

h=6.63·10<sup>-34</sup> J·s  $\hbar=3,141593$

CENA 5 ZŁ

NR 2 1976

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNY

deia





## SPIS TREŚCI

|   |         |
|---|---------|
| Oddziaływania odpowiedzialne<br>za magnetyzm  |         |
| <i>Doc. dr Andrzej Sukiennicki</i>            | str. 1  |
| Dwie indukcje                                 |         |
| <i>Zbigniew Ogielski</i>                      | str. 4  |
| Znane twierdzenie Pitagorasa                  | str. 5  |
| Magnetyczne własności skał                    |         |
| <i>Dr Magdalena Kądziałko-<br/>Hofmokl</i>    | str. 6  |
| Mała »Delta«                                  | str. 8  |
| Metody Monte Carlo. Cz. V                     |         |
| <i>Dr Ryszard Zieliński</i>                   | str. 12 |
| Zadania                                       | str. 14 |
| XVII Międzynarodowa<br>Olimpiada Matematyczna | str. 15 |
| Laboratorium w domu                           |         |
| <i>Dr Jan A. Gaj</i>                          | str. 16 |

„Delta”  
matematyczno-fizyczny miesięcznik  
popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego i Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
doc. dr J. Bartke  
prof. dr Grzegorz Białkowski —  
przewodniczący  
doc. dr A. Bączynski  
doc. dr B. Gleichgewicht  
doc. dr K. Goebel  
doc. dr B. Iwaszkiewicz  
doc. dr T. Iwiński  
doc. dr A. Januszajtis  
prof. dr Leon Jeśmanowicz —  
wiceprzewodniczący  
mgr H. Kaczorek  
prof. dr B. Karczewski  
prof. dr M. Kuczma  
mgr A. Mąkowski  
prof. dr Z. Pawlak  
prof. dr A. Piekara

prof. dr Z. Semadeni  
prof. dr J. Stankowski  
prof. dr M. Subotowicz  
doc. dr S. Turnau  
doc. dr J. Wdowczyk

Redaguje Kolegium w składzie:  
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.  
dr T. B. Iwiński  
dr M. Kordos — red. nac.  
mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.  
doc. dr M. Świącki  
D. Tys — sekr. red.

Adres Redakcji  
ul. Hoża 69 p. 151,  
00-681 Warszawa,

Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo.  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.: 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl., 80 g, 61 × 86  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej,  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 1408/75 J-113

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowo właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
Sprzedaż gotówką i wysyłką, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

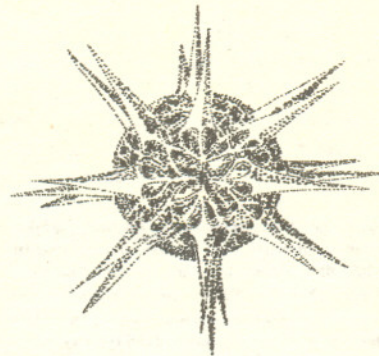
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5, —

nr indeksu 35723/35550





## Oddziaływania odpowiedzialne za magnetyzm

### Rodzaje magnetyków

*Doc. dr hab. Andrzej SUKIENNICKI*

Każdy magnes może być traktowany jako dipol magnetyczny. Powoduje on powstanie wokół niego pola magnetycznego podobnego do pola elektrycznego wytwarzanego przez dipol elektryczny. Miarą intensywności wytwarzanego w ten sposób pola magnetycznego jest tak zwany dipolowy moment magnetyczny analogiczny do dipolowego momentu elektrycznego.

Powłoki elektronowe numerowane są przy pomocy tak zwanych liczb kwantowych. Główna liczba kwantowa  $n$  jest miarą energii elektronu, zaś poboczna liczba kwantowa  $l$  opisuje moment pędu elektronu. Powłoka 3d charakteryzuje się  $n = 3$ ,  $l = 2$ , zaś powłoka 4f ma  $n = 4$ ,  $l = 3$ .

Orbitalny moment pędu elektrycznego w jego ruchu po orbicie definiujemy jako iloczyn wektorowy promienia wodzącego przez pęd elektronu. Elektron charakteryzuje się ponadto wewnętrznym momentem pędu, tak zwanym spinem. Z ruchem orbitalnym elektronu, stanowiącym swego rodzaju elementarny obwód z prądem elektrycznym, związany jest orbitalny moment magnetyczny. Podobnie, z wewnętrznym momentem pędu związany jest spinowy moment magnetyczny. Spinowego momentu magnetycznego nie należy raczej interpretować jako „obwodu z prądem”.

Według warunku antysymetrii, przy zamianie miejscami dowolnych dwóch elektronów funkcja falowa musi zmieniać znak. Gdyby oba te elektrony były w tym samym stanie kwantowym, to funkcja falowa byłaby dla nich identyczna. Jedyną funkcją spełniającą oba te warunki jednocześnie jest funkcja tożsamościowo równa zeru. Oznacza to, że żądanie antysymetrii funkcji falowej jest tożsame z zakazem Pauliego.

Magnetyczne własności w mniejszym lub większym stopniu przejawiają się we wszystkich materiałach. Spośród wszystkich ciał stałych można jednakże wyodrębnić grupę ciał, które w ogólności nazywać będą magnetykami, mających szczególnie wyraźne własności magnetyczne: są to ferromagnetyki, antyferromagnetyki i ferrimagnetyki. Typowymi przedstawicielami ferromagnetyków są metale przejściowe: żelazo, kobalt, nikiel, typowymi antyferromagnetykami są tlenki metali przejściowych np  $\text{FeO}$ ,  $\text{CoO}$ , zaś typowymi ferrimagnetykami są ferryty czyli złożone sole metali przejściowych typu  $\text{FeOFe}_2\text{O}_3$ . Cechą charakterystyczną magnetyków jest pojawienie się w nich przy określonych warunkach tzw. uporządkowania magnetycznego i w konsekwencji — dużego momentu magnetycznego próbki. Aby wyjaśnić pojęcie uporządkowania magnetycznego, zwróćmy uwagę na fakt, że w ogólności magnetyzm ciał stałych związany jest z występowaniem w sieci krystalicznej tych substancji atomów o niezapełnionych wewnętrznych powłokach elektronowych. W szczególności np. metale przejściowe mają niezapełnioną powłokę wewnętrzną 3d, metale ziem rzadkich zaś — powłokę wewnętrzną 4f. Zauważmy, że zapełnione powłoki elektronowe nie dają przyczynku do magnetycznych własności ciała, gdyż momenty magnetyczne poszczególnych elektronów kompensują się wzajemnie. Makroskopowy moment magnetyczny próbki składa się w ogólności z momentów magnetycznych poszczególnych elektronów (przyczynek pochodzący od jąder atomowych może być zaniebany), przy czym mogą to być zarówno momenty magnetyczne spinowe (związane ze spinowym momentem pędu) elektronów, jak i momenty magnetyczne orbitalne (związane z orbitalnym momentem pędu) elektronów. Okazuje się jednakże, że główny przyczynek do momentu magnetycznego najbardziej typowych ferromagnetyków, takich jak Fe, Co, Ni, pochodzi od momentów spinowych, zaś momenty orbitalne mogą być pominięte. W związku z tym zakłada się, że moment magnetyczny próbki jest rezultatem powstawania w określonych warunkach uporządkowania spinów elektronowych niezapełnionych powłok wewnętrznych. Uporządkowanie to pojawia się spontanicznie (to znaczy bez wpływu zewnętrznego pola magnetycznego), o ile tylko temperatura jest niższa od pewnej temperatury krytycznej. Pojawiający się przy tym uporządkowaniu moment magnetyczny przypadający na jednostkę objętości nosi nazwę magnetyzacji spontanicznej.

Przyczyną pojawienia się spontanicznego uporządkowania spinów elektronowych są tak zwane oddziaływania wymienne. Natura tych oddziaływań, jakkolwiek związana z kulombowskim oddziaływaniem między ładunkami elektrycznymi, w pośredni sposób uwzględnia także kwantowy charakter elektronów. Aby to zrozumieć musimy zdać sobie sprawę z faktu, że fale materii związane z elektronami (zob. »Delta« 10 1975) muszą mieć określone własności, mianowicie funkcje falowe opisujące układ elektronów muszą mieć tak zwaną własność antysymetrii, to znaczy muszą zmieniać znak przy „myślowej” zamianie dowolnych dwóch elektronów układu miejscami. Stwierdzenie to nie jest właściwie niczym innym, jak znanym zakazem Pauliego mówiącym, że dowolne dwa elektrony układu nie mogą się znaleźć w tym samym stanie kwantowym. Uwzględnienie żądania antysymetrii funkcji falowej układu elektronów jest właśnie przyczyną pojawienia się w wyrażeniu dla energii całkowitej tego układu dodatkowego wyrazu, zwanego energią wymienną, który to wyraz nie pojawia się, jeśli żądania antysymetrii nie wprowadzić. Energia ta i związane z nią oddziaływania zwane wymiennymi mają więc naturę czysto kwantową i nie mają swego odpowiednika klasycznego. Nie można ich przeto wyjaśnić w żaden modelowy sposób. Zwróćmy jedynie uwagę na fakt, że oddziaływania wymienne są także przyczyną wiązania molekuly wodoru oraz ciał stałych z wiązaniem kowalencyjnym.



Dla naszego celu ważne jest, że w magnetykach oddziaływania wymienne między elektronami można opisać za pomocą pewnego prostego ale efektywnego modelu, zwanego modelem Heisenberga: przy określonych warunkach zachowanie się elektronów w niezapełnionych powłokach atomów kryształu może być aproksymowane przez zachowanie się układu spinów rozłożonych w węzłach sieci krystalicznej. W tej aproksymacji energia oddziaływania wymiennego między elektronami może być w efektywny sposób zastąpiona przez oddziaływania między spinami, przy czym energię tego ostatniego oddziaływania można zapisać w postaci

$$(1) \quad E_{\text{oddz}} = - \sum_{i \neq j} J_{ij} s_i s_j,$$

gdzie  $s_i$  oznacza wektor spinu w węzle  $i$ -tym,  $J_{ij}$  jest współczynnikiem proporcjonalności określającym intensywność oddziaływania między spinami w węzłach  $i$ -tym i  $j$ -tym, który nazywamy całką wymienną, sumowanie zaś przebiega po różnych węzłach  $i, j$ . Całka wymienna  $J_{ij}$  co do rzędu wielkości równa jest energii oddziaływania wymiennego elektronów należących do odpowiednich węzłów i jest taką funkcją odległości między węzłami, że najczęściej wystarczy ograniczać się do uwzględnienia jedynie oddziaływań między najbliższymi sąsiednimi węzłami.

Ilościowe rachunki oparte na tak uproszczonym modelu magnetyka są ciągle jeszcze bardzo złożone. W ogólności bowiem wyrażenie (1) przybiera sens energii dopiero przy działaniu nim na funkcję falową. Podobnie jest dla spinów  $s_i$ . Dla przewyciężenia tej trudności często wprowadza się tak zwane przybliżenie pola molekularnego, według którego na dowolny spin magnetyka działa hipotetyczne wewnętrzne pole molekularne ze strony sąsiednich spinów, przy czym o polu tym zakłada się, że jest ono proporcjonalne do magnetyzacji. Z drugiej strony, przy określonych warunkach i ze znanym stopniem przybliżenia, możliwe jest traktowanie spinów  $s_i$  jako zwykłych wektorów (przybliżenie quasiklasyczne). Ograniczając się wówczas do oddziaływań między najbliższymi sąsiadami możemy całkę wymienną  $J_{ij} \equiv J$  wyciągnąć przed znak sumowania i jeśli  $J$  jest dodatnie, to minimum energii oddziaływania wyrażonej wzorem (1) odpowiada równoległemu ustawieniu spinów  $s_i$  i  $s_j$ , zaś jeśli  $J$  jest ujemne, to by  $E_{\text{oddz}}$  było minimalne, wektory  $s_i$  i  $s_j$  muszą być antyrównoległe. W ten sposób dochodzimy do pojęcia uporządkowania ferromagnetycznego — gdy spiny wszystkich węzłów są równoległe lub antyferromagnetycznego — gdy spiny sąsiednich węzłów są antyrównoległe. W tej ostatniej sytuacji układ spinów może być traktowany jako złożony z dwóch podsieci: jednej złożonej z wszystkich węzłów o spinach „w górę” i drugiej — o spinach „w dół”. Mówiąc o uporządkowaniu ferro- lub antyferromagnetycznym zakładaliśmy milcząco, że wszystkie węzły są równoważne. W przypadkach antyferromagnetyków oznacza to, iż obie podsieci co do wartości bezwzględnej namagnesowane są jednakowo tak, że wypadkowy moment magnetyczny jest równy zeru. Możliwa jest również sytuacja inna, mianowicie taka, w której momenty magnetyczne węzłów „w górę” i „w dół” nie są równe. Mówimy wtedy o uporządkowaniu ferrimagnetycznym lub o ferromagnetykach nie skompensowanych.

