



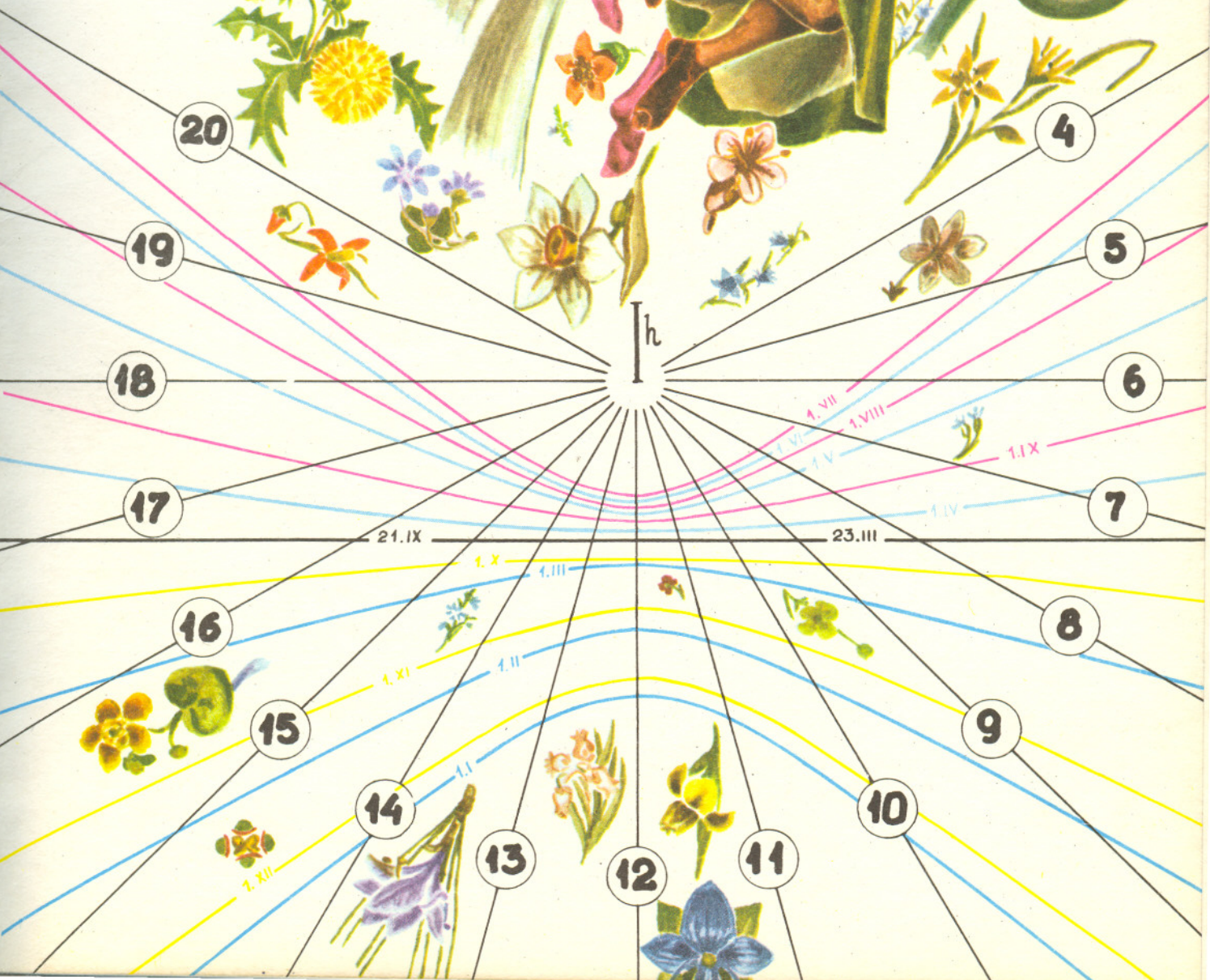
h-6.63-10-J-s II-3,14159

CENA 5 ZŁ

NR 3 1976

deja

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNY



20

4

19

5

18

6

17

7

16

8

15

9

14

10

13

12

11

SPIS TREŚCI

Kombinatoryka i boisko <i>Dr hab. Wiktor Marek</i>	str. 1
Zjawisko Dopplera w optyce <i>Dr Aleksandra Kopystyńska</i>	str. 4
Mała Delta	str. 6
Laboratorium w domu <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 10
Trochę teorii sprężystości <i>Mgr Waclaw Frydrychowicz</i>	str. 12
Metody Monte Carlo VI <i>Dr Ryszard Zieliński</i>	str. 15
Zadania	str. 17

„Delta”
 matematyczno-fizyczny miesięcznik
 popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego i Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
 doc. dr J. Bartke
 prof. dr Grzegorz Białkowski —
 przewodniczący
 doc. dr A. Bączyński
 doc. dr B. Gleichgewicht
 doc. dr K. Goebel
 doc. dr B. Iwaszkiewicz
 doc. dr T. Iwiński
 doc. dr A. Januszajtis
 prof. dr Leon Jeśmanowicz —
 wiceprzewodniczący
 mgr H. Kaczorek
 prof. dr B. Karczewski
 prof. dr M. Kuczma
 mgr A. Mąkowski
 prof. dr Z. Pawlak
 prof. dr A. Piekara

prof. dr Z. Semadeni
 prof. dr J. Stankowski
 prof. dr M. Subotowicz
 doc. dr S. Turnau
 doc. dr J. Wdowczyk

Redaguje Kolegium w składzie:
 doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
 dr T. B. Iwiński
 dr M. Kordos — red. nac.
 mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.
 doc. dr M. Świącki
 D. Tys — sekr. red.

Adres Redakcji
 ul. Hoża 69 p. 151,
 00-681 Warszawa.

Zakład Narodowy im.
 Ossolińskich — Wydawnictwo.
 Wrocław, Oddział w Warszawie
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
 wyd.: 2,50 ark. druk.;
 papier offsetowy III kl., 80 g, 61 × 86
 Wydrukowano w Drukarni im.
 Rewolucji Październikowej,
 Warszawa, ul. Mińska 65.
 Nr zam. 1562/75 J-113

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowo właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

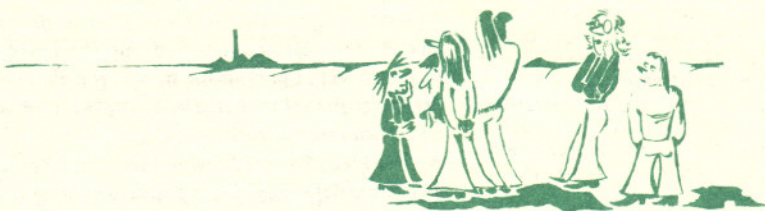
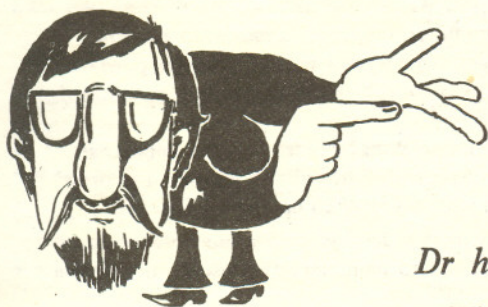
Cena 1 egzemplarza zł 5, —

nr indeksu 35723/35550

W następnym numerze:

Wszystko o dźwięku

Zdjęcia na IV stronie okładki poprzedniego numeru wykonał Andrzej Zawada.



Dr hab. Wiktor MAREK

— Właściwie to ja bardziej lubię grać w siatkówkę niż pić piwo, powiedział Staszek do kolegów rozpinając ortalionową wiatrówkę i grzejąc twarz w ostrych promieniach marcowego słońca.

— Ba, każdy woli, — mruknął Kazik.

— No właśnie, jest nas sześciu, Janek, Piotr I, Piotr II, Kazik, Bronek no i ja. Gdybyśmy mieli boisko do siatkówki, to byłaby z nas nawet niezła drużyna.

— Pewnie.

— Ale gdzie grać?

— Na podwórku u Piotra I jest kawałek ziemi, który by się nadał na boisko. Ale trzeba by nad nim popracować, zrobić różne rzeczy: splantować teren, wykopać doły pod słupy, zrobić te słupy, nawieźć ziemi, zrobić wał żeby była trybuna — dziewczynom też się coś należy — no i zebrać butelki po wódce — jak je sprzedamy to będą pieniądze na siatkę i piłkę.

— Chłopaki z Ogrodowej będą nam zazdrościć.

— Ale grać przyjdą.

— Pewnie, ale jak już będzie gotowe.

— No to może Janek, Piotr II i Bronek splantują tę ziemię — powiedział Staszek, — a ja z Piotrem I i Kazikiem wykopię doły.

— Kto zrobi słupy?

— Ja — krzyknął Bronek, — ale nie sam.

— No pewnie, — powiedział Staszek, — pomożemy ci z Piotrem II.

— Do wożenia ziemi to ja się nadam — dodał Piotr II, — mam starą taczkę w piwnicy.

— I ja, i ją — krzyknęli Janek i Piotr I.

— A ten wał to już my ubijemy z Piotrem i Kazikiem — powiedział Staszek.

— Przecież już razem kopiecie doły.

— A co, nie można?

— No, zostają już tylko te butelki, ale to proste — rzekł Janek — ja sam pochodzę koło zsyków.

— Dobrze, możemy pójść razem — rzekł Bronek.

— Tylko, że ktoś powinien być odpowiedzialny za każdą robotę.

— I za różne kto inny.

— No pewnie, niech się chłopaki męczą — rzekł Piotr II.

— Ciebie też nie minie.

— A co, wykręcam się?

— Bardzo skomplikowana sprawa.

— Co?

— No wybór tych odpowiedzialnych.

— E, tam — rzekł Bronek — ja zorganizuję równanie boiska.

— A ja zajmę się tymi dołami — powiedział Piotr I.

— No to ja będę doglądać słupów — dodał Piotr II.

— Więc ja muszę się wziąć za taczki — rzekł Janek.

— Klops.

— Co klops.

— Kto zajmie się szkłem?

— A rzeczywiście, albo Janek zostawi taczki, albo Bronek równanie boiska.

— Wy tak na siłę, a tu sposobem trzeba.

— Już mam, — powiedział Staszek i zaczął coś kreślić patykiem na piasku.

— To będzie tak: Równanie zorganizuje Bronek, kopanie dołów ja sam, słupami zajmie się Piotr II, wożeniem ziemi Piotr I, Kazik wałem, a szkłem Janek. Dobrze?

— Pewnie — krzyknęli chłopcy i pobiegli wypić ostatnie piwo przed zajęciem się

czymś pożytecznym.





Rozwiązanie zadania M 80.

Przypuśćmy, że dla pewnych liczb naturalnych x_1, x_2, y_1, y_2 zachodzą związki $x_1! + y_1! = x_2! + y_2!, x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, x_1 < x_2$. Wówczas zachodzi też nierówność $y_1 > y_2$, gdyż w przeciwnym przypadku byłoby $x_1! + y_1! < x_2! + y_2! \leq x_2! + y_2!$ co przeczyłoby równości $x_1! + y_1! = x_2! + y_2!$. Ponieważ jest $x_2 \leq y_2, x_2 < y_1$, więc liczba $x_2! + y_2! - y_1! = x_1!$ dzieli się przez $x_2!$, co jest niemożliwe, gdyż $x_1 < x_2$. Przyjęcie nasze jest więc fałszywe a więc nie istnieją liczby, które można dwoma sposobami przedstawić w postaci $x! + y!$

Symbol $|A|$ oznacza ilość elementów zbioru A .



Kłopot kolegów rozwiązany, ale zobaczymy, jak można go uogólnić, tak by stał się interesującym problemem matematycznym.

A więc mamy zbiór X (to nasi koledzy z podwórka) i ciąg jego — niekoniecznie różnych — podzbiorów X_1, \dots, X_n (X_1 to zbiór kolegów, którzy splantują teren, X_2 to zbiór złożony z tych, co zrobią słupy itd). Teraz każdemu ze zbiorów X_1, \dots, X_n chcemy tak przyporządkować jego element (to właśnie odpowiedzialny za pracę), który nazwiemy *reprezentantem*, by różnym wyrazom ciągu przypisane były różne elementy (choć same wyrazy mogą czasem się powtarzać). Jeśli więc mamy taki ciąg $\langle X_1, a_1 \rangle, \dots, \langle X_n, a_n \rangle$, że $a_i \in X_i$ oraz $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$ to nazwiemy go *selektorem* dla rodziny $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$.

A więc kiedy uporządkowana rodzina $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ ma selektor? Bez trudu przekonujemy się, że dla każdej liczby $k < n$ złączenie (suma teoriomnogościowa) dowolnych k spośród zbiorów naszej rodziny $X_{i_1} \cup \dots \cup X_{i_k}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_k$) musi zawierać co najmniej k elementów.

