno-fizyczny miesięcznik  
 popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
 prof. dr G. Białkowski  
 doc. dr A. Blikle  
 prof. dr A. Hryniewicz  
 doc. dr B. Iwazkiewicz  
 prof. dr J. Janik  
 doc. dr J. Jatzak  
 prof. dr Leon Jeśmanowicz —  
 przewodniczący  
 prof. dr Z. Krygowska  
 prof. dr K. Leibler  
 mgr W. Łucznik  
 mgr A. Mąkowski  
 prof. dr A. Pelczyński  
 prof. dr Arkadiusz Piekara —  
 wiceprzewodniczący  
 prof. dr J. Rayski  
 prof. dr A. Schinzel

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

prof. dr Z. Semadeni  
 prof. dr M. Subotowicz  
 dr A. Wakulicz  
 doc. dr W. Zawadowski

Redaguje Kolegium w składzie:  
 doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.  
 dr T. B. Iwiński  
 dr M. Kordos — red. nac.  
 W. Puczyński — red. techn. graf.  
 doc. dr M. Świecki  
 D. Tys — sekr. red.

Adres Redakcji  
 ul. Hoża 69 p. 151  
 00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.  
 Ossolińskich — Wydawnictwo.  
 Wrocław, Oddział w Warszawie  
 Nakład 20000 egz. Objętość 2 ark.  
 wyd.; 2,50 ark. druk;  
 papier offsetowy III kl., 80g, 61 × 86  
 Wydrukowano w Drukarni im.  
 Rewolucji Październikowej,  
 Warszawa, ul. Mińska 65.  
 Nr zam. 771/75 B-34

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej  
 zł 30,—

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich  
 i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów  
 i delegatur RSW-Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następnny.

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach,  
 w których nie ma oddziałów RSW-Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenie  
 właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala  
 Kolportażu RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020  
 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej,  
 przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa,  
 ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać  
 „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
 Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem  
 lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

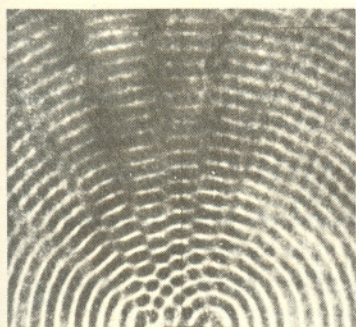
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5,— nr indeksu 35723/3555



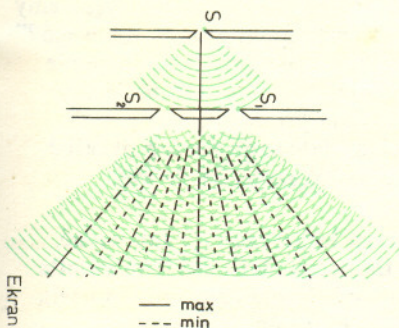
Obserwacja zjawiska interferencji światła nie jest w ogólności sprawą trudną. W życiu codziennym, gdy światło pada na cienkie błonki mydlane lub warstwy tłuszczu na wodzie, zauważamy tworzenie się układów barwnych prążków, które powstają właśnie w wyniku interferencji. Można również łatwo wykonać następujące doświadczenie, które ukazuje powstawanie prążków interferencyjnych. W cienkim sztywnym kawałku papieru wykonujemy końcem igły dwa otwory o wymiarach takich, jak kropka w druku, lub nieco mniejsze. Odległość między otworami winna wynosić około trzech średnic otworu. Przy obserwacji bardzo daleko położonego źródła światła, na przykład odległej lampy ulicznej, gdy kartkę z otworami przysuniemy jak najbliżej oka, stwierdzamy powstawanie prążków interferencyjnych. Oczywiście wykonywanie eksperymentów umożliwiających nie tylko obserwacje, ale też przeprowadzenie pomiarów wymaga odpowiednich przyrządów optycznych.

Interferencja była jednym ze zjawisk, na podstawie których już od czasów Huygensa i Newtona szukano odpowiedzi na pytanie: czym jest światło? (por. «Delta», 1974, 8, art. dra Z. Płochockiego). Chociaż rozwój badań przyrodniczych przyniósł głębokie zrozumienie natury światła i zjawisk z nim związanych, zupełnie nowe zjawiska zaczęto badać od roku 1961, gdy zbudowano laser — nowe źródło promieniowania optycznego. Również zjawisko interferencji dzięki takim wyjątkowym cechom światła laserowego, jak spójność (koherencja) czasowa i przestrzenna, uzyskało nowe znaczenie i znalazło także nowe zastosowanie praktyczne w holografii (por. «Delta», 1974, 2, art. prof. dra B. Karczewskiego). Dla pogładowego wyjaśnienia ważnego pojęcia spójności (koherentności) fal użyjemy łatwo dostępnego dla obserwacji przykładu interferencji fal na powierzchni wody. Wyobraźmy sobie, że dwa drgające pręty wytwarzają fale. Jeśli pręty drgają regularnie z ustaloną, jednakową częstotliwością, to dwie powstające fale dają trwały układ miejsc, w których następuje wzmocnienie lub wygaszenie fal (rys. 1). W tym przypadku fale nazywamy spójnymi. Jeśli jednak pręty drgają nieregularnie, ich częstotliwości zmieniają się niezależnie, to w wypadkowym ruchu falowym nie można odnaleźć cech regularności. Wzmocnienie fal (lub ich osłabienie) następuje raz w jednym, a raz w innym miejscu. W tym przypadku mówimy, że źródła wytwarzają fale niespójne.



Rys. 1

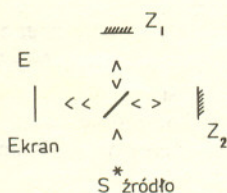
Tomasz Young po raz pierwszy zrealizował dla fal świetlnych omówiony wyżej schemat doświadczenia interferencyjnego. Ilustruje to rys. 2, na którym światło ze szczeliny lub dostatecznie małego otworu  $S$  pada na szczeliny  $S_1$  i  $S_2$ , a powstały na ekranie obraz ukazuje prążki jasne i ciemne. Jest to eksperyment, który, choć bez możliwości wykonywania pomiarów, może być łatwo przeprowadzony przez Czytelnika w sposób opisany na początku tego artykułu. W doświadczeniu przedstawionym na rys. 2 szczelina lub otwór  $S$  oświetlony jest światłem jednobarwnym z jakiegokolwiek źródła konwencjonalnego (takiego, jak żarówka, świetlówka, płomień itd). Światło z takiego źródła nazywać będziemy światłem termicznym, w odróżnieniu od światła laserowego. Gdy szczeliny  $S_1$  i  $S_2$  są oświetlone bezpośrednio źródłem światła termicznego bez wykorzystania szczeliny  $S$ , to nie obserwuje się obrazu interferencyjnego. Gdy jednak źródło odsuwamy bardzo daleko, tak że może być ono uważane za źródło punktowe, powstaje obraz interferencyjny.



Rys. 2

Wykonując odpowiednie pomiary w doświadczeniu Younga można stwierdzić, że istnieje pewna graniczna odległość  $d$  między szczelinami  $S_1$  i  $S_2$ . Dla odległości większych niż  $d$  obraz interferencyjny znika. Wartość  $d$  określa wymiary obszaru, który nazywa się obszarem spójności (koherencji) fali świetlnej dochodzącej do  $S_1$  i  $S_2$ . Światło wychodzące z dwu punktów obszaru spójności daje na ekranie obrazy interferencyjne. Gdy powiększa się rozmiary szczeliny  $S$ , obszar koherencji staje się mniejszy. Oznacza to, że przy zwiększaniu szczeliny  $S$  należy zmniejszać odległość między szczelinami  $S_1$  i  $S_2$  tak, aby obraz interferencyjny był widoczny. W dokładniejszej analizie doświadczenia Younga można znaleźć związek między kątowymi rozmiarami odległego źródła i wielkością obszaru koherencji.

Innym podstawowym schematem doświadczenia interferencyjnego jest interferometr Michelsona. Rys. 3 przedstawia w uproszczeniu ten układ. Wiązka termicznego światła jednobarwnego wybiega ze źródła  $S$  i pada na półprzepuszczające zwierciadło. Powstające dwie wiązki odbijają się od zwierciadeł  $Z_1$  i  $Z_2$ , nakładają się na siebie i dają obraz interferencyjny z charakterystycznymi prążkami. Obraz ten można oglądać bezpośrednio lub zarejestrowany na kliszy w płaszczyźnie  $E$ .



Rys. 3





Rozwiązanie zadania M 62. Niech  $n$  będzie liczbą naturalną większą od 1, która jest dzielnikiem liczby  $(n-1)!+1$ . Gdyby  $n$  było liczbą złożoną, to miałoby dzielnik  $a$  spełniający nierówność  $1 < a < n$ . Wówczas  $a$  byłoby dzielnikiem liczby  $(n-1)!$ , co zapisujemy  $a \mid (n-1)!$ , a ponieważ  $a \mid n \mid (n-1)!+1$ , więc liczba 1 musiałaby być podzielna przez  $a > 1$ , co jest niemożliwe. Liczba  $n$  musi więc być liczbą pierwszą. Warto zauważyć, że jeżeli  $n$  jest liczbą pierwszą, to  $n \mid (n-1)!+1$ , co stanowi treść twierdzenia Wilsona. Liczba naturalna  $n > 1$  jest więc pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy liczba  $(n-1)!+1$  dzieli się przez  $n$ .

Przesuwanie jednego ze zwierciadeł wzdłuż kierunku wiązki światła zmienia różnicę dróg, którymi przebiega światło w każdym z ramion interferometru. Powyżej pewnej wartości  $l_c$  tej różnicy prążki interferencyjne znikają. Różnicę odległości  $l_c$  nazywa się długością koherencji. Wprowadza się również czas

koherencji zdefiniowany przez  $t_c = \frac{l_c}{c}$ , gdzie  $c$  jest prędkością światła. Czas

koherencji  $t_c$  związany jest prostą zależnością z inną wielkością charakteryzującą wiązkę świetlną. Światło jednobarwne, o którym mówimy, nie jest światłem o ściśle określonej częstotliwości  $\nu$ . Zawsze istnieje pewien przedział częstotliwości  $\Delta\nu$ , zwany szerokością spektralną, w którym leżą częstotliwości charakteryzujące daną

wiązkę światła jednobarwnego. Okazuje się, że  $t_c = \frac{1}{\Delta\nu}$ . O znaczeniu tego związku powiemy później.

Opisaliśmy w skrócie dwa podstawowe doświadczenia ilustrujące istotę pojęcia spójności przestrzennej i czasowej. Aby lepiej przedstawić znaczenie wprowadzonych pojęć, podamy pewne dane liczbowe wynikające z dokładnej teorii. Dla źródła światła czerwonego o średniej długości fali 600 nm, mającego kształt koła o średnicy 1 mm, obszar koherencji w odległości 20 m określony jest średnicą o wartości 3,8 mm. Oznacza to, że gdy odległość między szczelinami w doświadczeniu Younga jest mniejsza niż 3,8 mm, otrzymuje się ostre obrazy interferencyjne. Przy większych odległościach od źródeł światła obszar koherencji zwiększa się. Dla światła ze źródeł termicznych długość koherencji w doświadczeniu Michelsona może osiągnąć wartości rzędu kilku metrów. Gdy na przykład

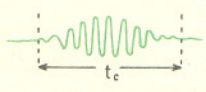
$l_c = 1$  m, otrzymujemy dla czasu koherencji  $t_c = \frac{l_c}{c} = 0,3 \cdot 10^{-8}$  s. Wartość

$l_c = 1$  m oznacza, że przesunięcie zwierciadeł w interferometrze Michelsona nie może być większe niż 1 m (jeśli chcemy otrzymać obraz interferencyjny).

Aby wytłumaczyć, skąd biorą się omawiane wyżej warunki powstawania obrazu interferencyjnego, posłużymy się pewnym uproszczonym opisem atomowej struktury źródła. Atomy i molekuly świecącego źródła będziemy traktować jako niezależne nadajniki fal świetlnych. To przybliżenie jest szczególnie dobre, gdy źródłem jest świecący gaz. Każdy z atomów lub każda z molekuł, gdy zostaną wzbudzone do świecenia (na przykład przez ogrzanie ciała do odpowiednio wysokiej temperatury, wyładowania elektryczne itp.), wysyłają spontanicznie krótko trwające impulsy. Czas trwania impulsu dla typowych wzbudzeń wynosi około  $10^{-8}$  s. Taką falę elektromagnetyczną o skończonym czasie trwania będziemy nazywać ciągiem falowym. Problem „jaki jest kształt przestrzenny ciągu falowego?” jest złożony i nie możemy go tutaj dokładnie omówić. Wyjaśnimy jednak, że nie jest to fala kulista, każdy bowiem świecący przez krótki czas atom lub molekula są podobne do anteny radiowej lub telewizyjnej, wysyłają promieniowanie w pewnych kierunkach szczególnie silnie. Częstotść  $\nu$  ciągu falowego można określić tylko z pewną dokładnością  $\Delta\nu$ . Dokładniejsza analiza pokazuje, że  $\Delta\nu$  jest odwrotnością czasu trwania ciągu falowego.