Możliwe są i inne typy uporządkowania magnetycznego nie dające się podciągnąć pod żaden z powyższych typów. U szeregu pierwiastków metali ziem rzadkich na przykład obserwuje się tak zwane struktury spiralne, w których składowe wektory spinowych zmieniają się periodycznie w przestrzeni idąc wzdłuż pewnego kierunku sieci krystalicznej. Możliwość pojawienia się takich struktur wynika także ze wzoru (1), jeśli bowiem założyć, że oddziaływania między drugimi sąsiadami nie są zaniedbywalne w porównaniu z oddziaływaniami najbliższych sąsiadów i mają względem siebie znaki przeciwne, to w wyniku konkurencji tych oddziaływań stanowi o najniższej energii  $E_{\text{oddz}}$  może odpowiadać dość złożona, niekolinaarna konfiguracja spinów.

Aby nie popadać w zbyt optywizm przy oszacowaniu stanu wiedzy o magnetycznych własnościach ciał stałych trzeba jednak wyraźnie powiedzieć, że wyżej przedstawiony obraz typów uporządkowania magnetycznego rozumiany dosłownie ma obecnie już tylko raczej znaczenie historyczne. Jedynie w bardzo niewielkiej liczbie przypadków bezpośrednio oddziaływania wymienne opisane powyżej odgrywają istotną lub dominującą rolę.

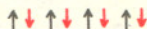
Znacznie częściej są one przesłaniane przez inne, daleko bardziej złożone efekty. Na przykład w antyferromagnetycznych związkach typu soli lub tlenków metali przejściowych atomy o niezapełnionych wewnętrznych powłokach elektronowych są rozdzielone przez niemagnetyczne jony. Ponieważ oddziaływania wymienne, o których dotychczas mówiliśmy, szybko maleją z odległością, więc w takich związkach oddziaływania te są bardzo małe i nie mogą być podstawą do wyjaśnienia nawet rzędów wielkości obserwowanych efektów. W tych przypadkach pojawia się tak zwana wymiana pośrednia, przy której oddziaływanie między elektronami jonów magnetycznych odbywa się za pośrednictwem przedzielającego je jony jonu niemagnetycznego. Okazuje się szczęśliwie, że układ elektronów z tego typu oddziaływaniami pośrednimi także udaje się modelować za pomocą spinów w węzłach sieci, oddziałujących w przybliżeniu według wzoru (1) z tym że obecnie  $J_{ij}$  ma nieco inny sens fizyczny.

Z drugiej strony w metalach ziem rzadkich niewypełnione powłoki  $4f$  znajdują się stosunkowo głęboko i są przesłonięte przez ekranujące działanie bardziej zewnętrznych elektronów.

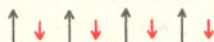
Stosunek magnetomechaniczny definiuje się jako stosunek momentu magnetycznego do momentu pędu. Dla momentów spinowych stosunek ten wynosi 2, zaś dla orbitalnych równy jest 1 w odpowiednich jednostkach. Eksperymentalnie mierzone wartości dla najbardziej typowych ferromagnetyków 1,92 dla Fe, 1,83 dla Ni wskazują, że zasadniczy przyczyn do momentu magnetycznego tych metali pochodzi od momentów spinowych.



Ferromagnetyczne uporządkowanie spinów



Antyferromagnetyczne uporządkowanie spinów

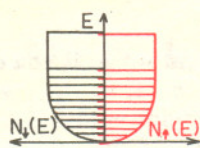


ferrimagnetyczne uporządkowanie spinów

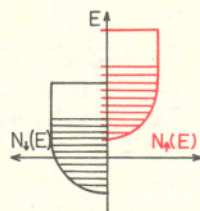


W związku z tym wymiana bezpośrednia ma niewielkie znaczenie. W tym przypadku oddziaływanie między elektronami niewypełnionych powłok należących do różnych węzłów przenoszone jest przez elektrony przewodnictwa. Odbyna się to w ten sposób, że jeden jon magnetyczny „magnesuje” do pewnego stopnia elektrony przewodnictwa, a te z kolei oddziałują na następny jon magnetyczny. Znowu szczęśliwie okazuje się, że oddziaływanie wymienne przez elektrony przewodnictwa daje się z grubsza opisać za pomocą wyrażenia (1), z tym że całka  $J_{ij}$  ma teraz jeszcze inny sens fizyczny. W szczególności, okazuje się, że całka ta nie znika na odległościach większych niż jedna stała sieci, a co ważniejsze — jako funkcja odległości może ona kilkakrotnie zmieniać znak. To wyjaśnia fakt, że właśnie w metalach ziem rzadkich pojawiają się się struktury spiralne. Często bowiem oddziaływanie ma przeciwny znak dla drugich lub trzecich sąsiadów w porównaniu z sąsiadami najbliższymi.

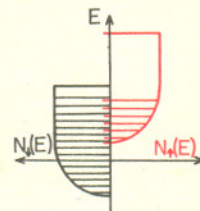
W najbardziej typowych ferromagnetykach, jakimi są żelazo, nikiel, kobalt, sytuacja jest jeszcze bardziej złożona. Mimo że model magnetyka jako układu spinów rozłożonych w węzłach sieci pozwolił historycznie rzecz biorąc otrzymać szereg istotnych rezultatów zgodnych z doświadczeniem w tych ferromagnetykach, z współczesnego punktu widzenia zdajemy sobie sprawę, że model ten zaniedbując całkowicie obecność elektronów przewodnictwa, oraz wędrowny charakter elektronów 3d, może odnosić się raczej do opisu ferromagnetycznych dielektryków aniżeli metali. W ramach tego modelu nie udaje się wyjaśnić szeregu faktów doświadczalnych, z których najważniejszym jest ułamkowość momentu magnetycznego przypadającego na jeden węzeł sieci. Ułamkowość ta związana jest z tym, że elektrony niezapełnionych powłok 3d w tych metalach są w znacznym stopniu skolektywizowane, zachowując się w pewnym sensie podobnie do elektronów przewodnictwa. Fakt ten jest krańcowym przeciwieństwem założeń modelu Heisenberga, w którym spiny elektronowe zlokalizowane są w węzłach sieci. Posłużyło to za podstawę do rozwijania alternatywnego kierunku w teorii magnetyzmu, tak zwanej pasmowej teorii magnetyzmu. W teorii tej elektrony 3d są rozpatrywane w podobny sposób jak elektrony przewodnictwa, mianowicie jako skolektywizowane elektrony wędrowne. Aby ideę tej teorii zrozumieć, zauważmy najpierw, że bez obecności żadnego pola magnetycznego ilości elektronów 3d mających spiny „w górę” i „w dół” byłyby równe. W schemacie pasmowym można fakt ten zilustrować za pomocą rysunku 1a, na którym przedstawiono ilości  $N_1(E)$  elektronów o energii  $E$  i spinach „w górę” po prawej stronie, zaś ilości  $N_1(E)$  elektronów o energii  $E$  i spinach „w dół” po lewej stronie. Zakresowany obszar oznacza stany kwantowe, które są obsadzone przez elektrony. Zakładając, że w dowolnym miejscu wewnątrz ferromagnetyka działa hipotetyczne „wewnętrzne pole molekularne”, spowodowane oddziaływaniami wymiennymi między wędrownymi elektronami 3d, energia elektronów o momentach magnetycznych przeciwnych do pola molekularnego staje się wyższa, zaś energia elektronów o momentach magnetycznych zgodnych z polem molekularnym staje się niższa od energii, którą te elektrony miały bez pola (rys. 1b).



Rys. 1a



Rys. 1b

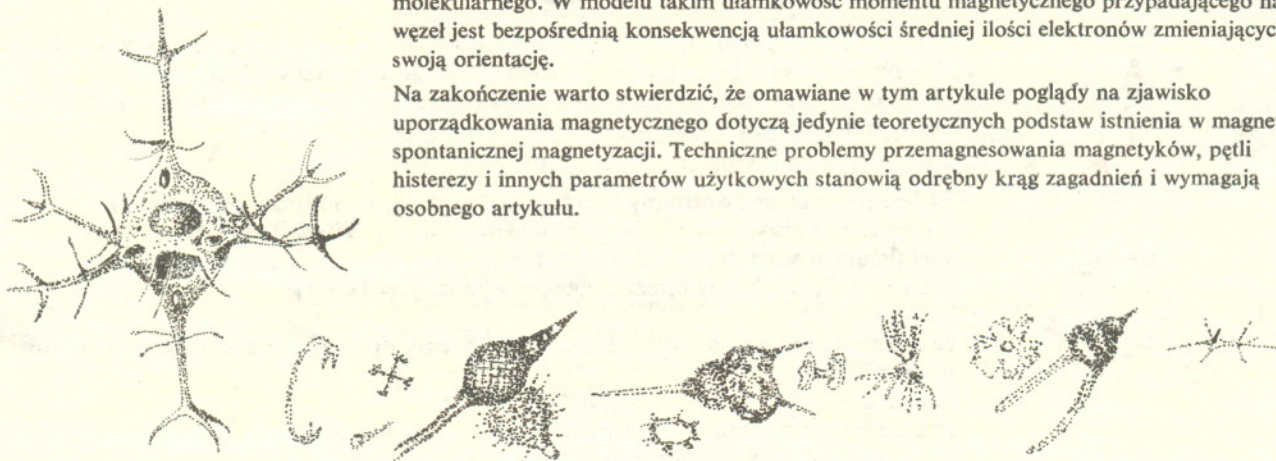


Rys. 1c

W rezultacie takiego rozszczepienia część elektronów musi zmienić kierunek orientacji swojego momentu magnetycznego tak, aby dla obu orientacji stany kwantowe były zapełnione do tego samego poziomu zwanego poziomem Fermiego (rys. 1c). Oznacza to, że układ skolektywizowanych elektronów wewnętrznych spontanicznie „magnesuje się” pod wpływem wewnętrznego pola molekularnego. W modelu takim ułamkowość momentu magnetycznego przypadającego na jeden węzeł jest bezpośrednią konsekwencją ułamkowości średniej ilości elektronów zmieniających swoją orientację.

Na zakończenie warto stwierdzić, że omawiane w tym artykule poglądy na zjawisko uporządkowania magnetycznego dotyczą jedynie teoretycznych podstaw istnienia w magnetykach spontanicznej magnetyzacji. Techniczne problemy przemagnesowania magnetyków, pętli histerezy i innych parametrów użytkowych stanowią odrębny krąg zagadnień i wymagają osobnego artykułu.

Rozpatrując ferromagnetyczny metal przejściowy jako układ spinowych momentów magnetycznych oczekujemy, że dla bardzo niskich temperatur i wystarczająco silnych zewnętrznych pól magnetycznych, średni moment magnetyczny przypadający na jeden węzeł będzie równy lub przynajmniej bliski momentowi magnetycznemu swobodnych atomów. W rzeczywistości między tymi wielkościami istnieją znaczne różnice. Na przykład na jeden węzeł sieci żelaza przypada moment magnetyczny 2,2 zamiast 4, w niklu 0,6 zamiast 2, w kobaltcie 1,7 zamiast 3 w odpowiednich jednostkach.







Kol. Z. Ogielski w chwili nadesłania artykułu był uczniem II kl. LO im. M. Konopnickiej w Inowrocławiu.

Wiadomo, że wszystkich funkcji określonych na zbiorze  $n$ -elementowym o wartościach w zbiorze  $k$ -elementowym jest  $k^n$ . Omawiane tu twierdzenie jest niemal natychmiastową konsekwencją tego faktu, jeśli rozważy się funkcję przyporządkowującą każdemu elementowi zbioru  $Z$  liczbę zbiorów  $A_k$ , do których element ten należy.

## Zbigniew OGIELSKI

Na zawodach okręgowych Olimpiady Matematycznej w r. 1974 było następujące zadanie:

„Niech  $Z$  będzie zbiorem  $n$ -elementowym. Znaleźć liczbę takich par zbiorów  $(A, B)$ , że  $A \subset B$  i  $B \subset Z$ .”