(Mamy bardzo prostą interpretację na naszym przykładzie: Jeśli wzięliśmy jakiegokolwiek cztery spośród naszych zbiorów, to ich złączenie zawierać musi co najmniej cztery osoby, mianowicie odpowiedzialnych).

Znacznie mniej oczywistą rzeczą jest to, że wskazany warunek konieczny jest też i dostateczny. Twierdzenie powyższe nazywa się twierdzeniem Halla.

Twierdzenie Halla: Na to, by uporządkowana rodzina $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ miała selektor, potrzeba i wystarcza by dla każdego $k \leq n$ i dowolnego ciągu $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$:

$$\left| \bigcup_{j=1}^k X_{i_j} \right| \geq k.$$

Interesującym, a mniej nieco znanym faktem jest to, że można podać algorytm konstrukcji selektora. Algorytm ten konstruuje selektor (o ile selektor istnieje). Opiszemy go poniżej. Bez trudu możemy założyć, że nasz zbiór X składa się z liczb. Jeśli liczy on m elementów, to możemy założyć, że jest on po prostu zbiorem $\{1, \dots, m\}$.

Zatem wypisując elementy zbiorów X_1, \dots, X_n po kolei mamy

$$\begin{aligned} X_1 &= \{j_1^1, \dots, j_{r_1}^1\}, \\ &\dots \\ X_n &= \{j_1^n, \dots, j_{r_n}^n\}. \end{aligned}$$

Zaczynamy

od tego, że ze zbioru X_1 wybieramy j_1^1 i parę $\langle X_1, j_1^1 \rangle$ nazywamy chwilowym selektorem dla zbioru X_1 . Parę tę notujemy na specjalnej kartce noszącej tytuł „*Selektor chwilowy*”. Na kartce tej będzie do tego momentu stale wypisany ciąg

$$\langle X_1, a_1 \rangle, \langle X_2, a_2 \rangle, \dots, \langle X_k, a_k \rangle,$$

(oczywiście najpierw jednoelementowy) zwany selektorem chwilowym rodziny $\langle X_1, \dots, X_k \rangle$ (też najpierw jednoelementowej).

□

Sprawdzamy teraz, czy k jest równe n .

Jeśli tak,

to na kartce „*Selektor chwilowy*” wycieramy słowo „*chwilowy*” i kończymy pracę.

Jeśli nie

czyli $k < n$, to mamy jedną z dwu sytuacji:

Albo

w zbiorze X_{k+1} jest liczba nie występująca w zbiorze $\{a_1, \dots, a_k\}$ — patrz „*Selektor chwilowy*”. Wówczas selektor chwilowy przedłużamy dopisując na końcu parę

$$\langle X_{k+1}, b \rangle$$

gdzie b jest najmniejszą z liczb ze zbioru

$$X_{k+1} - \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Zastępujemy też k przez $k+1$ i wracamy do □.

Albo

$X_{k+1} \subset \{a_1, \dots, a_k\}$. Bierzymy wtedy nową kartkę, na której wypisujemy elementy zbioru X_{k+1} w pionowych kreskach, a pod spodem piszemy ✕.

Mamy więc napis

$$\underbrace{j_1^{k+1}, \dots, j_{r_{k+1}}^{k+1}}_{\times}$$

Napis na tej kartce nazwiemy *listą*, a jej części pomiędzy kreskami — *sektorami* (będzie ich potem więcej).

□□

Mamy więc *listę* podzieloną na *sektory*, powiedzmy S_1, \dots, S_t . Bierzymy teraz pierwszą z liczb naszej *listy*, nad którą nie ma kreski, niech będzie to y (na początku wcale nie ma kreski, więc bierzemy po prostu pierwszą liczbę z *listy*).



Rozwiązanie przykładu 1 z zadania F27

Zachodzi następujący związek między częstością fali emitowanej ν_0 i częstością obserwowaną ν :

$$(1) \quad \nu = \nu_0 \frac{1}{1 + \frac{v}{v_f}}$$

gdzie v jest prędkością oddalającej się rakiety ($v > 0$), a v_f prędkością fazową fali elektromagnetycznej w środowisku, w którym następuje emisja ($v_f = \nu_0 \lambda$, gdzie λ jest długością fali w danym środowisku).

Oczywiście $v_f = \frac{c}{n}$, gdzie c jest prędkością fali elektromagnetycznej w próżni, a n współczynnikiem załamania środowiska. Ponieważ $v \ll v_f$ wzór (1) możemy przepisać w postaci:

$$\nu \approx \nu_0 \left(1 - \frac{v}{v_f} \right) = \nu_0 \left(1 - n \frac{v}{c} \right).$$

Stąd:

$$(2) \quad |\nu - \nu_0| = n \nu_0 \frac{v}{c}.$$

Częstość występowania wzmocnień w aparaturze odbiorczej oczywiście odpowiada różnicy $\nu - \nu_0$. Podstawiając znane wartości liczbowe do wzoru (2) otrzymamy dla n wartość $\frac{1}{2}$.

Czy wartość współczynnika n mniejsza od jedności nie niepokoi Was, Czytelnicy? Zaniepokojonych odsyłamy do str. 13.



Rozwiązanie zadania M 81.

Załóżmy, że k jest pierwiastkiem każdego z danych równań, a więc że zachodzą równości

$$ak^2 + bk + c = 0, \\ ck^2 + bk + a = 0.$$

Odejmując je stronami otrzymujemy $(a-c)k^2 - (a-c) = 0$, co wobec $a \neq c$ daje $k^2 = 1$ czyli $k = \pm 1$. Podstawiając tę wartość k do któregoś z równań otrzymujemy $a + b + c = 0$ czy $a + c = -b$ skąd $|a + c| = |b|$. Załóżmy teraz, że $|a + c| = |b|$ czyli $a + c = \mp b$ skąd $a \pm b + c = 0$. Oznacza to, że jedna z liczb 1 i -1 jest wspólnym pierwiastkiem obydwu równań.

Gdy takiej liczby nie ma, stwierdzamy: „Rodzina $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ nie ma selektora” i kończymy pracę.

W przeciwnym razie piszemy nad y kreskę i znów mamy do czynienia z jedną z dwóch sytuacji:

Albo

y należy do $\{a_1, \dots, a_n\}$ — patrz „Selektor chwilowy”. Wtedy y jest reprezentantem któregoś ze zbiorów X_1, \dots, X_k (i tylko jednego). Niech zbiorem tym będzie X_u . Wówczas powiększamy listę o nowy sektor, pod którym piszemy y (tak, jak pod pierwszym napisaliśmy \times). Nowy sektor tworzą liczby które należą do X_u i nie należą do żadnego z wypisanych już sektorów, a więc elementy zbioru

$$X_u - (S_1 \cup \dots \cup S_t).$$

Gdy $X_u \subset S_1 \cup \dots \cup S_t$, dopisany sektor będzie wyglądał tak



Zamiast t bierzemy teraz $t+1$ (tyle mamy sektorów) i wracamy do

Albo

y nie należy do $\{a_1, \dots, a_k\}$.

y jest na liście w jakimś i tylko jednym sektorze, pod którym, co więcej, jest coś napisane, powiedzmy m .

Teraz w „Selektorze chwilowym”

gdy $m = \times$

dopisujemy na końcu $\langle X_{k+1}, y \rangle$, bierzemy jako k liczbę $k+1$ (tak długi mamy już selektor), wyrzucamy kartkę z listą i wracamy do

gdy $m \neq \times$

dla pewnego $i \leq k$ jest $m = a_i$. Wówczas zamieniamy napis $\langle X_i, a_i \rangle$ na napis $\langle X_i, y \rangle$, bierzemy jako y liczbę m i wracamy do .

Teraz trzeba już tylko uzasadnić, że nasz program wydrukuje selektor dla rodziny $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ (o ile istnieje, a więc jeśli warunek Halla jest spełniony). Przypuśćmy przeciwnie: nie udało nam się utworzyć selektora. Stanie się tak wtedy gdy byliśmy w punkcie , ale nad wszystkimi elementami listy były kreski. Zatem na wypisanej liście pojawiły się wyłącznie elementy ze zbioru $\{a_1, \dots, a_k\}$ (dlaczego?), choć może nie wszystkie. Powiedzmy — w liście naszej wypisaliśmy a_{i_1}, \dots, a_{i_w} . Każdy z nich jest reprezentantem któregoś spośród zbiorów X_1, \dots, X_k , mianowicie a_{i_1} reprezentuje X_{i_1} , a_{i_w} reprezentuje X_{i_w} . Ale jeśli a_i występuje w liście, to całe X_i zostanie wypisane w liście. Istotnie, to co nie zostało wypisane do sektora pod którym jest wypisana a_i , zostanie wypisane w tym sektorze. A więc w naszej liście wypisaliśmy $w+1$ zbiorów: X_{k+1} a potem X_{i_1}, \dots, X_{i_w} . Jednakowoż ich suma liczy w elementów przecząc warunkowi Halla.

A więc wykazaliśmy skuteczność naszego algorytmu.

Ale udowodniliśmy po drodze istotne wzmocnienie twierdzenia Halla:

Jeśli $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ jest rodziną spełniającą warunek Halla, $k < n$ i $\langle \langle X_1, a_1 \rangle, \dots, \langle X_k, a_k \rangle \rangle$ jest selektorem dla rodziny $\langle X_1, \dots, X_k \rangle$, to istnieje taki selektor $\langle \langle X_1, b_1 \rangle, \dots, \langle X_n, b_n \rangle \rangle$ dla rodziny $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$, że $\{a_1, \dots, a_k\} \subset \{b_1, \dots, b_n\}$.

A więc jeśli mamy wybranych odpowiedzialnych za pierwszych k zadań, to możemy tak wybrać odpowiedzialnych za wszystkie zadania, że obrani do tej pory będą odpowiedzialnymi (choć może za inne zadania).

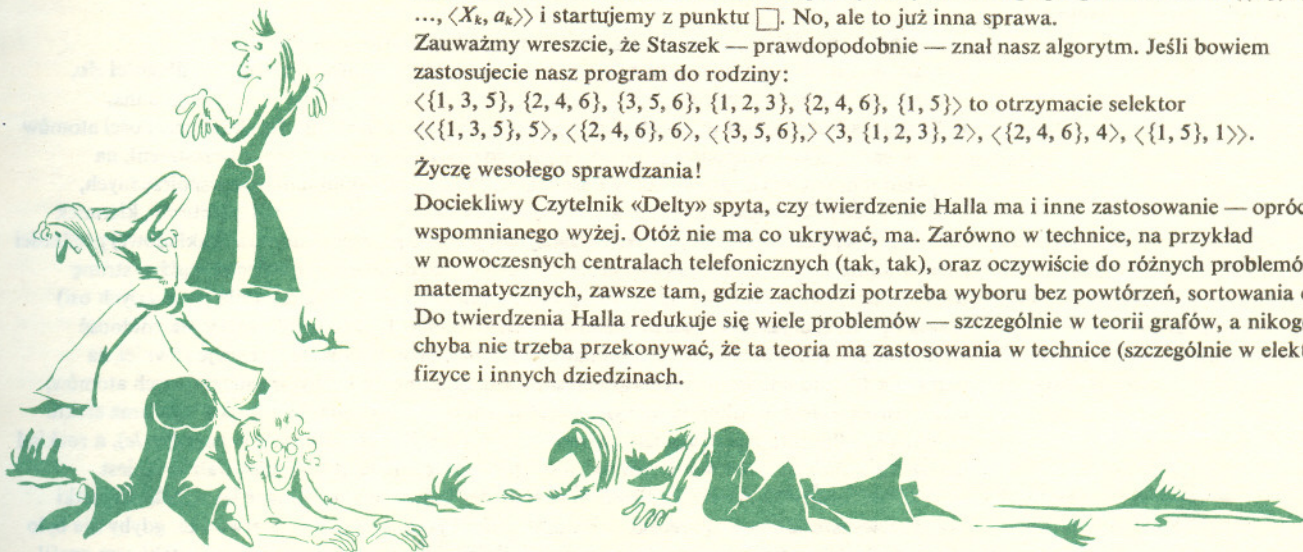
A dowód tego wzmocnienia? Po prostu podłączamy do naszego programu selektor $\langle \langle X_1, a_1 \rangle, \dots, \langle X_k, a_k \rangle \rangle$ i startujemy z punktu . No, ale to już inna sprawa.

Zauważmy wreszcie, że Staszek — prawdopodobnie — znał nasz algorytm. Jeśli bowiem zastosujecie nasz program do rodziny:

$\langle \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 5\} \rangle$ to otrzymacie selektor $\langle \langle \{1, 3, 5\}, 5 \rangle, \langle \{2, 4, 6\}, 6 \rangle, \langle \{3, 5, 6\}, 3 \rangle, \langle \{1, 2, 3\}, 2 \rangle, \langle \{2, 4, 6\}, 4 \rangle, \langle \{1, 5\}, 1 \rangle \rangle$.

