

deia

h=6.63.10.J-S ³⁴ Π=3.141593

CENA 5 ZŁ

NR 4 1976

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNY



SPIS TREŚCI

Esej o kakofonii <i>Zbigniew Penhersi,</i> <i>kompozytor</i>	str. 1
Zjawiska nieliniowe w fizyce Samotna fala <i>Doc. dr Antoni Kuszell</i>	str. 3
Równanie struny <i>Dr Tadeusz Iwaniec</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Rozstrzygnięcie konkursu z numeru sierpniowego „Deltę”	str. 11
Prehistoryczny instrument muzyczny	str. 11
Laboratorium w domu <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 12
Zadania	str. 13
Szeregi Fouriera <i>Dr Wiesław Szlenk</i>	str. 14

W następnym numerze:

Uniwersalny Domowy
Integrator Beztranzystorowy

„Delta”
matematyczno-fizyczny miesięcznik
popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego i Polskiego
Towarzystwa Fizycznego
wydawniczy przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
doc. dr J. Bartke
prof. dr Grzegorz Białkowski —
przewodniczącą
doc. dr A. Bączyński
doc. dr B. Gleichgewicht
doc. dr K. Goebel
doc. dr B. Iwazskiewicz
doc. dr T. Iwiński
doc. dr A. Januszajtis
prof. dr Leon Jeśmanowicz —
wiceprzewodniczącą
mgr H. Kaczorek
prof. dr B. Karczewski
prof. dr M. Kuczma
mgr A. Mąkowski
prof. dr Z. Pawlak
prof. dr A. Piekara

prof. dr Z. Semadeni
prof. dr J. Stankowski
prof. dr M. Subotowicz
doc. dr S. Turnau
doc. dr J. Wdowczyk

Redaguje Kolegium w składzie:
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
dr T. B. Iwiński
dr M. Kordos — red. nac.
mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.
doc. dr M. Świącki
D. Tys — sekr. red.
Adres Redakcji
ul. Hoża 69 p. 151,
00-681 Warszawa,

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g, 61×86
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 11/76 J-105

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowo właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-940 Warszawa ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5, — in indeksu 35723/35550

Nauki ścisłe zalecają się publiczności przede wszystkim jednoznacznością wypowiedzianych w ich ramach sądów, nawet „nie wiem” ma w naukach ścisłych jednoznaczny charakter.

Nauki inne są o tyle rozwiązane, że nie tylko pozwalają sobie na to, by wypowiedzi ich twórców były wieloznaczne, ale nawet chlubią się tą wieloznacznością.

A w ludziach w jednoznaczności wyrosłych niejedną z owych niejednoznacznych wypowiedzi budzi niepokój:

— czy to wieloznaczność, czy mętna jest myśl wypowiedziana?

— czy to konstrukcja rokokowa wypowiedzi, czy bałagan, nad którym twórca nie panuje?

— i czy nie po to wypowiedź jest wieloznaczna, by nie było sposobu powiedzieć: „i tu się bratku mylisz!”?

Wychowano nas jednak tak, byśmy się takich niepokojów wstydzieli.

Poświęcając cały numer dźwiękowi — pozwólmy by stworzył go muzyk.



Zbigniew PENHERSKI, kompozytor

sej o kakofonii

Zapytany niedawno przez pewnego wybitnego naukowca o to, co sędzę o kakofonii, odpowiedziałem, że nie wiem, ale wiem, że kakofonia ma się prawdopodobnie tak do harmonii, fisharmonii i kalafonii, jak się ma miech do stereofonii, a stereometria do barometru i metryki. Co oznaczało, że mianem kakofonii można określić zawsze to wszystko, na co się ma ochotę, albo na co się ma ochotę nie zawsze, lecz czasami, albo, że takie jest po prostu na ten temat moje zdanie. Ponieważ termin „kakofonia” posiada nie tylko i zgodnie z jego etymologią zabarwienie wyłącznie pejoratywne (gr. *kakos* — zły, *kakophonía* — złe brzmienie), ponieważ przez jego wulgaryzację, co nastąpiło po roku 1925, przydano mu jeszcze odcień pogardliwy. Uczyniono to i dlatego zapewne po roku 1925, ponieważ Schönberg, tworząc swoją nową technikę (metodę) porządkowania materiału muzycznego — dodekafonię od roku 1914-go, potrzebował na ukończenie tej pracy jedenastu lat. Wówczas to właśnie i dopiero teraz, na „arenę dziejów” mogli i postanowili wkroczyć „kalamburzyści”. Zarówno i w takim stopniu dla wyrażenia swojej dezaprobaty dla poczynań Schönberga, jak (i w jakim) dla ukazania swoich rozlicznych umiejętności. Stąd mianem „kakofonistów” określało się i rychło i nie tylko dodekafonistów prawdziwych (szkoła wiedeńska: A. Schönberg, A. Berg, A. Webern), ale do obozu (?) „dodekafonistów” zesłano przy okazji Strawińskiego, Straussa (Ryszarda), Bartoka i Prokofiewa. Co uczyniono prawdopodobnie z taką samą niefrasobliwością i pewnością siebie, z jaką niegdyś, chociaż nie posługując się terminem „kakofonia”, myślano o **kakofoniczności** utworów Beethovena, Chopina i Bacha.

Zapytany wówczas przez pewnego wybitnego naukowca również o to, czy ja sam widzę związek między kakofonią i dodekafonią odpowiedziałem, że tak i nie i że dlatego nie, ponieważ terminem „kakofonia” posługuje się z niejakim upodobaniem pewna kucharka, zatrudniona etatowo w barze mlecznym, a mnie, mimo rozlicznych starań nikt nigdy żadnego etatu nie proponował. Odpowiedziałem również, że nawet, gdybym kiedykolwiek uzyskał jakiś etat, to terminem „kakofonia” też bym się nie posługiwał, co jednak jeszcze nie oznacza, że na swój prywatny użytek w znaczenie tego słowa nie wierzę, wręcz przeciwnie. Ponieważ wprawdzie nie wiem, o jaki ład chodzi tym, którzy są zatrudnieni na etacie, ale wiem, że zgodnie z powszechną i chyba uzasadnioną opinią, **istotą** muzyki jest ład. A ład znaczy tyle, co **organizacja**, porządek, nieprzypadkowość, system, technika, **metoda**.

Wówczas, zniechęcony bałamutnością moich wykrętów, pewien wybitny naukowiec powiedział, że zada mi siedem konkretnych pytań, na które ja zobowiązałem się odpowiedzieć szczerze i zgodnie z najlepszymi chęciami. Pytania: a) dlaczego Schönberg musiał wymyśleć dodekafonię, skoro dodekafonia nie była potrzebna do szczęścia Strawińskiemu, b) czy chorał gregoriański był kakofonią, c) dlaczego muzyka bułgarska posiada tak bałaganiarskie rytmy, d) czy komputer może „napisać” dobry utwór, e) dlaczego Pan nie posługuje się techniką dodekafoniczną, f) kto może nie lubić Brahmsa, g) dlaczego pewna kucharka z baru mlecznego posługuje się z takim upodobaniem terminem „kakofonia” i kto jeszcze.

Odpowiedziałem:

ad a) Kiedy za sprawą Wagnera system tonalny rozpadł się praktycznie biorąc w przysłowiowe gruzy, zaistniały naturalne warunki, a nawet konieczność stworzenia systemu innego. Dodekafonii nie musiał wymyśleć Schönberg, zresztą pierwsze utwory dwunastotonowe napisał jeszcze około roku 1908 J. M. Hauer, podobnie, system wynaleziony przez Schönberga nie musiał być dodekafonią. Skriabin wypracował na swój prywatny użytek nowy system harmoniczny, który polegał na budowaniu akordów z interwałów kwartowych (w harmonii funkcyjnej obowiązywała tercjowa budowa akordów), a Bartok posługiwał się z powodzeniem zasadą złotego podziału, budując konstrukcje o zadziwiającej logice. Strawińskiego nie tyle nie interesowała dodekafonia (przeciwnie, w swoim „trzecim” okresie na dodekafonię się „nawrócił”), ale nie interesował go żaden taki system, którym musiałby się posługiwać w sposób wyłączny.

Stąd Strawiński za wystarczająco precyzyjny element formotwórczy uważał „czasami” metryczną, a kiedy indziej zabawiał się w styl neoklasycy, naśladowując niefrasobliwie Pergolesiego, Glinę, Mozarta, a nawet Czajkowskiego. Nie istnieje zatem zapewne jakiś muzyczny ład uniwersalny, istnieją tylko różne, i na różnych zasadach oparte metody porządkowania materiału muzycznego. Wydaje się też, że nie są często wystarczająco oczywiste powody, dla których pewne metody komponowania wydają się niektórym nie wiele warte. Wagner boczył się na Brahmsa, ponieważ jego „ład” wydawał mu się prymitywny, a dla Brahmsa „ład” wagnerowski miał być jakoby szczytem bezładu.

ad b) Był, jeżeli koniecznie musimy zostać przy tej terminologii. Ponieważ wywodząc się z muzyki bizantyjskiej i syryjskiej, był na naszym terenie ciałem zupełnie obcym, o czym zresztą nikt nie ośmielił się nawet „pisać”. Ponieważ chorał był po prostu uświęcony swoją funkcją, a powodów „uświęcenia” (a więc i nietykalności) istnieje w ogóle jeszcze kilka. Tzw. „Etiudę rewolucyjną” i symfonię „z motywem losu” czy i rozumie więcej osób, niż toleruje fugi Bacha i nocturny Chopina.

ad c) Nie wiem, ale wiem, że muzyki (ludowej) bułgarskiej nie rozumieją ci, którzy za to „przepadają” za muzyką Straussa (Jana), Lehara i jeszcze kogoś. I „przepadają” nie tyle z powodu-tzw. pięknych melodii, ile dlatego, że rytmika muzyki tych panów jest tak szalenie europejska; albo „to” jest walcem, albo polką (lub marszem — różnica niewielka), tzn. jest utrzymane w metrum dwu- lub trójdzielnym. A ci Bułgarzy używają sobie metrum 7 a nawet 13, kiedy wiadomo, że obie te liczby nie dzielą się bez reszty ani przez 2 ani przez trzy, więc jest to albo doszczętny chaos (bałaganiarstwo), albo też zgola wyższa (?) matematyka. Ale ja znam jeszcze inne i bardziej, niż bułgarskie skomplikowane systemy rytmiczne.