Rozwiązanie tego zadania sprowadzało się do dowodu, że liczba takich par wynosi  $3^n$ .

Nawiązując do powyższego tematu dokonałem uogólnienia jego rozwiązania, udowadniając następujące twierdzenie:

### **Twierdzenie**

Niech  $Z$  będzie zbiorem  $n$ -elementowym. Wtedy liczba  $k$ -elementowych ciągów zbiorów  $A_1, A_2, \dots, A_k$  takich, że  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_k \subset Z$  wynosi  $(k+1)^n$ .

### **Dowód**

#### **Sposób I**

Twierdzenia dowodzimy przez indukcję względem  $k$  przy ustalonym  $n$ . Prawdziwość twierdzenia dla  $k = 1$  zapewnia twierdzenie, że liczba podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego wynosi  $2^n = (1+1)^n$ . Sprawdzenie twierdzenia dla  $k = 2$  było tematem podanego na wstępie zadania. Twierdzenie jest więc prawdziwe dla  $k = 1$  i  $k = 2$ . Załóżmy zatem, że twierdzenie zachodzi dla pewnego  $k$  przy dowolnym  $n$ .

Chcemy dowieść, że zachodzi ono wtedy dla  $k+1$ , czyli chcemy dowieść, że gdy  $Z$  jest zbiorem  $n$ -elementowym, to liczba ciągów zbiorów  $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$  takich, że  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{k+1} \subset Z$  wynosi  $(k+2)^n$ .

Istotnie bowiem, gdy zbiór  $A_{k+1}$  jest  $i$ -elementowy, to liczba takich zbiorów  $A_{k+1}$  wynosi  $\binom{n}{i}$ .

Dla pewnego zbioru  $A_{k+1}$   $i$ -elementowego liczba ciągów zbiorów  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  takich, że  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_k \subset A_{k+1}$  wynosi z założenia  $(k+1)^i$ . Zatem liczba wszystkich ciągów zbiorów  $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$  takich, że  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_k \subset A_{k+1}$  i zbiór  $A_{k+1}$  jest  $i$ -elementowy wynosi  $\binom{n}{i} \cdot (k+1)^i$ .

Ponieważ zbiór  $A_{k+1}$  może być  $0, 1, 2, \dots, n$ -elementowy, więc liczba wszystkich ciągów  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, A_{k+1}$  takich, że  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset Z$  wynosi:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (k+1)^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (k+1)^i \cdot 1^{n-i} = ((k+1)+1)^n = (k+2)^n.$$

Sprawdziliśmy prawdziwość twierdzenia dla  $k = 1$  i  $k = 2$ . Następnie wykazaliśmy, że z prawdziwości twierdzenia dla  $k$  wynika jego prawdziwość dla  $k+1$ . Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej.

#### **Sposób II**

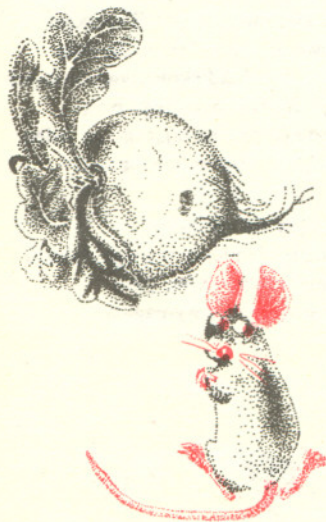
Twierdzenie to udowodnimy przez indukcję względem  $n$  przy ustalonym  $k$ . Niech  $Z = \emptyset$  czyli  $Z$  jest zbiorem  $0$ -elementowym. Wtedy jedynym ciągiem spełniającym warunki zadania jest ciąg  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ , gdzie  $A_i = \emptyset$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$ , czyli liczba ciągów wynosi  $1 = (k+1)^0$ .

Założmy teraz,

że twierdzenie zachodzi dla pewnego  $n$ . Chcemy dowieść, że zachodzi ono wtedy dla  $n+1$ .

Niech  $Z = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ .

Podzielmy zbiór ciągów zbiorów  $A_1, A_2, \dots, A_k$  takich, że  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset Z$  na  $k+1$  klas rozłącznych.





Do  $i$ -tej klasy dla  $i = 1, 2, \dots, k$  zaliczymy te ciągi, które zawierają element  $a_{n+1}$  w zbiorze  $A_i$ , a nie zawierają go w zbiorze  $A_{i-1}$ . Z określenia ciągu  $A_1, A_2, \dots, A_k$  wynika, że jeżeli

$$\begin{aligned} a_{n+1} \in A_i, \text{ to } a_{n+1} \in A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_k \text{ ponieważ} \\ A_i \subset A_{i+1} \subset A_{i+2} \subset \dots \subset A_k \text{ oraz jeżeli } a_{n+1} \notin A_{i-1}, \text{ to} \\ a_{n+1} \notin A_{i-2}, A_{i-3}, \dots, A_1, \text{ ponieważ} \\ A_{i-1} \supset A_{i-2} \supset A_{i-3} \dots \supset A_1. \end{aligned}$$

Do  $(k+1)$ -szej klasy zaliczymy te ciągi  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , które nie zawierają elementu  $a_{n+1}$  w żadnym ze zbiorów  $A_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$ . Klasy te są rozłączne i dają w sumie zbiór wszystkich ciągów  $A_1, A_2, \dots, A_k$ .

W klasie  $(k+1)$ -szej jest tyle ciągów, ile jest ciągów  $A_1, A_2, \dots, A_k$  dla zbioru  $Z = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , czyli z założenia  $(k+1)^n$ .

W klasie  $i$ -tej dla  $i = 1, 2, \dots, k$  jest też tyle ciągów, ile można otrzymać ze zbioru  $Z = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  czyli z założenia  $(k+1)^n$ , ponieważ każdy ciąg  $i$ -tej klasy dla  $i = 1, 2, \dots, k$  możemy otrzymać z pewnego ciągu  $A_1, A_2, \dots, A_k$  utworzonego dla zbioru  $Z = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  po dodaniu do każdego zbioru  $A_i, A_{i+1}, \dots, A_k$  elementu  $a_{n+1}$ . Zatem wszystkich ciągów jest

$$(k+1) \cdot (k+1)^n = (k+1)^{n+1}.$$

Twierdzenie jest więc prawdziwe dla  $n+1$ . Na podstawie zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że jest ono prawdziwe dla każdej liczby naturalnej.

Tyle od Autora. Nasuwa się kilka refleksji. Sformułowane twierdzenie dotyczyło par  $(k, n)$  liczb naturalnych. Pokazano nam, że można dowodzić go zarówno przez indukcję tylko względem  $k$ , jak i tylko względem  $n$ . Dlaczego tak jest? Mogło by się zdawać, że skoro najpierw jest indukcja względem  $k$ , to potem jeszcze powinno się coś zrobić z  $n$  — np. też zastosować indukcję. Czy może w związku z tym poprawność przedstawionych dowodów daje się podważyć? Dlaczego nie? Jeśli dowody są poprawne, to czy zawsze tak być musi, że w twierdzeniach o parach liczb naturalnych można stosować indukcję ze względu na każdą ze zmiennych?

Kiedy? Czekamy na uwagi i refleksje. (Red.)

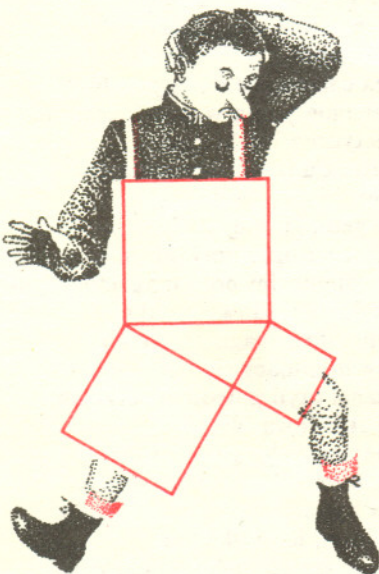
## Znane twierdzenie Pitagorasa

Wśród licznych twierdzeń matematyki są nieliczne takie, o których każdy słyszał. Na przykład twierdzenie Pitagorasa. W szóstym wieku przed naszą erą w państwie — zakonie założonym przez Greka Pitagorasa w południowej Italii zostało uzyskane trochę empirycznie, trochę mistycznie twierdzenie, które, tak jak wszystkie inne, podpisano imieniem Mistrza. Brzmiało ono... Otóż wcale nie tak jak myślicie. Brzmiało ono: wysokość dzieli trójkąt prostokątny na dwa do niego podobne (czyli o proporcjonalnych bokach, jak to dziś można powiedzieć). Mijały lata. Przemineła tyrania Pizystrata, zaczęły się i skończyły wojny perskie, wielkie Ateny Peryklesa ustąpiły miejsca Sparcie i gdy Grecja szykowała się do ostatecznej rozprawy z Macedonią, w połowie IV w. p.n.e. inny Grek — Eudoksos wynalazł proporcję i przetłumaczył twierdzenie Pitagorasa na znaną nam formułę  $a^2 + b^2 = c^2$ , której jednak nie zapisał, bo nie umiał w ogóle nic formalnie zapisać. Formułka tego typu została podana dopiero w wieku XV, gdy scholastyczne uniwersytety Włoch i Francji stworzyły zapis algebraiczny. Kolejne wcielenie twierdzenia Pitagorasa, znów geometryczne, otrzymaliśmy od Racjonalizmu, epoki Kartezjusza, Newtona, Leibniza, Bernoullich. Orzeka ono, że jeśli na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy (jakikolwiek) figury podobne, to suma pól dwóch mniejszych będzie równa polu trzeciej z nich. Tak też uczono tego twierdzenia przez dwa stulecia. Nasza Komisja Edukacji Narodowej w tej też postaci zaleciła go nauczać.

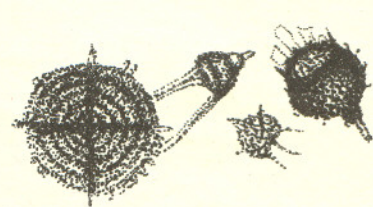
Czasy *Niebieskiego mundurka* i *Szyfowych prac* zerwały z dowolnością, na jaką zezwalało powyższe sformułowanie i zastąpiły „jakikolwiek” figurę kwadratem — miało to być niezmiernie dydaktyczne, przecież o kwadracie się „mówi” odczytując formułę

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Prawda?







Dr Magdalena KADZIAŁKO-HOFMOKL

W artykule „Oddziaływania odpowiedzialne za magnetyzm” (str. 1) była mowa o materiałach magnetycznych, czyli magnetykach. Wiemy, jak ogromne znaczenie mają magnetyki we współczesnej technice — istnieje szereg instytucji zajmujących się badaniami ferrytów i opracowywaniem nowych materiałów o szczególnych własnościach magnetycznych. Ale nie wszyscy chyba wiedzą, że aby zapoznać się z magnetykami nie trzeba wcale zwiedzać nowoczesnych, wspaniale wyposażonych laboratoriów. Wystarczy wyjść z domu, pochylić się i podnieść zwykły, nieefektywny kamień, by znaleźć się w posiadaniu magnetyka. Bowiem przeważająca większość skał, fragmenty których w postaci większych lub mniejszych kamieni zna każde dziecko, ma własności magnetyczne. Własności te występują w skałach w stopniu nieporównanie słabszym, niż ma to miejsce w magnetykach używanych w technice i dlatego stosuje się tu szczególnie czułe metody badawcze. Ale prawidłowości z jakimi spotykamy się w skałach są takie same, jak dla żelaza, czy niklu. Powiedzieliśmy powyżej, że do materiałów magnetycznych zalicza się większość skał. Ta większość to skały, zawierające materiały magnetyczne. Do najczęściej spotykanych materiałów magnetycznych należą: magnetyt ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) i tytanomagnetyt ( $x\text{Fe}_3\text{O}_4(1-x)\text{Fe}_2\text{TiO}_4$ , gdzie  $0 \leq x \leq 1$ ), hematyt ( $\alpha\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) i hemoilmenity ( $y\text{Fe}_2\text{O}_3(1-y)\text{FeTiO}_3$ , gdzie  $0 \leq y \leq 1$ ), pirotyt  $\text{Fe}_7\text{S}_8$ , getyt  $\text{FeOOH}$  i inne. Najpopularniejsze skały magnetyczne to wszystkie skały magmowe zarówno głębinowe (np. granit), jak i wylewne (np. bazalt). Jedną z form występowania skał bazaltowych na powierzchni Ziemi przedstawia umieszczona na okładce fotografia. Jest to przekrój przez stożek wulkaniczny Kozia Góra w pobliżu Złotoryi, gdzie mieści się obecnie kamieniołom. Wulkan ten jest nieczynny prawdopodobnie od około 30 milionów lat. Podczas wybierania bazaltu odsłonięto wachlarzowy układ kolumn bazaltowych zgodny z kierunkiem wydobywania się lawy z wnętrza wulkanu.