Życzę wesołego sprawdzania!

Dociekliwy Czytelnik «Deltę» spyta, czy twierdzenie Halla ma i inne zastosowanie — oprócz wspomnianego wyżej. Otóż nie ma co ukrywać, ma. Zarówno w technice, na przykład w nowoczesnych centralach telefonicznych (tak, tak), oraz oczywiście do różnych problemów matematycznych, zawsze tam, gdzie zachodzi potrzeba wyboru bez powtórzeń, sortowania etc. Do twierdzenia Halla redukuje się wiele problemów — szczególnie w teorii grafów, a nikogo chyba nie trzeba przekonywać, że ta teoria ma zastosowania w technice (szczególnie w elektronice), fizyce i innych dziedzinach.





Dr Aleksandra KOPYSTYŃSKA

Christian Doppler (1803–1853) — austriacki fizyk i astronom.

$\lambda = \frac{v}{\nu_0}$ — długość fali jest równa ilorazowi prędkości jej rozchodzenia się w danym ośrodku i częstości ν_0 , z jaką jest ona emitowana przez źródło.

Zjawisko Dopplera każdemu kto o nim wie niewiele, kojarzy się z efektami akustycznymi. Typowy, szkolny przykład mówi o nadjeżdżającej lokomotywie i obserwatorem znajdującym się blisko toru. Lokomotywa gwizdże, a więc wysyła fale akustyczne, a obserwujący jej przejazd człowiek słyszy wyraźnie zmianę tonu gwizdu w chwili, gdy lokomotywa mija go. Przechodząc od przykładu do rozważań ogólnych, będziemy operowali pojęciami źródła wysyłającego fale (nie koniecznie akustyczne) o częstości ν_0 i odbiornika reagującego na częstość dochodzących do niego fal. Jeżeli przez v oznaczymy prędkość z jaką porusza się źródło, a przez c oznaczymy prędkość rozchodzenia się fal w otaczającym źródło ośrodku, występowanie efektu Dopplera przejawia się w tym, że nieruchomy odbiornik zarejestruje fale o częstości

$$\nu = \nu_0 \left(1 \pm \frac{v}{c} \right).$$

Znak „+” odpowiada sytuacji, w której źródło zbliża się do odbiornika, znak „-” natomiast odpowiada sytuacji, w której źródło oddala się. Efekt Dopplera wystąpi też, gdy odbiornik porusza się, a źródło fal jest nieruchome, jak również wtedy, gdy porusza się zarówno źródło, jak i odbiornik. Podany wzór dobrze opisuje oba przypadki, w których porusza się jeden z elementów, a drugi pozostaje nieruchomy, jeżeli spełniony jest warunek, że prędkość v źródła lub odbiornika jest znacznie mniejsza od prędkości c z jaką rozchodzą się fale. Ustalamy uwagę na przypadku, w którym ruchome jest źródło i niech tym źródłem będzie atom emitujący promieniowanie o częstości spełniającej warunek

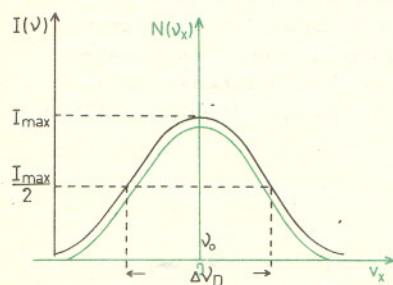
$$\nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h},$$

gdzie E_2 oznacza energię stanu wzbudzonego, w którym atom znajdował się przed aktem emisji, a E_1 oznacza energię stanu, w którym atom znalazł się po akcie emisji, h oznacza stałą Plancka. Ale czy możemy obserwować określony atom w zbiorze identycznych atomów? Oczywiście nie. Atomy w zbiorze stanowiącym gaz lub parę, poruszają się w różnych kierunkach z różnymi prędkościami o charakterystycznym rozkładzie opisanym wzorem Maxwella:

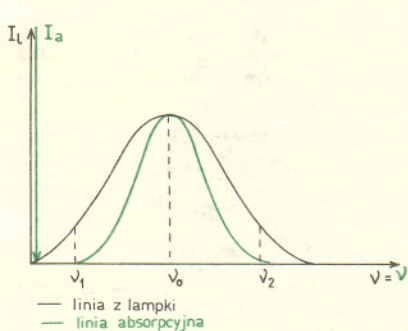
$$\Delta N(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot N \cdot v^2 \cdot e^{-mv^2/2kT} \Delta v.$$

We wzorze tym $\Delta N(v)$ jest długością małego przedziału wartości liczby atomów poruszających się z prędkościami bliskimi wartości v , zawartymi w przedziale o długości Δv , N oznacza całkowitą liczbę atomów zbioru, m jest masą atomu, k jest stałą Boltzmanna, a T oznacza temperaturę gazu lub pary podaną w stopniach Kelvina. Rozkład prędkości atomów w fazie gazowej jest izotropowy. Możemy więc rozważać jeden kierunek w przestrzeni, na przykład ten, w którym prowadzimy obserwację. W kartezjańskim układzie współrzędnych, którego początek umieszczony jest w środku naczynka zawierającego badane atomy, kierunek obserwacji wybieramy wzdłuż osi x . W naczynku jest pewna grupa atomów o składowej prędkości $v_x = 0$, są też atomy, które poruszają się tak, że ich składowe v_x są zwrócone bądź w stronę odbiornika, bądź też w stronę przeciwną. Ostatecznie, dla osi x (tak jak i dla pozostałych osi) rozkład prędkości jest taki, jak przedstawiony na rysunku 1. Odbiornik, który ma zdolność analizowania pod względem częstości padającego nań promieniowania, reaguje również na natężenie I . Natężenie promieniowania jest proporcjonalne do liczby promieniujących atomów, a te poruszają się z prędkościami wykazującymi rozkład Maxwella. W wyniku tego oraz efektu Dopplera, odbiornik rejestruje całe pasmo częstości zgodnie ze wzorem $\nu = \nu_0(1 \pm v_x/c)$, a rozkład natężenia w funkcji częstości w tym paśmie, które następnie będziemy nazywali linią, jest również pokazany na rysunku 1. Szerokość linii $\Delta\nu_D$ zmierzona w połowie jej wysokości, setki razy przewyższa tak zwaną szerokość naturalną linii, jaką można by obserwować, gdyby nie było efektu Dopplera. Warto tu może zauważyć, że linie emisyjna i absorpcyjna mają taki sam profil.

James Clark Maxwell (1831–1879) — angielski fizyk, autor wielu prac z różnych dziedzin fizyki, sformułował podstawowe równania elektrodynamiki.
Patrz «Delta» 9/1974.



Rys. 1



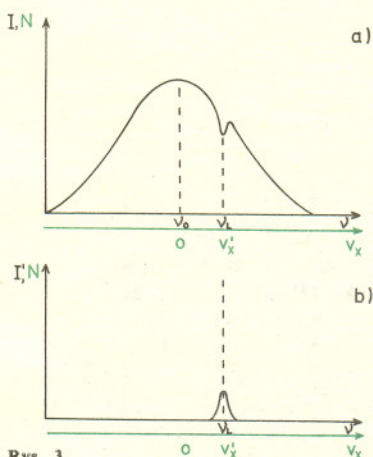
Rys. 2

Odwróćmy zagadnienie i zamiast obserwować linię emitowaną przez zbiór atomów, zbadajmy kształt i szerokość linii absorbowanej przez zbiór atomów. Oświetlimy naczynko wzdłuż osi x promieniowaniem rezonansowym pochodzącym z konwencjonalnego źródła światła, a więc obarczonego szerokością dopplerowską. Temperatura naczynka jest zwykle dużo niższa od temperatury lampki, a więc atomy poruszają się w nim z prędkościami uwarunkowanymi nieco „węższym” rozkładem Maxwella. Linia absorpcyjna ma kształt dopplerowski, ponieważ częstotliwości rezonansowe dla atomów poruszających się z prędkościami v_x wynoszą $\nu = \nu_0(1 \pm v_x/c)$. Jak widać na rysunku 2, promieniowanie o częstotliwości ν mniejszej od ν_1 oraz większej od ν_2 nie będzie absorbowane przez atomy w naczynku (oś rzędnych, na której odłożone jest natężenie linii absorpcyjnej została odwrócona w celu łatwiejszej interpretacji rysunku). Jeżeli w naczynku nie występują żadne dodatkowe efekty, linia emisyjna nie ma powodu różnić się od linii absorpcyjnej przedstawionej na rysunku 2.

Współczesne przyrządy optyczne mają tak dobrą zdolność rozdzielczą, że precyzja prowadzonych badań uwarunkowana jest szerokością obserwowanych linii. Jak zdążyliśmy się już przekonać, na linię dopplerowską składa się jak gdyby suma linii pochodzących od pojedynczych atomów zbioru, poruszających się z różnymi prędkościami. Wyodrębnienie takiej „pojedynczej” linii jest zabiegiem analogicznym do znalezienia igły w stogu siana.

Poznamy teraz trzy różne metody eliminowania skutków istnienia efektu Dopplera. Jedną z najstarszych, bo licząc sobie kilkadziesiąt lat, jest metoda wiązek atomowych. Wiązka atomowa to wąski, dobrze skolimowany strumień atomów poruszających się w zadanym kierunku.

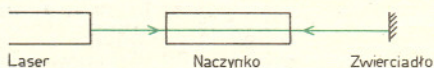
Wiązka skolimowana — wiązka równoległa.



Rys. 3

Obserwację promieniowania emitowanego przez te atomy prowadzimy prostopadłe do kierunku wiązki. Mamy więc do czynienia z przypadkiem, w którym wszystkie promieniujące atomy mają składową prędkości $v_x = 0$. Odbiornik rejestruje wąską linię o częstotliwości ν_0 , będącej częstotliwością rezonansową badanych atomów. Zgodnie z tym, co zostało powiedziane poprzednio, przy oświetleniu wiązki atomowej wiązką światła rozchodzącą się prostopadłe do niej, z linii o profilu dopplerowskim zostanie zaabsorbowane tylko promieniowanie o częstotliwości ν_0 . Efektu Dopplera można się też pozbyć wykorzystując własności promieniowania laserowego, a więc jego wysoką monochromatyczność czyli wąskość spektralną linii, bardzo duże natężenie oraz bardzo dobre skolimowanie, a ponadto możliwość strojenia czyli doboru częstotliwości linii laserowej do częstotliwości przejścia rezonansowego w atomie. Oświetlając zbiór atomów w naczynku linią laserową o częstotliwości ν_L (zakładamy, że szerokość linii laserowej jest tego rzędu, co szerokość naturalna linii) różnej od częstotliwości ν_0 , spowodujemy rezonansową absorpcję tego promieniowania jedynie przez atomy o prędkości spełniającej warunek $\nu_L = \nu_0(1 + v'_x/c)$, gdzie v'_x jest składową prędkości wzdłuż kierunku rozchodzenia się wiązki laserowej. Rozkład prędkości atomów znajdujących się w stanie podstawowym zostanie zakłócony i będzie się przedstawiał tak, jak na rysunku 3a. Atomy o składowej prędkości v'_x , po pochłonięciu kwantów promieniowania o energii $h\nu_L$ przejdą do stanu wzbudzonego, w którym rozkład prędkości jest taki jak na rysunku 3b. W tym stanie są tylko atomy o składowej prędkości v'_x a szerokość linii jest porównywalna z szerokością naturalną. Udało się nam odnaleźć igłę w stogu siana. Przechodząc laser, to znaczy zmieniając wartość ν_L , będziemy mogli oddziaływać z coraz to inną grupą atomów. Dla $\nu_L = \nu_0$ będziemy mieli do czynienia jedynie z atomami o $v'_x = 0$.

Inny sposób pozbycia się efektu Dopplera wykorzystuje tak zwaną absorpcję dwufotonową. Wiązka laserowa przechodzi przez naczynko zawierające badane atomy, trafia na zwierciadło, odbija się od niego i ponownie przechodzi przez naczynko po tej samej drodze, ale w przeciwną stronę (patrz rysunek 4).



Rys. 4

Częstość linii laserowej jest tak dobrana, aby dopiero suma energii dwóch kwantów odpowiadała przejściu atomu między dwoma poziomami energetycznymi, czyli

$$h\nu_0 + h\nu_0 = E_2 - E_1.$$

Atom, który porusza się w naczynku z prędkością o składowej wzdłuż kierunku rozchodzenia się wiązek światła równej v_x , będzie w stosunku do jednej z wiązek oddalał się od źródła (tym razem atom jest odbiornikiem), w stosunku do drugiej — będzie się do niego zbliżał. W pierwszym przypadku, jego częstotliwość rezonansowa wyniesie $\nu_1 = \nu_0(1 - v_x/c)$, w drugim natomiast $\nu_2 = \nu_0(1 + v_x/c)$. Absorbując równocześnie po jednym fotonie z każdej wiązki, atom nasz nie zauważy faktu, że się porusza. Pomnożmy oba równania przez stałą Plancka i dodajmy stronami. Otrzymamy

$$h\nu_1 + h\nu_2 = h\nu_0(1 - v_x/c) + h\nu_0(1 + v_x/c) = 2h\nu_0.$$

A co będzie, jeśli nasz atom pochłonie oba fotony z tej samej wiązki? Wówczas nie pobejdziemy się efektu Dopplera. Istnieje jednak sposób zmuszenia atomu do absorpcji po jednym fotonie z każdej wiązki. Omówienie go przekroczyłyby jednak ramy tego artykułu.