ad d) Umiejętnie zaprogramowany komputer mógłby zapewne „wynotować” taki rodzaj ładu, na który człowiek stracił by połowę swojego krótkiego życia. Według totalnego serializmu Stockhausena i (niegdyś) Bouleza, uporządkowaniu i to według określonego klucza musiały podlegać nie tylko już wysokości, następstwa i długości trwania dźwięków, ale również ich dynamika i artykulacja. Te utwory były często znakomitą zabawą dla... wzroku, ponieważ pozwalały wyśledzić aż tyle elementów logiki. Prawdziwa „Augenmusik”. Myślę, że dobry komputer mógłby wprowadzić jeszcze większe komplikacje... Mógłby zaprogramować np. już nie tylko 12 lub 24 (jak twórca systemu ćwierćtonowego — A. Haba) wysokości w obrębie oktawy, ale mógłby ich przyjąć wstępnie 113 i ułożyć je wszystkie w ład i system najwyższego rzędu. Mógłby również komputer nie posługiwać się takim drobnym i skromnym wycinkiem częstotliwości akustycznych, jaki jest zawarty w częstotliwościach zawartych w granicach 16—20 000 Hz. Wydaje się też, że wiele jeszcze rzeczy komputer mógłby zrealizować i że być może utwór, który by wówczas powstał, byłby w stanie wzruszyć do łez wszystkie inne komputery, gdyby tylko komputery miały zaprogramowane ły. Ale człowiek by wtedy nie płakał, a gdyby nawet to robił, to z powodu, że nasze ludzkie uszy są mniej doskonałe, niż uszy nawet zwykłego psa. Ponieważ my nie słyszymy ultradźwięków, ponieważ one są poza naszym zasięgiem, podobnie jak jedynym pożytkiem przebywania w obrębie infradźwięków, jest dla każdego człowieka rychłe przeniesienie się na Powązki. Przecież to my, ludzie, musieliśmy skorygować nawet Pitagorasa, ponieważ jego system odkryty w czasie zabawy ze struną, okazał się niedostępny dla naszych uszu. Dlatego my, ludzie, będziemy musieli korygować komputery.

ad e) Ponieważ odpowiadają mi bardziej inne techniki, zwłaszcza te, które wypracowuję na mój prywatny użytek. Ale byłby to temat na inną już okazję.

ad f) Po pierwsze, Eskimosi. Z uwagi na zupełnie odmienny krąg kulturowy i posługiwanie się (w związku z tym) odmiennymi, niż Brahms kryteriami piękna. Po drugie, Etruskowie — ze względów zrozumiałych. Po trzecie, Wagner i Liszt, o czym już wspominałem. Po czwarte, ci wszyscy, którzy mają na to ochotę. Ponieważ nie istnieje w sztuce żaden przymus. W tym samym kręgu kulturowym i w tym samym czasie jedni wieszają na ścianie „jelenie”, podczas gdy inni marzą o wykradzeniu autentycznego Rubensa, jedni mają ochotę na zwiedzanie i podziwianie architektury baroku, a innym wystarcza współczesna konstrukcja (?) budki z piwem.

ad g) Zapytana o to wprost odpowiedziała, że tak zupełnie dokładnie nie wie, ale że wie, że jej za to nikt „nie urwie głowy”. Że owszem, nie wypada i ona nigdy nie mówi, że „Pan Tadeusz” jest **belkotem**, ponieważ w tym wierszu (?) zawarte są jednak pewne konkrety (słowa, zdania, fabuła), a ponadto o „Panu Tadeuszu” mówi się „w towarzystwie”. Odpowiedziała też, że ona nigdy właściwie tego Brahmsa nie słyszała w całości, bo kiedy zaczęto „to” nadawać przez barowy głośnik, to jej koleżanka z okienka krzyczała zaraz: „grochowa i bukiet raz”. Również, że nie przerabiała nigdy w szkole Brahmsa tak, jak przerabiała „Powrót taty”, więc skąd ma wiedzieć, „o czym to jest”. I wreszcie, że po co ona ma słuchać tej **kakofonii** (nikt jej za to określenie głowy nie urwie), skoro jest tyle pięknych piosenek. Ze słowami o miłości, z melodiami „wpadającymi w ucho”, z rytmami do tańca i takimi zawsze takimi samymi. I że jest tak zafascynowana oczywistym pięknem, **ładem, systemem i porządkiem** tych piosenek, że postanowiła się zapisać do studia piosenkarskiego.

Zasmuciłem się wówczas, ponieważ wiedziałem, że nikt już nigdy nie ugotuje takiej fasolki po bretońsku, jaką jadłem w sąsiednim barze mlecznym. Jadam teraz w „Bristolu” i zastanawiam się czym wytłumaczyć fakt, że z tej samej fasolki można przyrządzić potrawy o tak bardzo różnym kształcie i smaku.



„Obserwowałem ruch łodzi ciągniętej szybko przez parę koni wzdłuż wąskiego kanału, a gdy nagle łódź się zatrzymała, woda w kanale wprowadzona przez nią w ruch tego nie uczyniła, zgromadziła się dookoła dziobu statku w stanie gwałtownego wzburzenia, potem nagle pozostawiła dziób w tyle posuwając się z dużą prędkością do przodu przybierając kształt dużego, samotnego wzniesienia, zaokrąglonego wierzchołka wody o dobrze określonej formie, które utrzymywało swój ruch bez widocznej zmiany kształtu lub zmniejszenia prędkości. Towarzyszyłem mu konno i dogoniłem stale poruszające się z prędkością osiem lub dziewięć mil na godzinę i ciągle zachowujące swój pierwotny kształt około trzydziestu stóp długi i stopę do półtora wysokości. Jego wysokość stopniowo malała, a po ściganiu go na przestrzeni jednej lub dwóch mil zgubiłem je w zakręcie kanału. Tak więc w miesiącu sierpniu 1834 roku miałem pierwszą okazję spotkania się z tym pięknym i osobliwym zjawiskiem.”

J. Scott Russell — *Sprawozdania Królewskiego Towarzystwa w Edynburgu str. 319—320, 1844 r.*

Doc. dr Antoni KUSZELI

jawiska nieliniowe w fizyce

Większość zjawisk fizycznych opisywana jest przez równania liniowe. Własności takich równań są najlepiej zbadane. Opracowano bardzo rozbudowany aparat matematyczny służący do ich analizy. Na wynikach odpowiednich teorii oparte są nasze intuicje, pomocne przy rozwiązywaniu problemów. Nawet w wypadkach, gdy wyjściowe równania mają strukturę nieliniową, to zwykła procedura polega na szukaniu rozwiązań w postaci małych odchyłeń od pewnego stanu równowagi, opisywanych przez równania liniowe. Tak więc przenosimy nasze intuicje liniowe na problemy nieliniowe. Okazuje się jednak, że jest to niebezpieczne i w wielu przypadkach rozwój układu nieliniowego może być krańcowo różny od zachowania odpowiedniego układu zlinearyzowanego.

Należy prześledzić zasadnicze różnice pomiędzy układem liniowym a nieliniowym. Podstawowymi własnościami układów liniowych są: twierdzenie o jednoznaczności oraz zasada superpozycji. Twierdzenie o jednoznaczności orzeka, że dane równanie uzupełnione odpowiednimi warunkami brzegowymi (początkowymi) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Twierdzenie to jest też słuszne dla pewnych równań nieliniowych (patrz H. Kołakowski «Delta» 6/1975). Zasada superpozycji jest własnością silniej związaną z liniowością układu. Rozumiemy ją następująco: jeżeli F_1 i F_2 oznaczają dwa rozwiązania naszego problemu (oczywiście odpowiadające innym warunkom brzegowym), to każda kombinacja liniowa postaci $aF_1 + bF_2$ (a, b dowolne stałe) jest także rozwiązaniem naszego równania (lub układu równań). Dobrym przykładem ilustrującym tę zasadę jest zjawisko interferencji fal. Wyobraźmy sobie powierzchnię stawu z dwiema trzcunami rosnącymi odpowiednio w punktach A i B . Przyjmijmy, że wiatr porusza tylko trzcinę rosnącą w A . Na powierzchni rozchodzą się będą koncentryczne kręgi o środku w A . Odległości między kręgami (długość fali) zależą od częstości drgań naszej trzciny. Podobny obraz otrzymamy, gdy drgać będzie tylko druga trzcina. Dla prostoty przypomnijmy, że obie trzciny mają tę samą częstość drgań. Obraz, który otrzymamy, gdy obie trzciny będą drgały jednocześnie, jest wynikiem nałożenia się obu drgań na siebie (zasada superpozycji) i jest zupełnie różny od obrazu fal kolistych. Otrzymamy odpowiednio wzmocnienia i osłabienia fal (interferencja) wzdłuż linii daleko od trzciny przechodzących w proste.

Jak już wspominaliśmy, w przypadku ogólnym równania nieliniowe nie mają powyższych własności i dlatego analiza tych równań jest dużo trudniejsza. Pomimo wszystko pewne klasy takich równań zostały rozwiązane i przedyskutowane. Można nawet mówić o tym, że ostatnio równania nieliniowe stały się modne. Ten fakt usprawiedliwiają pewne bardzo ciekawe własności ich rozwiązań. Chcemy tutaj omówić pewne wybrane równania nieliniowe, które mają ciekawe własności, a poza tym opisują pewne zjawiska fizyczne. Zaczniemy od przykładu najlepiej zbadanego równania. Równanie to nazywane równaniem Kortewega-de Vriesa (w skrócie KdV) opisuje rozchodzenie się fal na wodzie w płytkim kanale. Można je zapisać w postaci:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) + V(x, t) \frac{\partial}{\partial x} V(x, t) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} V(x, t) = 0,$$

gdzie t oznacza czas, x zaś położenie. $V(x, t)$ jest wychyleniem powierzchni cieczy od poziomu równowagi. Przy dyskusji naszego równania ograniczymy się do klasy rozwiązań, które znikają wraz ze wszystkimi pochodnymi gdy $x \rightarrow \pm \infty$, dla dowolnego t . Takie rozwiązania nazywać będziemy lokalizowalnymi. W tej klasie rozwiązań można udowodnić jednoznaczność rozwiązania problemu początkowego. Oznacza to, że istnieje tylko jedno rozwiązanie, które dla $t = 0$ jest równe danemu warunkowi początkowemu.

Na początek rozpatrzmy pewną szczególną podklasę rozwiązań, która opisuje falę o ustalonym kształcie przemieszczającą się ze stałą prędkością c .

Inaczej mówiąc szukamy rozwiązań, o ile takie istnieją, w postaci

$$(2) \quad V(x, t) = F(x - ct).$$

Podstawiając tą zależność do równania KdV otrzymujemy

$$(3) \quad -c \frac{\partial}{\partial x} F(x - ct) + F(x - ct) \frac{\partial}{\partial x} F(x - ct) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} F(x - ct) = 0.$$

Oznaczając $y = x - ct$ i korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej, równanie to przepiszemy w postaci:

$$-c \frac{d}{dy} F(y) + F(y) \frac{d}{dy} F(y) + \frac{d^3}{dy^3} F(y) = 0.$$

Zauważmy teraz, że równanie nasze można też napisać w postaci:

$$(4) \quad \frac{d}{dy} \left[-cF(y) + \frac{1}{2} F^2(y) + \frac{d^2}{dy^2} F(y) \right] = 0.$$

Teraz scałkujemy obie strony tego równania względem y w granicach od $-\infty$ do z :

$$(5) \quad -cF(z) + \frac{1}{2} F^2(z) + \frac{d^2}{dz^2} F(z) = 0.$$

W ten sposób sprowadziliśmy równanie rzędu trzeciego do równania rzędu drugiego. Teraz

mnożąc stronami przez $\frac{d}{dz} F(z)$ i znów całkując w granicach od $-\infty$ do y dostajemy

$$(6) \quad -cF^2(y) + \frac{1}{3} F^3(y) + \left[\frac{d}{dy} F(y) \right]^2 = 0.$$