Własności magnetyczne wykazuje również większość skał osadowych, jak piaskowce, wapień, gliny itp.

Wspólną cechą skał magnetycznych, która spowodowała zainteresowanie się nimi ze strony geofizyków, jest ich zdolność uzyskiwania w zewnętrznym polu magnetycznym trwałej pozostałości magnetycznej skierowanej w kierunku tego pola. Wszystkie występujące na powierzchni Ziemi skały pozostają w momencie swego powstania i w czasie swojej późniejszej historii pod wpływem ziemskiego pola magnetycznego. Nie jest ono silne — obecnie w naszych szerokościach geograficznych natężenie całego wektora pola wynosi około  $5 \times 10^{-5} \text{T}$  ( $1 \text{T} = 10^4 \text{Gs}$ ). Przy spełnieniu jednak pewnych warunków wystarcza całkowicie do tego, aby nowo powstająca skała uzyskała trwałą pozostałość magnetyczną w jego kierunku.

Pozostałość ta, zwana naturalną pozostałością magnetyczną NRM (od angielskiego terminu natural remanent magnetization) składa się na ogół z tzw. składowej pierwotnej, uzyskanej przez skałę w momencie jej powstania i składowych wtórnych, uzyskanych w czasie historii geologicznej skały. W skałach magmowych składowa pierwotna NRM jest na ogół pochodzenia termicznego, to znaczy powstaje podczas stygnięcia w ziemskim polu magnetycznym skały od temperatur przewyższających  $1000^\circ\text{C}$ . W skałach osadowych taka składowa powstaje podczas osadzania się cząstek minerałów magnetycznych w polu ziemskim. Paleomagnetolodzy, czyli geofizycy zajmujący się badaniem pola magnetycznego Ziemi w jej przeszłości geologicznej czyli paleomagnetyzmu, interesują się przede wszystkim właśnie tą pierwotną składową NRM.

Próbki skalne wykorzystywane do badań paleomagnetycznych są pobierane w terenie bezpośrednio z odsłonięć, m.in. takich, jak widzieliśmy na fotografii. Przed wyjęciem z bloku skalnego każda próbka musi być starannie zorientowana za pomocą kompasu względem kierunku północy i pionu, jak pokazuje fotografia. Następnie w laboratorium przeprowadza się szereg badań mających na celu „oczyszczenie” NRM próbki ze składowych wtórnych. Na szczęście są one na ogół mniej stabilne niż składowa pierwotna i można je usunąć rozmagnesowując próbkę zmiennym polem magnetycznym lub temperaturą.

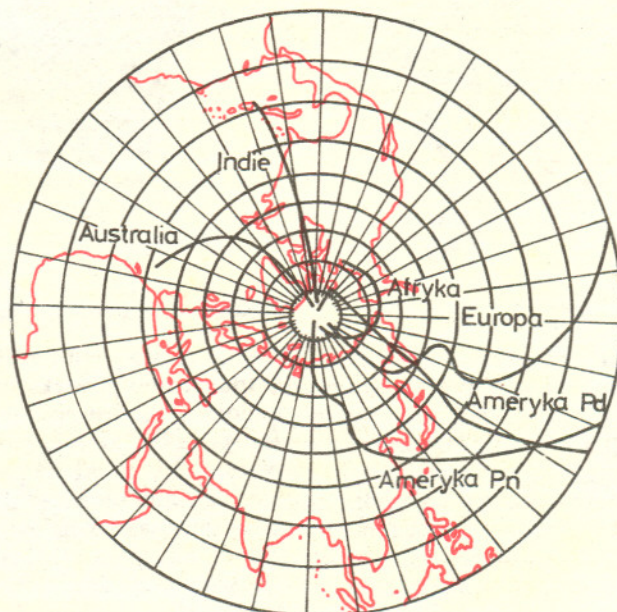




Kolejna fotografia przedstawia urządzenie służące do rozmagnesowywania próbek skał zmiennym polem magnetycznym. Widoczne na pierwszym planie trzy pary cewek to tzw. cewki Helmholtza służące do skompensowania zewnętrznego pola magnetycznego w obszarze, w którym znajduje się próbka. Kompensacji dokonuje się zasilając je stałym prądem elektrycznym o tak dobranym natężeniu, by wytworzone pole magnetyczne kompensowało pole panujące w laboratorium. Wewnątrz cewek Helmholtza znajduje się cewka rozmagnesowująca zasilana prądem zmiennym o malejącym natężeniu, ten prąd wytwarza odpowiednio malejące zmienne pole magnetyczne. W środku tej cewki w obszarze, w którym skompensowano pole magnetyczne wiruje wokół dwóch wzajemnie prostopadłych osi badana próbka. Każdą próbkę rozmagnesowuje się kilkakrotnie, przy coraz większym początkowym natężeniu prądu w cewce. Po każdym takim cyklu mierzony jest kierunek i natężenie pozostałej po rozmagnesowaniu części NRM. Tą drogą dochodzi się do trwałej części NRM, której kierunek nie zmienia się przy zwiększeniu początkowego natężenia prądu. Ten kierunek przyjmujemy za kierunek pierwotnej składowej NRM uzyskanej przez skałę w momencie jej powstawania i zgodny z panującym ówczesnie ziemskim polem magnetycznym. Wyniki uzyskane dla kolekcji próbek z badanego kompleksu skalnego służą, przy uwzględnieniu dokonanej w terenie orientacji, do numerycznego otrzymywania położenia bieguna magnetycznego w okresie powstawania skały. Postępując w taki sposób paleomagnetolodzy uzyskali szereg interesujących wniosków:

- położenia bieguna magnetycznego Ziemi dla różnych epok geologicznych otrzymane w oparciu o badania skał z tego samego kontynentu są różne, zjawisko to nazwano wędrówką biegunów,
- położenia bieguna dla tych samych epok geologicznych otrzymane w wyniku badań skał z różnych kontynentów są różne, rysunek przedstawia krzywe wędrówki bieguna dla obu Ameryk, Europy, Afryki, Indii i Australii,
- w czasie historii Ziemi jej pole magnetyczne wielokrotnie zmieniło biegunowość, to znaczy północny biegun znajdował się na półkuli południowej (obecnie znajduje się na północnej), a południowy — na północnej (obecnie znajduje się na południowej), tzw. zjawisko inwersji pola magnetycznego Ziemi.

Problemy wędrówki bieguna w obrębie jednego kontynentu oraz zjawisko inwersji pola nie są jeszcze w pełni wyjaśnione. Krzywe wędrówki bieguna dla różnych kontynentów sprowadzono do jednej krzywej wspólnej dla całej Ziemi formułując hipotezę dryftu (czyli wzajemnych ruchów) kontynentów. Hipoteza ta znalazła potwierdzenie w geologii i naukach pokrewnych (np. paleoklimatologia). Próbę rekonstrukcji wzajemnego położenia z przed ok. 70 mln lat Afryki, obu Ameryk i Europy na podstawie danych geofizycznych i geologicznych przedstawia zamieszczony na 1 stronie okładki rysunek. Przykład ten pokazuje, jak wiele informacji można uzyskać badając własności magnetyczne skał-kamieni. Trzeba tylko pamiętać, że tu, podobnie jak w laboratoriach, w których powstają nowe materiały magnetyczne, obowiązują te same prawa fizyki.



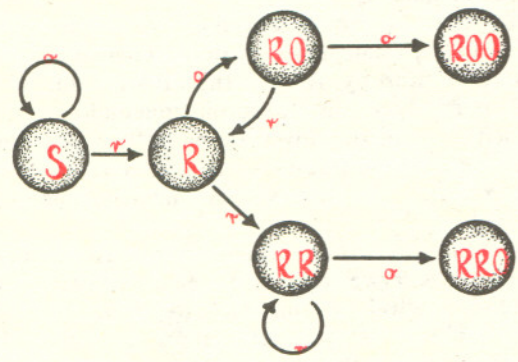


# Mała delta

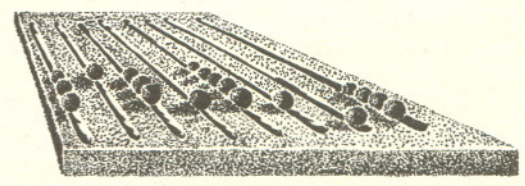


## Probabilistyczny Abak

Kto czytał poprzedni numer Małej Deltę może się zorientować, że graf na rysunku obok odpowiada grze opisanej w zadaniu 1. Można jednak zapomnieć o tamtej grze i wykorzystać graf do gry następującej (w rzeczywistości jest to ta sama gra). Umieszczamy pionek w miejscu oznaczonym literą S. Z punktu S wychodzą dwie strzałki — jedną z nich oznaczyliśmy literą r (prowadzi ona do miejsca oznaczonego literą R), drugą oznaczyliśmy literą o (prowadzi ona z powrotem do miejsca S). Rzucamy monetą. Jeśli wypadł orzeł przesuwamy pionek tak jak nakazuje strzałka o, jeśli reszka — przesuwamy pionek po strzałce r. Podobnie postępujemy z pionkiem w innych miejscach naszego grafu. Gra kończy się z chwilą, kiedy pionek zawędruje do miejsca ROO (wygrywa wówczas pierwszy gracz) lub do miejsca RRO (wygrywa gracz drugi).

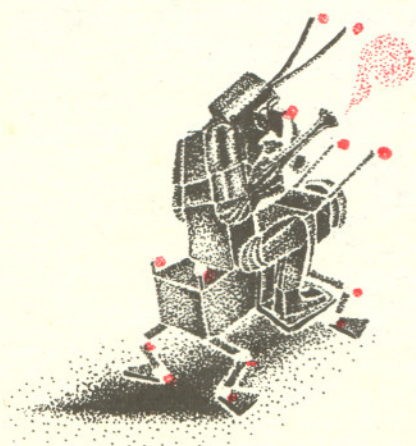


Przyglądając się budowie naszego grafu można się wprawdzie zorientować, że większe szanse wygranej ma gracz drugi, ale dokładne porównanie szans obydwu graczy jest sprawą trochę trudniejszą. Nie ma jednak rzeczy trudnych dla Probabilistycznego Abaku.

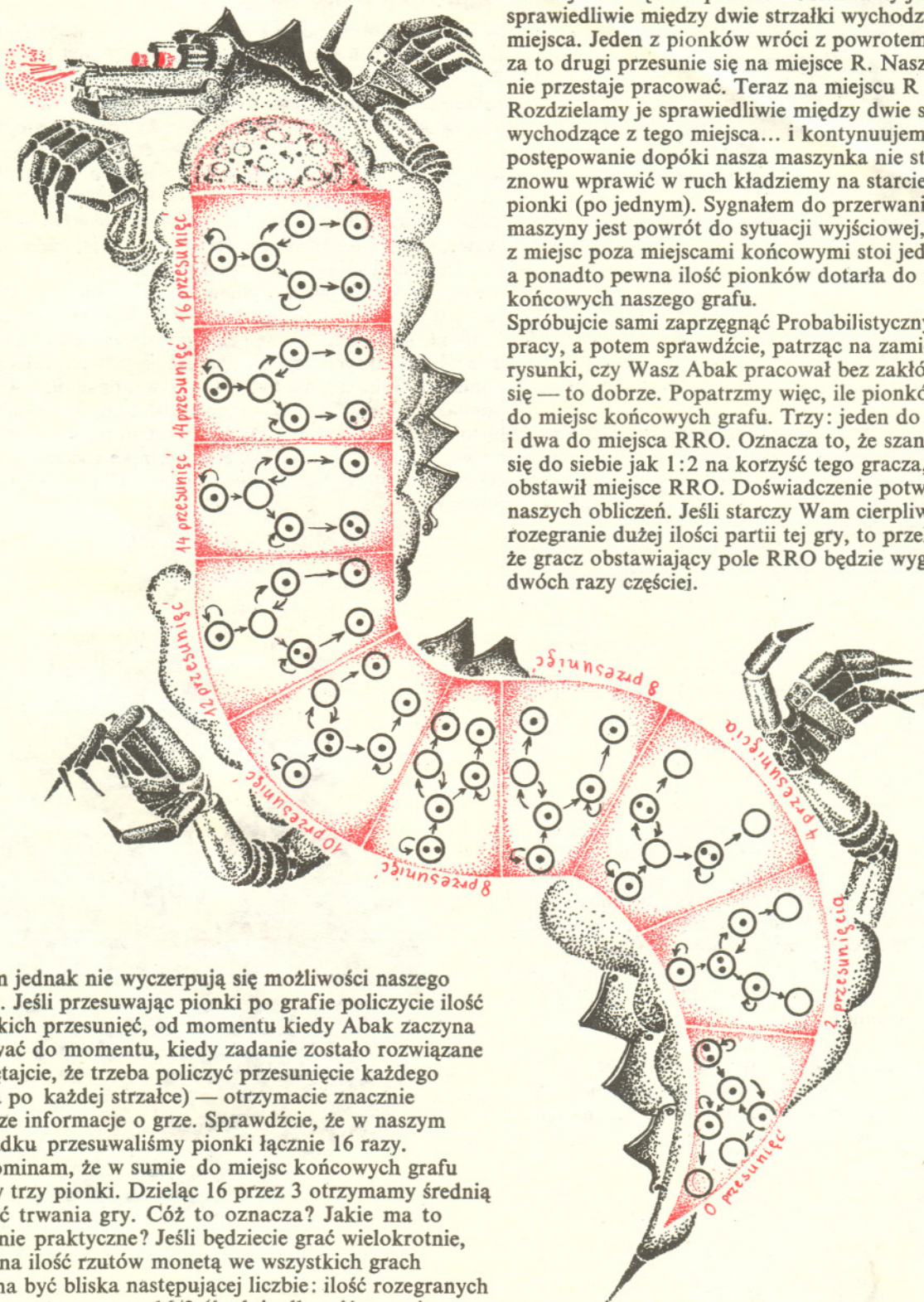


Abak — to starożytne liczydło.