S mała delta



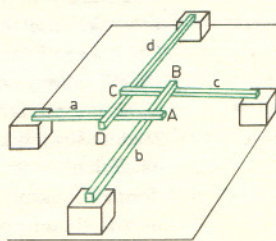
Problemy budowlane

W sklepach z artykułami modelarstwa lotniczego, na przykład w Składnicy Harcerskiej, można tanio kupić dużą ilość cienkich listewek, o przekroju np. 2×3 mm. Posłużą nam one do ciekawego doświadczenia.

Potnijmy listewki na odcinki o długości około 25 cm.

Czy umielibyście teraz zbudować z nich szkielet dachu nad halą o wymiarach $1,5 \times 1,5$ m, nie klejąc, nie wiążąc ani nie łącząc listewek w inny sposób ze sobą?

A jest to możliwe, Aby dopiąć tego, zauważmy najpierw, że jeśli ułożymy cztery listewki jak na rys. 1 i każdej wolny koniec podeprzemy, to listewki nie spadną.



Rys. 1

Nie ma w tym nic tajemniczego: Wyobraźmy sobie bowiem, co by było gdyby koniec choć jednej listewki opadł choć trochę. Niech to będzie koniec D listewki d . Otóż gdyby opadł on o odcinek OP_D , to jak widać z rysunku 2, koniec a musiałby opaść równocześnie o większy odcinek OP_A : $OP_A > OP_D$. Ale dokładnie z tej samej przyczyny, równocześnie koniec B listewki b musiałby opaść o jeszcze większy odcinek: $OP_B > OP_A$ (patrz rys. 1, 2). I tak dalej: równocześnie $OP_C > OP_B$ i $OP_D > OP_C$. Ale z otrzymanego łańcucha nierówności:

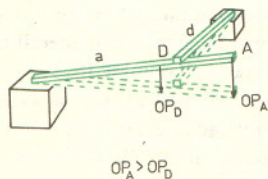
$$OP_D > OP_C > OP_B > OP_A > OP_D,$$

wynika nierówność

$$OP_D > OP_D,$$

czyli koniec listewki d musiałby równocześnie opaść o dwa różne odcinki.

Tak jednak być nie może, i dlatego koniec listewki d nie może wcale opaść.



$$OP_A > OP_D$$

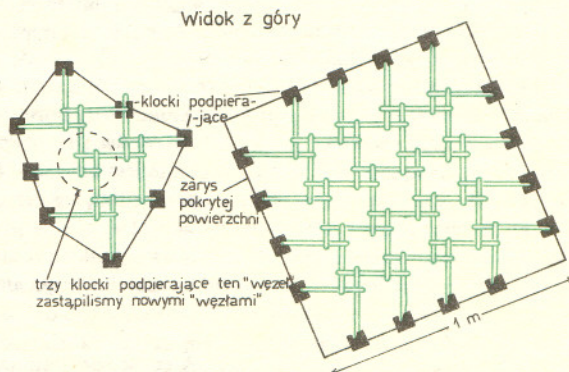
Rys. 2

Gdyby koniec D listewki d opadł o pewien odcinek, nazwijmy go OP_D , to koniec A listewki a musiałby opaść bardziej:

Jeśli taki „węzeł” zapewnia utrzymanie w powietrzu jednego końca każdej dochodzącej do niego listewki, to dlaczego klocków, które podpierają pozostałe końce, nie zastąpić takimi samymi „węzłami”? Dopiero wolne końce sterzące z tych nowych „węzłów” można podeprzeć klockami.

Nasuwa nam to pomysł ogólnego przepisu na budowę szkieletu dachu nad placem tak rozległym, jak tylko zechcemy. Widok z góry dwóch takich szkieletów przedstawia rysunek 3.

Budowa nie powinna sprawić Wam trudności, jeśli tylko przeprowadzicie ją stopniowo, dodając po jednym „węźle”. Wszystkie końce listewek, które dopiero planujecie ułożyć w „węźle”, a które chwilowo nie są tak złożone, muszą być tymczasowo podparte klockami. Tylko spod gotowych „węzłów” możecie wyjmować klocki.



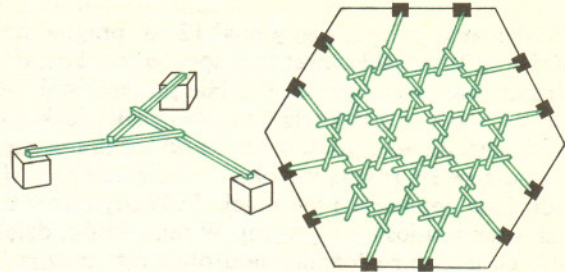
Rys. 3

Podobnie jak to uczyniliśmy dla pojedynczego „węzła”, można teoretycznie wyjaśnić dlaczego cały taki szkielet utrzyma się nad ziemią. Można mianowicie udowodnić, że nad ziemią utrzyma się każdy taki szkielet dachu, w którym podparte będą wszystkie te końce listewek, które nie współtworzą „węzła”. Każdy z wielu możliwych dowodów tego faktu wymaga jednak sporej liczby dodatkowych wyjaśnień, bez których nie byłby przekonywujący, a te z kolei wykraczałyby poza ramy tak Małej Dety, jak i Waszej cierpliwości.

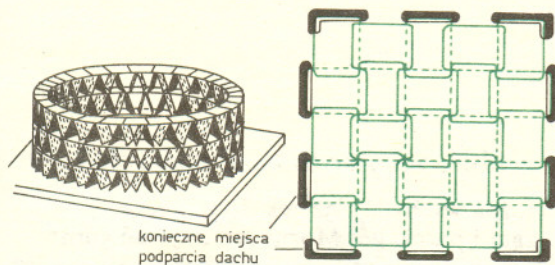
Dlatego powróćmy lepiej do faktów doświadczalnych.

Czy są możliwe inne samotrzymujące się „węzły”?

Tak, na rysunku 4 widzimy „węzeł” z 3 listewek i widok z góry szkieletu zrobionego z takich węzłów. Spróbujcie skonstruować jeszcze inne „węzły” i szkielety dachów. Nie wszystkie „węzły” w jednym szkielecie muszą być jednakowe; szkielet złożony z dowolnych „węzłów” utrzyma się w powietrzu, jeśli tylko wszystkie końce listewek nie leżące w węźle będą podparte.



Rys. 4



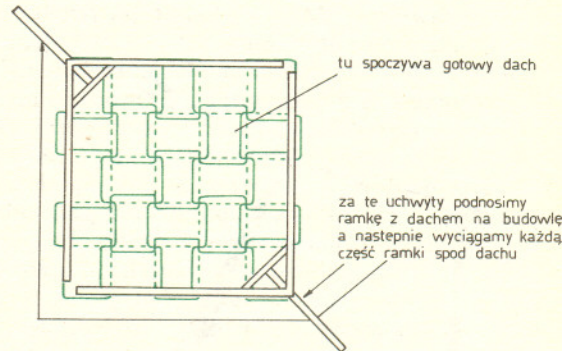
Rys. 5

Budowa dachu jest nieco trudniejsza niż budowa szkieletu, gdyż ze względu na wątlność budowli z kart, trudno jest go wewnątrz tymczasowo podpierać. Najlepiej jest ułożyć dach na podłodze, podkładając z dwóch stron dwuczęściową ramkę z listewek, jak na rys. 6, a gotowy dach przenieść dopiero, trzymając go za pomocą ramki, na budowlę i tam ostrożnie wyjąć każdą część ramki spod dachu. Wtedy dach spocznie na budowli.

Ramka musi być gładka, trzeba ją wygładzić papierem ściernym, a dobrze jest ją jeszcze potem polakierować. Jest z tym trochę roboty, ale jeśli karty są nowe, to dach wychodzi lekko wypukły, wielospadowy i naprawdę ładny. Na koniec proponuję Wam rozwiązanie jeszcze dwóch zadań:

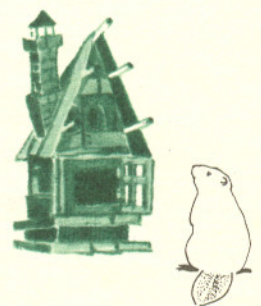
- Przerzucić, naturalnie bez klejenia, szkielet mostu z listewek długości 25 cm, ponad rzeką o szerokości 1 m;
- Dla karciarzy: przetłumaczyć na język kart jakiś inny, wymyślony przez Was, typ szkieletu.

Ci z Was, którzy budują z kart, natknęli się być może na problem pokrycia dachem Colosseum (rys. 5). Dach taki, nawet o bardzo dużej rozpiętości, nie trudno skonstruować tłumacząc na język kart szkielet z rysunku 3. Podobnie jak szkielet z rysunku 3, tak i dach z kart z rysunku 5 nie musi być kwadratowy; można go dopasować do kształtu pokrywanej hali, a także więc do Colosseum.



Rys. 6

Przykład ramki do przenoszenia dachu na budowlę





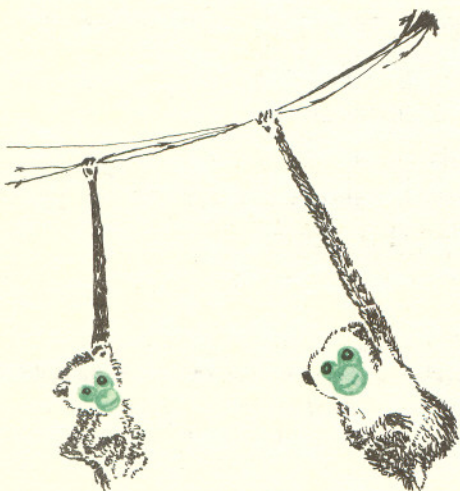
Marzenia przyszłego profesora

Pewien znany fizyk, kiedy miał 12 lat, pragnął polecieć na — Księżyc. Wymyślił nawet tani sposób uzyskania dostatecznie dużej prędkości. Nie potrzebował żadnych rakiet, wystarczyłyby własne nogi i dobre łóżko. Zasada była następująca: po odbiciu się od łóżka można wzniesić na pewną wysokość, następnie po wylądowaniu odbić się ponownie i tak dalej. Za każdym razem człowiek wznosiłby się wyżej. W ten sposób, dzięki pracy swoich mięśni rozłożonej na drobne raty można by nadać sobie dość znaczną energię. Jakoś nie udało mu się nigdy zrealizować swojego pomysłu. Oczywiście takiej próby nie wytrzymałoby żadne łóżko, żadne nogi, przeszkadzałby również opór powietrza, ale nie potępiamy przyszłego profesora zbyt ostro, gdyż jego pomysł nie był całkiem niemądry. Jeszcze do niego wrócimy, ale na razie zmieńmy temat.



Jak rozbijać wahadło nie dotykając go?

Czy pamiętasz jaką własność ma zawieszony na nici ciężarek? Wychylony lekko z położenia równowagi waha się tak, że okres wahań, czyli czas pełnego ruchu tam i z powrotem, jest stały. Można go tylko zmienić przez wydłużenie lub skrócenie nici. Własność tę wykorzystaliśmy niedawno do zrobienia tzw. wahadła sekundowego (patrz Mała Delta 1/1976).



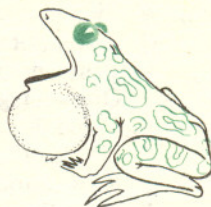
Co należy zrobić, żeby rozhuścić wahadło?

Oczywiście, można wychylić ciężarek do pewnego, niewielkiego kąta i puścić go. Można też trzymać górny koniec nitki i umiejętnie lekko poruszać dłoń. Można też sprawić, żeby wahadło samo zaczęło się wahać. Kto nie wierzy, niech spróbuje.