Możemy teraz powrócić do fizycznego znaczenia czasu koherencji  $t_c$ . Jak widać, jest on równy czasowi trwania pojedynczego ciągu falowego. Jeśli źródłem światła jest świecący gaz, to charakteryzuje się on tym, że wysyła promieniowanie o wielu różnych częstotliwościach — powiedzmy  $\nu_1$  z szerokością spektralną  $\Delta\nu_1$ ,  $\nu_2$  z szerokością spektralną  $\Delta\nu_2$  itd. Posługując się odpowiednim filtrem lub wykorzystując zjawisko rozszczepienia światła przez pryzmat możemy otrzymać światło jednobarwne o częstotliwości  $\nu_0$ . Częstotść tego światła leży w zakresie optycznym, a więc wynosi około  $\nu_0 \simeq 10^{15}$  s<sup>-1</sup>. Szerokość spektralna każdego z ciągów falowych wysyłanych przez świecące atomy gazu ma wartość  $\Delta\nu_0 = 10^8$  s<sup>-1</sup>, gdyż — jak już wspomnieliśmy — czas trwania ciągu wynosi około  $10^{-8}$  s. Wobec tego, że częstotść drgań pola fali świetlnej jest  $10^{15}$  Hz, liczba drgań w jednym ciągu falowym wynosi  $10^7$ . Rys. 4 ilustruje drgania w ciągu falowym tylko w przybliżeniu, gdyż nie możemy na nim zaznaczyć tak dużej liczby drgań.

Dla uproszczenia naszego modelu źródła termicznego pominęliśmy szereg efektów, np. zderzenia atomów w gazie. Zaniedbaliśmy też fakt, że częstotści fal elektromagnetycznych wysyłanych przez różne atomy różnią się od siebie na skutek zjawiska Dopplera. Mimo tych uproszczeń Czytelnik może odpowiedzieć na pytanie dotyczące pochodzenia warunków powstawania obrazu interferencyjnego. W przypadku doświadczenia Younga każdy z atomów źródła  $S$  wysyła ciąg falowy, który dochodzi do szczelin  $S_1$  i  $S_2$ , przy czym różnica faz drgań pola świetlnego w  $S_1$  i  $S_2$  zależy od różnicy odległości atomu od szczelin. O tym, gdzie powstają miejsca jasne i ciemne, decyduje całkowita różnica dróg



Rys. 4



optycznych: atom-szczeliny  $S_1, S_2$ —dane miejsce na ekranie. Gdy rozmiary źródła  $S$  są tak duże, że nie można uważać, iż wszystkie atomy świecą w jednym punkcie, rozkład prążków interferencyjnych jest różny dla różnych atomów, i w rezultacie na ekranie otrzymuje się równomierne oświetlenie, a nie ostry obraz interferencyjny. Podobnie jest w interferometrze Michelsona. Tu każdy ciąg falowy ulega rozdzieleniu na dwa i, chociaż każda z wiązek zawiera bardzo dużą liczbę ciągów falowych, fazy powstałych dwu wiązek są takie same, jeśli różnica dróg optycznych jest mniejsza od długości ciągu falowego.

Na zakończenie warto podkreślić, że zrozumienie warunków powstawania prążków interferencyjnych zarówno w doświadczeniu Younga, jak i w interferometrze Michelsona opiera się na tym samym modelu źródła termicznego. Pokazuje to, że pojęcia spójności przestrzennej i czasowej, które wprowadziliśmy przy omawianiu doświadczeń interferencyjnych, są tylko wygodnym sposobem klasyfikacji faktów eksperymentalnych. Zjawiska interferencji światła zarówno w doświadczeniu Younga, interferometrze Michelsona, jak i innych można obserwować i badać znacznie łatwiej, jeśli źródłem światła w takich doświadczeniach jest laser. Warunki obserwacji, o których tu mówiliśmy, są spełnione, gdyż i obszar koherencji, i czas koherencji światła laserowego są znacznie większe niż dla źródeł termicznych. Dla zrozumienia tego faktu niezbędna jest jednak dokładniejsza znajomość zasady działania lasera i sposobu, w jaki świecą atomy. Prosty model źródła termicznego, którym się tu posługiwaliśmy, jest w przypadku lasera zupełnie nieprzydatny. Nie wyjaśnia on także innych cech światła laserowego związanych z jego wyjątkową spójnością. Tymi zagadnieniami zajmiemy się niebawem.

## Analityczne własności zbiorów wypukłych

Mgr Ryszard KOPIECKI



Przypomnijmy: zbiór  $A$  nazywamy wypukłym, jeśli wraz z każdymi dwoma jego punktami  $a, b$  należą do  $A$  również wszystkie punkty odcinka o końcach  $a$  i  $b$ .

Łatwo można podać przykłady takich zbiorów: wypukłymi są zbiory jednopunktowe, odcinki (z końcami lub bez), półproste, koła, trójkąty, kule, ostrosłupy o podstawach wypukłych i wiele innych zbiorów. Równie łatwo można podać przykłady zbiorów, które nie są wypukłe: zbiory dwupunktowe, okrąg, wykresy funkcji trygonometrycznych, koło z usuniętym punktem wewnętrznym i inne. Interesować nas będą pewne własności *analityczne* zbiorów wypukłych, tzn. te, które można opisać przy pomocy własności funkcji na nich określonych. Dzięki badaniu takich własności uzyskano wiele ważnych wyników w samej matematyce oraz wiele interesujących zastosowań zbiorów wypukłych w naukach przyrodniczych zob. np. „Sztuka wygrywania” w tym numerze.

Jak wiadomo, punkty  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej z danym układem współrzędnych można utożsamiać z  $n$ -tkami liczb rzeczywistych. Przy takich utożsamieniach pewnym konstrukcjom geometrycznym odpowiadają pewne operacje algebraiczne. I tak dodawaniu punktów (wektorów) w takich przestrzeniach odpowiada sumowanie ciągów liczb „po współrzędnych”. Dokładniej, jeśli punktom  $a, b$  przyporządkowane są ciągi ich współrzędnych  $(a_1, \dots, a_n)$  i  $(b_1, \dots, b_n)$ , to suma  $a + b$  ma współrzędne  $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ , iloczyn punktu  $a$  przez liczbę rzeczywistą  $r$  jest punktem  $ra$  o współrzędnych  $(ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$ .

Definicję zbioru wypukłego możemy teraz zapisać tak:

Zbiór  $A$  zawarty w przestrzeni euklidesowej nazwiemy wypukłym, jeśli wraz z dowolnymi jego elementami  $a, b$  należy do  $A$  każdy element postaci  $t \cdot a + (1-t) \cdot b$  dla  $0 \leq t \leq 1$  (skorzystaliśmy po prostu z parametrycznego opisu odcinka o końcach  $a, b$ ; zob. zadanie 1). Funkcję  $f$ , określoną na przestrzeni euklidesowej i przybierającą wartości również w przestrzeni euklidesowej, nazwiemy funkcją lub przekształceniem liniowym, jeśli

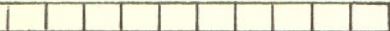
(1)  $f$  jest addytywna, tzn. zawsze  $f(a+b) = f(a) + f(b)$  (dwa znaki plus oznaczają tu inne działania; pierwszy — działanie z dziedziny funkcji, drugi — ze zbioru wartości),

(2)  $f$  jest jednorodna, tzn. zawsze  $f(r \cdot a) = r \cdot f(a)$  (podobnie jak poprzednio, znak iloczynu (kropka) oznacza dwa działania mnożenia przez liczbę rzeczywistą: mnożenie określone w dziedzinie funkcji  $f$  oraz w jej zbiorze wartości).





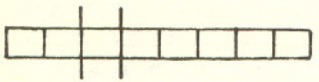
Rozwiązanie zadania M 63. Dane równanie można napisać w postaci  $(x_1+1) + (x_2+1) + \dots + (x_k+1) = n+k$ . (\*)  
Wyobraźmy sobie pasek złożony z  $n+k$  kratek.



Każdemu rozwiązaniu równania (\*) odpowiada pewien podział tego paska na  $k$  części (każda część złożona z pewnej liczby kratek). Podział taki następuje po wykonaniu  $k-1$  cięć wzdłuż granic kratek, przy czym cięcia mogą być dokonywane na każdej z  $n+k-1$  linii rozdzielających kratki. Jak wiadomo, można to zrobić

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

sposobami.  
Tyle jest więc rozwiązań danego równania. Zilustrujemy przypadek  $k=3, n=5$ . Rozwiązaniu (1,0,4) odpowiada podział



Możemy teraz sformułować i wykazać kilka interesujących własności zbiorów wypukłych.

**Własność 1.** Obraz zbioru wypukłego przy przekształceniu liniowym jest zbiorem wypukłym; to samo można powiedzieć o przeciwobrazach.

**Dowód.** Przypuśćmy, że  $A$  jest zbiorem wypukłym,  $f$  — przekształceniem liniowym. Powinniśmy wykazać, że obraz  $f(A) = \{q: \text{istnieje } p \in A, \text{ że } f(p) = q\}$  jest zbiorem wypukłym. Niech  $q_1$  i  $q_2$  należą do zbioru  $f(A)$  i niech  $f(p_1) = q_1, f(p_2) = q_2$  dla pewnych  $p_1, p_2$  należących do  $A$ . Z założenia o wypukłości zbioru  $A$  każdy punkt postaci  $tp_1 + (1-t)p_2, 0 \leq t \leq 1$ , należy do  $A$ . Obrazami tych punktów są punkty  $f(tp_1 + (1-t)p_2)$ , lecz funkcja  $f$  jest liniowa, więc  $f(tp_1 + (1-t)p_2) = f(tp_1) + f((1-t)p_2) = tf(p_1) + (1-t)f(p_2) = tq_1 + (1-t)q_2$ . Wykazaliśmy, że każdy punkt postaci  $tq_1 + (1-t)q_2$  dla  $0 \leq t \leq 1$  należy do zbioru  $f(A)$ , więc na mocy definicji zbiór  $f(A)$  jest wypukły. Czytelnikowi proponuję jako zadanie: wykazanie wypukłości przeciwobrazu, przy założeniu, że obraz jest wypukły.

Przed sformułowaniem dalszych własności przypomnijmy, że przez odległość punktu  $p$  od zbioru  $Z$  rozumiemy kres dolny zbioru liczb  $\{\varrho(p, z): z \in Z\}$ , gdzie  $\varrho(p, z)$  oznacza „zwykłą” odległość punktów  $p$  i  $z$  (zob. również artykuły M. Moszyńskiej, «Delta», 1975, 1, 5, 8). Oznaczmy tę odległość  $p$  od  $Z$  przez  $d(p, Z)$ . Zauważmy jeszcze, że zbiór  $Z$  jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy należą doń wszystkie te punkty, których odległość od  $Z$  jest równa zeru (Czytelnik bez trudu dowiedzie tej równoważności). Możemy teraz podać kolejną własność zbiorów wypukłych.

**Własność 2.** Niech  $A$  będzie zbiorem wypukłym i domkniętym oraz  $p$  — dowolnym punktem. Wówczas do zbioru  $A$  należy dokładnie jeden taki punkt  $a$ , że  $d(p, A) = \varrho(p, a)$ .

**Dowód.** Możliwe są dwa przypadki:  $d(p, A) = 0$  i  $d(p, A) > 0$ . W pierwszym z nich, na mocy domkniętości zbioru  $A$ , punkt  $p$  należy do  $A$ , wspomnianym zaś punktem  $a$  jest sam punkt  $p$ . Rozpatrzmy drugi przypadek.

Niech  $d(p, A) = r$ ; wówczas istnieje ciąg  $\{p_n\}$  punktów zbioru  $A$  taki, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(p, p_n) = r$ . Taki ciąg możemy utworzyć w następujący sposób: przyporządkowujemy liczbie naturalnej  $n$  dowolny punkt  $p_n$  zbioru  $A$  spełniający warunek  $\varrho(p, p_n) < r + 1/n$ . Ciąg  $\{p_n\}$  jest ograniczony, gdyż wszystkie jego wyrazy leżą w kuli o środku w punkcie  $p$  i promieniu  $r+1$ , więc istnieje jego podciąg, zbieżny do pewnego punktu  $a$  należącego do  $A$  (zbiór  $A$  jest domknięty). Oczywiście  $\varrho(p, a) = r$ . Wykazaliśmy istnienie co najmniej jednego punktu  $a$  zbioru  $A$  o własności  $\varrho(p, a) = r$ . Wykażemy teraz, że w zbiorze  $A$  jest dokładnie jeden taki punkt. Cóż bowiem byłoby, gdyby do  $A$  należał jeszcze jeden różny od niego punkt  $b$  taki, że  $\varrho(p, b) = r$ ? Zbiór  $A$  jest wypukły, więc wraz z punktami  $a$  i  $b$  należy doń np. punkt  $c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$  (tj. środek odcinka o końcach  $a$  i  $b$ ). Ale środek cięciwy o końcach  $a, b$  leży wewnątrz kuli  $K(p, r)$ , skąd  $\varrho(p, c) < r$ . Ponieważ zaś jednocześnie  $c \in A$ , to wynikałoby stąd, że  $d(p, A) \leq \varrho(p, c) < r$  wbrew założeniu, iż  $d(p, A) = r$ .

**Własność 3.** Dla każdego zbioru domkniętego i wypukłego  $A$  oraz punktu  $p$  nie należącego do  $A$  istnieje funkcja liniowa  $f$  o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, taka że  $f(p) = 1$  i  $f(b) \leq 0$  dla każdego punktu  $b$  zbioru  $A$ .