Coż to takiego jest ten Probabilistyczny Abak? Odpowiednio powiększony (przerysowany na papierze z bloku rysunkowego) nasz graf, spora ilość pionków (mogą to być zwykłe guziki) i kilka prostych reguł przesuwania pionków po grafie. Zaczynamy od umieszczenia pionków po jednym na każdym miejscu grafu poza miejscami końcowymi i startem. Następnie dokładamy pionek na startcie. Dokładamy jeszcze jeden pionek... i nasza maszynka do rozwiązywania zadań zaczyna pracować.





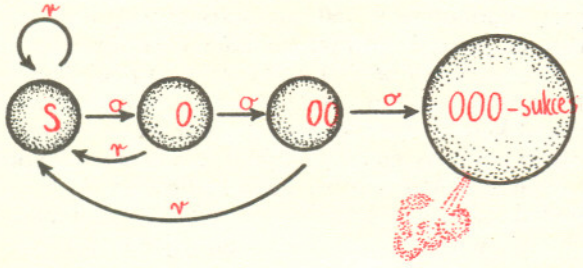


W miejscu S są dwa pionki. Rozdzielamy je sprawiedliwie między dwie strzałki wychodzące z tego miejsca. Jeden z pionków wróci z powrotem na miejsce S, za to drugi przesunie się na miejsce R. Nasza maszyna nie przestaje pracować. Teraz na miejscu R są dwa pionki. Rozdzielamy je sprawiedliwie między dwie strzałki wychodzące z tego miejsca... i kontynuujemy nasze postępowanie dopóki nasza maszyna nie stanie. Chcąc ją znowu wprawić w ruch kładziemy na starcie kolejne pionki (po jednym). Sygnałem do przerywania pracy maszyny jest powrót do sytuacji wyjściowej, na każdym z miejsc poza miejscami końcowymi stoi jeden pionek a ponadto pewna ilość pionków dotarła do miejsc końcowych naszego grafu.

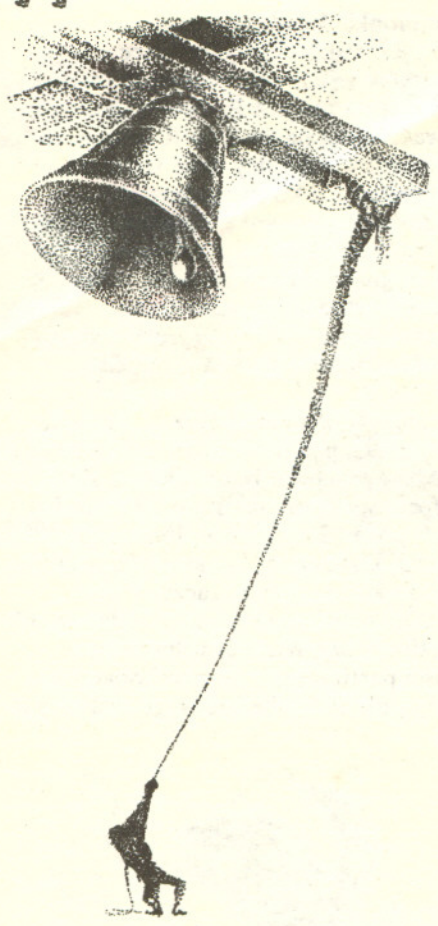
Spróbujcie sami zaprzęgnąć Probabilistyczny Abak do pracy, a potem sprawdźcie, patrząc na zamieszczone obok rysunki, czy Wasz Abak pracował bez zakłóceń. Zgodziło się — to dobrze. Popatrzmy więc, ile pionków dotarło do miejsc końcowych grafu. Trzy: jeden do miejsca ROO i dwa do miejsca RRO. Oznacza to, że szanse graczy mają się do siebie jak 1:2 na korzyść tego gracza, który obstawił miejsce RRO. Doświadczenie potwierdza wyniki naszych obliczeń. Jeśli starczy Wam cierpliwości na rozegranie dużej ilości partii tej gry, to przekonacie się, że gracz obstawiający pole RRO będzie wygrywał około dwóch razy częściej.

Na tym jednak nie wyczerpują się możliwości naszego Abaku. Jeśli przesuwając pionki po grafie policzycie ilość wszystkich przesunięć, od momentu kiedy Abak zaczyna pracować do momentu, kiedy zadanie zostało rozwiązane (pamiętajcie, że trzeba policzyć przesunięcie każdego pionka po każdej strzałce) — otrzymacie znacznie bogatsze informacje o grze. Sprawdźcie, że w naszym przypadku przesuwaliśmy pionki łącznie 16 razy. Przypominam, że w sumie do miejsc końcowych grafu dotarły trzy pionki. Dzieląc 16 przez 3 otrzymamy średnią długość trwania gry. Cóż to oznacza? Jakie ma to znaczenie praktyczne? Jeśli będziecie grać wielokrotnie, to łączna ilość rzutów monetą we wszystkich grach powinna być bliska następującej liczbie: ilość rozegranych gier pomnożona przez 16/3 (średnią długość trwania jednej gry).

Te możliwości naszego Probabilistycznego Abaku proponuję wykorzystać do rozwiązania następującego problemu. Rzucamy monetą dopóty, dopóki nie wyrzucimy trzech orłów pod rząd. Ilu rzutów (średnio biorąc) powinniśmy się spodziewać na osiągnięcie tego rezultatu? Tym, którzy nie czytali poprzedniego numeru Małej Delty, ułatwiłem zadanie rysując graf odpowiadający naszej grze. A reszta należy do Abaku. Abak jest niezawodny. Kto nie wierzy, niech uzyskane rozwiązanie sprawdzi doświadczalnie.



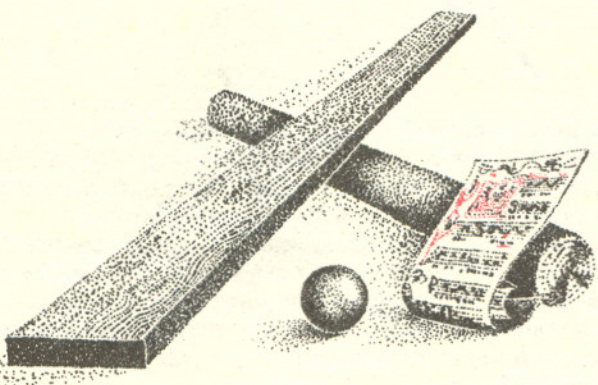




## Galileusz i piosenka

W poprzednim numerze była mowa o dokładności zegarów konstruowanych w dawnych czasach i obecnie. Zastanawiające jest, jak uczeni w dawnych wiekach mogli sobie radzić z pomiarami krótkich odcinków czasu. Szereg podstawowych praw mechaniki odkryto w epoce, kiedy nie umiano mierzyć odcinków czasu krótszych niż jedna sekunda. Na przykład, prawo spadku swobodnego odkrył Galileusz na początku XVII wieku. Prawo to mówi, że droga przebyta przez ciało spadające z wieży lub zsuwające się po równi pochyłej jest proporcjonalna do kwadratu czasu, jaki upłynął od początku ruchu. Stwierdzenie tego faktu wymagało od uczonego podziału czasu spadania na równe odcinki z dość dużą dokładnością. Einstein, który był zawsze pełen podziwu dla Galileusza, uważał, że odkrycie tego prawa było czystą spekulacją, ponieważ Galileusz nie był w stanie wykonać odpowiednich pomiarów. Jednakże, jak sugeruje ostatnio amerykański historyk nauki, Stillman Drake, Einstein nie docenił roli doświadczenia w pracy Galileusza. Drake wysunął ciekawą hipotezę, że tajemnicą sukcesu Galileusza była... piosenka.

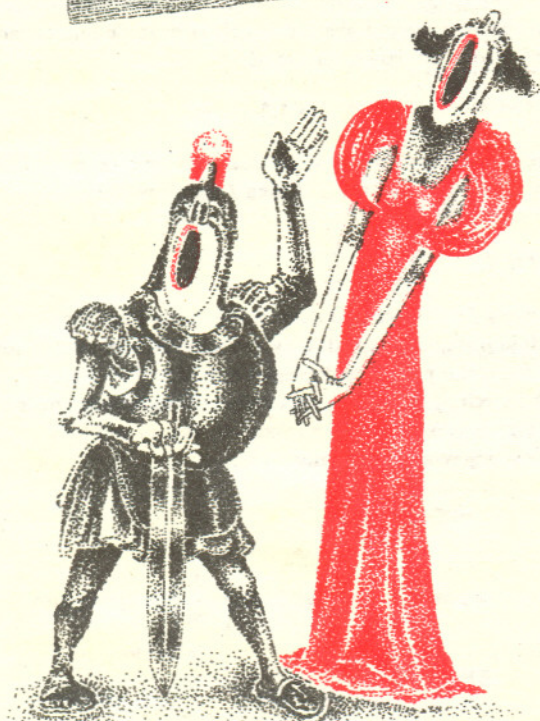
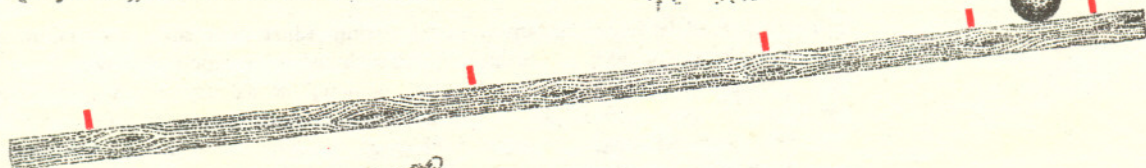
Kiedy mówimy o pomiarze czasu, myślimy o wyrażeniu czasu w standardowych jednostkach, np. w sekundach. Tymczasem nie jest to wcale konieczne. Dyrygent orkiestry dzieli czas z wielką dokładnością nie myśląc o żadnych jednostkach czasu. Zresztą, każdy z nas potrafi odmierzyć równo bardzo małe odstępy czasu. Robimy to, na przykład, tańcząc lub śpiewając. Krok w tańcu może trwać pół sekundy, jednak opóźnienie w stosunku do muzyki o drobny ułamek sekundy może być w oczach partnerki niewybaczalne. Muzyka, jako pomoc naukowa, musiała być bliska Galileuszowi, którego ojciec i brat byli zawodowymi muzykami. Sam uczoney dobrze grał na lutni, a nawet próbował komponować.



Proponuję ci wykonać doświadczenie podobne do tego, które prawdopodobnie w 1604 roku doprowadziło Galileusza do poznania prawa spadku swobodnego. Weźmy długą, gładką deskę i połóżmy ją na podłodze lekko podnosząc z jednej strony tak, by była nachylona do podłogi pod kątem około jednego stopnia. Na górnym końcu deski połóżmy mały przedmiot, który może się po niej łatwo toczyć. Może to być kulka, dziecinny samochodzik, szpulka od nici itp. Pozwólmy mu stoczyć się swobodnie wzdłuż deski i obserwujmy jego ruch.