Na poziomo rozwieszonym sznurze zawieszamy dwa ciężarki na nitkach o równej długości. Wprawiamy jeden ciężarek w ruch i obserwujemy co się dzieje. Wahanie rozhuśtanego ciężarka słabną stopniowo, natomiast ni stąd ni zowąd zaczyna wahać się drugi ciężarek. Po kilku ruchach wahanie pierwszego ciężarka ustają całkowicie, podczas gdy drugi wyraźnie się waha. Następnie sytuacja odwraca się i tak dalej, wahadła przekazują sobie nawzajem drgania do czasu, aż wszelkie ruchy ustaną z powodu strat energii. Tak jest jednak tylko wtedy, kiedy nitki, na których wiszą ciężarki, mają tę samą długość. Możesz zmienić długość zawieszenia jednego z ciężarków i sprawdzić, że nie będzie żadnego przekazywania ruchu od jednego wahadła do drugiego. Efekt jest zadziwiający, ale nie ma w tym nic tajemniczego. Wahające się wahadło musiało wprawić sznur w drobne ruchy, które zostały przekazane innemu wahadłu o tej samej długości. Kiedy wahadła miały różną długość, a więc były niedostrojone, sznur drgał zbyt szybko lub też zbyt wolno, żeby rozhuścić drugie wahadło. Można też wprawić ciało w ruch nie tylko za jednym zamachem, ale także popychając je leciutko, ale w porę, w odpowiednich odstępach czasu.



Jest jeszcze inna, ciekawa odmiana tego doświadczenia: możesz rozbijać ciężką książkę zawieszoną na dwóch nitkach po prostu dmuchając w nią. Chyba po wykonaniu poprzedniego doświadczenia nie wydaje ci się to niemożliwe, ale możesz łatwo zaimponować osobom niewtajemniczonym. Dmuchi raz w zawieszoną książkę i poczekaj, aż książka ta, po lekkim wychyleniu się przejdzie przez najniższe położenie i przybliży się do ciebie. Wtedy dmuchi ponownie. Wychylenie będzie dużo większe. Za każdym razem dmuchaj w momencie, gdy książka jest najbliżej ciebie. Po paru dmuchnięciach możesz osiągnąć całkiem silne wahania.



Dzięki rezonansowi

W obu doświadczeniach mieliśmy do czynienia z tym samym zjawiskiem. Wahadło, które może wahać się z określoną częstotliwością, wprowadzone zostało w ruch przez działanie małą siłą, ale z tą samą częstotliwością. Zjawisko to nazywamy rezonansem. Odruchowo korzysta z niego każde dziecko huśtające się na huśtawce.

Huśtawka jest oczywiście zwykłym wahadłem i ma swój okres wahań zależny od długości lin. Aby wprawić huśtawkę w ruch dziecko wykonuje rytmiczne ruchy nogami i całym ciałem. Ruchy te muszą być wykonywane z takim samym okresem, jak naturalny okres wahań huśtawki. Wiadomo, że nawet przy największych wysiłkach mięśni, czynionych nieregularnie lub zbyt szybko, huśtawka prawie wcale nie będzie się poruszać. Rezonans odnosi się nie tylko do wahadła, ale do każdego układu zdolnego do drgań. Z rezonansem spotykasz się na każdym kroku. Kiedy nastawiasz radio na daną stację, to dostrajasz je tak, by było w rezonansie ze stacją nadawczą. Masz wtedy do czynienia z dziesiątkami i setkami tysięcy drgań na sekundę. Z różnymi przejawami rezonansu spotykają się naukowcy w każdej gałęzi fizyki współczesnej: fizyce jądrowej, fizyce ciała stałego, optyce. Chyba jednak najważniejszą zasługą rezonansu jest to, że ... nie jesteśmy głusi. Gwoli sprawiedliwości trzeba przyznać, że zjawisko rezonansu bywa szkodliwe. Nie lubimy, na przykład, kiedy piecyk gazowy lub rury wodociągowe „wpadną w rezonans” i huczą na cały dom. Nie radzę ci także iść miarowym krokiem po delikatnym moście zawieszonym nad przepaścią.

Wróćmy do sprawy niedoszłej podróży kosmicznej przyszłego profesora. Przechodząc do doświadczeń z wahadłami tylko pozornie zmieniliśmy temat. Pomysł z rozhuśtaniem się na łóżku opierał się, podobnie jak w pozostałych przykładach, na zasadzie rezonansu, chociaż sam projektodawca nie zdawał sobie z tego sprawy.

Dr Jan A. GAJ

BARDZO DUŻY ZEGAR RETRO

— Klepsydra? — Świeca? Nic z tych rzeczy. Duży to znaczy rzeczywiście duży, na 150 milionów kilometrów.

A więc zegar słoneczny — że nie ma sekundnika? Ale za to będzie miał datownik i to taki, który nie wymaga długiego kręcenia na końcu każdego miesiąca krótszego niż 31 dni.

Aby skonstruować ziemską część naszego zegara (Słońce na szczęście już istnieje) przyjmujemy następujące założenia teoretyczne:

1° Ziemia jest kulą.

2° Ziemia obraca się jednostajnie dookoła własnej osi (przechodzącej przez oba jej bieguny geograficzne) z częstością $\nu = (24^h)^{-1}$.

3° Oprócz tego Ziemia obiega Słońce ruchem jednostajnym po okręgu z okresem $T = 365$ dni. Płaszczyznę tego okręgu nazywamy płaszczyzną ekliptyki.

4° Oś ziemską jest nachylona do płaszczyzny ekliptyki pod kątem $\alpha = 66^\circ 33'$.

5° Równonoc wiosenna przypada 21.III.

Wielu z Was zarzuci mi w tym miejscu, że to wszystko kłamstwa i, co gorsza, będziecie mieli rację. Na swoją obronę mogę tylko powiedzieć, że poczynione tu odstępstwa od rzeczywistości są bez znaczenia w granicach dokładności opisanego tu zegara. Przystępując do budowy zegara musimy zdecydować się na jedną z jego wersji. Pierwszą będzie wersja

DLA LENIWYCH GŁÓW I PRACOWITYCH RĄK: ZEGAR RÓWNIKOWY.

Najprościej (teoretycznie) byłoby go zrobić usuwając całą półkulę północną, pozostawiając tylko oś ziemską w postaci odpowiednio grubego pręta, którego cień padałby na odsłoniętą płaszczyznę równika. Musielibyśmy oczywiście zaopatrzyć tę płaszczyznę w odpowiednią skalę (rys. 1). Zauważmy, że skala

godzinowa będzie tu równomierna (1 godzinie odpowiada $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$) oraz,

że koniec cienia osi ziemskiej będzie zakreślał na płaszczyźnie równika okręgi o promieniu zależnym od kąta, jaki padające promienie słoneczne tworzą z tą osią:

$$r = h \operatorname{tg} \beta, \quad \text{gdzie } h \text{ jest długością pręta.}$$

Ponieważ kąt padania promieni słonecznych zależy od pory roku, możemy narysować na płaszczyźnie równika szereg okręgów o promieniach odpowiadających poszczególnym datom — tak powstanie zegar z kalendarzem, którego tarczę przedstawia rysunek na IV stronie okładki. Oczywiście okręgi narysowano przy założeniu takiej wysokości h , jaka została zaznaczona na rysunku. Dociekliwi sprawdzą bez trudności, że kąt β powiązany jest z porą roku zależnością:

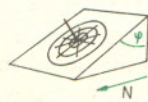
$$\cos \beta = \cos \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

gdzie t jest czasem jaki upłynął od dnia równonocy wiosennej, α — kątem między osią ziemską a płaszczyzną ekliptyki, a T — okresem obrotu Ziemi dookoła Słońca. Z tego wzoru wyliczono wartości β , a w konsekwencji promienie okręgów odpowiadających poszczególnym datom.

Osobom, które miałyby trudności z przecięciem Ziemi, doradzam wycięcie lub przerysowanie rysunku i umieszczenie go równoległe do płaszczyzny równika, to jest pod kątem do pionu równym szerokości geograficznej φ miejsca pobytu, z najwyższym punktem okręgu skierowanym na południe (rys. 2).

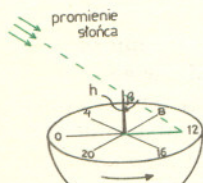
Oczywiście godzina 12-ta powinna znajdować się najniżej, a zegar powinien być zaopatrzony w prostopadły do płaszczyzny skali pręcik o długości h .

Widać, że konstrukcja zegara słonecznego, choć nieskomplikowana wymaga pewnego nakładu pracy: należy wykonać formę jak na rys. 2 ze sklejk lub innego materiału, zapewnić odpowiednią wartość kąta φ (należy znaleźć na mapie swoją szerokość geograficzną), wreszcie osadzić pręcik, którego cień służy za wskazówkę.

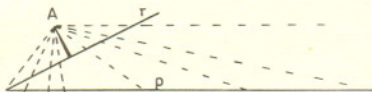


Rys. 1

Uważny Czytelnik zawoła w tym miejscu ze zgrozą: Co to za okrąg, którego promień się zmienia? Dla matematyka — żaden, dla fizyka — okrąg z dokładnością do zmiany promienia jaka może nastąpić w ciągu doby. Zmiana ta jest dostatecznie mała (sprawdźcie!), żeby ją przy konstrukcji naszego zegara zaniedbać. Dokładniejszy pomiar wykazałby oczywiście, że koniec cienia porusza się po spirali.



Rys. 2



Rys. 3

Będą to powierzchnie stożkowe przechodzące przez kolejne okręgi, o wierzchołkach w punkcie A.

Praca uprościłaby się znacznie w przypadku poziomej skali. Nic jednak za darmo — ilustruje to druga wersja naszego czasomierza

DLA LENIWYCH RĄK I PRACOWITYCH GŁÓW: ZEGAR POZIOMY.

Łatwo widać, że skalę poziomą można otrzymać przez wykonanie rzutu środkowego skali równikowej na płaszczyznę poziomą z wierzchołka pręcika — wskazówki (rys. 3).

Łatwo zauważyć, że przy takim rzutowaniu półproste radialne (wyznaczające na skali godziny) przechodzą w półproste. Rzuty okręgów odpowiadających poszczególnym datom będą przekrojami powierzchni stożkowych płaszczyzną poziomą P. Wiadomo, że takie przekroje mogą w ogólności mieć kształt koła, elipsy, paraboli lub hiperboli. Dla naszych szerokości geograficznych będą to wyłącznie hiperbole. Jestem przekonany, że każdy Czytelnik po odpowiednim czasie ruszania głową potrafiłby narysować skalę dla zegara poziomego. Nie będąc jednak sadystą podaję Wam gotowy wzór (rysunek na przedniej okładce) dla szerokości geograficznej Warszawy $\varphi = 52^{\circ}13'$. Wysokość pręcika h zaznaczono obok. Należy pamiętać, że powinien on być umieszczony pod kątem φ do poziomu. Porównując te dwa rodzaje zegarów słonecznych widzimy jeszcze, że zegar poziomy może być używany przez cały rok, podczas gdy przedstawiona tu wersja zegara równikowego — tylko wiosną i latem (od równonocy wiosennej 21.III. do jesiennej 23.IX.).

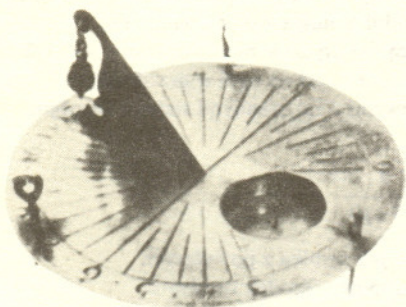
Pozostaje jeszcze pytanie:

Co wskazuje zegar słoneczny?

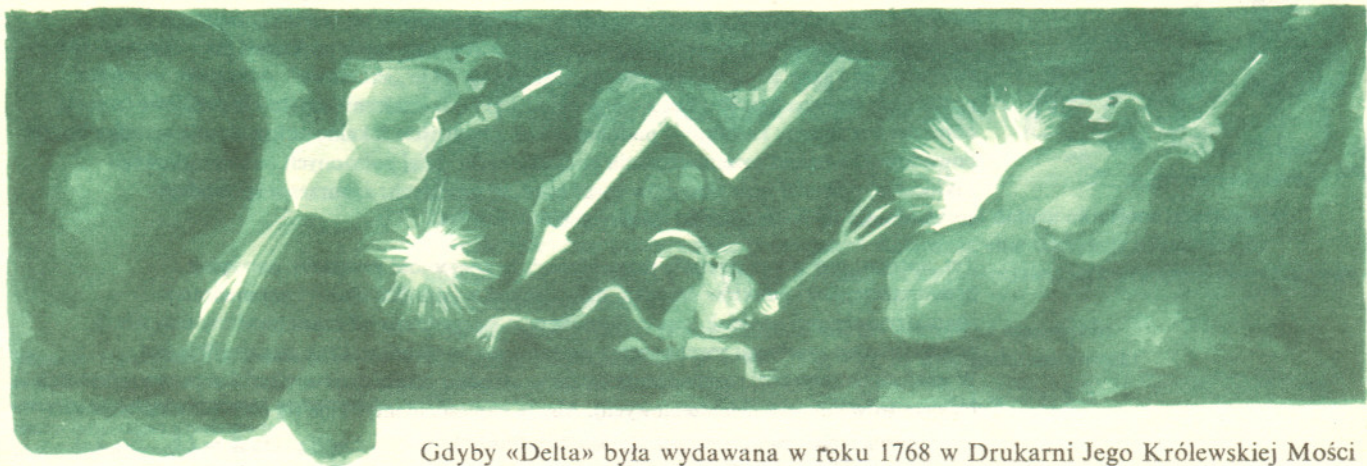
Oczywiście czas, niestety jednak lokalny. Jak się on ma do czasu, według którego regulujemy nasze zegarki? Różnie.