**Dowód.** Niech punkt  $a$  zbioru  $A$  będzie punktem, o którym mówi własność 2, tzn.  $d(p, A) = \varrho(p, a)$ . Oczywiście  $a \neq p$ , więc istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez punkty  $a$  i  $p$ ; można ją przedstawić parametrycznie jako zbiór wszystkich punktów postaci  $tp + (1-t)a, t \in R$ . Każdemu punktowi  $q$  przestrzeni przyporządkowujemy liczbę rzeczywistą  $t$ , taką że punkt  $tp + (1-t)a$  jest rzutem prostokątnym na tę prostą punktu  $q$ . Tak określone przyporządkowanie — oznaczmy je przez  $f$  — jest funkcją liniową (gdyż jest złożeniem dwóch funkcji liniowych: rzutowania na prostą i funkcji, przyporządkowującej punktowi  $tp + (1-t)a$  liczbę  $t$ ) oraz spełnia nasze warunki. Istotnie,  $f(p) = 1$  i  $f(b) \leq 0$  dla każdego  $b \in A$ . Ostatnia nierówność wynika z prostych faktów geometrycznych: gdyby istniał choćby jeden punkt  $c$  zbioru  $A$ , dla którego  $f(c) > 0$ , to na odcinku o końcach  $a$  i  $c$  (całkowicie zawartym w  $A$  na mocy wypukłości) leżałby punkt bliższy punktowi  $p$  niż punkt  $a$ , co jest sprzeczne z określeniem punktu  $a$ .

Wprowadzimy na zakończenie jeszcze jedno pożyteczne pojęcie: **Uwypukleniem** (powłoką wypukłą) zbioru  $A$  nazywamy najmniejszy zbiór wypukły zawierający zbiór  $A$ . Uwypuklenie to oznacza się symbolem  $\text{conv } A$ .

Własność 3 jest szczególnym przypadkiem ważnego twierdzenia o oddzieleniu.

Niech  $W$  będzie pewną własnością przysługującą (lub nie) zbiorom. Najmniejszym zbiorem o własności  $W$  nazywa się taki zbiór, który  
1° — posiada własność  $W$ ;  
2° — jest zawarty w każdym innym zbiorze o tej własności.





Korzystając z własności 3 można udowodnić, że  $\text{conv } A$  jest częścią wspólną wszystkich półprzestrzeni zawierających zbiór  $A$ . (Dowód tego faktu dla płaszczyzny jest treścią zadań 4 i 5).

Jeśli zbiór  $A$  jest domknięty, to  $\text{conv } A$  jest zbiorem tych punktów  $q$ , dla których, dla każdej funkcji liniowej  $f$  o wartościach liczbowych, liczba  $f(q)$  jest nie większa od kresu górnego zbioru  $\{w: w = |f(a)|, a \in A\}$ . Z tego względu  $\text{conv } A$  nazywa się często *liniową powłoką wypukłą* zbioru  $A$ . Jeśli teraz zamiast rodziny wszystkich funkcji liniowych użyjemy jakiegokolwiek rodziny  $F$  funkcji liczbowych, to określony tą własnością zbiór nazywamy *powłoką  $F$ -wypukłą* zbioru  $A$ . Jako pouczające ćwiczenie proponuję Czytelnikowi znalezienie powłoki  $F$ -wypukłej sumy dwóch odcinków o wspólnym końcu na płaszczyźnie, dla rodziny  $F$  składającej się z jednej funkcji  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  (zwykła powłoka liniowa takiego zbioru jest oczywiście trójkątem).



### Zadania

1. Wykazać, że jeśli na płaszczyźnie z układem współrzędnych punkty  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$  oraz  $x = (x_1, x_2)$  są współliniowe, to istnieje taka liczba  $t \in \mathbb{R}$ , że

$$x = ta + (1-t)b.$$

Wykazać ponadto, że  $t \in (0, 1)$  wtedy i tylko wtedy, gdy punkt  $x$  leży między  $a$  i  $b$  lub jest jednym z tych punktów.

2. Wykazać, że jeśli  $A \subset \mathbb{R}^k$  jest zbiorem wypukłym, punkty  $p_1, p_2, \dots, p_n$  należą do  $A$  oraz liczby  $a_1, a_2, \dots, a_n$  są nieujemne i spełniają warunek  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ , to punkt

$$x = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n$$

też należy do  $A$ . (Wsk.: dla  $n = 2$  twierdzenie jest prawdziwe z definicji zbioru wypukłego; zastosować indukcję).

3. Pokazać, że wielokąt wypukły na płaszczyźnie jest wypukleniem zbioru wszystkich swoich wierzchołków.

4. Wykazać, że jeśli  $f$  jest funkcją liniową o wartościach liczbowych, określoną na płaszczyźnie kartezjańskiej  $\mathbb{R}^2$ , to dla dowolnego  $a \in \mathbb{R}$  zbiór

$$\{p \in \mathbb{R}^2 : f(p) < a\}$$

jest półpłaszczyzną otwartą. Jaka nierówność określa półpłaszczyznę domkniętą? Czy każdą półpłaszczyznę można opisać w ten sposób?

5. Udowodnić, że jeśli  $A \subset \mathbb{R}^2$ , to  $\text{conv } A$  jest częścią wspólną wszystkich półpłaszczyzn otwartych zawierających  $A$  (Wsk.: skorzystać z zadania 1 i własności 3).



## Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 61. Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $\sphericalangle ACB = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$ , gdzie  $n = 3, 4, 5, \dots$ . Na

zewnątrz tego trójkąta zbudowany jest  $n$ -kąt foremny o środku  $O$ , przy czym jednym z jego boków jest bok  $AB$  trójkąta  $ABC$ . Wyznaczyć  $\sphericalangle OCB$ . (Międzyszkolne Koło Matematyczne w Siedlcach).

Rozwiązanie na str. 12.

M 62. Udowodnić, że jeżeli liczba  $(n-1)! + 1$  jest podzielna przez liczbę  $n$  większą od 1, to  $n$  jest liczbą pierwszą. ( $k!$  jest to iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do  $k$ ).

Rozwiązanie na str. 2.

M 63. Ile ma rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych  $x_1, x_2, \dots, x_k$  równanie

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n,$$

gdzie  $n$  jest daną liczbą naturalną.

Rozwiązanie na str. 4.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 21. Rura cienkościenna stacza się po nieruchomej równi pochyłej nachylonej pod kątem  $\alpha$  do poziomu. Współczynnik tarcia poślizgowego wynosi  $\mu$ . a) Jaki jest maksymalny kąt  $\alpha_{\max}$ , przy którym rura stacza się bez poślizgu? b) W przypadku ruchu z tarcieciem energia mechaniczna nie spełnia zasady zachowania, część bowiem energii mechanicznej (oznaczmy ją przez  $\mathcal{E}$ ) ulega zamianie na energię wewnętrzną (potocznie: na ciepło). Wydawać by się mogło, że  $\mathcal{E}$  powinno być równe po prostu pracy siły tarcia. Czy przypuszczenie to jest poprawne?

Odpowiedzi na str. str. 6 i 8.

(Zadanie Zbigniewa Peradzińskiego)





Rozwiązanie zadania F 21, pyt. a)

Na rurę działają trzy siły (rys.): siła ciężkości  $\vec{P}$ , siła tarcia  $\vec{T}$  oraz siła reakcji  $\vec{N}$ . Jeśli oznaczymy:  $\vec{F} = \vec{N} + \vec{P}$ , to  $F = P \sin \alpha$ .

Równanie ruchu środka masy rury ma postać (1)

gdzie  $m$  i  $a$  — masa i przyspieszenie środka masy rury. Ponieważ rura także obraca się, więc potrzebne nam jest również równanie ruchu obrotowego rury. Ponieważ jedyny różny od zera moment siły względem środka masy ma siła  $\vec{T}$ , więc równanie to ma postać (2)

gdzie  $\epsilon$  — przyspieszenie kątowe rury (obrot przeciwny do ruchu wskazówek zegara uważamy za dodatni),  $I = mR^2$  — moment bezwładności rury względem jej osi symetrii,  $R$  — promień rury.

Układ równań (1) - (2) jest układem dwóch równań z trzema niewiadomymi. Konieczne jest więc jeszcze jedno równanie. Aby je uzyskać, rozważmy najpierw przypadek ruchu bez poślizgu. Warunek braku poślizgu oznacza, że punkt styku rury z równią ma prędkość równą zero, tzn.  $v - R\omega = 0$ , gdzie  $v$  — prędkość środka masy rury (względem równi),  $\omega$  — prędkość kąтова rury. Z warunku tego wynika więc:

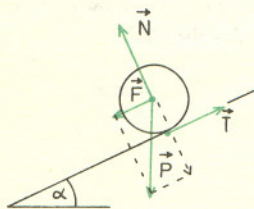
(3)  $a = R\epsilon$ .

Rozwiązując układ (1)-(3) otrzymamy

Uzyskany wzór na  $T$  jest słuszny dla  $\alpha < \alpha_{\max}$ . Jeśli  $\alpha > \alpha_{\max}$ , to następuje poślizg i wówczas

Ruch bez poślizgu przechodzi więc w ruch z poślizgiem przy  $\alpha_{\max}$  określonym warunkiem:

Zwracamy uwagę, że  $\alpha_{\max}$  nie zależy ani od masy, ani od promienia rury (czy tak będzie też w przypadku walca lub kuli?). Radzimy też sporządzić orientacyjny wykres zależności  $T/P$ ,  $ma/P$  i  $I\epsilon/(RP)$  od kąta  $\alpha$  i wykorzystać go do odpowiedzi na pytanie: jak w momencie przejścia ruchu rury bez poślizgu w ruch z poślizgiem zmieniają się: siła tarcia  $T$ , przyspieszenie środka masy rury i przyspieszenie kątowe rury? Dla nadania realności fizycznej temu pytaniu można rozważyć rurę staczającą się (początkowo bez poślizgu) po równi pochyłej w postaci deski, której jeden koniec unosimy coraz wyżej, zwiększając tym samym kąt jej nachylenia  $\alpha$  aż do przekroczenia wartości  $\alpha_{\max}$ .



Obecny artykuł jest rozwinięciem prostej wersji metody orbitali molekularnych, omówionej w numerze 1975, 7. W poprzednim artykule zajmowaliśmy się molekułami z występującymi na przemian wiązaniami pojedynczymi i podwójnymi. Łańcuchy takich wiązań mogą być otwarte (np. heksatrien) lub zamknięte (np. benzen).

Dla łańcucha otwartego o długości  $L$  otrzymaliśmy następujące dozwolone poziomy energetyczne dla elektronów  $\pi$ :

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

i następujące orbitale molekularne elektronów  $\pi$ :

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

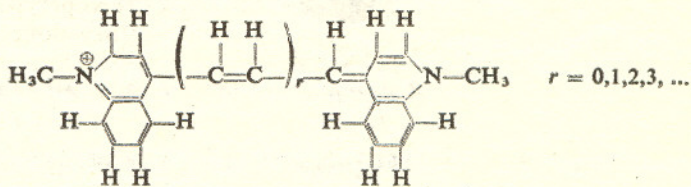
Dla łańcucha zamkniętego otrzymaliśmy odpowiednio

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} (2n)^2 \quad \text{dla } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}} & \text{dla } n = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2n\pi x}{L} & \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{2n\pi x}{L} & \text{dla } n = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

W poprzednim artykule omówiliśmy proste wynikające stąd wnioski, dotyczące budowy heksatrienu i benzenu. Dzisiaj pokażę Wam dalsze zastosowania tego modelu. Przypomnę jeszcze, że każdy orbital może opisywać najwyżej dwa elektrony. Wynika stąd, że będziemy mieć dla każdej molekuly pewną liczbę orbitali obsadzonych i pewną liczbę orbitali nie obsadzonych. Najkorzystniejszą energetycznie sytuację otrzymamy wtedy, gdy obsadzimy podwójnie elektronami  $\pi$  orbitale molekularne odpowiadające najniższej energii.

Zajmijmy się bardzo skomplikowanymi molekułami barwników zwanych cjaninami. Molekuły te są kationami o ładunku  $+e$ . Mają one następujący wzór strukturalny:



Zwróćcie uwagę, że molekula jest symetryczna, ale tradycyjne reguły pisania wzorów strukturalnych zmusiły nas do umieszczenia ładunku  $+e$  na lewym azocie. Ten wzór nie może być słuszny i dlatego w chemii organicznej pisze się dwa wzory dla tego związku! Jeden jest już przez nas narysowany, a drugi jest jego lustrzanym odbiciem. Ta wielość wzorów jest rezultatem nieadekwatności tradycyjnych oznaczeń dla określania skomplikowanego rozdziału ładunku w molekule.

Zróbmy pewne dodatkowe uproszczenie i uwzględnijmy tylko te elektrony  $\pi$ , które odpowiadają wiązaniom między atomami węgla w górnej części molekuly, tzn. narysujemy molekule jako



Po zrobieniu dalszych uproszczeń, opisanych w poprzednim artykule, molekula ta może być przybliżona przez pręt, w którym niezależnie od siebie porusza się  $2r + 10 = N$  elektronów  $\pi$ . Obliczmy częstotliwość światła  $\nu$  (lub lepiej proporcjonalną do tej wielkości tzn. liczbę falową  $\bar{\nu}$ ), które wzbudza molekule windując jeden z elektronów najwyższego zajętego poziomu na najniższy nie zajęty:

$$h\nu = hc\bar{\nu} = E_{N/2+1} - E_{N/2} = \frac{h^2}{8mL^2} \left[ \left( \frac{N}{2} + 1 \right)^2 - \left( \frac{N}{2} \right)^2 \right]$$

Jeśli średnią długość wiązania C-C oznaczymy przez  $l$ , to długość  $L$  molekuly obliczymy jako

$$L = l \cdot (2r + 10) = l \cdot N.$$



$$\bar{\nu} = \frac{h}{32ml^2c} \frac{2r+11}{(r+5)^2}$$

Jeśli obliczylibyśmy  $\bar{\nu}$  dla molekuly o  $r = 0$ , przyjmując  $l = 1,5 \text{ \AA}$ , to otrzymalibyśmy  $\bar{\nu} = 14\,800 \text{ cm}^{-1}$ , podczas gdy doświadczenie daje  $\bar{\nu} = 17\,000 \text{ cm}^{-1}$ . Obliczmy, jakie musielibyśmy przyjąć  $l$ , aby otrzymać wynik zgodny z doświadczeniem. Obliczone w ten sposób  $l$  wynosi  $1,4 \text{ \AA}$ . Użyjmy tak znalezionej  $l$  do obliczenia  $\bar{\nu}$  dla molekuł o  $r = 1, 2, 3, \dots$ . Wyniki uzyskane z dokładnością do trzech cyfr znaczących zestawiono następująco:

$r$	$\bar{\nu}$ obliczone	$\bar{\nu}$ doświadczalne
0	17 000	17 000
1	14 000	14 100
2	11 800	12 200
3	10 300	10 700

Widzimy zadziwiająco, jak na dokonane uproszczenia, zgodność wyników teoretycznych z doświadczeniem. W wielu innych przypadkach wymagana zmiana  $l$  byłaby znacznie większa, a zgodność z doświadczeniem gorsza.