Równanie to jest już rzędu pierwszego i przez bezpośrednie całkowanie można je rozwiązać. Wygodniej jest jednak dokonać następnego podstawienia

$$(7) \quad F(y) = G^{-2}(y),$$

skąd otrzymujemy

$$(8) \quad \frac{d}{dy} F(y) = -2G^{-3}(y) \frac{d}{dy} G(y).$$

Podstawiając do równania (6) otrzymujemy:

$$(9) \quad -cG^{-4}(y) + \frac{1}{3} G^{-6}(y) + 4G^{-6}(y) \left[\frac{d}{dy} G(y) \right]^2 = 0.$$

lub w prostszej postaci

$$(10) \quad -cG^2(y) + \frac{1}{3} + 4 \left[\frac{dG(y)}{dy} \right]^2 = 0.$$

Równanie (10) przepiszemy teraz w postaci wygodnej do dalszych przekształceń.

$$(11) \quad \frac{1}{\sqrt{G^2(y) - \frac{1}{3c}}} \frac{dG(y)}{dy} = \frac{\sqrt{c}}{2}.$$

Skorzystajmy ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej do funkcji cosinus hiperboliczny

$$(12) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{Arcosh} \left(\frac{x}{\alpha} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}$$

i przepiszmy równanie (11) w postaci

$$(13) \quad \frac{d}{dy} \operatorname{Arcosh}(\sqrt{3c} G(y)) = \frac{\sqrt{c}}{2}.$$

Całkując (już po raz ostatni) względem zmiennej y w granicach od 0 do z otrzymujemy ostatecznie wynik

$$(14) \quad \operatorname{Arcosh}(\sqrt{3c} G(z)) - \operatorname{Arcosh}(\sqrt{3c} G(0)) = \frac{\sqrt{c}}{2} z.$$

Dla pełnego określenia funkcji $G(z)$ potrzebna jest znajomość jej wartości w punkcie $z = 0$. W tym celu należy założyć coś o wartości funkcji $F(z)$. Ponieważ wiemy, że funkcja $F(z)$ znika, gdy $z \rightarrow \pm \infty$, więc, jeśli nie znika tożsamościowo, to musi dla jakiegoś z_0 przyjmować

ekstremum. Przyjmijmy więc $z_0 = 0$. Wtedy $\left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0$, a z równania (6) znajdujemy

$$(15) \quad F(0) = 3c.$$

Możemy teraz obliczyć wielkość $G(0) = \frac{1}{\sqrt{3c}}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F(y) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d^2 F(y)}{dy^2} = 0 \end{aligned}$$

Ponieważ $\text{Arcosh}(1) = 0$, wzór (14) przybiera postać

$$(16) \quad \text{Arcosh}(\sqrt{3c} G(z)) = \frac{\sqrt{c}}{2} z,$$

lub w formie równoważnej (korzystając z definicji funkcji odwrotnej)

$$(17) \quad \sqrt{3c} G(z) = \cosh\left(\frac{\sqrt{c}}{2} z\right).$$

Tak więc po długich rachunkach znaleźliśmy ostateczną postać funkcji $F(y)$:

$$(18) \quad F(y) = \frac{3c}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2} y\right)} = \frac{3c}{\cosh^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x-ct)\right]} = V(x, t).$$

Rozwiązanie to ma szereg ciekawych własności. Jego kształt przypomina samotne wzniesienie, które w całości porusza się z lewa na prawo z prędkością c . Ze względu na swój kształt oraz fakt, że nie zmienia się on w czasie ruchu, rozwiązanie to nosi nazwę solitonu. Nazwa ta pochodzi od angielskiego terminu „solitary wave”, co oznacza samotną falę. Najbardziej frapuje fizyków fakt, że pomimo zjawiska dyspersji (patrz dyskusja na marginesie) soliton nie rozplywa się i wykazuje własności trwałego obiektu fizycznego, żeby nie powiedzieć trwałej cząstki. Jest rzeczą ciekawą, że soliton został zaobserwowany w naturze po raz pierwszy w roku 1834, a dopiero w roku 1895 opisano go teoretycznie. Bardzo ciekawą własnością naszego solitonu jest zlokalizowanie w pobliżu maksimum. Na odległościach od maksimum większych od kilku $x^0 = 2/\sqrt{c}$ (należy tu wyjaśnić, że od początku pracujemy w bezwymiarowym układzie jednostek) amplituda solitonu praktycznie zanika. Można więc uznać, że soliton nie znika jedynie na ograniczonym odcinku. Ostatnią ciekawą własnością solitonu jest zależność amplitudy od prędkości: im wyższy soliton tym szybciej się porusza. Ostatnio, na początku lat sześćdziesiątych, wzrosło zainteresowanie równaniem KdV w związku z różnymi od hydrodynamiki zastosowaniami (fizyka plazmy oraz teoria fal anharmonicznych w kryształach). Zaobserwowano (z początku przy pomocy rachunków na maszynach cyfrowych, a następnie rozwiązań analitycznych), że jeśli w chwili początkowej dwa solitony były daleko od siebie tak, że jeden z nich znajdował się w miejscu, gdzie amplituda drugiego była praktycznie równa zero (tylko w takim wypadku można mówić o oddzielnych solitonach), to ewolucja rozwiązania miała następujący przebieg: Soliton szybszy (który powinien znajdować się na początku po lewej stronie) dogania soliton wolniejszy, następnie oba solitony mieszają się zatracając oczywiście w tym momencie swoją charakterystyczną formę. Po pewnym czasie w układzie można zobaczyć takie same solitony jak w początkowym stadium ewolucji, jedynie z tą tylko różnicą, że soliton szybszy jest teraz po prawej stronie i ucieka do solitonu wolniejszego. Podobne zjawisko zaobserwowano doświadczalnie przy oddziaływaniu fal w plazmie. Na rysunku na marginesie pokazano wyniki tych pomiarów. Wynik ten można interpretować podwójnie: Albo soliton szybszy przechodzi bez oddziaływania przez drugi soliton, albo solitony zachowują się jak twarde kule o tej samej masie. Przy jednowymiarowym ruchu dwu doskonałe sprężystych kul podczas zderzenia kula szybsza przekazuje swój pęd kuli wolniejszej i po prostu zamieniają się one prędkościami (bez przenikania). Jak już wspominałem, znana jest analityczna postać takiego dwu-solitonowego rozwiązania (nawet postać n -solitonowego). Oczywiście rozwiązanie otrzymuje się w sposób dużo bardziej skomplikowany niż w przypadku rozwiązania jednosolitonowego. Podamy tutaj postać rozwiązania opisującego dwa solitony o prędkościach odpowiednio równych 16 i 4.

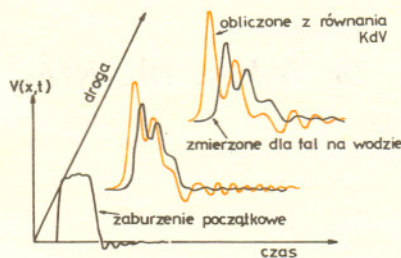
$$(19) \quad V(x, t) = 72 \frac{3 + 4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{\{3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)\}^2}.$$

Przez podstawienie możemy sprawdzić, że wyrażenie (19) spełnia równanie (1). Wykreślając tę funkcję dla różnych chwil t łatwo się przekonać, że przedstawia rzeczywiście opisaną uprzednio ewolucję dwu solitonów.

Zastanówmy się teraz nad własnością superpozycji w przypadku równania KdV. Łatwo zauważyć, że jeżeli dwa rozwiązania równania KdV mają rozdzielną nośniki (nośnik oznacza zbiór punktów, w których funkcja nie zanika) to suma rozwiązań jest rozwiązaniem (po prostu wtedy iloczyn dwu różnych rozwiązań jest równy zero). Tak więc ograniczona zasada superpozycji jest spełniona. Oczywiście w obszarze oddziaływania (gdzie nośniki poszczególnych rozwiązań mają część wspólną) rozwiązanie nie jest superpozycją solitonów. Tak się składa, że solitony praktycznie mają ograniczone nośniki i dlatego można było mówić o wielosolitonowych rozwiązaniach. Omówiliśmy tutaj kilka własności rozwiązań równania KdV, które wynikają z jego nieliniowego charakteru. Są to: postać solitonowa rozwiązań (niezmiennosc kształtu), lokalizowalność oraz niezniszczalność solitonów podczas oddziaływania. W teorii liniowej skonstruowanie obiektów o powyższych własnościach byłoby niemożliwe. Chciałbym tu dodać, że znanych jest jeszcze kilka równań, których rozwiązania mają podobny charakter.

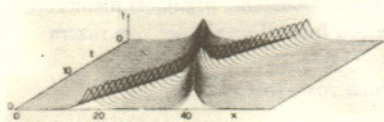
Oczywiście omówione powyżej cechy równań nieliniowych nie są jedynymi możliwymi.

W kolejnym artykule postaram się opisać bardzo ciekawe własności innych równań tego typu.

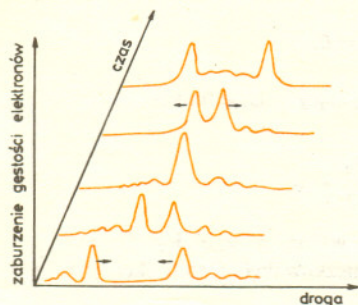


Powstawanie solitonów na wodzie. Porównanie rozwiązania równania KdV z doświadczeniem.

W teorii liniowej zaburzenie o dowolnym kształcie może być traktowane jako superpozycja fal o różnych częstotliwościach (paczka falowa). W większości ośrodków (ośrodku dyspersyjnym) fale o różnych częstotliwościach rozchodzą się z różną prędkością (zjawisko dyspersji prędkości). Tak więc podczas ruchu paczki falowej różne składowe mają odmienną prędkości i zaburzenie zmienia swój kształt (rozplywanie się paczki falowej). Zachowanie rozwiązania równania KdV jest diametralnie różne, choć powierzchnia wody jest ośrodkiem dyspersyjnym.



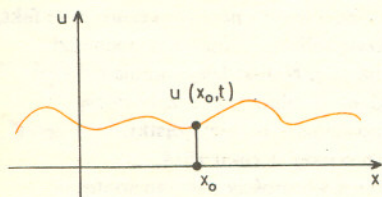
Oddziaływanie solitonów obliczone z równania KdV.



Krzywe doświadczalne opisujące zderzenie solitonów w plazmie. Zjawisko to opisywane jest równaniem nieco innym niż równanie KdV.



Równanie struny



Zjawisko rozchodzenia się fal opisuje się za pomocą równań różniczkowych cząstkowych. Zilustrujemy to na przykładzie struny nieskończonej. W każdej chwili czasu $t \geq 0$ kształt struny drgającej przedstawiony jest wykresem pewnej funkcji $u(x, t)$ która mierzy odchylenie struny od położenia ustalonego. Jeśli znamy funkcję $u(x, t)$, to znamy ruch drgający struny. Ruch ten jest spowodowany działaniem sił naprężeniowych na każdy jej element. Struna wydłuża się lub kurczy, przy tym zachowana jest zasada Hooke'a o stałości stosunku wydłużenia do naprężenia. Na podstawie tego można wyprowadzić równanie dla funkcji $u(x, t)$. Ma ono następującą postać:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie przez $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ oznaczyliśmy drugie pochodne funkcji u odpowiednio względem zmiennych x i t , c zaś jest stałą.

Rozpatrzmy teraz przypadek drgań dwuwymiarowych. Wyobraźmy sobie nieskończoną membranę (cienka sprężysta płytka). W każdej chwili czasu $t \geq 0$ położenie drgającej membrany przedstawia pofalowaną powierzchnię. Opisujemy ją za pomocą funkcji u zależnej tym razem od zmiennych (x_1, x_2, t) .