W Stargardzie Szczecińskim i Zgorzelnicy praktycznie się z nim pokrywa. Dla wschodnich krańców Polski lokalne południe następuje ponad pół godziny przed południem oficjalnym. Co można zrobić, żeby zegar słoneczny wskazywał czas urzędowy? Przy zegarze poziomym niezbędne jest narysowanie jego skali od nowa. Zegar równikowy ma tu przewagę — wystarczy obrócić jego skalę o pewien kąt wokół punktu zamocowania pręcika. Można ten kąt obliczyć lub po prostu tak obrócić tarczę, żeby uzyskać zgodność na przykład z radiowym sygnałem czasu. Już wybraliście model dla siebie? Jeśli nie, to daję Wam jeszcze trzeci do wyboru — kieszonkowy zegar słoneczny z kompasem (rys. 4).

Powodzenia w pracy!



Rys. 4



Gdyby «Delta» była wydawana w roku 1768 w Drukarni Jego Królewskiej Mości i Rzeczypospolitej u XX Scholarum Piarum pisalibyśmy wówczas tak

O Błyskawicach

Błyskawice są żywe i prędko przemijające światła na powietrzu zapalone. Partykuły siarczyste, klejowate i tłuste przez ekshalację z drzew i innych rzeczy wychodzące, gdy w powietrzną atmosferę wzbijają się i tam się skupiać zaczynają, wtenczas przez wzajemną fermentację łatwo się zapalają i błyskawice sprawują. (Kalendarz Półstuletni, PIW 1975, str. 202).

Dzięki pracy Beniamina Franklina (1706–1790) od 16 lat był już wówczas znany piorunochron i natura piorunów. Ta wiadomość jeszcze jak widać nie dotarła do kalendarzyka pod nazwą Kolęda Warszawska. Można to wytłumaczyć znacznie wolniejszą niż dzisiaj wymianą informacji. Ale czy my mamy już system tej wymiany całkiem doskonały? Czy wolno nam śmiać się z przodków? A może my też myślimy nieraz o jakichś innych partykułach siarczystych? Zastanów się.





Rozwiązanie zadania M 79.

Jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 3 i różną od 5, to jest postaci $n = 2k$ lub $n = 2k + 3$, gdzie k jest liczbą naturalną większą od 1. Niech będzie dany trójkąt ABC . Na bokach AB i AC obrzemy odpowiednio punkty D i E tak, aby $BD = \frac{1}{k} AB$, $CE = \frac{1}{k} CA$, a bok BC podzielmy na k równych części.

Przez każdy punkt podziału prowadzimy do przecięcia z DE odcinki równoległe do AB i AC . Otrzymujemy w ten sposób podział trójkąta na $2k$ trójkątów do niego podobnych. Łącząc ponadto środki odcinków AD , DE i EA otrzymujemy podział trójkąta ABC na $2k + 3$ trójkąty do niego podobne.

Mgr Waław FRYDRYCHOWICZ

„Fale sejsmiczne niosą informacje o własnościach fizycznych ośrodka, o defektach występujących w jego strukturze i o nieciągłościach parametrów sprężystych we wnętrzu Ziemi” pisał rok temu («Delta» 1975, nr 1) A. Guterch w swym artykule o badaniach nad głęboką strukturą Ziemi. W seismologii wnioskowanie o strukturze niedostępnych bezpośrednio badaniu geologicznemu obszarów wnętrza Ziemi odbywa się z grubsza mówiąc, według następującego schematu: „gdyby Ziemia była jednorodnym ośrodkiem sprężystym, to potrafilibyśmy przewidzieć, jaki będzie obraz drgań wywołanych np. wybuchem na seismografie odległym o tyle a tyle od punktu, w którym te drgania zostały wywołane. Wszelkie odchylenia obrazu zarejestrowanego przez seismograf od obrazu idealnego świadczą o niejednorodnościach ośrodka; charakter tych odchylenia pozwala ustalić, jakie to mogą być niejednorodności”.

Umiejętność odczytania informacji niesionych przez fale sejsmiczne wymaga więc znajomości teorii rozchodzenia się drgań w ośrodku sprężystym. Zajmiemy się tym właśnie zagadnieniem. Dla każdego ośrodka sprężystego można podać charakterystyczne dla niego parametry. Nazywamy je *stałymi materiałowymi*. Jeśli ośrodek jest jednorodny (gęstość jego jest stała) oraz izotropowy (sposób rozchodzenia się fal jest jednakowy w każdym kierunku), to własności sprężyste tego ośrodka można w pełni scharakteryzować przez podanie dwu tylko stałych materiałowych: modułu Younga E i współczynnika Poissona ν (oraz gęstości ρ). Moduł Younga ma, jak wiadomo, wymiar kG/cm^2 , ν jest wielkością bezwymiarową, spełniającą teoretycznie nierówność $0 < \nu < 1/2$. Eksperymentalnie stwierdzono, że współczynnik Poissona zawarty jest na ogół w przedziale $(1/4, 1/2)$. Często posługujemy się innymi stałymi materiałowymi λ i μ , zwanymi stałymi Lamégo. Są one związane z E i ν następująco:

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Stałe λ i μ są dodatnie dla każdego ośrodka sprężystego i — jak wynika z powyższych związków — w pełni charakteryzują dany jednorodny i izotropowy ośrodek sprężysty.

Przypuśćmy teraz, że mamy do czynienia z nieograniczonym we wszystkich kierunkach ośrodkiem sprężystym i że w pewnym jego punkcie wywołane zostało zaburzenie, powodujące przemieszczenie (zmiennie w czasie) pewnego punktu. Z przemieszczeniem się tego punktu będą związane oczywiście zmiennie w czasie przemieszczenia punktów niezbyt odległych. Przemieszczenie punktów wypełniających początkowo pewien obszar zwany w tej teorii konfiguracją będzie oznaczało odkształcenie się tego obszaru: może zmienić się zarówno kształt jak i objętość. Łatwo zauważyć, że każde odkształcenie można rozłożyć na dwie „składowe”: odkształcenie czysto postaciowe (zmiana kształtu bez zmiany objętości) i odkształcenie czysto objętościowe (zmiana objętości bez zmiany kształtu — podobieństwo). Oczywiście lokalne odkształcenie ośrodka będzie powodowało również przemieszczenia punktów coraz dalej położonych od początkowego zakłócenia, odkształcenia obszarów coraz bardziej odległych: zaburzenie spowoduje rozchodzenie się w ośrodku fal sprężystych.

Ten uproszczony obraz pozwala przewidywać, że znajomość związków pomiędzy przemieszczeniami punktów ośrodka, działającymi w ośrodku siłami i parametrami charakteryzującymi ośrodek, oraz zależność tego wszystkiego od czasu powinny umożliwić przewidywanie przebiegu rozchodzenia się zaburzeń w ośrodku. I tak rzeczywiście jest. W analizie teoretycznej rozchodzenia się fal w ośrodku sprężystym wychodzi się z tzw. równań Naviera (równań przemieszczeniowych). Aby je napisać, identyfikuje się ośrodek z kartezjańską przestrzenią trójwymiarową o osiach współrzędnych x_1, x_2, x_3 . Jeśli przez $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ oznaczyć początkowe położenie pewnego punktu ośrodka w chwili t_0 , a przez $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$ położenie tego samego punktu w chwili t , to

$$\mathbf{X} - \hat{X} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$$

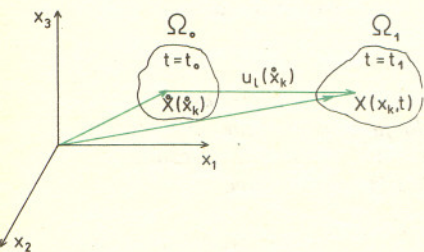
będzie wektorem przemieszczenia tego punktu. Przemieszczenie to zależy nie tylko od czasu, ale i od położenia początkowego. Jeśli więc przyjąć

$$x_l = x_l(\hat{X}, t) = x_l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, t)$$

$$u_l = x_l(\mathbf{X}, t) - \hat{x}_l \quad \text{dla } l = 1, 2, 3,$$

a więc każda składowa przemieszczenia jest funkcją czterech zmiennych (trzy współrzędne i czas). Zakłada się przy tym, że przemieszczenie \mathbf{U} jest zawsze związane z działaniem tzw. sił masowych, których wielkość również zależy od położenia punktu i od czasu. Siły masowe oznaczamy symbolem \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3).$$



Ω_0 — konfiguracja początkowa w chwili $t = t_0$ (stan przed odkształceniem ośrodka)

Ω_1 — konfiguracja w chwili $t = t_1$ (stan po odkształceniu ośrodka)

Wartość współczynnika n równa $\frac{1}{2}$ oznacza,

że prędkość fazowa emitowanej fali elektromagnetycznej w jonosferze jest większa niż c (równa $2c$). Ale z teorii względności wiemy, że sygnały nie mogą się rozchodzić z prędkością większą niż c . Na szczęście otrzymany wynik nie jest sprzeczny z teorią względności. Prędkości fazowe mogą przekraczać c . Ograniczenie dotyczy tzw. „prędkości grupowej” fali, która dla fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w próżni, równa jest prędkości fazowej fali. Niestety ramy tego działu nie pozwalają na opisanie różnicy tych dwóch wielkości. Zainteresowanych odsyłamy do książki F. C. Crawforda „Fale” (PWN — 1972). Warto jeszcze zauważyć, że w rzeczywistości wartość n silnie zależy od częstości fal radiowych i jest większa od jedności dla $\nu_0 \geq 50$ MHz.

Teraz możemy już napisać równania Naviera. Mają one postać

$$(1) \quad \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \rho P_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

dla $i = 1, 2, 3$. Postać (1) jest skomplikowana. Dla ułatwienia życia w mechanice często wprowadza się różne umowy upraszczające zapisywanie wzorów:

— pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ oznacza się symbolem $f_{,j}$ (a więc np. $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$ zapisuje się jako $u_{i,jj}$);

— pochodną cząstkową względem czasu oznacza się kropką nad funkcją różniczkowaną (a więc np. \ddot{u}_i oznacza $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$);

— wprowadza się ponadto tzw. konwencję sumacyjną polegającą na tym, że opuszcza się znak sumy, pozostawiając go domyślności czytelnika wszędzie tam, gdzie w jednomianie występuje dwa razy ten sam wskaźnik. Na przykład wzór

$$(*) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

nie ma sensu bez domyślnego znaku sumy, który występuje po stronie prawej; w konwencji sumacyjnej równość (*) oznacza

$$(**) \quad df = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Po zastosowaniu tych umów do równań (1) możemy przepisać je w postaci (pozornie) prostszej:

$$(2) \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho P_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Jak mówiliśmy, równania Naviera opisują związek między własnościami materiału, przemieszczeniami i działającymi siłami masowymi a położeniem punktu i czasem. Nie będziemy tu zajmowali się wyprowadzaniem i interpretacją tych równań. Do naszych celów wystarczy bowiem wiedzieć, że z dobrym przybliżeniem opisują one zachowanie się rzeczywistych izotropowych i jednorodnych ośrodków sprężystych.

Wyprowadzenie z (2) równań opisujących rozchodzenie się fal sprężystych jest dość proste — jeśli zastosować pewne dodatkowe triki techniczne. Okazuje się mianowicie, że można tak wprowadzić cztery pomocnicze funkcje φ i ψ_1, ψ_2, ψ_3 , by spełnione były związki:

$$(3) \quad u_k = \varphi_{,k} + \varepsilon_{klm} \psi_{l,m}, \quad k, l, m = 1, 2, 3$$

pamiętamy o konwencji sumacyjnej!), gdzie

$$\varepsilon_{klm} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \langle k, l, m \rangle \text{ jest parzystą permutacją liczb } 1, 2, 3, \\ 0 & \text{gdy jakieś dwie z liczb } k, l, m \text{ są równe,} \\ -1 & \text{gdy } \langle k, l, m \rangle \text{ jest nieparzystą permutacją liczb } 1, 2, 3; \end{cases}$$

przy tym

$$(4) \quad \psi_{i,i} = 0.$$

Zarówno funkcja φ , jak i trójka funkcji (ψ_1, ψ_2, ψ_3) mają dobrze określone interpretacje fizyczne. Pierwsza z nich, zwana potencjałem skalarnym, charakteryzuje odkształcenia objętościowe, natomiast $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ nazywa się potencjałem wektorowym i charakteryzuje odkształcenia postaciowe.