Za barwę związku chemicznego odpowiedzialne są pochłaniane kwanty promieniowania. W ten sposób na wyjątkowo prostej drodze udało nam się „obliczyć” barwę bardzo skomplikowanych związków chemicznych.

## Gry wielochodowe

Dr Wojciech GUZICKI

W artykule tym zajmiemy się grami dwuosobowymi, rozgrywanymi według następujących zasad:

Dwaj gracze (gracz I i gracz II) wykonują kolejno, poczynając od gracza I, ruchy polegające na wybieraniu dowolnego elementu z ustalonego zbioru  $A$ . Ten sam element zbioru  $A$  może być wybierany wielokrotnie zarówno przez gracza I, jak i gracza II.

W ten sposób w każdym momencie zostaje wybrany ciąg skończony  $a_1, a_2, \dots, a_n$  elementów zbioru  $A$ . Przepisy gry są zbiorem reguł mówiących, czy w danej sytuacji graczowi, na którego przypada kolej, wolno jeszcze wykonać ruch, a jeśli wolno, to jakie ruchy są dozwolone. Jeśli już mu nie wolno wykonać żadnego ruchu, to mówimy, że gra dobiegła końca, a jej efekt (tzn. ciąg skończony  $a_1, \dots, a_n$ ) nazywamy partią. Może się jednak zdarzyć, że obaj gracze grają tak, że w żadnym momencie przepisy gry nie nakażą im zakończyć jej. Wtedy w wyniku spotkania otrzymamy ciąg nieskończony  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , który również będziemy nazywać partią. Każdy ciąg skończony, będący początkowym fragmentem partii, będziemy odtąd nazywać pozycją.

Po zakończeniu gry powstaje oczywiście problem, kto daną partię wygrał. Aby móc zawsze odpowiedzieć na to pytanie, dzielimy zbiór wszystkich możliwych partii na trzy części:  $W_0, W_1, W_2$ . Partia jest remisowa, jeśli należy do zbioru  $W_0$ ; wygrana przez gracza I, jeśli należy do  $W_1$ ; i wygrana przez gracza II, jeśli należy do  $W_2$ .

W tej części artykułu zajmiemy się grami skończonymi. Wyjaśnijmy, co znaczy tu termin „skończona”. Otóż gra jest skończona, jeśli przepisy pozwalają wykonać w każdej pozycji tylko skończenie wiele różnych ruchów oraz nie dopuszczają istnienia nieskończenie długich partii. Przykładem gry skończonej są szachy, zbiorem  $A$  bowiem jest zbiór instrukcji dla figur (np. Wb7–b8), natomiast przepis zapewniający skończoność każdej partii stwierdza, że gra kończy się po trzykrotnym powtórzeniu się tej samej sytuacji na szachownicy.

Aby wyjaśnić, co to znaczy „zapewnić sobie zwycięstwo”, zdefiniujemy pojęcie strategii. Strategią gracza I jest dowolna funkcja, która każdej możliwej pozycji  $a_1, \dots, a_n$  o parzystej (również zerowej) liczbie wyrazów przyporządkowuje jakikolwiek ruch  $a_{n+1} \in A$ , dopuszczony w tej pozycji przez przepisy gry.

Podobnie strategią gracza II nazwiemy analogiczną funkcję określoną dla pozycji o długości nieparzystej. Strategia jest więc po prostu funkcją, która „podpowiada” graczowi, jak w danej sytuacji ma zagrać. Zauważmy następnie, że jeśli gracz I wybierze sobie strategię  $\sigma$ , a gracz II strategię  $\tau$ , to te dwie strategie jednoznacznie wyznaczają partię, którą rozgrywają między sobą gracze I i II. Jej początkowymi ruchami będą:  $a_1 = \sigma(\emptyset)$ ,  $a_2 = \tau(a_1)$ ,  $a_3 = \sigma(a_1, a_2)$ ,  $a_4 = \tau(a_1, a_2, a_3)$  itd.





Rozwiązanie zadania F 21, pyt. b)

Przytoczenie wyrażone w treści zadania jest błędne, a wynika to z zasady zachowania energii (ale nie tylko mechanicznej, gdyż ta zasada zachowania nie spełnia, lecz całkowitej, tzn. z uwzględnieniem przyrostu energii wewnętrznej  $E$ ). Jeśli na początku ruchu rura spoczywała, to zasadę zachowania energii wyraża równanie

$$E_{\text{pot}}^0 = E_{\text{pot}} + E_{\text{post}} + E_{\text{obr}} + E,$$

gdzie:  $E_{\text{pot}}^0$  — energia potencjalna rury na początku ruchu,  $E_{\text{pot}}$  — energia potencjalna rury podczas ruchu,  $E_{\text{post}}$  — energia kinetyczna ruchu postępowego rury,  $E_{\text{obr}}$  — energia kinetyczna ruchu obrotowego rury. Różnica energii potencjalnych jest równa pracy siły  $F$  na drodze  $x$ , gdzie  $x$  — droga przebyta przez środek masy rury od chwili początkowej do danego momentu, czyli  $E_{\text{pot}}^0 - E_{\text{pot}} = F \cdot x$ ; energia kinetyczna ruchu postępowego jest równa pracy wypadkowej siły  $F$  i siły tarcia  $T$  na drodze  $x$ :  $E_{\text{post}} = (F - T) \cdot x$ . Zatem

$$E = Fx - (F - T)x - E_{\text{obr}} = Tx - E_{\text{obr}}$$

czyli część energii mechanicznej, która wskutek działania siły tarcia uległa zamianie na energię wewnętrzną, jest równa różnicy pracy siły tarcia i energii kinetycznej ruchu obrotowego, a nie jedynie pracy siły tarcia. Jaki sens fizyczny ma uzyskany wynik? Czy  $E$  może być równe zero? Jeśli tak, to w jakim przypadku? Jeśli nie — dlaczego? (Wskazówka: wyrazić  $E_{\text{obr}}$  przez pracę i skorzystać z relacji między  $v$  i  $\omega$  w przypadkach ruchu bez poślizgu i ruchu z poślizgiem).

Zajmijmy się teraz wyłącznie grami nie dopuszczającymi remisu (tzn. takimi, dla których  $W_0 = \emptyset$ ); później pokażemy, że przypadek ogólny łatwo sprowadza się do powyższego.

Będziemy mówić, że strategia  $\sigma$  gracza I jest strategią zwycięską, jeśli dla dowolnej strategii  $\tau$  gracza II partia wyznaczona przez obie te strategie (oznaczymy ją przez  $\sigma * \tau$ ) należy do  $W_1$ . Podobnie  $\tau$  jest strategią zwycięską dla gracza II, jeśli dla dowolnej strategii  $\sigma$  partia  $\sigma * \tau$  należy do  $W_2$ . Innymi słowy strategia zwycięska zawsze podpowiada ruch, na który przeciwnik nie ma „dobrej” odpowiedzi, i w konsekwencji gracz grający przy pomocy tej strategii musi wygrać. To właśnie nazywamy zapewnieniem sobie zwycięstwa. Grę nazywamy zdeterminowaną jeśli któryś z graczy ma strategię zwycięską. Pokażemy, że zwyciężone są zdeterminowane. Nie są takimi jednak wszystkie gry nieskończone. Pytanie, jakie gry nieskończone są zdeterminowane, stało się ostatnio bardzo modne w podstawach teorii mnogości i doprowadziło do wielu interesujących wyników. Zajmijmy się teraz grami skończonymi. Przede wszystkim pokażemy, że w danej grze skończonej istnieje tylko skończenie wiele możliwych do rozegrania partii. Fakt ten bynajmniej nie jest oczywisty — wydawać by się mogło, że choć nie istnieje partia nieskończona, to mogą istnieć dowolnie długie partie skończone. Okazuje się, że tak nie jest.

Oznaczymy w naszej grze przez  $P$  zbiór pozycji, w których grę można nadal kontynuować. Pokażemy najpierw, że zbiór  $P$  jest skończony. Dowód przeprowadzimy przez sprowadzenie do niedorzeczności. Gdyby zbiór  $P$  był nieskończony, to znalazłby się taki ruch  $a_1 \in A$ , że zbiór tych należących do  $P$  pozycji, które zaczynają się ruchem  $a_1$ , byłby też nieskończony. Wynika to z tego, że istnieje tylko skończona liczba możliwości wykonania pierwszego ruchu (stosujemy tu również następującą zasadę: jeśli zbiór nieskończony podzielimy na skończenie wiele części, to jedna z nich jest nieskończona; zasadę tę już raz zastosowaliśmy powyżej, aby pokazać, że każda partia szachowa musi być skończona). Następnie znajdujemy  $a_2 \in A$  taki, że istnieje w  $P$  nieskończenie wiele pozycji, które zaczynają się ruchami  $a_1$  i  $a_2$ . W ten sposób postępujemy dalej, tworząc ciąg nieskończony  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , którego wszystkie początkowe pozycje należą do  $P$ , a więc nie są pozycjami końcowymi w naszej grze. Skonstruowaliśmy więc partię nieskończenie długą, co jednak wykluczają przepisy gry. Zbiór  $P$  jest zatem skończony (oczywiście, ścisły dowód powinien być przeprowadzony przy zastosowaniu zasady indukcji matematycznej — Czytelnik zechce to zrobić sam). Ponieważ każda pozycja w naszej grze powstaje z pewnej pozycji należącej do  $P$  poprzez wykonanie tylko jednego ruchu, więc istnieje tylko skończenie wiele wszystkich pozycji (przypominamy, że daną pozycję można przedłużyć tylko na skończoną liczbę sposobów).

Możemy już teraz pokazać, że każda gra skończona jest zdeterminowana. Niech  $N$  będzie liczbą naturalną parzystą, większą od długości każdej partii naszej gry. Oznaczymy przez  $A(a_1, \dots, a_N)$  zbiór ruchów możliwych do wykonania w pozycji  $a_1, \dots, a_N$ .

Zapiszmy teraz, co to znaczy, że gracz I ma strategię zwycięską:

$$\bigvee_{a_1 \in A(\emptyset)} \bigwedge_{a_2 \in A(a_1)} \bigvee_{a_3 \in A(a_1, a_2)} \dots \bigwedge_{a_N \in A(a_1, \dots, a_{N-1})} [a_1 \in W_1 \vee (a_1, a_2) \in W_1 \vee \dots \vee \bigvee (a_1, \dots, a_N) \in W_1].$$

Jeśli nie jest prawdą, że gracz I ma strategię zwycięską, to stosując prawa de Morgana otrzymamy

$$\bigwedge_{a_1 \in A(\emptyset)} \bigvee_{a_2 \in A(a_1)} \bigwedge_{a_3 \in A(a_1, a_2)} \dots \bigvee_{a_N \in A(a_1, \dots, a_{N-1})} [a_1 \notin W_1 \wedge (a_1, a_2) \notin W_1 \wedge \dots \wedge \bigwedge (a_1, \dots, a_N) \notin W_1].$$

Jednakże spośród ciągów  $a_1, (a_1, a_2), \dots$  oraz  $(a_1, \dots, a_n)$  jeden musi być zakończoną partią, bo  $N$  jest większe od długości wszystkich partii. Zatem musi on należeć do  $W_2$  (bo nie należy do  $W_1$ ).

Stąd mamy

$$\bigwedge_{a_1 \in A(\emptyset)} \bigvee_{a_2 \in A(a_1)} \bigwedge_{a_3 \in A(a_1, a_2)} \dots \bigvee_{a_N \in A(a_1, \dots, a_{N-1})} [a_1 \in W_2 \vee (a_1, a_2) \in W_2 \vee \dots \vee \bigvee (a_1, \dots, a_N) \in W_2].$$

Ale to oznacza, że gracz II ma strategię zwycięską. Pokazaliśmy więc, że istotnie jeden z graczy ma strategię zwycięską, czyli że nasza gra jest zdeterminowana.

Powróćmy teraz do gier dopuszczających remis. Niech więc  $W_0 \neq \emptyset$ .

Rozważmy dwie pomocnicze gry: jedną, w której położymy  $W'_1 = W_0 \cup W_1$  i  $W'_2 = W_2$ , oraz drugą, w której  $W''_1 = W_1$  i  $W''_2 = W_0 \cup W_2$ . Obie te gry są zdeterminowane. Możliwe są zatem następujące przypadki:

1. Gracz I ma strategię zwycięską w obu pomocniczych grach. Wtedy istnieje strategia pozwalająca mu wygrać grę, którą mamy rozważać (mianowicie strategia zwycięska w drugiej grze pomocniczej).