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym funkcja u spełnia równanie:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

W przestrzeni trójwymiarowej ruch drgający (np. fali elektromagnetycznej czy ruchu dźwięku) jest opisany za pomocą funkcji $u(x_1, x_2, x_3, t)$ spełniającej równanie

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Przez analogię mówimy, że w przestrzeni n -wymiarowej ruch drgający opisuje funkcja $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ spełniająca równanie falowe postaci

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Umiejętność rozwiązywania równań falowych jest rzeczą bardzo ważną, szczególnie w fizyce. Wróćmy do równania (1). Jeśli f i h są funkcjami dwa razy różniczkowalnymi, to funkcja $u(x, t)$ określona wzorem

$$(5) \quad u(x, t) = f(x+ct) + h(x-ct)$$

spełnia równanie (1). Można udowodnić, że tylko funkcje postaci (5) mogą być rozwiązaniami równania (1).

Tak więc równania falowe mają nieskończenie wiele rozwiązań. Jest to fakt typowy nie tylko dla równań falowych. Wobec tego możemy nałożyć na poszukiwane rozwiązanie $u(x, t)$ dodatkowe warunki. Powstają one w naturalny sposób w zagadnieniach fizycznych. Zilustrujemy to na przykładzie struny nieskończonej. Niezależnie od początkowego położenia struna będzie drgała na skutek istniejących naprężeń. Jeżeli przez $u_0(x)$ oznaczymy funkcję przedstawiającą początkowe położenie, to obok równania (1) pojawi się druga zależność, którą ma spełniać funkcja $u(x, t)$. Jest to tzw. warunek początkowy

$$(6) \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Struna może być w położeniu początkowym $u_0(x)$ puszczona swobodnie lub możemy każdy jej element puścić z dowolną prędkością początkową $v_0(x)$. Ponieważ prędkość jest pochodną położenia $u(x, t)$ względem czasu t , to możemy napisać drugi warunek początkowy

$$(7) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = v_0(x) \quad \text{dla } t = 0.$$



Rozwiązanie zadania M 82.

Funkcja taka istnieje, na przykład (zob. zad. M 65, Delta 10/1975)

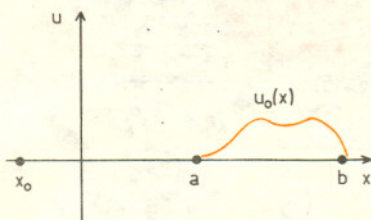
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \text{ wymiernych,} \\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernych.} \end{cases}$$

Jeżeli bowiem liczba w jest wymierna i x niewymierna, to $x+w$ jest niewymierna, jeżeli zaś obydwie liczby x i w są wymierne, to $x+w$ jest wymierna i $f(x+w) = f(x)$.

Na drugie pytanie odpowiedź jest negatywna. Okresami szukanej funkcji musiałyby być na przykład liczby niewymierne $a = \sqrt{2}$ i $b = 2 - \sqrt{2}$. Suma okresów jest znowu okresem co wynika z równości

$$f(x+a+b) = f(x+a) = f(x).$$

Ponieważ jednak $a+b = 2$ jest liczbą wymierną, to szukana funkcja musiałaby mieć również okres będący liczbą wymierną.



Początkowe położenie struny.

Problem znalezienia funkcji $u(x, t)$ spełniającej układ warunków

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \end{cases}$$

nazywa się zagadnieniem Cauchy'ego.

Zagadnienie Cauchy'ego w przypadku n -wymiarowym zapisujemy w postaci

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u(x_1, \dots, x_n, 0) = u_0(x_1, \dots, x_n), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, \dots, x_n, 0) = v_0(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Jeśli funkcje u_0 i v_0 są dostatecznie regularne, to problem Cauchy'ego ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie, stawianie dalszych warunków może więc doprowadzić do nieistnienia rozwiązań. Innymi słowy ruch struny czy membrany jest jednoznacznie wyznaczony przez położenie i prędkość początkową. W przypadku struny przekonujemy się o tym w sposób następujący. Warunki (6) i (7) zapisujemy w postaci

$$(10) \quad \begin{cases} u_0(x) = f(x) + h(x), \\ v_0(x) = cf'(x) - ch'(x). \end{cases}$$

Stąd obliczamy pochodne funkcji $f(x)$ i $h(x)$:

$$(11) \quad \begin{cases} f'(x) = \frac{cu_0'(x) + v_0(x)}{2c}, \\ h'(x) = \frac{cu_0'(x) - v_0(x)}{2c}. \end{cases}$$

Funkcje f i h są na podstawie wzorów (11) wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do stałej, więc funkcja $u(x, t)$ na podstawie wzoru (5) jest wyznaczona jednoznacznie (patrz warunek (6)). Wyobraźmy teraz sobie strunę niedrgającą. Odpowiada to warunkom początkowym zerowym.

Zbadajmy, co się stanie, jeśli strunę wprawimy w ruch drgający przez zmianę kształtu i prędkości struny na pewnym ustalonym odcinku $\langle a, b \rangle$ (np. potrącając palcem)?

Zakładamy więc, że funkcje $u_0(x)$ i $v_0(x)$ zerują się poza odcinkiem $\langle a, b \rangle$. Na podstawie wzorów (10) i (11) możemy założyć, że funkcje $f(x)$ i $h(x)$ są równe zero poza odcinkiem $\langle a, b \rangle$. Niech x_0 będzie dowolnym punktem na osi x . Powstaje pytanie, dla jakich wartości t jest $u(x_0, t) \neq 0$, tzn. w jakim okresie czasu struna drga w punkcie x_0 . Na podstawie poprzedniej uwagi musi być

$$x_0 + ct \in \langle a, b \rangle \text{ lub } x_0 - ct \in \langle a, b \rangle.$$

Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $x_0 < a$. Teraz alternatywa ta dla $t \geq 0$ jest równoważną jednej nierówności dwustronnej

$$t_0 = \frac{a - x_0}{c} \leq t \leq \frac{b - x_0}{c} = t_1.$$

A zatem sygnał powstały w wyniku zaburzenia struny na odcinku $\langle a, b \rangle$ pojawi się w punkcie x_0 dopiero po upływie czasu $t_0 = \frac{a - x_0}{c}$, trwać będzie przez okres $t_1 - t_0$, a następnie zniknie.

Jest to zasada Huygensa w przypadku jednowymiarowym. Ze wzoru $c = \frac{a - x_0}{t_0}$ widać, że c jest jako stosunek drogi do czasu, prędkością rozchodzenia się sygnału. Podobna zasada ma miejsce w przestrzeni trójwymiarowej. Każdy z nas wie, że dźwięk wydany w pewnej odległości dociera do nas po pewnym czasie, trwa przez jakiś czas, a następnie zanika. Ten fakt może być również udowodniony na podstawie zależności (3) i może być uogólniony na przypadek, gdy n jest dowolną liczbą nieparzystą. Zupełnie inaczej przedstawia się sytuacja z membraną lub ogólniej dla n parzystych.

Warunki (9) dla n parzystych implikują następującą własność rozwiązania: sygnał wydany w przestrzeni parzystowymiarowej dociera do dowolnego punktu i trwa wiecznie. Gdybyśmy żyli w świecie płaskim dwuwymiarowym lub czterowymiarowym, słyszelibyśmy wszystko, co zostało kiedykolwiek powiedziane, a więc nie rozumielibyśmy niczego.

Smata delta



Co ma mapa nieba do ułamków okresowych

Obliczenia, kiedy nastąpi kolejne zaćmienie Słońca budzą z pewnością więcej zainteresowania niż obliczenia, jaka cyfra wystąpi na 1288 miejscu po przecinku w rozwinięciu ułamka $\frac{57}{128}$ na odpowiedni ułamek dziesiętny. A jednak obydwa zagadnienia mają ze sobą coś wspólnego. Zaćmienia Słońca i wzajemne położenie planet są zjawiskami, które powtarzają się okresowo. Podobnie w rozwinięciu dziesiętnym ułamka zwykłego będzie się wciąż powtarzał ciąg cyfr jego okresu. Wydawać by się mogło, że po zamianie ułamka zwykłego na okresowy problem został wyczerpany. Chciałbym Was jednak przekonać, że badając zagadnienie wnikliwiej można dojść do ciekawych wniosków. Zaczniemy zatem od zwykłego dzielenia $5:7$.

Dzielenie to wykonujemy według następującego programu:
1 etap: obliczanie pierwszej cyfry po przecinku.

Dane: dzielna $d_1 = 5$.

Obliczenia: Dzielenie z resztą $10d_1 : 7$.

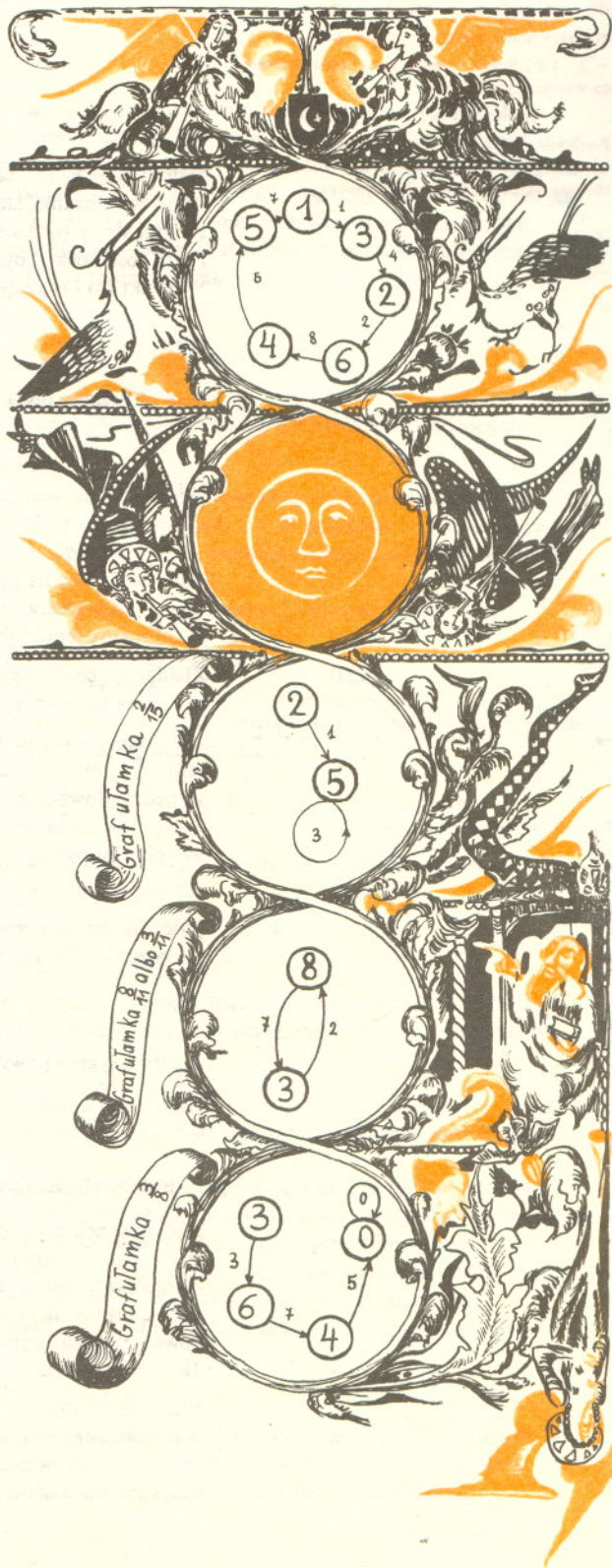
Wyniki: iloraz $p_1 = 7$ oraz reszta $r_1 = 1$.