Podobny zabieg można również zastosować do wektora sił masowych: tak dobiera się funkcje Φ i $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$, by były spełnione związki

$$(5) \quad P_k = \Phi_{,k} + \varepsilon_{klm} \Psi_{l,m}, \quad k, l, m = 1, 2, 3$$

(interpretacji Φ i Ψ nie omawiamy).

Podstawiając związki (3) i (5) do równań Naviera (2), otrzymamy następujące zależności:

$$(6) \quad [(\lambda + 2\mu)\varphi_{,jj} + \rho\Phi - \rho\ddot{\varphi}]_{,k} + \varepsilon_{klm}[\mu\psi_{l,jj} + \rho_1\ddot{\psi}_l - \rho_2\ddot{\psi}_{l,m}] = 0.$$

Ponieważ funkcje φ i ψ_k są niezależne, więc równanie (6) jest spełnione gdy oba wyrażenia w nawiasach oddzielnie równają się zeru.

Otrzymamy wtedy następujące równania:

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \varphi - \ddot{\varphi} &= -\Phi, \\ \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \psi_l - \ddot{\psi}_l &= -\Psi_l, \end{aligned}$$

gdzie symbol ∇^2 zastępuje operator różniczkowy postaci

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Własność (4) jest równoważna stwierdzeniu, że dla dowolnej powierzchni zamkniętej suma (po wszystkich elementach powierzchni) rzutów odkształceń elementów tej powierzchni opisywanych przez potencjał wektorowy na kierunku prostopadłe do tych elementów (zwrot prostopadłej wybieramy na zewnątrz powierzchni) jest równa zeru. Podobnie fakt, że odkształcenie opisywane potencjałem skalarnym jest dane przez gradient potencjału ($\varphi_{,k}$), jest równoważny stwierdzeniu, że suma takich odkształceń wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej jest równa zeru.

Oznaczając

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho},$$

W przypadku jednowymiarowym rozwiązaniem równania jednorodnego bez sił masowych

$$c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

jest funkcja

$$\varphi(x, t) = A \sin \frac{\omega}{c} (x - ct) \quad (\text{sprawdźcie!})$$

opisująca rozchodzenie się fali o amplitudzie A (dowolnej) i częstotliwości ω (dowolnej) w dodatnim kierunku osi x z prędkością c .

równanie (7) możemy zapisać następująco:

$$(8.1) \quad c_1^2 \nabla^2 \varphi - \ddot{\varphi} = -\Phi,$$

$$(8.2) \quad c_2^2 \nabla^2 \psi_i - \ddot{\psi}_i = -\Psi_i.$$

Ostatnie równania nazywamy falowymi. Równanie (8.1) charakteryzuje falę rozchodzącą się z prędkością c_1 . Nazywamy ją falą podłużną, albo falą P. Fala ta opisuje rozprzestrzenianie się odkształcenia objętościowego. Z równania (8.2) wynika, że częstość przemieszczenia odpowiadająca funkcji ψ_i przenosi się z mniejszą prędkością c_2 . W sejsmologii fala rozchodząca się z prędkością c_2 nazywana jest falą poprzeczną albo falą S. Z prędkością c_2 rozchodzą się odkształcenia czysto postaciowe. Z określenia c_2 wynika, że jeżeli $\mu = 0$, to $c_2 = 0$. Oznacza to, że fala S nie może się rozchodzić w ośrodku charakteryzującym się zerową sztywnością na odkształcenia postaciowe. W sejsmologii przyjmuje się $\lambda = \mu$, co odpowiada przyjęciu wartości $\nu = \frac{1}{4}$. W nieskończonym, jednorodnym i izotropowym ośrodku sprężystym każde zaburzenie daje się przedstawić za pomocą superpozycji fal P i fal S. Jeżeli jednak ciało jest ograniczone albo niejednorodne, to wzbudzone są w nim również inne typy fal. (Najważniejszymi z nich są fale powierzchniowe, które rozprzestrzeniają się w pobliżu granicy). W tablicy poniżej podajemy prędkości c_1 i c_2 dla kilku ośrodków sprężystych.

Ośrodek	Aluminium	Miedź	Stal	Ołów
c_1 [m/s]	$6,32 \cdot 10^3$	$4,36 \cdot 10^3$	$5,80 \cdot 10^3$	$2,14 \cdot 10^3$
ν	0,345	0,343	0,290	0,441

$$\text{prędkość } c_2 \text{ można wyliczyć ze wzoru: } c_2^2 = c_1^2 \cdot \frac{1-2\nu}{2-\nu}$$



Rozwiązanie przykładu 2 z zadania F 27.

Wprowadzamy oznaczenia tak, jak zaznaczono na rysunku 1, gdzie s oznacza najmniejszą odległość satelity od punktu obserwacyjnego, v jego prędkość, a α_l — kąt jaki tworzy trajektoria satelity z kierunkiem jego obserwacji w momencie dokonywania l -tego pomiaru częstości sygnałów.

Zachodzi oczywisty związek:

$$(1) \quad \text{ctg} \alpha_l = \frac{-v(t_l - t_0)}{s},$$

gdzie t_l oznacza czas l -tej obserwacji, a t_0 odpowiada chwili czasu, kiedy satelita znajduje się najbliżej punktu obserwacyjnego ($t_l = 0$).

Na obserwowaną zmianę częstości sygnałów wpływa jedynie składowa prędkości satelity równoległa do kierunku obserwacji (przypadek nierelatywistyczny). Dlatego:

$$(2) \quad v_l = v_0 \frac{1}{1 - \frac{v \cos \alpha_l}{c}} \approx v_0 \left(1 + \frac{v \cos \alpha_l}{c} \right),$$

gdzie v_l i v_0 są odpowiednio obserwowaną i emitowaną częstością sygnałów.

Eliminując kąt α_l z wzorów (1) i (2) otrzymujemy:

$$(3) \quad \frac{v_l - v_0}{v_0} = \frac{-\frac{v}{c} \cdot \frac{v}{s} \cdot (t_l - t_0)}{\left(1 + \frac{v^2}{s^2} (t_l - t_0)^2 \right)^{1/2}}$$

Wielkościami niewiadomymi we wzorze (3) są: t_0 , v_0 , v i s .

Należy zauważyć, że teoretycznie wielkości s i v nie są niezależne. Bowiem w ruchu satelity dookoła Ziemi siłą dośrodkową odpowiedzialną za jego ruch jest siła powszechnego ciążenia. Stąd natychmiast wynika związek:

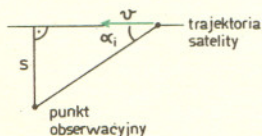
$$(4) \quad v = \sqrt{g^R \left(1 - \frac{s}{R} \right)},$$

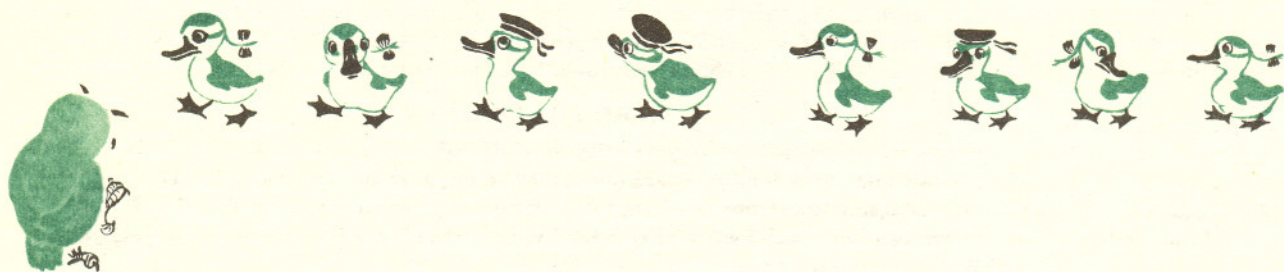
gdzie g jest przyspieszeniem grawitacyjnym ziemskim, a R promieniem Ziemi. Ponieważ na ogół $s \ll R$, wartość v jest nieco mniejsza od pierwszej prędkości kosmicznej równej $7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Dla dużych $|t_l - t_0|$ prawa strona wzoru (3) jest

w przybliżeniu równa swojej granicy przy $|t_l - t_0| \rightarrow \infty$. Korzystając z tego otrzymujemy dla v_0 przybliżoną wartość 40,00129 MHz. Natomiast rozważając wzór (3) dla $|t_l - t_0| \approx 0$ możemy ocenić wartość t_0 otrzymując w przybliżeniu 87 s ($t_l = 0$). Wartość s wynosi około 420 km, a tym samym $v \approx 7,65 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Czytelników zachęcamy do

dokładniejszego dopasowania parametrów t_0 , v_0 i s metodą iteracyjną do wartości v_l podanych w zadaniu.

Na wysokości 420 km atmosfera jest tak rozrzedzona, że współczynnik załamania jest dla niej praktycznie równy jedności. Czytelnicy, którzy rozwiązali pierwszy przykład niniejszego zadania mogą mieć jednak wątpliwości, czy różne od jedności współczynniki załamania niższych warstw atmosfery nie odgrywają roli w rozwiązaniu. Otóż nie. Współczynnik załamania dla środowiska, w którym porusza się satelita można uznać za równy jedności ($s \approx 400 \text{ km}$), a niższe warstwy atmosfery nie zmieniają częstości emitowanych fal.





Dr Ryszard ZIELIŃSKI

GENERATORY LICZB LOSOWYCH

Już w poprzednich odcinkach poświęconych metodom Monte Carlo spotkaliśmy się z następującym zadaniem: „wylosować punkt z danego przedziału” lub „rzucić na chybił-trafił punkt na kwadrat jednostkowy”. Obecnie zajmiemy się bliżej sposobami realizacji takich poleceń. Mówiąc dokładniej, zajmiemy się nieco ogólniejszym zadaniem, a mianowicie: dana jest pewna zmienna losowa X ; należy zaprojektować taki eksperyment, aby w wyniku tego eksperymentu otrzymać wartość tej zmiennej losowej. Mówiąc, że „dana jest zmienna losowa X ” mamy na myśli to, że dany jest jej rozkład prawdopodobieństwa.

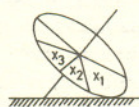
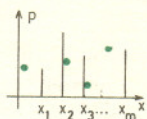
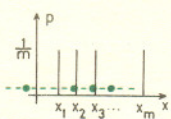
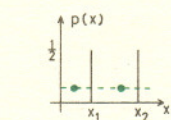
Zadanie jest bardzo łatwe, gdy zmienna losowa X ma następujący rozkład dwupunktowy: $\{(x_1, 1/2), (x_2, 1/2)\}$; przy czym $x_1 \neq x_2$ (gdy $x_1 = x_2$, zmienna losowa stale przyjmuje jedną i tę samą wartość). Odpowiedni eksperyment może przebiegać w następujący sposób. Rzucamy symetryczną monetą. Jeżeli wypadnie orzeł, rejestrujemy wartość x_1 ; jeżeli reszka — wartość x_2 . W ten sposób zarejestrowana wartość jest zmienną losową o zadanym rozkładzie. Zadanie nieco komplikuje się, gdy zmienna losowa może przyjmować m różnych wartości; ma ona wtedy rozkład $\{(x_j, p_j), j = 1, 2, \dots, m\}$. W specjalnych przypadkach, gdy m jest np. jedną z liczb 4, 6, 8, 12 lub 20 i gdy wszystkie p_j są równe, zamiast monety możemy użyć odpowiedniej kostki —

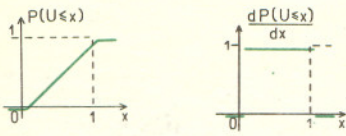
wielościannu foremnego, na którego ścianach wypisano kolejno wartości x_1, x_2, \dots, x_m . Obserwowane w wyniku rzutów wartości są realizacjami zmiennej losowej o danym rozkładzie. Gdy prawdopodobieństwa p_1, p_2, \dots, p_m są różne, najwygodniejszym mechanizmem jest tarcza koła, na którym zaznaczono segmenty o kątach proporcjonalnych do prawdopodobieństw p_j i każdemu segmentowi przyporządkowano odpowiednią liczbę x_j . Koło takie zamocowuje się na trzpieniu tak, żeby otrzymać zwykłego bąka. Gdy uruchomiony bąk zatrzyma się, punkt styczności krawędzi koła z podłożem wyznaczy wartość x_j .

Wszystkie takie urządzenia nazywa się zwykle generatorami liczb losowych. „Uniwersalnym” generatorem liczb losowych jest więc wirująca tarcza podzielona na sektory proporcjonalne do prawdopodobieństw, z jakimi powinny pojawiać się poszczególne liczby. Ponieważ zbudowanie odpowiedniej tarczy jest już sprawą czysto techniczną, zadanie „losowania” liczb o różnych rozkładach moglibyśmy uznać za rozwiązane. Ale ...