2. Gracz II ma strategię zwycięską w obu pomocniczych grach, ma zatem strategię zwycięską w rozważanej grze.  
 3. Gracz I ma strategię zwycięską w pierwszej grze pomocniczej, a gracz II w drugiej. Wtedy te dwie strategie pozwalają tym graczom zremisować rozważaną grę.  
 Przypadek ostatni, gdy gracz I ma strategię zwycięską w drugiej grze pomocniczej, a gracz II w pierwszej, jest, jak łatwo się przekonać, niemożliwy. Każda zatem gra skończona jest albo zdeterminowana z korzyścią dla któregoś z graczy, albo jest grą remisową. Wątpliwe jednak, czy kiedykolwiek będziemy wiedzieli, do której z tych grup należą np. szachy, a w każdym razie ani Fischer ani Karpow nas o tym nie przekonają.  
 Z punktu widzenia matematyki, gry skończone nie są ciekawe. Następnym razem zajmiemy się problemem gier nieskończonych.

## Metody Monte Carlo (I)

Dr Ryszard ZIELIŃSKI

### O ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ ZA POMOCĄ EKSPERYMENTU STATYSTYCZNEGO

Zacznijmy od bardzo łatwego zadania z rachunku prawdopodobieństwa.

Rzucamy trzema symetrycznymi monetami. Obliczyć prawdopodobieństwo  $p$  tego, że na każdej z trzech monet otrzymamy ten sam wynik. Zwykle takie zadania rozwiązuje się w znany sposób. Umawiamy się mianowicie, że monety zostały ponumerowane, i określamy zbiór zdarzeń elementarnych jako zbiór wszystkich uporządkowanych trójek  $(m_1, m_2, m_3)$ , gdzie  $m_i$  oznacza orła lub reszkę na  $i$ -tej monecie. Z założenia o symetryczności monet każde z tych zdarzeń jest jednakowo prawdopodobne. Wszystkich zdarzeń jest osiem, zdarzeń zaś sprzyjających — dwa

(zdarzenia: orzeł-orzeł-orzeł i reszka-reszka-reszka), otrzymujemy więc  $p = \frac{1}{4}$ .

A oto inny sposób rozwiązania naszego zadania. Podrzucamy do góry trzy symetryczne monety, a gdy spadną, sprawdzamy, czy na wszystkich trzech mamy orła lub na wszystkich trzech reszkę. Jeżeli tak, odnotowujemy wynik naszego doświadczenia jako sukces i powtarzamy rzut. Przypuśćmy, że wykonaliśmy  $n$  rzutów i że  $k$  razy zaobserwowaliśmy sukces. Za przybliżone

rozwiązanie zadania przyjmujemy stosunek  $\frac{k}{n}$ .

Otrzymane w ten sposób oszacowanie rozwiązania będziemy oznaczali  $\hat{p}$  lub, gdy będzie nam zależało na podkreśleniu, że oszacowanie otrzymano na podstawie  $n$  doświadczeń — symbolem  $\hat{p}_n$ .

Mamy więc w naszym przypadku  $\hat{p} = \frac{k}{n}$ . Opisany sposób rozwiązywania zadania wygląda na

pierwszy rzut oka nie bardzo poważnie i trudno jest wyobrazić sobie poważny egzamin maturalny, podczas którego uczniowie podrzucają do góry monety, albo poważnych i wielce uczonych fizyków, którzy w ten sposób obliczają rozmiary projektowanych reaktorów jądrowych. Nieco zaskakujący, ale prawdziwy jest fakt, że tego rodzaju metody rachowania — zwane powszechnie metodami Monte Carlo — wymyślono właśnie dla fizyków, którzy w końcu drugiej wojny światowej rozwiązywali nowe i trudne zadania z zakresu fizyki atomowej; a z powstaniem tych metod związane są nazwiska tak wybitnych uczonych, jak John von Neumann i Stanisław Ulam. Wróćmy do tych spraw później, a na razie spójrzmy na jeszcze jedno zadanie.

W XVIII wieku przyrodnik francuski G. L. Buffon rozważał następujące zadanie. Polinujmy powierzchnię stołu równoległymi prostymi tak, aby odległości między każdymi dwiema sąsiednimi prostymi były równe  $L$ . Na ten stół będziemy rzucali losowo („na chybił-trafił”) igłę o długości  $l < L$ . Należy obliczyć prawdopodobieństwo  $p$  zdarzenia polegającego na tym, że igła przetnie którąś z prostych narysowanych na stole.

Podobnie jak poprzednio rozwiążemy najpierw to zadanie dokładnie, korzystając przy tym z pojęć prawdopodobieństwa geometrycznego (por. «Delta», 1975, 6).

Wprowadźmy następujące oznaczenia:  $x$  — odległość środka igły od najbliższej prostej,  $\varphi$  — kąt ostry, jaki tworzy igła z prostą prostopadłą do linii narysowanych na stole. Mamy więc zawsze

$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$  oraz  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  (rys. 1 i 2). Rzucanie igły „losowo” na stół będziemy rozumieli

w ten sposób, że punkt  $(x, \varphi)$  ma rozkład jednostajny na prostokącie zakreskowanym na rys. 3. Mówiąc niezbyt dokładnie: fakt, że igła może z jednakowym prawdopodobieństwem upaść na każdy punkt stołu i mieć przy tym z jednakowym prawdopodobieństwem każdy kierunek (to jest właśnie treść intuicyjnego powiedzenia, że igła jest rzucona „losowo”), interpretujemy jako fakt, że punkt  $(x, \varphi)$  pojawia się losowo, z jednakowym prawdopodobieństwem, w każdym miejscu określonego wyżej prostokąta.

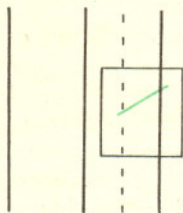
Dalsze rozwiązanie jest już łatwe. Przecięcie igły z linią narysowaną na stole następuje wtedy

i tylko wtedy, gdy  $x < \frac{l}{2} \cos \varphi$  (rys. 2). Zbiór tych par  $(x, \varphi)$ , dla których  $x < \frac{l}{2} \cos \varphi$ ,

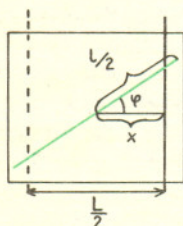
zakreskowano na rys. 4. Zgodnie z zasadami rachowania prawdopodobieństw geometrycznych, prawdopodobieństwo interesującego nas zdarzenia jest równe stosunkowi pól figury zakreskowanej na rys. 4 do pola całego prostokąta i wynosi

$$(1) \quad p = \frac{2l}{\pi L}$$

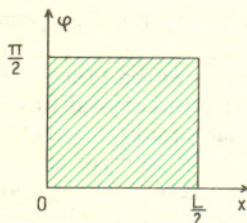
+



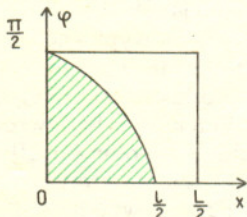
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



## Sprostowanie

W numerze majowym *Delty* do artykułu „Ciężkie jony” dr K. Siwek-Wilczyńskiej zakradły się z winy redakcji trzy poważne błędy. Zdanie „Ogółem wyprodukowano tam około 30 nieznanymi przedtem nuklidów lekkich pierwiastków o skrajnie „nadmiarowej” zawartości nukleonów.” powinno być zastąpione przez zdanie „Ogółem wyprodukowano tam około 30 nieznanymi przedtem nuklidów będących skrajnie neutrono-nadmiarowymi izotopami lekkich pierwiastków.” Zdanie: „Obliczenia teoretyczne sugerują mianowicie, że nuklidy posiadające około 114 i więcej protonów i około 184 i więcej neutronów powinny charakteryzować się wyjątkową stabilnością jądrową w stosunku do nuklidów sąsiednich.” powinno być zastąpione przez zdanie: „Obliczenia teoretyczne sugerują mianowicie, że nuklidy posiadające około 114 protonów i około 184 neutronów powinny charakteryzować się wyjątkową stabilnością jądrową w stosunku do sąsiednich nuklidów.” Zdanie: „Należy oczekiwać, że dwa jądra uranu w ogóle nie mogą ulec fuzji, gdyż potencjał wzajemnego oddziaływania jest już prawdopodobnie dodatni (co odpowiada odpychaniu) w całym zakresie względnych odległości.” powinno być zastąpione przez zdanie: „Należy oczekiwać, że dwa jądra uranu w ogóle nie mogą ulec fuzji, gdyż potencjał wzajemnego oddziaływania jest prawdopodobnie odpychający w całym zakresie względnych odległości.” Bardzo przepraszamy Autorkę i Czytelników.

Buffon rozwiązywał to zadanie rzucając  $n$  razy igłą na stół i zliczając liczbę  $k$  tych przypadków, w których igła przecięła którąś z linii. Otrzymał wynik  $\hat{p} = \frac{k}{n}$ . Zapiszmy wzór (1) w postaci

$$(2) \quad \pi = \frac{2l}{pL}.$$

Jeżeli teraz po prawej stronie wzoru (2) wpiszemy zamiast  $p$  oszacowanie tej wielkości  $\hat{p} = \frac{k}{n}$  i jeżeli potraktujemy (2) jako określenie liczby  $\pi$ , otrzymamy oszacowanie  $\hat{\pi}$  tej właśnie liczby

$$(3) \quad \hat{\pi} = \frac{2ln}{kL}.$$

Znając  $l$ ,  $L$  i dysponując oszacowaniem  $\hat{p}$  prawdopodobieństwa  $p$  uzyskamy oszacowanie  $\hat{\pi}$  znanej skądinąd liczby  $\pi$ !

Eksperyment Buffona był wielokrotnie powtarzany i uzyskiwano zadziwiająco dobre wyniki. Niech Czytelnik zechce sam sprawdzić taki sposób szacowania liczby  $\pi$ . Uzyskany wynik można porównać z bardzo dokładnym przybliżeniem  $\pi = 3,141592653589793\dots$  (liczbę  $\pi$  z dokładnością do 100 000 cyfr po przecinku znaleźć można w pracy Shanksa i Wrencha *Calculation of  $\pi$  to 100 000 decimals*, opublikowanej w czasopiśmie «Mathematical Computer», 16 (1962), 76–99). W związku z tym sposobem rachowania nasuwa się kilka pytań:

1) Czy zawsze oszacowanie  $\hat{p}_n$  jest zbliżone z szacowaną wielkością  $p$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ ? 2) Jaka jest dokładność oszacowania, tzn. co można powiedzieć o wielkości różnicy  $|\hat{p}_n - p|$ ?

Na pytania te postaramy się odpowiedzieć w kolejnych artykułach poświęconych metodom Monte Carlo. Wyjaśnimy w nich oczywiście również, skąd bierze się nieco niezwykła nazwa „metoda Monte Carlo” dla takiego sposobu rachowania. Podamy przykłady zadań, które rozwiązuje się tymi metodami. Opowiemy również o tym, jak można opisać wyżej eksperymenty przeprowadzane na komputerze; okazuje się, że współczesny komputer może „wykonać” dziesiątki tysięcy rzutów monetą w ciągu sekundy, a takie liczby eksperymentów dają już zwykle dostatecznie dokładne oszacowania poszukiwanych wielkości. Chętnie również odpowiemy na pytania Czytelników dotyczące omawianych metod Monte Carlo.

## Sztuka wygrywania

Dr Tadeusz B. IWIŃSKI

$$\begin{pmatrix} 5, & -5 & -2, & 2 \\ 0, & 0 & 1, & -1 \end{pmatrix}$$

„macierz” gry  $2 \times 2$  o sumie zerowej

	B	C
B	(1,1	5,0)
C	(0,5	2,2)

„macierz” gry  $2 \times 2$  o sumie niezerowej

Konflikt interesów nie zawsze polega na tym, że w każdym jego rozstrzygnięciu jedna strona może zyskać dokładnie tyle, ile druga musi stracić. Rokowania handlowe są przykładem gry, w której żadna ze stron nie ma zamiaru tracić; konflikt interesów polega na tym, że każda ze stron chce zyskać jak najwięcej. Rozważany w poprzednim odcinku „Sztuki wygrywania” («Delta», 1975, 5) dylemat więźnia był przykładem konfliktu, w którym żadna ze stron nic nie może zyskać, a każdy z graczy dąży do tego, by stracić jak najmniej. Modelami sytuacji tego typu są

to znaczy gry, w których wypłaty obu graczy odpowiadające określonym wyborom strategii nie muszą dawać w sumie zera. Gry tego rodzaju opisujemy przy pomocy „macierzy wypłat”, której elementami są pary liczb: wypłaty obu graczy odpowiadające parze wybranych przez nich strategii. Pierwsza liczba takiej pary oznacza wypłatę gracza I, druga — wypłatę gracza II. Jak już pokazywaliśmy (dylemat więźnia), w grach tego rodzaju kierowanie się zasadą maksymalizacji własnego zysku bez oglądania się na partnera prowadzi czasem do wyników, które są w gruncie rzeczy najgorsze z możliwych. W grze opisanej podaną obok „macierzą wypłat” gracze posługujący się taką zasadą wybiorą oczywiście parę strategii (B,B) — i bardzo na tym stracą. [Kto to lubi, może tej grze przypisać następującą fabułę: w miasteczku są dwie małe piekarnie, których właściciele bardzo się nie lubią i unikają jakichkolwiek kontaktów. Strategia B oznacza decyzję o wyprodukowaniu samych bułek, strategia C — samego chleba. Ze względów technicznych żadna z piekarni nie może tej samej nocy wypiekać i bułek, i chleba. Jeśli obie rzucą na rynek bułki, zysk netto każdej z nich wyniesie po 1J (J = jednostka obliczeniowa). Jeśli każda z nich wyprodukuje co innego, zysk na wypieku chleba wyniesie 5J, natomiast produkcja bułek da tylko zwrot kosztów: zysk netto wyniesie 0J. Jeśli obie wyprodukują chleb, zarobią po 2J]. Wystąpmy wobec graczy w roli arbitra — bezstronnego sędziego, na którego zdanie zdają się obaj bez zastrzeżeń. Co możemy doradzić? Jedno wyjście jest oczywiste: jeśli obaj zgodzą się stosować systematycznie czystą drugą strategię,



to w rezultacie obaj zyskają. Czy jednak rozsądny arbiter nie może zaproponować korzystniejszego wyjścia?