Wyniki obliczeń pierwszego etapu zużytkujemy następująco: iloraz p_1 wpisujemy jako pierwszą cyfrę po przecinku szukanego rozwinięcia dziesiętnego, natomiast resztę r_1 wpisujemy jako dzielną d_2 następnego, drugiego etapu obliczeń.

Analogicznie będzie przebiegał etap drugi i dalsze.

Postępowanie można kontynuować dowolnie długo, gdyż każdy etap dostarcza danej umożliwiającej rozpoczęcie następnego etapu obliczeń. Przedstawimy teraz przebieg tego programu na odpowiednim grafie. Zaznaczmy na nim strzałkami, w jakiej kolejności pojawiać się będą reszty z kolejnych obliczeń. Pamiętając, że każda reszta jest zarazem dzielną dla następnego etapu obliczeń, możemy dodatkowo umówić się, że pierwszą dzielną $d_1 = 5$ potraktujemy jako resztę zerową. Natomiast ilorazy wykonywanych obliczeń zaznaczmy pisząc odpowiednie liczby obok strzałek.

Narysowany graf bardzo wyraźnie pokazuje w jaki sposób tworzy się okres: jedna z reszt powtórzyła się i łańcuch strzałek utworzył obieg zamknięty. Obliczenia możemy przerwać, a dalsze wyniki odczytać bezpośrednio z grafu. Podobne obiegi zamknięte wystąpią przy dzieleniach: $2:15$, $8:11$, $3:8$ przedstawionych na odpowiednich grafach.



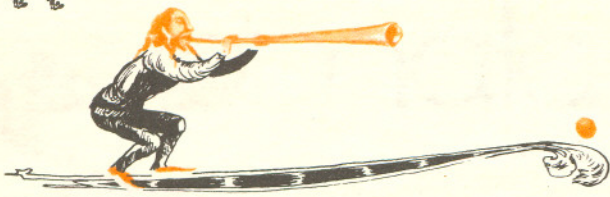
Czy występowanie obiegów zamkniętych, a więc okresowość odpowiednich ułamków dziesiętnych jest regułą obowiązującą zawsze? Odpowiedź narzuci się sama, gdy spróbujemy rysować grafy w inny sposób (opisany przykładowo dla dzielenia przez 7): Zaczynamy od narysowania 7 kółek i wpisania w nie liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Są to już wszystkie reszty jakie mogą wystąpić przy dzieleniu przez 7. Teraz dopiero łączymy kółka strzałkami.

Spróbujcie zrobić to w ten sposób, żeby strzałki nie utworzyły żadnego zamkniętego obiegu. Jest to niemożliwe — nawet jeśli pierwszych sześć strzałek poprowadzicie nie zamykając żadnego łańcucha, zrobi to siódma strzałka!

Otrzymane wyniki możemy skomentować następująco: zamieniając dowolny ułamek zwykły na dziesiętny otrzymujemy zawsze ułamek okresowy. Szczególnym przypadkiem jest takie rozwinięcie, którego okres składa się z samych zer (odpowiada to pętelce przy zerze) — mamy wówczas do czynienia z rozwinięciem skończonym. Teraz pora na obiecane, ciekawe wnioski. Oto rozwinięcie dziesiętne liczby, która nie jest żadnym ułamkiem zwykłym: 0,1234567891011121314151617181920212223... (trzy kropki na końcu oznaczają, że dalej trzeba wpisywać kolejne cyfry tak jak mówi reguła, której się łatwo domyśleć). Liczby takie nazywamy liczbami niewymiernymi. Czy potraficie uzasadnić, dlaczego liczba ta nie jest żadnym ułamkiem zwykłym? Czy potrafilibyście wymienić inne liczby o podobnej własności? Jeśli tak, to na pewno rozwiążecie poniższe zadania.

- Zadanie 1. Obliczcie jaka cyfra wystąpi na 1288 miejscu w rozwinięciu $5/7$ na ułamek dziesiętny.
- Zadanie 2. Narysujcie grafy dla dzielenia przez 2, 4, 8 i 16. Spróbujcie odgadnąć, jak powinien wyglądać graf dla dzielenia przez 32 i sprawdźcie Waszą hipotezę.
- Zadanie 3. Pomyślcie, do czego można wykorzystać grafy dzielenia.
- Zadanie 4. Rysunek obok posłuży do następujących obliczeń. Każdej z liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... przyporządkujemy pewien ciąg sześciu liczb według takiej zasady: Pierwszą z sześciu cyfr ciągu przyporządkowanego liczbie m ustalamy odszukując na rysunku liczbę 1 i idąc od niej po strzałkach m kroków. Liczbę, do której zawędrujemy wpisujemy na 1 miejscu. Następną, drugą cyfrę ciągu przyporządkowanego liczbie m ustalamy odszukując na rysunku liczbę 2 i idąc od niej po strzałkach m kroków. Liczbę, do której zawędrujemy, wpisujemy na drugim miejscu. Trzecią, czwartą, piątą i szóstą liczbę m -tego ciągu ustalamy analogicznie. Jak wygląda ciąg przyporządkowany liczbie 1288? Jakie analogie zauważyliście między obliczeniami z tego zadania a obliczaniem rozwinięć dziesiętnych?

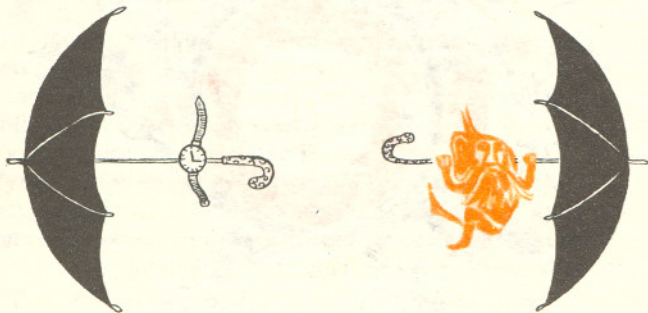




Odbicie dźwięku

Fale głosowe odbijają się od każdej napotkanej przeszkody, jak światło od lustra. Echo na przykład jest wynikiem odbicia „promienia dźwiękowego” od brzegu lasu, ściany domu czy skały. Tak, jak w przypadku fali świetlnej, kąt odbicia fali głosowej równa się kątowi padania. Można się o tym przekonać za pomocą zegarka i dwóch kartonowych rurek.

Położ jedną rurkę przy ścianie lub innej pionowo ustawionej, płaskiej przeszkodzie, pod pewnym kątem do niej jak na rysunku. Przy drugim końcu rurki połącz tykający zegarek. Drugą rurkę przyłóż do ściany podobnie, jak pierwszą. Zmieniaj kąt nachylenia tej rurki względem ściany, przykładając ucho do jej drugiego końca. Powinieneś usłyszeć tykanie zegarka tak, jakby pochodziło ono z wnętrza tej rurki. Przekonasz się, że tykanie to słychać najwyraźniej, kiedy rurki są nachylone pod tym samym kątem do ściany.

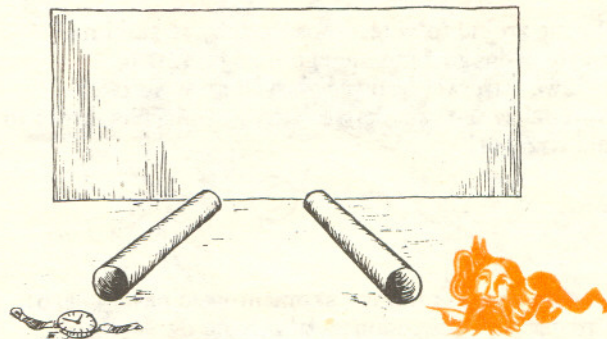


Posłuchaj bicia własnego serca

Jeśli przyłożysz rękę do serca, czujesz, jak ono bije. Towarzyszy temu cichutkie pikanie, ale za słabe, by je usłyszeć. Chyba, żeby... przyprowadzić je do ucha. Można łatwo zrobić instrument podobny do tego, jakiego używa lekarz do osłuchiwania pacjentów: stetoskop. Potrzebny jest do tego lejek i rurka gumowa.

Nałóż koniec gumki na rurkę lejka i stetoskop gotowy. Możesz przyłożyć lejek do serca, a drugi koniec rurki do ucha i posłuchać, jak bije Twoje serce.

Każdy prawie dźwięk powstaje wskutek drgania jakiegoś ciała. Drgania silnika samochodu, skrzydełek owada, strun instrumentów muzycznych, strun głosowych ludzi i zwierząt powodują powstanie następujących po sobie zgęszczeń i rozrzedzeń powietrza, które rozchodzą się we wszystkich kierunkach. Nie widzimy ich, ponieważ przypadkiem powietrze jest niewidoczne. Może jednak uda nam się zbadać, jak rozchodzi się głos? Pomogą nam w tym doświadczenia.



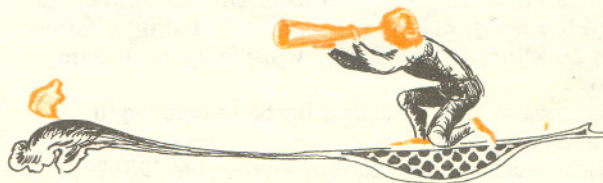
Dźwiękowe reflektory

Zwierciadła dźwiękowe, podobnie jak te zwykłe, odbijające światło, mogą być nie tylko płaskie, ale i wklęsłe. Działają wtedy jak reflektor. Można to zademonstrować w następujący sposób: Weź dwa parasole i poproś by dwie osoby trzymały je w odległości kilku metrów naprzeciw siebie tak, jak na rysunku.

Przyłóż ucho do rączki jednego parasola i znajdź miejsce, gdzie dźwięki rozchodzące się w pokoju słychać najgłośniej. Umocuj tam tykający zegarek, a sam przyłóż ucho w analogicznym miejscu drugiego parasola. Powinieneś usłyszeć tykanie zegarka nawet z odległego końca pokoju.

Podobne doświadczenie możesz zrobić używając dwóch misek lub głębokich talerzy. Połóż jeden talerz na stole, a nad nim trzymaj zegarek. Drugi talerz trzymaj do góry dnem nad pierwszym na wysokości ucha. Przyłóż ucho do tego talerza i posłuchaj. Usłyszysz tykanie zegarka tak, jakby był on bezpośrednio pod górnym talerzem. Oddal na próbę ten talerz i dźwięk zniknie.

Z tej własności dźwięku od dawna zdawali sobie sprawę budowniczowie pałaców i świątyń. W świątyniach arabskich, na przykład znajduje się półkolistą nisza zwana mikrabem, w której stoi duchowny odprawiający modły. Również w kościołach katolickich ściana prezbiterium jest zaokrąglona, tworząc tak zwaną apsydę. Taka wklęsła ściana działa jak reflektor — odbija głos duchownego i kieruje go ku wiernym.

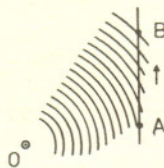
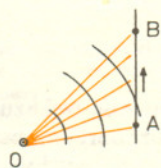
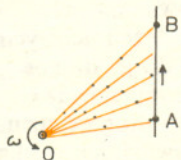


ROZSTRZYGNIECIE KONKURSU Z NUMERU SIERPNIOWEGO »DELTY«.