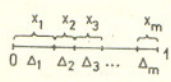
Właśnie! Istnieje jednak pewne „ale”, które nakazuje nam szukać innych rozwiązań. Tym „ale” jest mała praktyczna przydatność takich tarczowych generatorów. Po pierwsze, gdybyśmy mieli losować liczby według różnych rozkładów prawdopodobieństwa, musielibyśmy dla każdego rozkładu budować nową tarczę. Po drugie, wyobraźmy sobie, że mamy wylosować np. 100 000 liczb. Nawet, gdyby wszystkie liczby miały być losowane według tego samego rozkładu (tzn. za pomocą jednej tarczy), czasochłonność manipulacji z wirującą tarczą jest bardzo duża i praktycznie trudno pogodzić się z takim rozwiązaniem. W dodatku naturalne zużywanie się naszego narzędzia i zwykłe zmęczenie może doprowadzić do tego, że tarcza nie będzie zatrzymywała się z jednakowym prawdopodobieństwem na każdym punkcie swojego obwodu, a więc realizowany rozkład prawdopodobieństwa będzie odbiegał od rozkładu postulowanego. Po trzecie, większość współczesnych rachunków wykonuje się na maszynach cyfrowych, a nie bardzo wiadomo, jak opisane wyżej urządzenie dopasować do takich maszyn.

Powyższe zastrzeżenia stały się przyczyną opracowania specjalnych urządzeń, które mogą być wmontowane w maszynę cyfrową. Maszyna wyposażona w taki generator liczb losowych może na żądanie drukować potrzebną ilość takich liczb, otrzymywanych przy różnych rozkładach prawdopodobieństwa, lub wykorzystywać te liczby do zaprogramowanych obliczeń (np. do obliczania całek lub rozwiązywania równań metodami Monte Carlo). Jak zbudowane są takie urządzenia?





Rozkład jednostajny na przedziale (0,1)



$$\{U \in \Delta_j\} = \{X = x_j\}$$

Przed wszystkim pokażemy, że potrafimy generować liczby losowe według dowolnych rozkładów prawdopodobieństwa, jeżeli tylko potrafimy generować liczby według rozkładu jednostajnego na przedziale (0,1). Wyjaśnimy, że zmienna losowa u ma rozkład jednostajny na przedziale (0,1), jeżeli dla dowolnych liczb $a, b (a < b)$ z tego przedziału $P\{a < u < b\} = b - a$ (patrz artykuł o prawdopodobieństwach geometrycznych, Delta 6/1975). Przypuścimy, że umiemy generować takie liczby, a chcemy generować liczby losowe według rozkładu

$$(*) \quad \{(x_j, p_j), j = 1, 2, \dots, m\}.$$

Podzielmy odcinek jednostkowy na rozłączne podprzedziały $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ o długościach odpowiednio równych p_1, p_2, \dots, p_m (można tak zrobić, gdyż jak wiadomo $\sum p_j = 1$). Wygenerujemy teraz liczbę U według rozkładu jednostajnego na przedziale (0,1). Będziemy przypisywali zmiennej X wartości x_j , jeżeli wygenerowana liczba U należy do przedziału Δ_j . Wtedy oczywiście

$$P\{X = x_j\} = P\{U \in \Delta_j\}$$

a ponieważ przedziały Δ_j zostały tak dobrane, żeby prawdopodobieństwo po prawej stronie było równe p_j , to liczby X otrzymywane w wyniku naszego postępowania mają dany rozkład (*). Pozostaje wyjaśnić, jak maszyna cyfrowa generuje liczby U według rozkładu jednostajnego na przedziale (0,1). Będzie nam tu potrzebna jeszcze jedna uwaga. Otóż każda liczba z przedziału (0,1) może być zapisana binarnie w postaci

$$0, c_1 c_2 c_3 \dots$$

gdzie c_1, c_2, c_3, \dots są równe zeru lub jedności. Niektóre liczby mają takie dwa zapisy: w jednym, poczynając od pewnego miejsca występują same jedynki, w drugim — same zera (patrz „Mała Delta” 8/1975). Dla jednoznaczności umówmy się, że liczby takie będziemy reprezentowali zapisem kończącym się samymi zerami (np. z dwóch postaci 0,01 (0) i 0,00 (1) liczby 1/4 wybieramy postać pierwszą). Istotną rolę w dalszych rozważaniach odgrywa następujące

Twierdzenie. Niech $(c_i), i = 1, 2, \dots$ będzie nieskończonym ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że dla każdego i mamy

$$P\{c_i = 0\} = P\{c_i = 1\} = \frac{1}{2}.$$

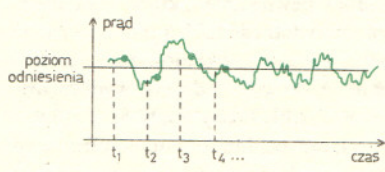
Jeżeli $0, c_1 c_2 c_3 \dots$ jest zapisem binarnym liczby U , to dla każdych liczb $a, b (a < b)$ z przedziału (0,1) mamy

$$P\{a < U < b\} = b - a$$

tzn. U ma rozkład jednostajny na przedziale (0,1).

Z twierdzenia tego wynika, że potrafimy generować liczby losowe według rozkładu jednostajnego na przedziale (0,1) — a więc również według dowolnego rozkładu — jeżeli potrafimy generować ciągi zer i jedynek tak, by zera i jedynki pojawiały się z prawdopodobieństwem 1/2, a wyniki poszczególnych kroków były niezależne. Mamy tu więc do czynienia z dobrze znanym ciągiem prób Bernoulli’ego, w którym każda próba kończy się z prawdopodobieństwem 1/2 sukcesem („jedynka”) lub porażką („zero”). Wynika stąd, że dla generowania liczb o dowolnych rozkładach wystarczy nam symetryczna moneta. Pozostaje jeszcze tylko wyjaśnić, jak taką „monetą” posługuje się maszyna cyfrowa. Otóż maszyny cyfrowe korzystają zwykle z jednego z dwóch następujących rozwiązań.

1. Wiadomo, że w urządzeniach elektronicznych pojawiają się tzw. prądy szumowe. Prądy te mają w czasie przebieg bardzo nieregularny, a ich wartość w każdej chwili zależy od „czystego przypadku”. Typowy przebieg takiego prądu wygląda mniej więcej tak:



Prądy takie można wzmacniać i mierzyć. Można dobrać taką wartość tego prądu, aby prawdopodobieństwo, że wartość ta będzie w danej chwili t_i przekroczona było równe 1/2. Niezależność tego, co się dzieje w poszczególnych chwilach t_1, t_2, t_3, \dots można zagwarantować przez wybranie dostatecznie dużego odstępu czasu $t_i - t_{i-1}$ pomiędzy kolejnymi odczytami („dostatecznie duży” odstęp czasu, to np. odstęp kilku tysięcznych sekundy). Wystarczy teraz wmontować do maszyny odpowiednie źródło szumów i rejestrować w jej pamięci 0, gdy w chwili pomiaru prąd szumowy ma wartość poniżej, lub wartość 1, gdy powyżej odpowiednio ustalonego poziomu. Z takich zer i jedynek maszyna składa liczbę i posyła ją do odpowiedniego rejestru, skąd może być czerpana do obliczeń. Ponieważ urządzenie szumiące pracuje bez przerwy, rejestr taki stale zmienia się i jeżeli z tego rejestru pobierzemy kolejno dwie liczby, to będą to liczby utworzone z różnych odcinków ciągu zer i jedynek.



2. Druga metoda stosowana w maszynach cyfrowych polega na wykorzystaniu źródeł promieniotwórczości. W odpowiednim bloku maszyny umieszcza się substancję promieniotwórczą i licznik wypromieniowanych cząstek. Stan tego licznika ulega zmianom w losowych chwilach czasu i po odpowiednim przeliczeniu może być traktowany jako źródło odpowiednich liczb losowych. Najczęściej wskazania licznika przelicza się odpowiednio na ciąg zer i jedynek (np. zero, gdy w danej chwili stan licznika jest parzysty i jedynka w przypadku przeciwnym), a następnie, zgodnie z podanym wyżej twierdzeniem te zera i jedynki składa się w liczby. Przedstawiony wyżej obraz generatorów liczb losowych w maszynach cyfrowych jest bardzo uproszczony i pozwala tylko na zorientowanie się w ogólnej idei tego typu rozwiązań. Naprawdę sytuacja jest znacznie bardziej skomplikowana. Wystarczy np. chwilę zastanowić się nad tym, jak wybierać poziom odniesienia szumów (który przecież decyduje o tym, czy w danej chwili zarejestrujemy zero, czy jedynkę), aby prawdopodobieństwo zera (lub jedynki) było dokładnie równe $1/2$. Albo, jak kontrolować rozpad substancji promieniotwórczej, aby zera i jedynki pojawiały się z jednakowym prawdopodobieństwem. Dla użytkownika maszyny nie są to jednak problemy istotne; wystarczy mu, że po napisaniu w programie odpowiedniej formuły otrzyma liczbę losową wygenerowaną według założonego rozkładu prawdopodobieństwa. Twierdzenie leżące u podstaw opisanych metod generowania liczb losowych w maszynach cyfrowych było już właściwie — chociaż w nieco innej wersji — przez nas wykorzystywane, gdy za pomocą kostki rzucaliśmy punkty na prostokąt obliczając pewną całkę (por. Delta 1/1976). Tam jednak poszczególne cyfry c_j pochodziły z dziesiętkowego systemu liczenia, a mechanizm losowy (dwudziestościan lub dziesięciograniasty bączek) gwarantowały nam pojawianie się każdej z dziesięciu cyfr z jednakowym prawdopodobieństwem. Sformułowanie tego twierdzenia dla przypadku k -arnego systemu zapisywania liczb i urządzenia, „produkującego” cyfry $0, 1, \dots, k-1$, każdą z prawdopodobieństwem $\frac{1}{k}$, pozostawiamy Czytelnikowi.



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 79. Udowodnić, że jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 3 i różną od 5, to dowolny trójkąt można podzielić na n trójkątów podobnych do niego.

Rozwiązanie na str. 12

W. Mnich

M 80. Czy istnieje liczba naturalna n , którą można przedstawić w postaci $n = x! + y!$ ($x < y$) dwoma sposobami?

Rozwiązanie na str. 2

M 81. Udowodnić, że równania

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$cx^2 + bx + a = 0$$

gdzie $a \neq c$, mają wspólny pierwiastek wtedy i tylko wtedy, gdy $|a+c| = |b|$.

Rozwiązanie na str. 3.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 27. W artykule zamieszczonym na stronie 4 niniejszego numeru «Deltę» został omówiony tzw. efekt Dopplera. Zainteresowanym proponujemy obecnie rozwiązanie dwóch przykładów praktycznego wykorzystania tego zjawiska.

Przykład 1.

Na rakiemie umieszczono nadajnik radiowy emitujący regularne sygnały o częstotliwości 10 MHz. Następnie rakietę została wysłana w górne, zjonizowane warstwy atmosfery, gdzie współczynnik załamania dla fal radiowych jest różny od jedności. Stacja naziemna odbierała sygnały od rakiety nakładając je na inne, wzorcowe oscylacje, również o częstotliwości 10 MHz. Kiedy szybkość

oddalania się rakiety wzdłuż kierunku obserwacji wynosiła $600 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, w aparaturze odbiorczej

zaobserwowano występowanie wzmocnień z częstotnością 10 Hz.

Jaki jest współczynnik załamania środowiska, w którym poruszała się rakietę? Rozwiązanie na str. 2

Przykład 2. (zaczerpnięty ze zbioru zadań A. B. Pipparda).

Sztuczny satelita Ziemi, emitujący sygnały radiowe o stałej częstotliwości, przelatuje nad punktem obserwacyjnym, gdzie notuje się co $T = 20$ s częstotliwości odbieranych sygnałów. Zanotowano następujące wartości: 40,00215 MHz, 40,00208 MHz, 40,00196 MHz, 40,00175 MHz, 40,00141 MHz, 40,00106 MHz, 40,00077 MHz, 40,00059 MHz, 40,00049 MHz, 40,00043 MHz. Czy powyższe obserwacje mogą posłużyć do wyznaczenia prędkości satelity oraz jego najmniejszej odległości od punktu obserwacyjnego? Trajektorię satelity można przyjąć za linię prostą. Rozwiązanie na str. 14.



W rozwiązaniu zadania M 52 (Delta 6/1975, str. 7) napisaliśmy, że nie wiadomo nam, czy przestrzeń trójwymiarowa pozbawiona jednego punktu jest sumą prostych rozłącznych.

Profesor Jan Mycielski z University of Colorado w Boulder (USA) podał w liście z dnia 20 października ub. r. dowód twierdzenia orzekającego, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. W dowodzie tym korzysta on z pewnika wyboru (dokładniej: z twierdzenia o dobrym uporządkowaniu).