Zastanówmy się, co by było, gdyby obaj gracze zaczęli stosować strategie mieszane, jednak w sposób całkowicie losowy. [W interpretacji piekarniczej oznaczałoby to, że każda piekarnia zmienia rodzaj produkowanego pieczywa, ale nie uzgadnia tych zmian z firmą konkurencyjną].

Załóżmy, że I stosuje strategię B z częstością  $p$ , a strategię C — z częstością  $1-p$ ; gracz II natomiast stosuje B z częstością  $q$ , a C — z  $1-q$ . Jeśli przez  $x(p, q)$  oznaczymy przeciętną wypłatę gracza I odpowiadającą zastosowaniu przez nich takich mieszanek, a przez  $y(p, q)$  — odpowiednią przeciętną wypłatę gracza II, to

skąd

$$x(p, q) = 3p - 2q - 2pq + 2,$$

$$y(p, q) = 3q - 2p - 2pq + 2,$$

gdzie  $0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$ . W interpretacji geometrycznej para  $(p, q)$  jest dowolnym punktem kwadratu jednostkowego  $K$  (zob. rys.), natomiast odpowiadająca jej para  $(x(p, q), y(p, q))$  — dowolnym punktem obszaru  $W$  w prawej części rysunku. Zbiór  $W$  nazywa się *niekooperacyjnym obszarem wypłat* danej gry. Dla uruchomienia wyobraźni: obszar  $W$  powstaje z kwadratu  $K$  przez zagięcie rogu wzdłuż kolorowej linii  $e$  oraz symetrię i takie rozciągnięcie otrzymanego pięciokąta, by obrazami punktów  $A, B, C, D, E$  i  $F$  w  $K$  były oznaczone tak samo punkty obszaru  $W$ ; obrazem  $e$  jest narysowana kolorem krzywa  $e$  stanowiąca część brzegu  $W$ . Odcinek  $e$  jest podzbiorem prostej o równaniu

$$p + q = \frac{1}{2}.$$

Jeśli (w roli arbitra) uważnie przyjrzymy się rysunkowi, to z łatwością dojdziemy do wniosku, że możemy graczom proponować takie tylko pary strategii mieszanych, które leżą na odcinku  $e$ . Każda taka para daje bowiem każdemu graczowi nie mniej, niż jest on w stanie zapewnić sobie sam, a przy tym dla każdej wypłaty odpowiadającej takiej parze nie można podać w zbiorze  $W$  wypłaty, która byłaby lepsza dla obu graczy jednocześnie. Którą jednak z takich par strategii zaproponować? Tu można posłużyć się zasadą symetrii: gra jest jednakowa z punktu widzenia każdego z graczy. Nie widać więc żadnego powodu, by rozstrzygnięcie arbitrażowe faworyzowało któregośkolwiek z nich — proponujemy więc, ażeby każdy z nich stosował strategię mieszaną  $(1/4, 3/4)$ , tzn. przeciętnie raz

na cztery gry stosował B. Wtedy  $p = q = \frac{1}{4}$  oraz

$$x\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = y\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \cdot 1 + \frac{3}{16} \cdot 0 + \frac{3}{16} \cdot 5 + \frac{9}{16} \cdot 2 = 2\frac{1}{8}$$

i każdy z nich, wygrywając czasem 0, czasem 1, czasem 2 i czasem 5

(z odpowiednimi częstościami), zarobi przeciętnie  $2\frac{1}{8}$ . [Nasi piekarze mogą więc,

unikając jakichkolwiek pertraktacji i uzgodnień, zapewnić sobie średnio około 2,13J, jeśli tylko zaufają arbitrowi i będą losowo zmieniać rodzaj pieczywa, tak aby przeciętnie 25% ich wyrobów stanowiły bułki]. Okazuje się jednak, że proponując to rozwiązanie jeszcze nie wywiązaliśmy się z roli arbitra najlepiej, możemy bowiem zaproponować rozwiązanie, które każdemu z graczy przyniesie

większą niż  $2\frac{1}{8}$  przeciętną wygraną. Zobaczmy bowiem, co by było, gdyby

zaproponować takie rozwiązanie, w którym zmiany strategii poszczególnych graczy są uzgodnione: stosowane przez nich strategie mieszane nie są niezależne.

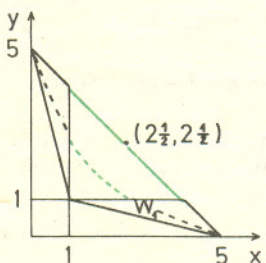
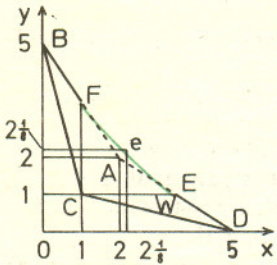
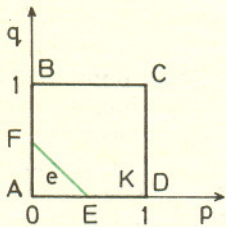
Przypuśćmy, że zaproponowaliśmy następujące rozwiązanie: gracz I stosuje strategię B z częstością  $p$ , gracz II stosuje strategię B z częstością  $1-p$  i przy tym zawsze strategie ich są różne. W takiej sytuacji wypłata przeciętna gracza I wyniesie

$$p \cdot 0 + (1-p) \cdot 5 = 5 - 5p,$$

a wypłata gracza II

$$(1-p) \cdot 0 + p \cdot 5 = 5p.$$

Widać więc, że wypłaty przeciętne układają się na odcinku łączącym punkty  $(5,0)$  i  $(0,5)$  na rysunku obok, a więc leżą poza zbiorem  $W$ !





Rozwiązanie zadania. M 61. Ponieważ

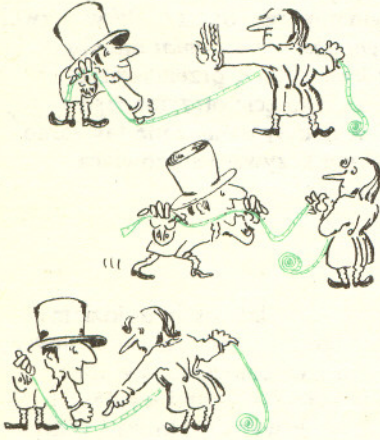
$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle AOB = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ = 180^\circ,$$

więc na czworokącie  $ACBO$  można opisać okrąg. Kąty  $OCB$  i  $OAB$  jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe,  $\sphericalangle OAB =$

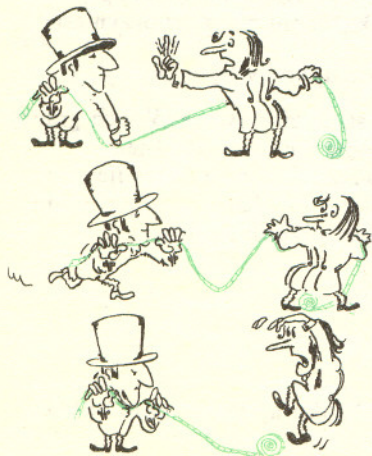
$$= \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ + \frac{2}{n} \cdot 90^\circ \text{ i tyle też wynosi}$$

$\sphericalangle OCB$ .

Uwaga. Przypadek  $n = 4$  był treścią zadania M 40 «Delta», 1975, 2. Rozwiązanie to jest w przypadku  $n = 4$  inne od opublikowanego rozwiązania zadania M 40.



Zob. artykuł o zbiorach wypukłych, str. 3.



Jeśli  $p < \frac{1}{5}$  lub  $p > \frac{4}{5}$ , to propozycja taka będzie nie do przyjęcia dla jednego z graczy: będzie mu dawała mniej, niż sam jest sobie w stanie zapewnić (tzn.

mniej niż 1). Dla  $p \in < \frac{1}{5}, \frac{4}{5} >$  każda taka propozycja jest optymalna w tym

sensie, że daje każdemu z graczy nie mniej, niż jest sam w stanie sobie zapewnić, i nie istnieje propozycja lepsza jednocześnie dla obu z nich. Ponadto, wspomniana

wyżej zasada symetrii nakazuje przyjąć  $p = \frac{1}{2}$ . Taka propozycja nie faworyzuje

żadnego z graczy i jest dla każdego z nich lepsza niż poprzednio zaproponowane

rozwiązanie arbitrażowe; zapewnia każdemu średnią wygraną wynoszącą  $2 \frac{1}{2}$ .

[Nasi piekarze winni więc np. codziennie zmieniać gatunek pieczywa — w taki jednak sposób, by jeden piekł bułki wtedy i tylko wtedy, gdy drugi piecze chleb. Oznacza to, że nawet z czysto ekonomicznego punktu widzenia powinni odrzucić w kął niechęci i nawiązać pewną współpracę].

Czy na tym koniec? Tyle razy ulepszyliśmy proponowane rozstrzygnięcie arbitrażowe, że można wątpić, czy i podanego ostatnio nie da się poprawić. Chcąc wywiązać się w pełni z roli arbitra musimy to sprawdzić. Wiemy już, że przy w pełni niezależnym stosowaniu strategii mieszanych uzyskujemy wypłaty wypełniające niekooperacyjny obszar wypłat. Wiemy też, że odrzucając warunek niezależności możemy otrzymywać wypłaty spoza tego obszaru. Zbadajmy więc, jaki jest zbiór  $W_1$  wszystkich możliwych wypłat odpowiadających niekoniecznie niezależnym strategiom mieszanym. Zbiór ten nazwiemy *kooperacyjnym obszarem wypłat*.

W tym celu zauważmy przede wszystkim, że do kooperacyjnego obszaru wypłat będzie należała każda para wypłat postaci

$$(*) \quad (x, y) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(5,0) + \alpha_3(0,5) + \alpha_4(2,2),$$

gdzie  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$  i wszystkie  $\alpha_i$  są nieujemne. Rzeczywiście, równość (\*) oznacza, że  $x$  i  $y$  są wypłatami oczekiwanymi przez graczy przy realizacji następującej umowy: „Z częstością  $\alpha_1$  obaj stosujemy B; z częstością  $\alpha_2$  gracz I stosuje C, a gracz II stosuje B; z częstością  $\alpha_3$  I stosuje B, a II — C; w pozostałych przypadkach (tzn. z częstością  $\alpha_4$ ) obaj stosujemy C”.

Ponieważ zaś każda umowa o uzgodnieniu strategii musi być tej postaci, to wynika stąd, że równości postaci (\*) opisują wszystkie pary wypłat należące do  $W_1$ . Z drugiej strony równość (\*) oznacza, że wypłata  $(x, y)$  należy do uwypuklenia zbioru złożonego z czterech par wypłat odpowiadających zastosowaniu przez obu graczy strategii czystych. Ponieważ zaś każda para wypłat za zastosowanie strategii czystych należy również do niekooperacyjnego obszaru wypłat  $W$  i uwypuklenie  $W$  musi zawierać w sobie uwypuklenie każdego swego podzbioru, to

$$(**) \quad W_1 \subset \text{conv } W,$$

gdzie  $\text{conv } W$  oznacza uwypuklenie zbioru  $W$ .

Zauważmy jeszcze, że jeśli dwa punkty  $(x_1, y_1)$  oraz  $(x_2, y_2)$  należą do niekooperacyjnego obszaru wypłat, to cały odcinek łączący te punkty należy do kooperacyjnego obszaru wypłat  $W_1$ . Wynika to z prostego przeliczenia. Jeśli bowiem  $(x, y)$  jest punktem tego odcinka, to istnieje liczba  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  taka, że

$$(x, y) = t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2).$$

Jeśli więc założymy, że  $(x_i, y_i)$  jest wynikiem niezależnego stosowania strategii mieszanych  $(p_i, 1-p_i)$  gracza I oraz  $(q_i, 1-q_i)$  gracza II ( $i = 1, 2$ ), to  $(x_1, y_1) = p_1 q_1(1,1) + p_1(1-q_1)(5,0) + (1-p_1)q_1(0,5) + (1-p_1)(1-q_1)(2,2) =$

$= \alpha_1(1,1) + \alpha_2(5,0) + \alpha_3(0,5) + \alpha_4(2,2)$ ,  
gdzie  $\alpha_1 = p_1 q_1$  itd. Wypłatę  $(x_2, y_2)$  można analogicznie zapisać w postaci

$$(x_2, y_2) = \beta_1(1,1) + \beta_2(5,0) + \beta_3(0,5) + \beta_4(2,2).$$

Stąd

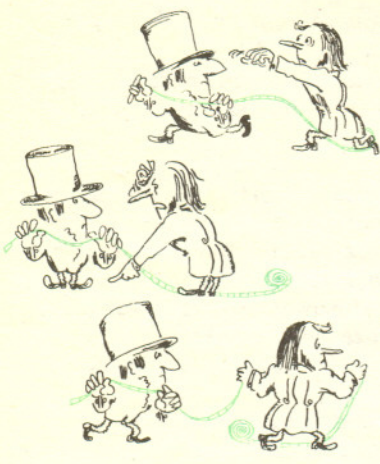
$$(x, y) = [t\alpha_1 + (1-t)\beta_1](1,1) + [t\alpha_2 + (1-t)\beta_2](5,0) + [t\alpha_3 + (1-t)\beta_3](0,5) + [t\alpha_4 + (1-t)\beta_4](2,2).$$

Ponieważ zaś  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$  (proszę to sprawdzić), to również suma liczb w nawiasach kwadratowych jest jedyneką, wynosi bowiem  $t(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + (1-t)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) = t + (1-t)$ ,

i wobec tego

$$(x, y) \in W_1;$$





punkt  $(x, y)$  należy do kooperacyjnego obszaru wypłat. Wynika stąd, że

$$(***) \quad \text{conv } W \subset W_1.$$

Z zawierania  $(**)$  i  $(***)$  wnioskujemy, że

$$\text{conv } W = W_1,$$

i otrzymujemy następujące twierdzenie;

*Kooperacyjny obszar wypłat jest wypukleniem niekooperacyjnego obszaru wypłat. Jest to przy tym zbiór wszystkich wypłat możliwych do uzyskania w danej grze.*

Z twierdzenia tego wynika, że podane przez nas ostatnie rozwiązanie arbitrażowe jest w istocie najlepszym z możliwych do zaproponowania.