Pytanie konkursowe brzmiało: Czy fakt, że zajączek świetlny może poruszać się z prędkością większą niż światło, można wykorzystać do zaprojektowania urządzenia do przesyłania informacji szybciej, niż to jest możliwe przy przesyłaniu informacji bezpośrednio za pomocą impulsów świetlnych biegnących po linii prostej od źródła do obserwatora.

Odpowiedź jest oczywiście negatywna. Tak też odpowiedzieli wszyscy uczestnicy konkursu. Najciekawsze wypowiedzi nadesłali Mirosław Gorbaczow z Gdyni, Magdalena z Warszawy (nazwisko i adres znane redakcji) oraz Andrzej Wierzbicki z Sulechowa. Argumentacja we wszystkich wypowiedziach jest bardzo podobna, wobec czego zdecydowaliśmy opublikować tylko pierwszą wypowiedź, Mirosława Gorbaczowa. Wszyscy wymienieni otrzymują nagrody książkowe, które wysyłamy pocztą.

Po cóż niepotrzebnie komplikować zagadnienie wprowadzaniem wirującej osłony?



Niech źródło będzie drgającym punktem świetlnym (albo wręcz radiową anteną nadawczą) wysyłającym światło we wszystkich kierunkach. Punkty przecięcia się fal kulistych noszących każda jeden impuls z linią prostą łączącą dwa punkty odbiorcze A i B poruszają się od A do B z prędkością większą od prędkości światła, jak również większą od prędkości „zajączków” w zagadnieniu z osłoną. Urządzenie to jest więc prostsze i dające lepsze wyniki, bo powodujące szybszy przepływ pozorny informacji od A do B . Tak! — pozorny, bowiem cały odcinek AB otrzymuje informację (w formie impulsów) ze źródła O , zatem nie ma faktycznego przechodzenia nośników informacji od A do B .

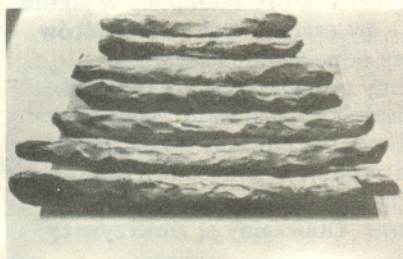
Mimo to można wymyślić ciekawą sytuację.

Jeżeli z punktu O nadejdzie do A informacja o tym, że w chwili ukończenia przez nadawców zdania B otrzyma tę samą informację, czyli usłyszy rozmowę O z A , to zakładając, że A zrozumie całkowicie znaczenie zdania w chwili jego ukończenia można będzie powiedzieć, że A zorientował się o części tego, co się dzieje w punkcie B (a więc o tym, że B usłyszał rozmowę O z A) w czasie nieskończenie wiele razy krótszym (bo zerowym) od czasu, w którym B mógłby o tym poinformować A . Krócej mówiąc, A będzie wiedział o części tego, co się w danej chwili dzieje w B mimo tego, że B , aby o tym poinformować A , musiałby zużyć tyle czasu, ile musi zużyć światło na pokonanie drogi AB . Zajdzie więc pozorne przejście informacji od B do A w czasie równym... zero!! A co by było, gdyby odsunąć B dalej od O ? Wówczas A wiedziałby, że B usłyszy rozmowę O z A po określonym czasie, a ściślej, A przewidywałby to zdarzenie. Można by wtedy powiedzieć, że przepływ informacji o usłyszeniu przez B rozmowy nastąpił w czasie... ujemnym! (chodzi tu o przepływ informacji wzdłuż odcinka BA). W takim razie pozostaje nam stwierdzić filozoficznie: „Przepływ informacji w czasie krótszym od czasu zużytego na pokonanie tej samej drogi przez światło to przewidywanie”. Przewidywanie natomiast to myślenie. Dochodzimy więc do starych dwóch prawd. Jedna z nich to: „Najszybsza jest myśl, bowiem gdy sobie pomyślimy, że gdzie jesteśmy, to tak jakbyśmy już tam byli”, a druga: „Myślenie ma przyszłość”.

Mirosław Gorbaczow

PREHISTORYCZNY INSTRUMENT MUZYCZNY

Podczas wykopalisk w północnym Wietnamie w 1949 roku znaleziono jedenaście kamiennych belek stanowiących razem instrument muzyczny. Nazwano go litofonem (grecki wyraz *lithos* oznacza kamień, skałę, a *phone* — głos, dźwięk). Obecni mieszkańcy tych terenów nie znają takiego instrumentu. Według oceny archeologów pochodzi on z okresu neolitu czyli młodszej epoki kamienia. Każdy kamień uderzony kamiennym młotkiem wydaje inny dźwięk. Układ siedmiu kamieni przedstawiony na zdjęciu tworzy instrument muzyczny o następującej skali $F_3 - G_3 - B_3 - D_3 - E_4 - F_4 - G_4$. Nie umiemy odtworzyć muzyki, jaką neolityczny człowiek grywał na tym instrumentie; bardzo przyjemny dla ucha dźwięk uderzanych kamieni skłonił Jana Schwarza do napisania utworu wzorowanego na współczesnych melodiach ludowych tych okolic, w których litofon znaleziono. Po wykonaniu utworu okazało się, że neolityczny instrument muzyczny kryje w sobie wielkie możliwości ekspresji artystycznej.





Jak drga struna i w czym fortepian jest lepszy od bębna?

Zanim przystąpimy do doświadczeń, spróbujmy przewidzieć teoretycznie ich wyniki. Ścisły opis wymagałby zaawansowanego aparatu matematycznego, będziemy więc musieli zadowolić się rozumowaniem nieco intuicyjnym. Rozważmy strunę na przykład w gitarze lub fortepianie. Jest ona odpowiednio napięta—przyjmijmy, że siłą F_0 a jej długość niech wynosi l (rys. 1a). Jeżeli uchwycimy ją w środku i odciągniemy nieco w kierunku prostopadłym do jej długości, powiedzmy o odcinek x , będzie wyglądała jak na rys. 1b. Jeżeli x będzie odpowiednio małe, możemy przyjąć, że zarówno siła F_0 jak i długość struny się nie zmienia. Możemy więc na podstawie podobieństwa odpowiednich trójkątów na rys. 1b napisać:

$$F = F_0 \frac{2x}{\frac{1}{2}l} = 4F_0 \frac{x}{l},$$

gdzie F jest siłą z jaką odciągnęliśmy strunę. Otrzymana równość wskazuje, że ruch struny (kiedy ją puścimy) powinien być harmoniczny (siła proporcjonalna do wychylenia). Nie przejmujemy się brakiem minusa bo przecież na wychyloną strunę działa siła reakcji $-F$.

Jak pamiętamy, w ruchu harmonicznym zachodzą związki:

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2} x \quad \text{oraz} \quad F = -kx,$$

a stąd (pamiętając, że $F = m \cdot a$) mamy $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$,

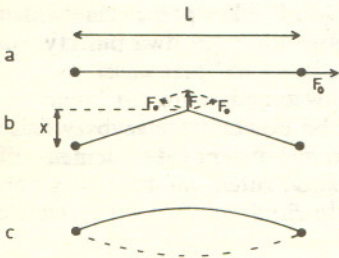
gdzie k jest oczywiście współczynnikiem proporcjonalności siły do wychylenia i w naszym przypadku wynosi $\frac{4F_0}{l}$. Jeżeli mamy używać strun o różnej długości, to wygodnie jest napisać $m = \rho l$, gdzie stała ρ jest masą jednostki długości struny. Po podstawieniu otrzymamy ostatecznie:

$$(1) \quad T \sim \sqrt{\frac{\rho l^2}{F_0}} = l \sqrt{\frac{\rho}{F_0}}.$$

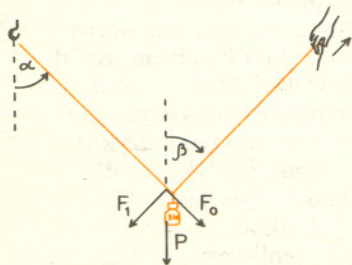
Oczywiście wyprowadzenie takie jest raczej agitacją niż dowodem, bo kształt struny w czasie drgań bardziej przypomina to, co widać na rys. 1c, niż uproszczony rys. 1b, poza tym siły i wychylenie rozważaliśmy tylko dla punktu środkowego struny, a masę wzięliśmy całej struny. Możemy z tego powodu mieć wątpliwości co do wartości liczbowych, ale kształt zależności powinien być prawidłowy. Ostatecznym kryterium — jak zawsze — musi być doświadczenie.

Badamy drgania strun

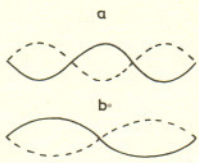
Na struny użyjemy mocnego, niezbyt cienkiego sznurka, który zaczepimy w jakimś solidnym punkcie stałym (np. hak w ścianie lub — dla szczęśliwych mieszkańców nowych mieszkań — rura pod sufitem) i obciążymy odpowiednim ciężarem (odważnik, hantla lub żelazko) a następnie będziemy pobudzać do drgań przez szarpanie. Dźwięk wydawany przez naszą strunę będzie bardzo słaby — ale to nie szkodzi. Zmieniając długość struny i ciężar odważnika możemy badać zmiany częstości tym wywołane i sprawdzać, czy zachodzi proporcjonalność (1). Siłę naciągu nitki można też zmieniać bez zmiany ciężarka — ciągnąc za wolny koniec sznurka można zmienić siłę napinającą strunę. Obliczamy ją zmierzwszy odpowiednie kąty (patrz rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Jeżeli nie będziemy specjalnie starali się temu zapobiec, przypadkowo pobudzona struna będzie zazwyczaj wykonywała jednocześnie drgania podstawowe i różne drgania harmoniczne.

Jak łatwo wykazać, takie drganie złożone jest okresową funkcją czasu o częstotliwości drgania podstawowego.

Praktycznie wygodnie jest starać się aby oba odcinki sznurka były prostopadłe ($\alpha + \beta = \pi/2$ — dla zmniejszenia napięcia lub $\beta = \pi/2$ — dla zwiększenia napięcia struny). Pozostaje jeszcze pytanie, jak zmierzyć częstość drgań struny? Jeżeli dysponujemy jakimkolwiek instrumentem i jesteśmy w stanie identyfikować dźwięki, próbujemy za każdym razem znaleźć ton instrumentu najbliższy pod względem częstości drganiom struny. Przydać się może przy tym wiadomość, że dźwięki odpowiadające kolejnym (nieważne, białym czy czarnym) klawiszom fortepianu, a także kolejne dźwięki gitary, mają częstości w postępie geometrycznym o ilorazie $\sqrt[12]{2} \approx 1,06$. Można też badać jaki jest związek między siłą a długością struny przy stałej częstości — przez doprowadzenie do rezonansu obu odcinków sznurka z rys. 2. Ze wzoru (1) wynika, że powinno być $F_0 \sim l^2$.