Zamiast szukać deski można lekko pochylić stół kuchenny, ale wtedy trzeba zapewnić przedmiotowi miękkie lądowanie na przykład zatrudniając „asystenta” do łapania go w powietrzu. W miarę oddalania się od początku równi pochyłej kulka toczy się coraz szybciej. W jaki sposób wzrasta jej prędkość? Jak rośnie w czasie jej odległość od szczytu równi? Żeby odpowiedzieć na te pytania, trzeba zaznaczyć, gdzie znajdowała się kulka po upływie jednego, dwóch, trzech itd. równych odcinków czasu. Musimy to oczywiście zrobić bez pomocy zegarka. Jak? Ano właśnie, przypomnijmy sobie jakąś łatwą rytmiczną melodię, na przykład „Szła dziewczeczka do laseczka”.



Puśćmy teraz kulkę zaczynając jednocześnie nucić. Na początku każdego taktu zaznaczamy kredą lub innym pisakiem miejsce, gdzie znajdowała się kulka (w przypadku większego przedmiotu — jego określony punkt, na przykład przód samochodzika). Odstępy między kolejnymi kreskami okazują się coraz większe. Warto powtórzyć eksperyment kilka razy. Otrzymamy pewien rozrzut, czyli grupki kresek odpowiadających poszczególnym taktom. W każdej grupie kresek zaznaczymy wyraźniej jej środek. Teraz możemy zmierzyć odległości poszczególnych kresek (tych otrzymanych z uśrednienia) od miejsca, z którego puściliśmy kulkę. Ktoś, kto wykonał to doświadczenie, otrzymał następujący wynik:

| numer kreski | długość (cm)     |
|--------------|------------------|
| 1            | 6                |
| 2            | 25 $6 \times 4$  |
| 3            | 55 $6 \times 9$  |
| 4            | 95 $6 \times 16$ |

Okazuje się, że poszczególne odległości można w przybliżeniu zapisać jako iloczyny pewnej liczby (w naszym wypadku 6 cm) i kwadratów kolejnych liczb całkowitych. Przy innym nachyleniu deski otrzymalibyśmy inne liczby, ale zawsze spełniałyby one powyższy związek.

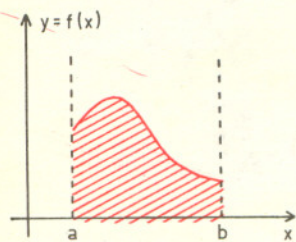
To, że Galileusz w ten właśnie sposób odmierzał czas przy wykonywaniu swego doświadczenia, jest tylko domysłem. Uczony nie wspomina o tym w swoich pracach. Pewnie obawiał się, że zdanie: „Sprawdziłem to prawo śpiewając piosenkę, podczas gdy kulka staczała się po równi” brzmiałoby humorystycznie w publikacji naukowej.



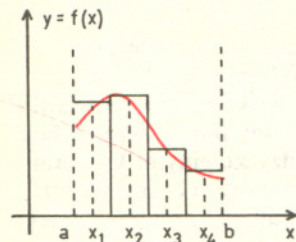


Dr Ryszard ZIELIŃSKI

## OBLICZANIE CAŁEK (c.d.)



Rys. 1



Rys. 2

Podobnie jak w poprzednim odcinku, będziemy zajmowali się metodami Monte Carlo obliczania całki

$$(1) \quad I = \int_a^b f(x) dx.$$

Prezentację bardziej zaawansowanych metod musimy jednak poprzedzić pewnymi uwagami i przypomnieć pewne fakty ze szkolnego kursu rachunku prawdopodobieństwa.

Dla uproszczenia dalszych rozważań będziemy — podobnie jak przy prezentacji poprzednio omawianej metody „orzel-reszka” — zakładali, że  $f$  jest funkcją nieujemną i traktowali całkę (1) jako pole powierzchni ograniczonej osią odciętych, prostymi  $x = a$ ,  $x = b$  i wykresem funkcji  $f$  (rys. 1). Podzielmy odcinek  $(a, b)$  na  $m$  równych części i niech  $x_j$  będzie odcięta punktu będącego środkiem  $j$ -tego odcinka (rys. 2). Mamy wtedy, jak łatwo sprawdzić

$$(2) \quad x_j = a + \left(j - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{m}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Zauważmy, że jeżeli  $m$  jest duże, to pole pod krzywą  $y = f(x)$  nie różni się dużo od pola figury utworzonej przez wszystkie „słupki” przedstawione na rys. 2. Całka  $I$  będzie wtedy w przybliżeniu równa:

$$(3) \quad I \approx (b-a) \sum_{j=1}^m y_j \cdot \frac{1}{m}.$$

Żeby to przybliżenie było „dobre”, funkcja  $f$  musi być dostatecznie regularna (wystarczy np., żeby była ciągła), a liczba  $m$  odpowiednio duża, ale nie będziemy dyskutowali tego szczegółowo. A teraz sięgnijmy do szkolnego kursu rachunku prawdopodobieństwa. Niech  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$  będzie zbiorem zdarzeń elementarnych i niech  $p_j = P(\{\omega_j\})$ . Na zbiorze  $\Omega$  określimy zmienną losową  $Y$  i niech  $y_j$  oznacza wartość tej zmiennej losowej w punkcie  $\omega_j$ , tzn.  $y_j = Y(\omega_j)$ . Wartość oczekiwana  $EY$  tej zmiennej losowej wyraża się znanym wzorem

$$(4) \quad EY = \sum_{j=1}^m y_j p_j,$$

a jeżeli wszystkie prawdopodobieństwa  $p_j$  są równe (a więc jeżeli  $p_j = \frac{1}{m}$ ), otrzymujemy

$$(5) \quad EY = \sum_{j=1}^m y_j \cdot \frac{1}{m},$$

co jest identyczne z sumą występującą po prawej stronie wzoru (3). Mamy więc następujący przybliżony wzór dla całki  $I$ :

$$(6) \quad I \approx (b-a) \cdot EY,$$

gdzie  $Y$  jest odpowiednią zmienną losową.

Przeprowadzimy następujący eksperyment. Weźmy  $m$  jednakowych kartek papieru, na kartkach tych wypiszmy kolejno wartości  $y_1, y_2, \dots, y_m$  (niektóre z liczb  $y_j$  mogą oczywiście być jednakowe) wrzućmy wszystkie kartki do kapelusza, wymieszajmy je starannie i wyciągnijmy na chybił-trafił jedną z nich. Będzie nas interesowała liczba napisana na wylosowanej kartce. Jest to oczywiście jedna z wartości zmiennej losowej, która z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{m}$  przyjmuje każdą

z wartości  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Po wyciągnięciu kartki z kapelusza i zapisaniu sobie liczby z tej kartki, wkładamy ją z powrotem do kapelusza i powtarzamy nasze losowanie, powiedzmy,  $n$  razy. Niech  $Y^{(k)}$  oznacza wynik  $k$ -tego losowania. Oczywiście dla każdego  $k$  mamy

$$P\{Y^{(k)} = y_j\} = \frac{1}{m}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Wyniki kolejnych losowań są niezależne (losowanie ze zwracaniem).

Z prawa wielkich liczb (patrz poprzednie odcinki) wiemy, że z prawdopodobieństwem równym jedności

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y^{(k)} = EY,$$

a centralne twierdzenie graniczne pozwala nam oszacować różnicę między  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y^{(k)} = Y^{(k)}$



### Rozwiązanie zadania M 77.

Niech  $x$  będzie wysokością wieży. Mamy

$$\text{wówczas: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{a},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x}{b}, \quad \operatorname{tg}(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \frac{x}{c}.$$

$$\text{Ale } \frac{x}{c} = \operatorname{tg}(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} =$$

$$= \frac{1 - \frac{x^2}{ab}}{\frac{x}{a} + \frac{x}{b}}.$$

Rozwiązując otrzymane równanie otrzymujemy

$$\text{kolejno } \frac{x}{c} \left( \frac{x}{a} + \frac{x}{b} \right) = 1 - \frac{x^2}{ab},$$

$$x^2 \left( \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ab} \right) = 1, \quad x^2 \frac{a+b+c}{abc} = 1,$$

$$x = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$$

( $x$  jako odległość jest liczbą dodatnią, więc pomijamy rozwiązanie ujemne).





oraz  $EY$ : błąd oszacowania wartości oczekiwanej za pomocą takiej średniej wynosi  $2S_n/\sqrt{n}$ , gdzie (patrz poprzednie odcinki):

$$(7) \quad S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y^{(k)})^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y^{(k)}\right)^2}$$

W ten sposób szacowanie wartości oczekiwanej zmiennej losowej  $Y$ , a więc szacowanie całki (1), sprowadza się do wykonania odpowiedniego eksperymentu i kilku prostych rachunków. Zastąpienie całki  $I$  sumą i korzystanie z przybliżenia (3) było nam potrzebne tylko po to, abyśmy mogli wyjaśnić mechanizm odpowiedniego eksperymentu posługując się pojęciami zmiennej losowej i wartości oczekiwanej zmiennej losowej, znanymi ze szkolnego kursu rachunku prawdopodobieństwa. Możemy uniknąć tego przybliżenia zastępując losowanie kartek z kapelusza losowaniem punktów z przedziału  $(a, b)$ , np. tak jak to już robiliśmy w poprzednim odcinku. Prowadzi to do następującego algorytmu szacowania całki (1):

- 1) wybrać na chybił-trafił punkt z przedziału  $(a, b)$ ;
- 2) obliczyć wartość funkcji  $f$  w wylosowanym punkcie;
- 3) powtórzyć obie czynności  $n$  razy i obliczyć średnią arytmetyczną liczb otrzymanych w punkcie 2;
- 4) obliczyć oszacowanie całki mnożąc wynik z punktu 3 przez liczbę  $(b-a)$ .

Jeżeli oznaczymy przez  $x_k, k = 1, 2, \dots, m$ , współrzędną punktu z przedziału  $(a, b)$ , otrzymanego w  $k$ -tym losowaniu, to dla oszacowania  $\hat{I}$  całki  $I$  otrzymujemy wzór:

$$(8) \quad \hat{I} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k),$$

a błąd tego oszacowania (por. wzór (7)) jest równy

$$(9) \quad \frac{2(b-a)}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^2(x_k) - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)\right)^2}$$

Dla ilustracji przytoczymy dwa wyniki liczbowe. Obliczano całkę  $\int_0^1 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$  (której wartość, równa 0,3413, może być dokładnie obliczona innymi metodami). Obliczenia wykonano raz metodą orzeł-reszka i raz metodą przed chwilą opisaną, w każdym przypadku losując 25 punktów w przedziale całkowania  $(0,1)$ . W przypadku metody orzeł-reszka otrzymano wynik 0,40 z błędem 0,1960; w przypadku przedstawionej wyżej metody otrzymano wynik 0,3442 z błędem 0,0192.