[Gdyby piekarze znali to twierdzenie, to nie musieliby uciekać się do arbitrażu. Każdy z nich mógłby sobie obliczyć, że najlepsze rozwiązanie, jakie może zaproponować najlepszy nawet arbiter, to zastosowanie uzgodnionej strategii

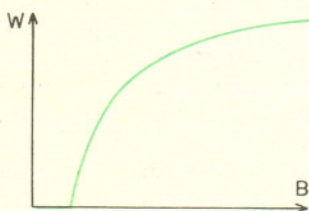
„(B, C) z częstością  $\alpha_2 = \frac{1}{2}$  oraz (C, B) z częstością  $\alpha_3 = \frac{1}{2}$ ” i wyciągnąć stąd

wnioski praktyczne: podjąć rokowania, uzgodnić, że stosują tę właśnie strategię, i ustalić sposób jej realizacji].

## Laboratorium w domu

## Prawo Webera-Fechnera

Dr Jan A. GAJ



Proponuję Wam dzisiaj wycieczkę na peryferie fizyki, ku jej granicom z naukami o organizmach żywych. Spacer to niewątpliwie zdrowy w czasach, gdy wąska specjalizacja zaczyna stanowić realne niebezpieczeństwo dla swobody myśli twórczej naukowca. Prawo Webera-Fechnera zajmuje się związkiem między wrażeniem  $W$  a wywołującym je bodźcem  $B$ . Zauważmy od razu, że nie będzie to zależność liniowa: te same przyrosty bodźca dadzą różne efekty w zależności od wielkości bodźca już działającego; nagroda pieniężna wysokości np. 1000 zł zrobi zupełnie inne wrażenie na przeciętnym studencie niż na dyrektorze fabryki. Aby przejść do konkretów, sformułujemy rozważane prawo w sposób następujący: **Wrażenie  $W$  wywołane bodźcem  $B$  jest proporcjonalne do logarytmu wielkości bodźca.** Wzorem zapiszemy to tak:

$$W = A \log \frac{B}{B_0}. \quad (1)$$

Należy jeszcze dodać uzupełnienie, że dla  $B < B_0$  wzór (1) zastępujemy równością  $W = 0$  (wrażenie nie może być ujemne). Widać już, że  $B_0$  jest **progową wartością bodźca** — bodziec musi przewyższać  $B_0$ , aby wywołać jakiegokolwiek wrażenie. Na przykład ucho ludzkie nie słyszy dźwięków o ciśnieniu akustycznym poniżej pewnej wartości. Słyszę już, jak zwolennicy „czystej fizyki” mówią z pogardą:

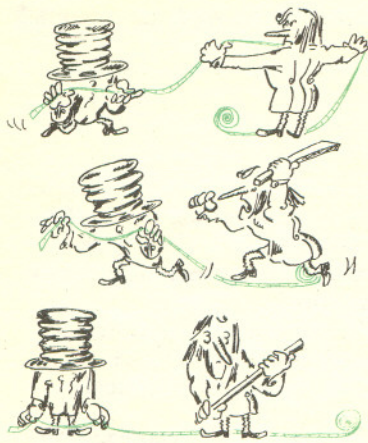
## WRAŻENIE? PRZECIEŻ TEGO SIĘ NIE DA MIERZYĆ!

A jednak wrażenie da się mierzyć, jak każdą „przyzwoitą” wielkość fizyczną. Zauważmy przede wszystkim, że mamy znakomitą naturalną jednostkę: najmniejszy zauważalny przyrost wrażenia. Oglądając po kolei dwa źródła światła każdy potrafi powiedzieć, czy uważa je za świecące równie jasno, czy też jedno świeci jaśniej od drugiego. Po to, żeby różnica jasności dała się zauważać, nie może być dowolnie mała, lecz musi przewyższać pewną minimalną wartość. Zarówno istnienie progu czułości naszych zmysłów, jak i podana wyżej własność „kwantowania” wrażeń wynikają z budowy systemu nerwowego: przekazywanie informacji nie odbywa się w nim jak w sieci telefonicznej, gdzie sygnał może być silniejszy lub słabszy, ale na zasadzie „wszystko albo nic” — nerw pobudzony za słabo nie przekazuje w ogóle sygnału, jeśli natomiast pobudzić go silniej, przekazuje sygnał o wielkości standartowej, niezależnej od siły pobudzenia. Tu można zapytać: *Jak więc potrafimy odróżnić bodźce silniejsze od słabszych?* Zastanówcie się sami.

Mamy już jednostkę — nazwijmy ją  $NP$ . Teraz trzeba podać metodę pomiaru wrażenia wywołanego np. przez określony dźwięk. Oczywiście jeśli nic nie słyszymy,  $W = 0$ . Wytwarzamy teraz najśłabszy słyszalny dźwięk. Wrażenie wyniesie wtedy  $W = 0 + NP = NP$ . Z kolei wytwarzamy najśłabszy dźwięk, o którym możemy







powiedzieć, że jest silniejszy od poprzedniego. Wywoła on wrażenie  $W = NP + NP = 2NP$ . Kolejno wytwarzamy tak dźwięki o wrażeniu  $3NP, 4NP$  itd., aż dojdziemy do dźwięku równie silnego jak badany, ustalając w ten sposób liczbę „cegiełek”  $NP$  odpowiadających wrażeniu wywołanemu przez badany dźwięk. A więc można mierzyć wrażenie!

Wielu z Was powie w tym miejscu: Mimo wszystko nie wydaje się to precyzyjne. Jednostka  $NP$  jest określona w sposób, który nie gwarantuje jej stałości przy zmianach pory dnia, pogody czy wreszcie człowieka, którego poddajemy badaniom. Przy dodawaniu wielu małych jednostek  $NP$  niedokładność wyniku jeszcze się powiększa. To prawda. Jest to jednak cena, jaką płacimy chcąc stosować pojęcia fizyczne do tak skomplikowanego tworu, jakim jest człowiek. Poza tym niedokładność tę można znacznie zmniejszyć stosując metody statystyczne — prowadząc badania wielokrotnie w różnych warunkach z różnymi ludźmi. Określimy teraz, o jaką wartość  $\Delta B$  musi wzrosnąć bodziec  $B$ , aby dało się to zauważyć, czyli aby wywołać jednostkową zmianę wrażenia  $NP$ . Przekształcamy w tym celu równość (1) do postaci:

$$(2) \quad B = B_0 \cdot 10^{W/A}$$

Przy wzroście  $B$  o  $\Delta B$ ,  $W$  wzrasta o  $NP$ :

$$(3) \quad B + \Delta B = B_0 \cdot 10^{(W+NP)/A}$$

Proste przekształcenie algebraiczne wzorów (2) i (3) daje:

$$\Delta B = B(10^{NP/A} - 1),$$

co można odczytać następująco: **najmniejszy odczuwalny przyrost bodźca jest proporcjonalny do wielkości bodźca już działającego**. Otrzymana forma prawa Webera–Fechnera jest wygodna do sprawdzania doświadczalnego, nie wymaga bowiem skomplikowanej procedury pomiaru wrażenia\*. Możemy więc już rozpocząć

### EKSPERYMENTY NA CZŁOWIEKU

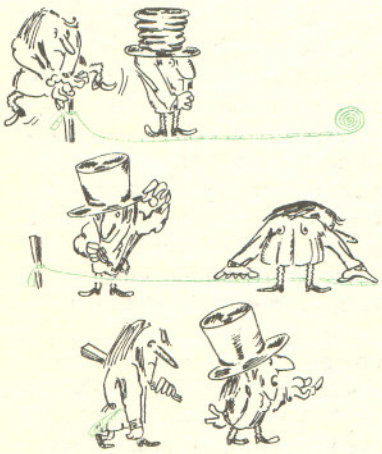
Po zaopatrzeniu się w człowieka dajemy mu do ręki jakiś przedmiot, np. pustą litrową butelkę, i każemy mu zamknąć oczy. Następnie obciążamy trzymany przez niego przedmiot dodatkowym niewielkim ciężarkiem o ciężarze  $P$  i określamy, przy jakiej najmniejszej wartości  $\Delta P$  badany zauważy zwiększenie ciężaru. To samo powtarzamy przy innej wartości ciężaru  $P$  trzymanego przedmiotu. Najprościej zrealizować to używając butelki napełnianej wodą w różnym stopniu. Najlepiej obciążać ją drobnymi przedmiotami zawieszonymi na niej na nitce (nitkę do butelki można przylepić plastrem). Początkowo trzymamy przedmiot nieznacznie uniesiony, tak aby nitka nie była napięta, a następnie ostrożnie opuszczamy go. Przy badaniu, czy  $\Delta P$  jest proporcjonalne do  $P$ , nie musimy wyrażać ich w tych samych jednostkach. W razie trudności z ważeniem małych przedmiotów możemy użyć jednakowych monet do zawieszania i wyrażać  $\Delta P$  w jednostkach ciężaru jednej monety. Sporządzając wykres  $\Delta P$  w zależności od  $P$  możemy ocenić, w jakim stopniu proporcjonalność jest spełniona. Oczywiście musimy pamiętać, że robiąc doświadczenia tylko na jednej lub paru osobach i nie rozporządzając odpowiednio dużym materiałem statystycznym otrzymamy wyniki mało dokładne i w jakiś sposób zdeformowane. Sprawdzenie zgodności tych wyników z prawem Webera–Fechnera może więc być w zasadzie jedynie jakościowe. Pozostaje jeszcze pytanie:

### CZY TO PRAWO MA JAKIEŚ ZNACZENIE PRAKTYCZNE?

Owszem, i to niemałe. W każdym radioodbiorniku i telewizorze do regulacji siły głosu służy **potencjometr logarytmiczny**, w którym kąt obrotu jest proporcjonalny do logarytmu napięcia na wyjściu potencjometru. W ten sposób (patrz wzór (1)) osiągamy równomierną zmianę wrażenia słuchowego przy obracaniu gałką potencjometru. Używając zwykłego, liniowego potencjometru obserwowalibyśmy przy małych kątach bardzo szybki wzrost wrażenia, a następnie bardzo wolną zmienność (patrz wykres).

Drugi przykład — aż ze Starożytności — to wielkości gwiazdowe wprowadzone przez astronomów na całe wieki przed pomiarami natężenia światła gwiazd. Okazało się, że kolejnym wielkościom gwiazdowym (które astronomowie starali się określić według równomiernie zmieniającego się wrażenia jasności) odpowiadają wartości natężenia światła tworzące postęp geometryczny. Chwila zastanowienia upewnia nas, że właśnie tak być powinno, jeśli wzór (1) ma być słuszny. Zatwardziałym sceptykom poddaję pod rozważę przykłady: znormalizowanych formatów papieru, nieco naciągany (?) skali muzycznej oraz dodatkową propozycję doświadczalnego sprawdzenia prawa Webera–Fechnera przez porównanie smaku roztworów cukru o różnym stężeniu. Pomyślnych doświadczeń.

\* Zarówno historycznie, jak i logicznie jest to pierwotna forma prawa Webera–Fechnera w stosunku do wzoru (1). Z przeprowadzonego powyżej rozumowania wynika, że wzór (1) spełnia warunek proporcjonalności przyrostu bodźca do wartości istniejącej. Okazuje się, że istnieją także zależności o innej niż (1) postaci, spełniające ten warunek. Jest to bardzo interesujące zagadnienie, wykracza ono jednak poza ramy tego artykułu.





# mała delta



„Gdyby cała nauka miała ulec zniszczeniu w jakimś kataklizmie i tylko jedno zdanie można by uratować od zagłady i przekazać następnym pokoleniom, jakie zdanie zawierałoby największą liczbę informacji w możliwie najmniejszej liczbie słów?”

Pytanie takie zadał sobie wielki fizyk współczesny, Richard P. Feynman. Jego odpowiedź brzmi:

„Wszystko składa się z atomów — małych cząstek poruszających się bezustannie, przyciągających się, gdy są od siebie nieco oddalone, odpychających się zaś, gdy je zbyt ściśnięć”.

Różnorodne substancje składają się z różnych atomów. Istnieją atomy żelaza, tlenu, wodoru, węgla itd. Niektóre substancje zbudowane są z kilku różnych rodzajów atomów, połączonych w układy zwane cząsteczkami. Woda na przykład składa się z cząsteczek zbudowanych z dwóch atomów wodoru i jednego atomu tlenu. Atomy i cząsteczki są tak małe, że nie dostrzegamy ich. Powietrze, woda, żelazo wydają się nam jednorodne. Nie trzeba jednak widzieć atomów, żeby przekonać się o ich istnieniu, o ich ruchu i o siłach, jakimi na siebie działają.