Powiecie: dobrze, fortepian ma struny ale **co ma z tym wspólnego bęben?**

Jak się zaraz dowiemy, niewiele. Zauważmy przede wszystkim, że struna może wykonywać nie tylko drgania podstawowe jak na rys. 1 ale i takie jak na rys. 3 — wyższe harmoniczne. Zwróćmy uwagę, że drgania z rys. 3a i 3b są takie, jak drgania podstawowe (bez harmonicznych) strun wykonanych z tego samego materiału, a tylko krótszych — dwukrotnie (a) lub trzykrotnie (b). Teraz dochodzi do głosu wzór (1): ze względu na proporcjonalność okresu do długości struny, częstości kolejnych możliwych drgań struny będą wielokrotnościami częstości podstawowej. Nasze ucho jest w stanie sprowadzić dźwięk struny „do wspólnego mianownika” i przyporządkować mu określoną wysokość. Na bębnach wygrać melodię jest bardzo trudno — ponieważ napięta membrana bębna nie jest tak prostym tworem jak struna i taka prawidłowość nie zachodzi — różne częstości drgań bębna nie są wielokrotnościami częstości podstawowej. Jedynie pobudzając umiejętnie membranę bębna tak, aby nie wzbudzić tonów o wyższych częstościach można wydać dźwięk, którego wysokość ucho ludzkie potrafi określić.



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 82. Czy istnieje funkcja okresowa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (tzn. określona na zbiorze liczb rzeczywistych i o wartościach rzeczywistych), dla której każda liczba wymierna jest okresem, a żadna liczba niewymierna okresem nie jest?

A jaka będzie odpowiedź, gdy zażądamy, by każda liczba niewymierna była okresem, a żadna liczba wymierna (różna od zera) nie była okresem?

Rozwiązanie na str. 7.

M 83. Udowodnić, że funkcja $f(x) = \cos x + \cos ax$, gdzie a jest liczbą niewymierną, nie jest okresowa.

Rozwiązanie na str. 16.

M 84. Udowodnić, że jeżeli $0 < \alpha < \pi$, to $f(\alpha) = \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha > 0$.

Rozwiązanie na str. 16.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 28. Zaproponowano przeprowadzenie doświadczenia mającego na celu demonstrację prążków interferencyjnych Younga w następujących warunkach (patrz rysunek obok):

Spójne światło z silnego źródła przechodzi przez wąską szczelinę i następnie oświetla dwie wąskie szczeliny, odległe od siebie o $a = 1$ mm i o $d = 10$ cm od pierwszej szczeliny. Białe światło ze źródła przechodzi przez filtr przepuszczający tylko pasmo światła o długości między $\lambda_1 = 4800 \text{ \AA}$ a $\lambda_2 = 5200 \text{ \AA}$. Prążki interferencyjne są obserwowane na ekranie odległym od szczelin o $D = 1$ m.

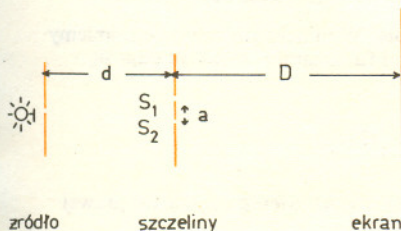
Oceńcie:

a. Jak będą rozseparowane prążki na ekranie i ile spośród nich powinno być dobrze widocznych.
b. Jaka jest dopuszczalna szerokość pierwszej szczeliny, żeby źródło światła można było uważać za spójne.

c. Jak zmieni się obraz interferencyjny, jeżeli przed jedną z dwóch szczelin umieści się (od strony źródła) równoległą płytkę szklaną o grubości $h = 0,2$ mm i o współczynnikach załamania:

$n_1 = 1,664$ dla $\lambda_1 = 4800 \text{ \AA}$, $n_2 = 1,656$ dla $\lambda_2 = 5200 \text{ \AA}$.

Rozwiązanie na str. 17.



zeregi Fouriera

Już w szkole podstawowej spotykamy się z funkcjami $\sin x$ i $\cos x$. Pojawiają się one jako narzędzie do obliczania wartości różnych elementów trójkąta, jak np. długości boków, kątów itp. Zastosowanie tych funkcji w matematyce jest nieporównanie szersze. Celem niniejszego artykułu jest naszkicowanie podstaw pewnej teorii, będącej zastosowaniem funkcji sinus i cosinus do analizy matematycznej. Teoria ta nosi nazwę teorii szeregów Fouriera (od nazwiska jej twórcy — francuskiego matematyka i fizyka J. Fouriera, 1768–1830). Stała się ona świetnym narzędziem do rozwiązywania równań opisujących rozchodzenie się ciepła, oraz analizy drgań sprężystych, ale to już całkiem inna historia, warta przedstawienia w odrębnym artykule.

Będziemy rozważać funkcje $\cos nx$ i $\sin nx$ na odcinku $(-\pi, \pi)$; argument x jest tutaj liczbą rzeczywistą niemianowaną (kąty mierzymy w mierze łukowej). Niech m i n będą dwiema dowolnymi różnymi liczbami naturalnymi. Korzystając z tożsamości trygonometrycznych

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

łatwo sprawdzić, że zachodzą następujące równości:

$$(1a) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$(1b) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \sin(m+n)x] dx = 0,$$

$$(1c) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x] dx = 0,$$

$$(1d) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} \, dx = \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2nx \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = 2\pi - \pi = \pi.$$

W analizie matematycznej układy funkcji $f_n(x)$, $x \in (a, b)$, $n = 1, 2, \dots$ o następującej własności:

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) \, dx = 0 \quad \text{dla } n \neq m,$$

nazywamy *układami ortogonalnymi* na odcinku (a, b) . Tak więc sprawdziliśmy, że układ funkcji: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ jest układem ortogonalnym na odcinku $(-\pi, \pi)$. Przez analogię do wielomianów zmiennej rzeczywistej, funkcje postaci

$$T_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

nazywamy wielomianami trygonometrycznymi n -tego stopnia. W niniejszym artykule zajmiemy się funkcjami nieco ogólniejszej postaci, a mianowicie takimi funkcjami $f(x)$, które dają się przedstawić jako suma szeregu:

$$(2) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

i dla których szereg ten jest zbieżny w każdym punkcie $x \in (-\pi, \pi)$. Szereg stojący po prawej stronie równości (2) nosi nazwę szeregu Fouriera funkcji $f(x)$.

Twierdzenie to formułuje się dla funkcji $f(x)$ całkowalnych w sensie Lebesgue'a. Jeżeli Czytelnik nigdy nie spotkał się z tym pojęciem, niech traktuje całkę $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$ w takim sensie, jaki zna.

Dowodzi się, że jeżeli $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty$, to dla każdej funkcji $g(x)$ takiej, że $\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) dx < +\infty$,

bez względu na zbieżność szeregu (2) zachodzi równość:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) g(x) dx$$

i szereg po prawej stronie jest zbieżny.

Korzystając z powyżej sformułowanego twierdzenia łatwo znaleźć współczynniki a_n i b_n danej funkcji $f(x)$. Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ daje się przedstawić w postaci (2). Mnożymy obie strony równości przez $\cos mx$, gdzie m jest dowolną liczbą naturalną. Następnie całkujemy obie strony otrzymanej równości w przedziale $(-\pi, \pi)$. W rezultacie, po skorzystaniu z przytoczonego wyżej twierdzenia, dostajemy:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right].$$

Na mocy równości (1a)–(1c) tylko całka $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos mx dx$ jest różna od 0, zatem, korzystając

$$\text{z (1d) mamy: } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \pi a_m.$$

Analogicznie, mnożąc (2) przez $\sin mx$ i całkując w przedziale $(-\pi, \pi)$ dostaniemy:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \pi b_m.$$

Aby znaleźć jeszcze a_0 wystarczy scałkować obie strony równości (2); korzystając z (1a)

$$\text{dostajemy: } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0.$$

A zatem znaleźliśmy następujące wzory na a_n i b_n :

$$(3) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Współczynniki a_n i b_n są więc jednoznacznie wyznaczone przez funkcję $f(x)$. Stąd przedstawienie (2) funkcji $f(x)$ jest jedyne w tym sensie, że nie można funkcji $f(x)$ przedstawić na dwa różne sposoby jako sumy szeregu funkcji $\cos nx$ i $\sin nx$. Ogólnie, dla dowolnej funkcji $f(x)$, dla której współczynniki a_n i b_n dane wzorami (3) mają sens,

$$\text{szereg } a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

nazwiemy szeregiem Fouriera funkcji $f(x)$. Inna sprawa, że szereg ten może nie być zbieżny do funkcji $f(x)$ (może być w ogóle rozbieżny w niemal każdym punkcie x). Przypadek takich funkcji jest mało interesujący, ich szereg Fouriera jest praktycznie rzecz biorąc bez jakiegokolwiek związku z wartościami funkcji $f(x)$. Interesują nas te funkcje, dla których ich szereg Fouriera jest do nich zbieżny w każdym punkcie x , lub niemal w każdym punkcie (słowem „niemal” nadamy za chwilę ścisły sens). Następujące twierdzenie stanowi pewien warunek dostateczny na to, aby funkcja była sumą swojego szeregu Fouriera.

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale $(-\pi, \pi)$ i jej pochodna $f'(x)$ jest funkcją ciągłą w tym przedziale, to równość (2) zachodzi w każdym punkcie $x \in (-\pi, \pi)$. Współczynniki a_n i b_n są dane wzorami (3).

Przyjrzyjmy się jak wyglądają rozwinięcia Fouriera pewnych konkretnych funkcji.

Przykład 1. Niech $f(x) = \frac{1}{2}x$; obliczmy współczynniki a_n i b_n tej funkcji. W tym celu zauważmy, że całka funkcji nieparzystej w przedziale $(-\pi, \pi)$ wynosi 0:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} x dx = 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} x \cos nx dx = 0.$$

Współczynniki b_n obliczymy korzystając ze wzoru na całkowanie przez części:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} x \sin nx dx = -\frac{1}{2\pi} x \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n} \cos n\pi.$$

Ponieważ funkcja $\frac{1}{2}x$ ma ciągłą pochodną, więc na mocy twierdzenia 1 zachodzi równość:

$$\frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$\text{Podstawiając } x = \frac{\pi}{2} \text{ dostajemy: } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$



Przykład 2. Niech $f(x) = |x|$. Wówczas funkcje $|x| \cos nx$ są parzyste, zatem współczynniki a_n dla $n \geq 1$ są równe 0. Natomiast

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx dx =$$

$$= \frac{-2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Funkcja $|x|$ nie jest różniczkowalna w 0, mimo to jej szereg Fouriera jest do niej zbieżny w każdym punkcie $(-\pi, \pi)$.

Stąd:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).$$

Podstawiając $x = 0$ dostajemy: $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)$.

Przekształcając otrzymany wzór otrzymujemy: $\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

Korzystając z ostatniej równości obliczymy sumę s szeregu

$$s = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Ponieważ

$$\frac{s}{4} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots,$$

więc

$$s - \frac{s}{4} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Stąd $s = \frac{1}{6} \pi^2$.

Od czasów Fouriera przez kilkadziesiąt lat podejrzewano, że szereg Fouriera każdej funkcji ciągłej jest do niej zbieżny w każdym punkcie. Ale w osiemdziesiątych latach ubiegłego stulecia francuski matematyk du Bois-Reymond znalazł przykład funkcji ciągłej, której szereg Fouriera nie był zbieżny do niej w jednym punkcie. Następnie posypały się już przykłady funkcji ciągłych, których szereg Fouriera nie był zbieżny do wartości funkcji w pewnych danych punktach. Między innymi S. Banach podał pewien bardzo ogólny sposób konstrukcji takich funkcji (jego konstrukcja obejmuje przykład funkcji ciągłej, której szereg Fouriera jest rozbieżny w każdym punkcie wymiernym z przedziału $(-\pi, \pi)$). Na przełomie osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych lat ubiegłego stulecia rosyjski matematyk N. Łuzin (1883—1950) sformułował pewną hipotezę na ten temat. Do sformułowania jej będziemy potrzebować pojęcia zbioru miary Lebesgue'a równej zeru.