Obliczamy całkę  $I = \int_0^1 f(x) dx$  dla  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

| metodą „orzeł-reszka”  |                           |       |          |                      |
|------------------------|---------------------------|-------|----------|----------------------|
| Numer losowania<br>$j$ | Wylosowany punkt<br>$x_j$ | $y_j$ | $f(x_j)$ | Czy $y_j < f(x_j)$ ? |
| 1                      | 0,10                      | 0,09  | 0,397    | tak                  |
| 2                      | 0,73                      | 0,25  | 0,306    | tak                  |
| 3                      | 0,33                      | 0,76  | 0,378    | nie                  |
| 4                      | 0,52                      | 0,01  | 0,348    | tak                  |
| 5                      | 0,35                      | 0,86  | 0,375    | nie                  |
| 6                      | 0,34                      | 0,67  | 0,377    | nie                  |
| 7                      | 0,35                      | 0,48  | 0,375    | nie                  |
| 8                      | 0,76                      | 0,80  | 0,299    | nie                  |
| 9                      | 0,95                      | 0,90  | 0,254    | nie                  |
| 10                     | 0,91                      | 0,17  | 0,264    | tak                  |
| 11                     | 0,39                      | 0,29  | 0,370    | tak                  |
| 12                     | 0,27                      | 0,49  | 0,385    | nie                  |
| 13                     | 0,45                      | 0,37  | 0,361    | nie                  |
| 14                     | 0,54                      | 0,20  | 0,345    | tak                  |
| 15                     | 0,48                      | 0,05  | 0,356    | tak                  |
| 16                     | 0,64                      | 0,89  | 0,325    | nie                  |
| 17                     | 0,47                      | 0,42  | 0,357    | nie                  |
| 18                     | 0,96                      | 0,24  | 0,252    | tak                  |
| 19                     | 0,80                      | 0,52  | 0,290    | nie                  |
| 20                     | 0,40                      | 0,37  | 0,368    | nie                  |
| 21                     | 0,20                      | 0,63  | 0,391    | nie                  |
| 22                     | 0,61                      | 0,04  | 0,331    | tak                  |
| 23                     | 0,02                      | 0,00  | 0,399    | tak                  |
| 24                     | 0,82                      | 0,29  | 0,285    | nie                  |
| 25                     | 0,16                      | 0,65  | 0,394    | nie                  |

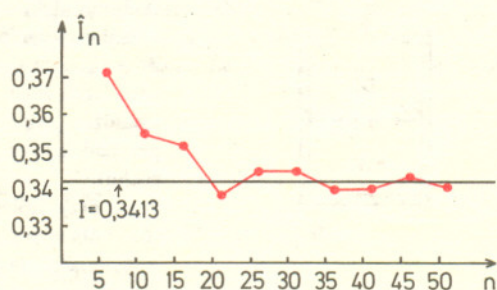
Liczba sukcesów („tak”): 10

Oszacowanie całki  $\hat{I} = 10/25 = 0,4$

| metodą podstawową      |                           |          |
|------------------------|---------------------------|----------|
| Numer losowania<br>$j$ | Wylosowany punkt<br>$x_j$ | $f(x_j)$ |
| 1                      | 0,10                      | 0,3970   |
| 2                      | 0,09                      | 0,3973   |
| 3                      | 0,73                      | 0,3056   |
| 4                      | 0,25                      | 0,3867   |
| 5                      | 0,33                      | 0,3778   |
| 6                      | 0,76                      | 0,2989   |
| 7                      | 0,52                      | 0,3485   |
| 8                      | 0,01                      | 0,3989   |
| 9                      | 0,35                      | 0,3752   |
| 10                     | 0,86                      | 0,2756   |
| 11                     | 0,34                      | 0,3765   |
| 12                     | 0,67                      | 0,3187   |
| 13                     | 0,35                      | 0,3752   |
| 14                     | 0,48                      | 0,3555   |
| 15                     | 0,76                      | 0,2989   |
| 16                     | 0,80                      | 0,2897   |
| 17                     | 0,95                      | 0,2541   |
| 18                     | 0,90                      | 0,2661   |
| 19                     | 0,91                      | 0,2637   |
| 20                     | 0,17                      | 0,3932   |
| 21                     | 0,39                      | 0,3697   |
| 22                     | 0,29                      | 0,3825   |
| 23                     | 0,27                      | 0,3847   |
| 24                     | 0,49                      | 0,3538   |
| 25                     | 0,45                      | 0,3605   |
| Suma                   |                           | 8,6043   |

Oszacowanie całki  $\hat{I} = 8,6043/25 = 0,3442$

Oznaczamy przez  $I_n$  kolejne oszacowania całki uzyskane metodą podstawową po  $n$  losowaniach. Biorąc za podstawę oszacowań wyniki z tabelki (i dalsze, nie podane w tej tabelce) otrzymamy wykres:





Przypomnijmy jeszcze raz (por. »Delta« 11/1975), co oznacza zdanie „otrzymano wynik 0,3442 z błędem 0,0192”.

Zdanie to można sformułować również w następujący sposób: „stwierdzono, że poszukiwana wartość całki jest liczbą z przedziału (0,3250, 0,3634)”. Gdybyśmy jeszcze raz powtórzyli nasze rachunki, otrzymalibyśmy z pewnością inne oszacowanie dla całki i inne oszacowanie dla błędu. Zdanie „poszukiwana wartość całki jest liczbą z przedziału (oszacowanie całki — błąd, oszacowanie całki + błąd)” może być zdaniem prawdziwym lub zdaniem fałszywym, ale prawdopodobieństwo tego, że będzie to zdanie prawdziwe, jest wysokie i wynosi około 0,95. Wartość 0,95 tego prawdopodobieństwa jest związana ze współczynnikiem 2 występującym we wzorze (9) na wielkość błędu.

Podana wyżej metoda (nazywa się ją czasami „metodą podstawową”) jest zawsze dokładniejsza od metody orzeł-reszka w tym sensie, że ma mniejszy błąd (choć może się zdarzyć, że wynik otrzymany metodą orzeł-reszka będzie bliższy prawdy niż wynik otrzymany metodą podstawową). Ilustrują to przytoczone wyżej przykłady liczbowe. Znane są jeszcze dokładniejsze metody Monte Carlo. Najprostsze z nich to metoda losowania warstwowego i metoda średniej ważonej. Pierwsza polega na tym, że przedział całkowania (a w przypadku funkcji wielu zmiennych — obszar całkowania) rozбивa się na sumę rozłącznych przedziałów („warstw”) i całkę przedstawia się jako sumę odpowiednich całek liczonych na poszczególnych warstwach. Np. dla liczb  $c_1, c_2, \dots, c_s$  takich, że  $a \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_s \leq b$  mamy

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_s}^b f(x) dx$$

Każdą z całek takiej sumy szacuje się metodą Monte Carlo, a poszukiwaną wartość całki  $I$  szacuje się jako sumę tych oszacowań. Okazuje się, że prowadzi to do znacznej redukcji błędów.

Na przykład dla podawanej już całki  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2} dx$  przy rozbiściu jej na sumę pięciu całek otrzymano — losując, jak poprzednio, ogółem 25 punktów — wynik 0,3406 z błędem 0,0034.

Metoda średniej ważonej polega, mówiąc z grubsza, na tym, że nie każdy punkt z przedziału całkowania ma jednakowe szanse na wylosowanie. Okazuje się, że w niektórych przypadkach można tak zorganizować losowanie punktów w obszarze całkowania, żeby błąd oszacowania całki był dowolnie mały.

Prezentacja wszystkich metod Monte Carlo obliczania całek wymagałaby znacznie bogatszego aparatu teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, ograniczymy się więc do tego, co już wyżej powiedzieliśmy, a zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do obszernej książki „Metody Monte Carlo” (Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1970).



## Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

**M 76.** Wyznaczyć wszystkie wielomiany  $f$  spełniające dla każdego wielomianu  $g$  i każdej liczby rzeczywistej  $x$  równość

$$f(g(x)) = g(f(x)).$$

Rozwiązanie na str. 17

**M 77.** Z punktów odległych o  $a, b, c$  od wieży widać ją pod kątami  $\alpha, \beta, 90^\circ - (\alpha + \beta)$ . Wyznaczyć wysokość wieży nie korzystając z tablic trygonometrycznych.

Rozwiązanie na str. 12

**M 78.** Udowodnić, że równanie  $x!y! = z!$  ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych  $x, y, z$  większych od 1.

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

**F 26.** Gaz doskonały znajduje się w naczyniu w kształcie walca, którego jedną z podstaw stanowi ruchomy tłok.

Ścianki naczynia i tłok nie przewodzą ciepła.

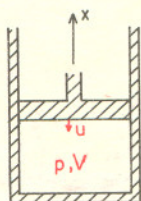
Tłok przesuujemy równomiernie z prędkością  $u$ , znacznie mniejszą od średniej prędkości cząsteczek gazu.

Znajdźcie, jak zmienia się ciśnienie  $P$  gazu w naczyniu, w zależności od objętości  $V$ . Rozważcie przypadek gazu jedno- i dwu-atomowego (odpowiednio o trzech i pięciu stopniach swobody ruchu).

Przed przystąpieniem do rozwiązywania powyższego zadania przypomnijmy sobie wyprowadzanie równania stanu gazu z kinetyczno-molekularnej teorii materii.

(Fizyka dla klasy I str. 165).

Rozwiązanie na str. 17





**MONIKA MARKIEWICZ Z WARSZAWY:** *Uprzejmie proszę o wyjaśnienie mi na lamacki »Deltę« (1) kiedy w definicji nowego pojęcia używamy równoważności, a kiedy słownego sformułowania „jeżeli...”; (2) czy zapis „ $\equiv$ ” oznacza to samo, co „ $\Leftrightarrow$ ”?*

(1) Nie ma tu żadnej reguły, można i tak, i tak. Jest jednak pewna subtelna różnica w sposobie używania tych sformułowań. Porównaj zdania

I. „Df.  $f$  jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek:...”

II. „Df. Jeżeli  $f$  spełnia warunek ..., to mówimy, że jest funkcją ciągłą.”

Pierwsze zdanie jest zdaniem należącym do matematyki, prawdziwym z założenia. Drugie zdanie jest zdaniem o matematyce, ale do matematyki nie należy. Występuje w nim bowiem czasownik „mówić”, odnoszący się do czynności człowieka. Sugeruje ono, że jeśli się chce dobrze rozumieć to, co nastąpi po tym zdaniu, to należy termin „funkcja ciągła” rozumieć w taki sposób, by zdanie I było prawdziwe.

(2) To zależy od używającego te symbole. Bywa tak, że z dwu ludzi jeden używa „ $\equiv$ ”, drugi „ $\Leftrightarrow$ ” w tym samym sensie. Jednakże często  $\Leftrightarrow$  jest symbolem operacji logicznej, która każdej parze dowolnych zdań przyporządkowuje ich równoważność  $p \Leftrightarrow q$ . Ta równoważność może być — w zależności od wartości logicznych zdań  $p$  i  $q$  — prawdziwa lub fałszywa. Natomiast symbol  $\equiv$  rezerwuje się dla takich sytuacji, w których wiadomo, że dwa konkretne zdania  $p$  i  $q$  mają tę samą wartość logiczną, a więc że równoważność  $p \Leftrightarrow q$  jest zdaniem prawdziwym. Napis  $p \equiv q$  oznacza to właśnie (TBI).

## XVII MIĘDZYNARODOWA OLIMPIADA MATEMATYCZNA

W dniach 7–8 lipca 1975 r. odbyła się kolejna Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. Ekipa polska większych sukcesów nie zanotowała. Oto zadania:

**Dzień pierwszy.**

1. Niech  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) będą takimi liczbami rzeczywistymi, że

$$\begin{aligned} x_1 &\geq x_2 \geq x_3 \dots \geq x_n, \\ y_1 &\geq y_2 \geq y_3 \geq \dots \geq y_n. \end{aligned}$$

Dowieść, że jeżeli ciąg  $z_1, z_2, \dots, z_n$  jest dowolną permutacją liczb  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , to

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2.$$

2. Niech  $a_1, a_2, a_3 \dots$  będzie takim ciągiem nieskończonym liczb całkowitych dodatnich, że  $a_k < a_{k+1}$  dla  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Dowieść, że nieskończenie wiele wyrazów  $a_m$  można przedstawić w postaci

$$a_m = x \cdot a_p + y \cdot a_q,$$

gdzie  $x$  i  $y$  są liczbami całkowitymi dodatnimi i  $p \neq q$ .

3. Na bokach dowolnego trójkąta  $ABC$  zbudowano trójkąty  $ABR, BCP, CAQ$  leżące w jego płaszczyźnie, z których żaden nie ma wspólnych punktów wewnętrznych z trójkątem  $ABC$ , przy czym

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle CAQ = 45^\circ,$$

$$\sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 30^\circ,$$

$$\sphericalangle ABR = \sphericalangle BAR = 15^\circ,$$

Dowieść, że  $\sphericalangle QRP = 90^\circ$  i  $QR = RP$ .

**Dzień drugi.**

4. Suma cyfr liczby  $4444^{4444}$  zapisanej w dziesiętnym systemie pozycyjnym jest równa  $A$ . Niech  $B$  będzie sumą cyfr liczby  $A$ . Znaleźć sumę cyfr liczby  $B$ . (Liczby  $A$  i  $B$  zostały zapisane również w dziesiętnym systemie pozycyjnym.)

5. Czy na okręgu o promieniu 1 można znaleźć 1975 takich punktów, że długość każdej cięciwy, której końcami są dwa spośród nich, jest liczbą wymierną? Odpowiedź należy uzasadnić.

6. Znaleźć wszystkie wielomiany  $P$  dwóch zmiennych spełniające następujące warunki:

(1)  $P$  jest wielomianem jednorodnym stopnia  $n$ , to znaczy dla dowolnych liczb rzeczywistych  $t, x, y$  jest

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y),$$

gdzie  $n$  jest liczbą naturalną.