## Odkrywamy atomy

Widziałeś na pewno, jak zachowuje się w powietrzu dymek z papierosa. Nie unosi się on spokojnie, lecz wykonuje drobne, chaotyczne skoki. Przypuszczalnie nie robi tego sam z siebie, ale jest do tego zmuszany. Jest w powietrzu coś, co popycha cząstki dymu to w jedną, to w drugą stronę. Tym „czymś” są cząsteczki powietrza, które, choć niewidzialne, w ten pośredni sposób dają nam znać o sobie. Średnia prędkość cząsteczek powietrza w temperaturze pokojowej wynosi około 600 m/s. To, że cząsteczki powietrza biegają po całym pokoju, wydaje się dość zrozumiałe. Ale czy to zdanie o ciągłym ruchu cząsteczek odnosi się również do cieczy i ciał stałych? Trudno w to uwierzyć!

Jeśli nie wierzysz, że cząsteczki benzyny, amoniaku czy spirytutu poruszają się, to wytłumacz, dlaczego zapach tych cieczy rozchodzi się po całym mieszkaniu, gdy zostawisz je w otwartych naczyniach. Najwidoczniej pewna liczba cząsteczek cieczy oderwała się od reszty i dotarła do komórek nerwowych w twoim nosie. To prawda, ale dlaczego woda nie ma tych własności? Czyżby cząsteczki wody nie mogły oderwać się od jej powierzchni? Woda rzeczywiście jest trochę mniej lotna niż benzyna czy alkohol, ale nie w tym rzecz. Po prostu jej cząsteczki mają tę własność, że nie działają na nasz zmysł węchu. Gdybyś się jednak chwilę zastanowił to nie pytałbyś, czy cząsteczki wody nie mogą unieść się w powietrze. Gdyby tak było, to raz zmoczone ubranie musiałbyś wyrzucić, bo nigdy by nie wyschło!

## Czy woda w szklance jest nieruchoma?

Możesz także przekonać się o ruchu cząsteczek cieczy wewnątrz naczynia. W tym celu weź dwie szklanki, do jednej nalej zimnej wody, a do drugiej — gorącej. Kiedy woda się ustoi, wpuść do niej kilka kropli silnie zabarwionej cieczy. Może to być na przykład atrament, gencjana lub jodyna. Przyjrzyj się z boku, co dzieje się w szklankach. Wpuszczona ciecz rozchodzi się po szklance, przybierając fantastyczne kształty. Po paru minutach możesz porównać oba rozwiązania. W szklance z gorącą wodą roztwór jest już prawie jednorodny, podczas gdy w zimnej wodzie wyraźnie oddzielone są smugi wpuszczonej cieczy. Zjawisko rozchodzenia się cząsteczek substancji w wodzie, powietrzu i innych ośrodkach nazywa się dyfuzją. W gorącej wodzie dużą rolę może odgrywać ruch warstw cieczy pod wpływem różnic temperatur. Dyfuzja w cieczy odbywa się znacznie wolniej niż w gazie. Na to, żeby cząsteczki cukru rozszerzały się bez mieszania po całej szklance, potrzeba dużo więcej czasu niż na przykład na rozprzestrzenienie się spalin samochodowych w powietrzu. Jeszcze wolniej przebiega dyfuzja w ciałach stałych, chociaż nie jest ona całkowicie niemożliwa. Jeśli położysz dwie wypolerowane płytki metalowe, np. żelazną i miedzianą, jedna na drugiej, to po upływie kilku lat można w żelazie stwierdzić obecność miedzi, i odwrotnie. Musimy teraz przerwać tę rozmowę o atomach i cząsteczkach. Powrócimy do niej w następnym numerze. Powiemy sobie, jakie siły występują między cząsteczkami i jak się one objawiają. Zrobimy też doświadczenie, które pozwoli nam określić średnicę cząsteczki.



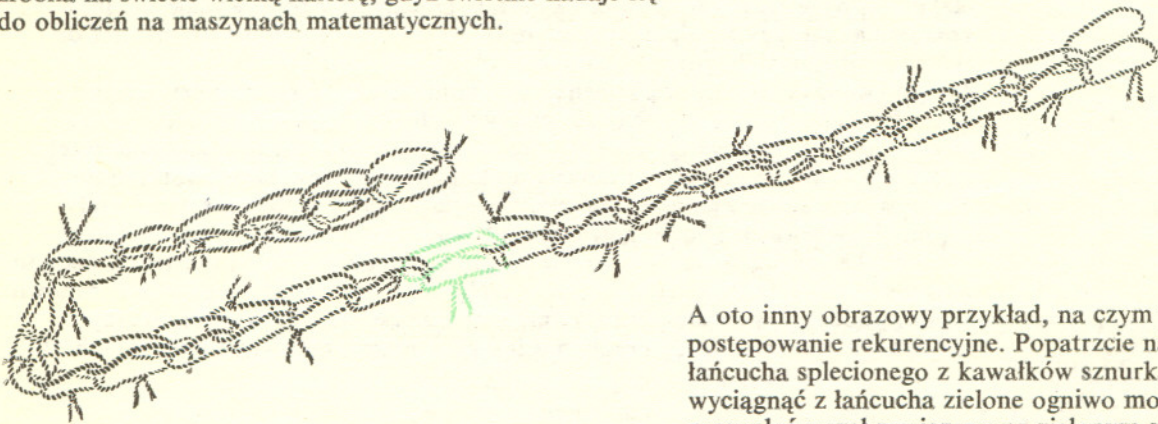


# REKURENCJA

Pewien roztargniony, lecz bardzo sympatyczny malarz, zapytany, ile lat ma jego najstarszy brat, Henryk (malarz miał jeszcze siostrę Barbarę i drugiego brata Marcina), zaczął głośno myśleć: ja mam 37 lat, Basia jest dwa lata starsza, więc ma 39 lat; Marcin jest dwa lata starszy od Basi, więc ma 41 lat; wobec tego Henryk, dwa lata starszy od Marcina, ma 43 lata. Nasz malarz obliczał wiek swego rodzeństwa zawsze w ten sposób zaczynając od siebie.



Metoda malarza, choć może wydać się śmieszna, występuje w matematyce bardzo często. Nazywa się ona „rekurencją”. Zwłaszcza w ostatnich latach rekurencja zrobiła na świecie wielką karierę, gdyż świetnie nadaje się do obliczeń na maszynach matematycznych.



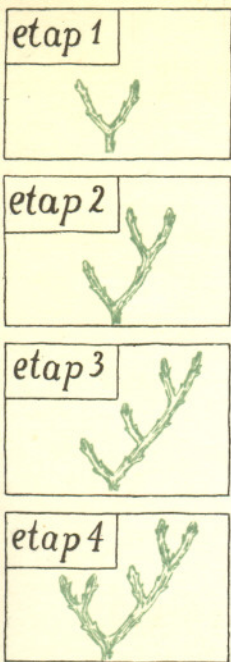
A oto inny obrazowy przykład, na czym polega postępowanie rekurencyjne. Popatrzcie na rysunek łańcucha splecionego z kawałków sznurka. Chcąc wyciągnąć z łańcucha zielone ogniwo można próbować rozsupłać węzeł zawiązany na zielonym sznurku. Prościej jednak będzie wyciągnąć z łańcucha pierwsze ogniwo od lewej, potem drugie, trzecie i tak dalej, aż wreszcie dojdziemy do zielonego. I to właśnie powtarzanie — aż do skutku — pewnego postępowania jest charakterystyczne dla metody rekurencji.

Sprawdźmy jednak praktycznie użyteczność postępowania rekurencyjnego. Oto rysunek pewnej rośliny wodnej. Bujnie rozgałęzione łodygi kryją się pod wodą, a nad powierzchnią wystają tylko końce. Jest ich piętnaście. Chcielibyśmy policzyć, ile roślina ma rozwidleń, a także, ile ma odnóg (odnogi to części łodygi między rozwidleniami albo między rozwidleniem a końcem) — niestety są one niewidoczne. Obejdzie się jednak bez nurkowania pod wodę, zupełnie wystarczy policzenie końców wystających nad powierzchnię (roślina rośnie w ten sposób, że każdy z końców wystaje nad powierzchnię wody).

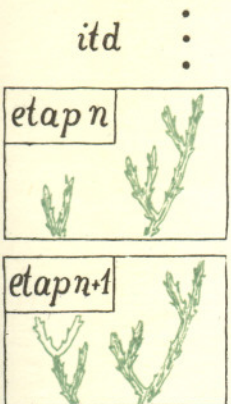
Przeprowadzenie odpowiednich obliczeń jest możliwe dzięki temu, że roślina rozrasta się według pewnego schematu, chciałoby się powiedzieć „rekurencyjnie”: z każdego rozwidlenia wyrastają dokładnie dwie odnogi.





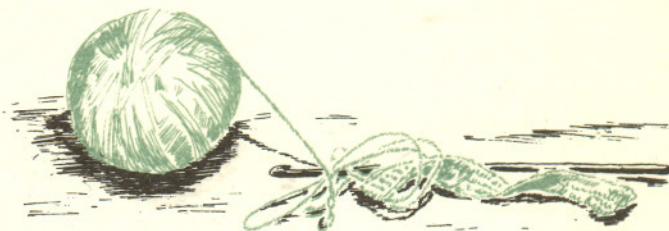


etap wzrostu	ilość końców	ilość odnóg	ilość rozwidleń
1	2	2	1
2	3	4	2
3	4	6	3
4	5	8	4



$n$	$n+1$	$2n$	$n$
$n+1$	$n+2$	$2n+2$	$n+1$

Pozwala to zilustrować historię rozrastania się rośliny. Przedstawiają ją rysunki. Występuje tu pewna prawidłowość: z każdym kolejnym etapem wzrostu przybywa roślinie 1 rozwidlenie, 2 odnogi i 1 koniec. Dlaczego — sprawdźcie sami na rysunkach. Policzymy teraz, ile końców, odnóg i rozwidleń ma roślina na kolejnych etapach wzrostu. Wyniki tych obliczeń zostały zestawione w odpowiedniej tabelce. Pomyślcie, czy można przewidzieć, jakie liczby wystąpią w naszej tabelce na 35 albo na 100 miejscu? Oczywiście. Już się na pewno zorientowaliście, że na  $n$ -tym etapie wzrostu roślina ma  $n+1$  końców,  $2n$  odnóg i  $n$  rozwidleń. Pora wreszcie rozwiązać nasze zadanie. Jeśli roślina ma 15 końców, to znaczy, że jest to 14 etap (dlaczego?). Wobec tego powinna mieć 28 odnóg i 14 rozwidleń. I tak jest rzeczywiście — sprawdźcie sami na rysunku rośliny.



Na zakończenie proponuję wszystkim sympatykom obliczenia rekurencyjnych kilka zadań:

1. Tabliczka czekolady składa się z 24 kawałków (4 rzędy po 6 kawałków). Ile co najmniej razy trzeba ją przełamać, żeby podzielić na 24 pojedyncze części? (Spróbujcie porównać łamanie czekolady z historią rozrastania się naszej rośliny. Jeśli zauważycie podobieństwa, rozwiązanie zadania będzie już bardzo łatwe).
2. Jeśli pamiętacie lipcowy numer Małej «Delty» i artykuł *Jak uszyć piłkę*, pomyślcie nad takimi problemami:
  - Czy piłka jest zbudowana rekurencyjnie: Jak narysować rekurencyjną historię powstawania piłki?
  - Czy potraficie sprawdzić rekurencyjnie zależność Eulera (dla piłek opisanych w lipcowym numerze Małej «Delty»)?
3. W ilu punktach przecina się parami 7 prostych, jeśli żadne dwie spośród tych prostych nie są równoległe i żadne trzy proste nie przecinają się w jednym punkcie?

*Małą Deltę opracowali: P. Nowicki i D. Ziemińska*

### Czy wiecie że...

Dzięki zastosowaniu termoluminescencji możliwe jest datowanie starych wyrobów ceramicznych. W 1924 r. w małej miejscowości francuskiej Glozel w pobliżu Vichy odkryto szczątki ludzkie oraz wiele takich wyrobów, jak igły, haczyki na ryby wykonane z kości, jak również sporo wyrobów z wypalanej gliny. Między innymi znaleziono 60 tabliczek ze śladami pisma. Archeolodzy bardzo różnili się w ocenie wieku znaleziska, oceniając je na 10 000, 5 000, 2 300, a nawet 0 lat, co znaczy, że dopuszczano w tym przypadku oszustwo. Bardzo istotną sprawą była ocena wieku tabliczek glinianych jako dokumentu pisanego. Metoda pomiaru na podstawie zawartości izotopu węgla  $^{14}\text{C}$  może być użyta tylko do obiektów, które były niegdyś częścią składową organizmu żywego, np. kości, drewno. Do gliny wypalanej zastosowano technikę datowania opartą o termoluminescencję. W glinie używanej do wyrobu ceramiki znajdują się zawsze drobne krystaliczne domieszki (inkluzje), np. ziarna piasku. Kryształy te magazynują energię pochodzącą z promieniowania radioaktywnych domieszek zawsze występujących w glinie, jak i w innych minerałach. Ogrzewając kryształ wyzwalamy tę zmagazynowaną energię w formie światła (fali elektromagnetycznej), którego natężenie można zmierzyć. Im dłużej kumulował kryształ energię promieniowania jonizującego, tym większe jest natężenie wyzwalanego światła, a więc — tym starszy jest badany kryształ. Przy pomocy tej metody określa się czas, który upłynął od poprzedniego ogrzewania, czyli od wypalania. Dzięki jej zastosowaniu stwierdzono, że znalezione wyroby ceramiczne były wypalone około 300 lat p.n.e. Błąd takiej oceny jest duży i sięga 400 lat, ponieważ nie wykonano jeszcze pomiarów radioaktywnego promieniowania gruntu; pomiary te umożliwiają dwukrotne zmniejszenie błędu. Uzyskane wyniki zgadzają się jednak z datowaniem organicznych szczątków tego znaleziska (kości), przeprowadzonym metodą pomiaru zawartości fluoru i izotopu węgla  $^{14}\text{C}$ .