Definicja. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma miarę Lebesgue'a równą zeru jeśli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka nieskończona rodzina przedziałów $P_n = (\alpha_n, \beta_n)$, że A jest zawarty w sumie

$$\text{wszystkich przedziałów } P_n \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n| < \varepsilon.$$

Na przykład zbiór W wszystkich liczb wymiernych na prostej jest miary zero. Rzeczywiście, wszystkie liczby wymierne możemy ustawić w ciąg (w_n) . Dla danej liczby $\varepsilon > 0$ oberzemy jako

P_n przedział o środku w_n i o długości $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Oczywiście suma wszystkich przedziałów P_n

pokrywa cały zbiór W , a suma długości P_n wynosi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Hipoteza Łuzina brzmiąca następująco: dla każdej funkcji $f(x)$ takiej, że $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty$,

szereg Fouriera funkcji $f(x)$ jest zbieżny do $f(x)$ w każdym punkcie $x \in (-\pi, \pi) - A$, gdzie A jest pewnym zbiorem o mierze Lebesgue'a równej 0. Innymi słowy: szereg Fouriera jest zbieżny poza pewnym zbiorem miary 0. Można by więc powiedzieć, że szereg jest zbieżny niemal wszędzie, gdyż miara zbioru punktów zbieżności jest nieporównywalnie większa od miary zbioru punktów rozbieżności. Hipoteza Łuzina była uważana za najtrudniejszy problem analizy matematycznej przez przeszło 80 lat. Dopiero w roku 1966 szwedzki matematyk Carleson udowodnił jej słuszność.

Możliwość przedstawienia funkcji za pomocą jej szeregu Fouriera jest niesłychanie wygodna w wielu zadaniach analizy matematycznej i fizyki teoretycznej. Warto wspomnieć jeszcze o jednym twierdzeniu z teorii szeregów Fouriera. Jest to tzw. tw. Fejéra (L. Fejér — węgierski matematyk 1880—1957). Oznaczmy przez $s_n(x)$ ciąg sum cząstkowych szeregu Fouriera funkcji f :

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Rozwiązanie zadania M 83.

Gdyby funkcja f była okresowa, o okresie m to, ponieważ $f(0) = 2$, byłoby też $f(m) = \cos m + \cos am = 2$. Ale $\cos x \leq 1$, ostatnia równość może więc zachodzić tylko wtedy, gdy $\cos m = 1$ i $\cos am = 1$, a więc gdy

$$m = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ i } am = \left(2l + \frac{1}{2}\right)\pi, \text{ gdzie } k \text{ i } l$$

są pewnymi liczbami całkowitymi. Dzieliąc ostatnie dwie równości stronami otrzymujemy

$$a = \frac{2k + \frac{1}{2}}{2l + \frac{1}{2}} = \frac{4k + 1}{4l + 1}, \text{ co oznacza,}$$

że a byłoby liczbą wymierną wbrew założeniu.



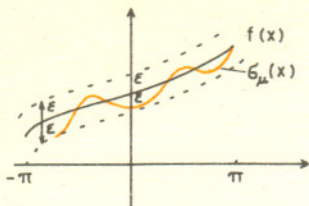
Rozwiązanie zadania M 84.

Wobec równości: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$,
 $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha =$
 $= 2\sin\alpha \cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha =$
 $= \sin\alpha (2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$
 $= \sin\alpha (3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$ otrzymujemy:

$$f(\alpha) = \frac{1}{3} \sin\alpha (3 + 3\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{3} \sin\alpha (2 + 3\cos\alpha + 4\cos^2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{3} \sin\alpha \left[\left(2\cos\alpha + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} \right] > 0,$$



Twierdzenie 2. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $(-\pi, \pi)$, to dla każdego $x \in (-\pi, \pi)$ ciąg

$$\sigma_n(x) = \frac{s_1(x) + s_2(x) + \dots + s_n(x)}{n}$$

jest zbieżny do $f(x)$. Co więcej, jest to tzw. zbieżność jednostajna, tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N , że dla każdego $n > N$ i każdego $x \in (-\pi, \pi)$ zachodzi nierówność:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Funkcje $\sigma_n(x)$ są oczywiście wielomianami trygonometrycznymi. Z twierdzenia Fejéra wynika, że każdą funkcję ciągłą można przybliżyć wielomianami trygonometrycznymi, przy czym przybliżenie to jest dobrym przybliżeniem dla każdego x (zob. rysunek). Jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona dla całej prostej i ponadto jest okresowa z okresem 2π , to wszystkie przytoczone tu rozważania można odnieść do takiej funkcji i na całej prostej. Tak samo można przenieść otrzymane wyniki na dowolny przedział (a, b) , należy tylko rozpatrywać wówczas funkcje

$$\cos n \left(\frac{\pi}{b-a} x - \frac{a\pi}{b-a} \right), \quad \sin n \left(\frac{\pi}{b-a} x - \frac{a\pi}{b-a} \right).$$

W obecnej chwili teoria szeregów Fouriera jest już mocno rozwiniętą teorią, chociaż ciągle pojawiają się nowe prace na ten temat (i to coraz trudniejsze). Teoria szeregów Fouriera do dziś dnia stanowi jeszcze potężne narzędzie badań w analizie matematycznej i ciągle jest jeszcze źródłem inspiracji twórczej dla wielu matematyków.

Rozwiązanie zadania F 28



a. Szczeliny s_1 i s_2 stanowią wtórne źródła światła i wiązki świetlne z nich wychodzące interferują ze sobą. Jak wiadomo, dla światła monochromatycznego kąty, pod którymi obserwujemy maksima interferencji (jasne prążki) są dane wzorem:

$$\sin \alpha_k = \pm k \frac{\lambda}{a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Należy podkreślić, że w doświadczeniu Younga prążki występują zawsze, niezależnie od odległości ekranu i szczelin. Pomijając maksimum do przodu ($k = 0$) możemy ocenić szerokość kolejnych prążków oraz ich rozseparowanie na ekranie:

Szerokość k -tego prążka wynosi $\Delta k = D \cdot \operatorname{tg} \alpha_k(\lambda_2) - D \cdot \operatorname{tg} \alpha_k(\lambda_1) \simeq \frac{Dk}{a} (\lambda_2 - \lambda_1) = 4 \cdot k \cdot 10^{-3} \text{ cm}$.

Natomiast odległość między końcem k -tego prążka i początkiem $(k+1)$ -ego wynosi

$$x_k \simeq D \frac{(k+1)\lambda_1}{a} - D \frac{k\lambda_2}{a} = \frac{D}{a} k \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{k} - \lambda_2 \right),$$

czyli: $x_1 = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$, $x_2 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$, $x_3 = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ cm}, \dots$

Odległość między kolejnymi prążkami będzie równa zero dla $k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 12$. Natomiast dla $k = \frac{2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 24$ cały $(k+1)$ prążek będzie zawarty w k -tym i $(k+2)$ prążku.

Czyli orientacyjna liczba rozróżnialnych prążków wyniesie około 15–20. Liczba ta nie zależy od odległości ekranu od szczelin.

b. Oznaczmy szerokość pierwszej szczeliny przez z .

Pomiędzy falami wychodzącymi pod kątem α z dwóch krańców źródła rozciągniętego wytwarza się różnica faz równa:

$$\delta = 2\pi \frac{z \sin \alpha}{\lambda} \simeq 2\pi \frac{z \cdot a}{2d\lambda}$$

gdzie $\sin \alpha$ dla naszego eksperymentu przybliżymy przez $\sin \alpha \simeq \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2d}$.

Wpływ rozmiarów źródła na interferencję można zaniedbać jeśli δ jest mniejsze od $\frac{\pi}{2}$. Stąd

$$z < \frac{d \cdot \lambda}{2a} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}.$$

c. Szkic nowego ustawienia eksperymentu jest pokazany na rysunku obok. Promień docierający do szczeliny s_1 przebiega inną drogą niż jego partner dążący do s_2 .

Zachodzą następujące oczywiste związki:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2d} = 5 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = n(\lambda), \quad \sin \alpha \simeq \operatorname{tg} \alpha, \quad \sin \alpha' \simeq \operatorname{tg} \alpha'.$$

$$\frac{a}{2} = (d-h) \operatorname{tg} \alpha' + h \operatorname{tg} \beta'.$$

$$\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha \simeq \frac{ah}{2d^2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 4 \cdot 10^{-6}.$$

Liczymy różnicę dróg optycznych między dwoma promieniami. Teoretycznie należy uwzględnić różnicę dróg przebytych przez promienie w powietrzu oraz fakt, że promień dążący do s_1 przechodził przez ośrodek o współczynniku załamania większym od jednego. Różnica dróg optycznych dla danej λ wynosi:

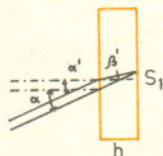
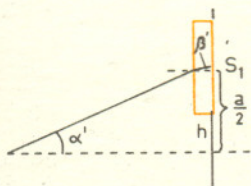
$$\Delta = (d-h)(\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha) \sin \alpha + \frac{n \cdot h}{\cos \beta'} - \frac{h}{\cos \alpha} \simeq \frac{a \cdot h}{2d} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + h(n-1),$$

gdyż z dobrym przybliżeniem można przyjąć $\cos \beta' \simeq \cos \alpha \simeq 1$. Szczeliny s_1 i s_2 stanowią i w tym wypadku źródła światła, tylko emitują fale przesunięte w fazie o $\frac{2\pi \Delta \lambda}{\lambda}$ (przesunięcie zależy od λ). Fale z dwóch szczelin wzmacniają się, jeżeli różnica faz wynosi $2\pi k$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Pełna różnica faz składa się z różnicy faz źródeł oraz różnicy dróg optycznych interferujących fal (jak w typowym doświadczeniu Younga). Stąd:

$$2\pi k = 2\pi \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{2\pi n a \sin \alpha_k}{\lambda}, \quad \text{czyli} \quad \sin \alpha_k = \frac{k\lambda}{a} - \frac{\Delta \lambda}{a}.$$

Widać, że obraz interferencyjny przesunie się na ekranie o odcinek $D \operatorname{tg} \alpha_0 \simeq 13,2 \text{ cm}$.

Natomiast prążki będą zamazane, ponieważ ich szerokość wynikająca z różnych wartości współczynnika n dla różnych λ wyniesie $\frac{D \cdot h}{a} (n_1 - n_2) = 8 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$, czyli więcej niż odległość między kolejnymi maksimami dla danej długości fali.



E XV

Vesny O Blogosla-
wionci a nadostomneści Troice
Swietei w iedności
Bostiei.

□ Benedicta semper sancta sit Trinitas.



Hwalmyż wšyscy swieta i
dostoina Troice/ iednego Bo-
ga mocnego mądrego dobrotli-

wego. **H** Ica i Syna swietego Ducha/ trzech o
Bóg Ociec mocny Bóg Syn iest mądry/ Bóg Duch

sob imiona a iedna iest w nich boska podstata.
swity iest dobrotliwy/ od oica syna pčęły. **H** Siat

niesą trzei Bogowie/ Bóg iedyny prawy iest/ pan naš

stworzyciel i zbawiciel/wšech grzešnych wykupiciel.

P ij

Uoc