(2) Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b, c$  jest

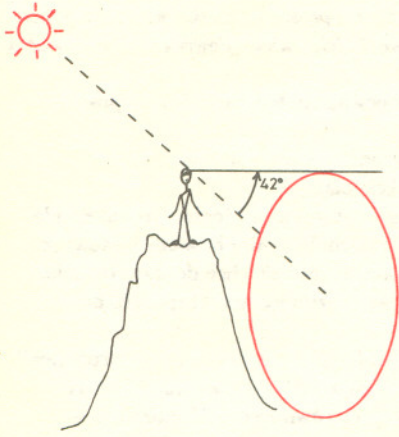
$$P(a+b, c) + P(b+c, a) + P(c+a, b) = 0.$$

(3)

$$P(1, 0) = 1.$$







## TĘCZA

Dr Jan A. GAJ

Któż z nas nie widział tęczy? Proponuję dzisiaj wytworzenie jej w skali laboratoryjnej no i oczywiście zastanowienie się, skąd się ona bierze. Zaczniemy jednak od przypomnienia sobie obserwacji tęczy w naturze. Z dydaktycznego, a z pewnością także i z estetycznego punktu widzenia najciekawsza jest tęcza, którą niekiedy można zobaczyć w górach, znajdując się ponad chmurą i patrząc w kierunku przeciwnym od słońca, to znaczy tak, aby widzieć na chmurze własny cień. Widzimy wtedy tęczę w postaci łuku, którego środek pokrywa się z cieniem naszej głowy — przy szczęśliwym ustawieniu się w stosunku do terenu i kierunku promieni słonecznych można zobaczyć nawet pełny okrąg tęczy. Promień kątowy tęczy wynosi około  $42^\circ$  (patrz rysunek). Przypominam, że na zewnątrz, a więc pod największym kątem do promieni słonecznych obserwujemy barwę czerwoną. Kto tego nie pamięta, nie musi mi wierzyć. Może się o tym przekonać w doświadczeniu, którego treścią jest

### WYTWARZANIE TĘCZY W DOMU

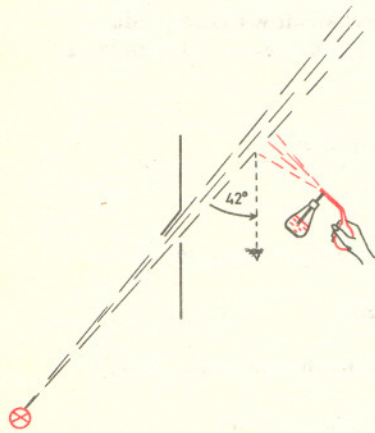
Podstawową trudnością jest takie przeprowadzenie doświadczenia, aby nie być oślepionym przez światło pochodzące od tła. Dlatego próby przeprowadzamy w zaciemnionym pokoju, do którego dość wąską smugą wpada światło słoneczne lub pochodzące od jednej żarówki. Zgodnie z ogólną opinią za tęczę odpowiadają zjawiska zachodzące w kropelkach wody (deszczu, mgły, chmur itp). Naszą „chmurę” wytworzymy za pomocą rozpylacza. Ostrzegam jednak przed różnymi aerozolami — mgła powinna być wodna. Staramy się wytworzyć takie warunki, abyśmy patrząc na mgłę wodną pod odpowiednim kątem mieli jako tło nieoświetloną część pokoju (jak na rysunku). Obserwację „tęczy”, która przy słabej żarówce może być widoczna jedynie jako jasny łuk bez kolorów, ułatwi nam lekkie poruszanie głową — tęcza będzie się także poruszać.

Po wstępnym zapoznaniu się ze zjawiskiem przychodzi nieuchronnie kolej na pytanie

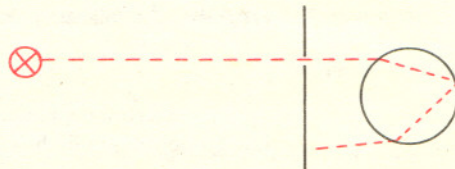
### JAK POWSTAJE TĘCZA?

Na to pytanie będziemy musieli odpowiedzieć sobie sami. Pomoże Wam w tym następne doświadczenie. Jednocześnie ostrzegam Was: w wielu książkach zjawisko tęczy wyjaśnione jest w sposób zupełnie niewystarczający, a czasem nawet błędny. Myślcie więc samodzielnie, nie zrażając się tym, że nawet w Encyklopedii Fizyki nie podano interesującego nas wyjaśnienia. W doświadczeniu potrzebna nam będzie żarówka (lub światło słoneczne), tekturka i butelka lub szklanka możliwie dokładnie w kształcie walca, napełniona wodą. Żarówka powinna być umieszczona w odległości paru metrów od szklanki, nieco powyżej niej, najlepiej w sąsiednim pokoju. Podobnie jak w poprzednim doświadczeniu, wyłączamy wszelkie inne źródła światła. W tekturce wycinamy dziurkę i umieszczamy ją tak, aby przepuszczany przez nią promyk światła żarówki padł na butelkę. Po załamaniu i odbiciu w butelce z wodą, promyk padnie na tekturkę, gdzie można obserwować jego ślad, oczywiście patrząc od strony butelki.

jeżeli nie czytaliście artykułu dra Zbigniewa Płochockiego w «Dalcie» 10/1975



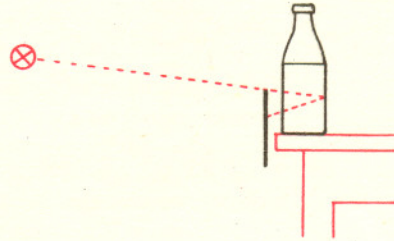
nie używajcie kartki papieru lub cienkiego kartonu, bo światło żarówki będzie przez nie przenikać i utrudni obserwację plamki





Jeżeli dysponujecie odpowiednią ilością alkoholu — zastąpcie nim wodę w butelce, a przekonacie się, dlaczego odradzałem Wam aerozole.

Spróbujcie teraz przesuwać tekturkę na boki patrząc co się dzieje z promieniem, kiedy pada on na butelkę w różnych miejscach. Zwróćcie szczególną uwagę na fakt, że przesuując stopniowo promień padający od środka butelki ku jej brzegowi widzimy, że plamka na tekturce najpierw posuwa się w jednym kierunku a potem zawraca. Żeby nie mieć wątpliwości, że to to samo zjawisko, co we mgle wodnej, umieśćcie Waszą tekturkę w sposób pokazany na rysunku i patrzcie na nią od strony butelki — ujrzycie rodzaj tęczy, ale jednowymiarowej, bo butelka jest walcem a nie kulą, jak kropelki wody. Już gotowi do doświadczeń? No to powodzenia — w działaniu i w myśleniu.



**Rozwiązanie zadania F 26.**

Rozważmy przypadek sprężania gazu. Przesuwając tłok wykonujemy pewną pracę nad gazem i tym samym dostarczamy mu energii. Należy policzyć zmianę energii cząsteczek gazu w jednostce gazu w wyniku ich zderzeń z tłokiem. Cząsteczki gazu posiadają różne prędkości. Spośród całkowitej liczby cząsteczek  $N$ , wyróżnijmy grupę  $N_1$  cząsteczek, które posiadają w danej chwili składową prędkości wzdłuż osi tłoka  $v_{1x} > 0$  (niech oś  $x$  układu współrzędnych pokrywa się z osią tłoka).

Liczmy zmianę energii cząsteczki o prędkości  $v_{1x}$  w wyniku zderzenia z tłokiem. W układzie odniesienia związanym z tłokiem,  $x$  — owa składowa prędkości cząsteczki przed i po zderzeniu wynosi odpowiednio  $v_{1x} + u$  oraz  $-(v_{1x} + u)$ . Te same wielkości liczone względem nieruchomych ścianek naczynia wynoszą odpowiednio  $v_{1x}$  i  $-(v_{1x} + 2u)$ . Stąd zmiana energii rozważanej cząsteczki o masie  $m$  wynosi:

$$\Delta E = \frac{m}{2} (v_{1x} + 2u)^2 - \frac{m}{2} v_{1x}^2 \approx 2mv_{1x} \cdot u,$$

Jeżeli zaniedbamy wyraz z  $u^2$  jako mały.

W odstępie czasu  $\Delta t$ , spośród  $N_1$  cząsteczek tylko te mogą uderzyć o tłok, które znajdują się od niego w odległości bliższej niż  $(v_{1x} + u)\Delta t$ . Takich cząsteczek jest w naczyniu:

$$N_1 \cdot \frac{S(v_{1x} + u)\Delta t}{V}, \text{ gdzie } S \text{ jest powierzchnią tłoka.}$$

W odstępie czasu  $\Delta t$  ich energia zmienia się o  $\Delta E_1$ ,

$$\Delta E_1 = \frac{2N_1 \cdot S \cdot m \cdot u}{V} v_{1x}^2 \Delta t.$$

Wyraz z  $u^2$  został ponownie pominięty.

Żeby obliczyć całkowitą zmianę energii wszystkich cząsteczek, musimy uwzględnić cząsteczki o wszystkich możliwych prędkościach  $v_{1x}$ .

$$\Delta E_{\text{całk}} = \frac{2 \cdot S \cdot m \cdot u \cdot \Delta t}{V^2} \sum_i N_i v_{1x}^2 = \frac{Smu\Delta t}{V} N \cdot \bar{v}_x^2 = 1/3 \frac{Smu\Delta t}{V} N \cdot \bar{v}^2,$$

gdzie  $\bar{v}_x^2$  jest średnim kwadratem  $x$  — owej składowej prędkości cząsteczek gazu, a  $\bar{v}^2$  — średnim kwadratem prędkości cząsteczek. W powyższych przekształceniach uwzględniliśmy jednakowe prawdopodobieństwo występowania cząsteczek poruszających się w kierunku do tłoka ( $v_{1x} > 0$ ) i w kierunku przeciwnym ( $v_{1x} < 0$ ). Dla gazu jednoatomowego całkowita energia cząsteczek gazu,  $E_{\text{całk}}$  wynosi:

$$E_{\text{całk}} = \frac{1}{2} N \cdot m \cdot \bar{v}^2.$$

Dla gazu dwuatomowego:  $E_{\text{całk}} = \frac{5}{6} Nm\bar{v}^2$ . Ogólnie obowiązuje zależność:

$$E_{\text{całk}} = \frac{l}{6} Nm\bar{v}^2, \text{ gdzie } l \text{ oznacza liczbę stopni swobody ruchu.}$$

Stąd:

$$\Delta E_{\text{całk}} = \frac{2}{l} \frac{S \cdot u \cdot \Delta t}{V} \cdot E_{\text{całk}}$$

Ponieważ wyrażenie  $S \cdot u \cdot \Delta t$  oznacza zmianę objętości gazu (ze znakiem „-”, bo rozważamy sprężenie gazu), więc (w granicy  $\Delta t \rightarrow 0$ ):

$$\frac{dE_{\text{całk}}}{E_{\text{całk}}} = - \frac{2}{l} \frac{dV}{V}$$

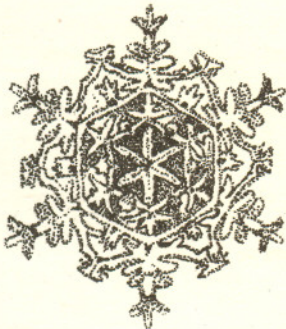
Całkując to równanie otrzymujemy:

$$E_{\text{całk}} V^{\frac{2}{l}} = \text{const}$$

Uwzględniając zależność  $pV \sim E_{\text{całk}}$  (równanie stanu dla gazu doskonałego) otrzymujemy związek:

$$pV^{\frac{l+2}{l}} = \text{const.}$$

Jest to znane równanie dla przemiany adiabatycznej. Wartość wykładnika  $\kappa = \frac{l+2}{l}$  wynosi 5/3 dla gazów jednoatomowych i 7/5 dla gazów dwuatomowych.



**Rozwiązanie zadania M 76**

Przypuśćmy, że wielomian  $f$  ma żądaną własność.

W szczególności dla wielomianu stałego  $g(x) = c$  dla każdego  $x$ , gdzie  $c$  jest dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą) zachodzi równość

$$f(c) = c.$$

Wielomian  $f$  jest więc funkcją tożsamościową.

Funkcja tożsamościowa  $f$  ma oczywiście żądaną własność, gdyż  $f(g(x)) = g(x) = f(f(x))$ .



