

## SPIS TREŚCI

O kolorowaniu map <i>Dr Cezary Bowszyc</i>	str. 1
Esej o pękaniu błony mydlanej <i>Jerzy Geresz</i>	str. 4
Kosmologia geometryczna czyli ewoluująca geometria <i>Dr hab. Bronisław Kuchowicz</i>	str. 8
Laboratorium w domu <i>Mgr inż. Henryk Gaj</i>	str. 11
Zadania	str. 12
Mała Delta	str. 13
Drobizgi	str. 16

**W następnym numerze:**

**SYMETRIA**

„Delta”  
matematyczno-fizyczny miesięcznik  
popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego i Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
doc. dr J. Bartke  
prof. dr Grzegorz Białkowski —  
przewodniczący  
doc. dr A. Bączyński  
doc. dr B. Gleichgewicht  
doc. dr K. Goebel  
doc. dr B. Iwaszkiewicz  
doc. dr T. Iwiński  
prof. dr A. Januszajtis  
prof. dr Leon Jeśmanowicz —  
wiceprzewodniczący  
mgr H. Kaczorek  
prof. dr B. Karczewski  
prof. dr M. Kuczma  
mgr A. Mąkowski  
prof. dr Z. Pawlak  
prof. dr A. Piekara

prof. dr Z. Semadeni  
prof. dr J. Stankowski  
prof. dr. M. Subotowicz  
doc. dr S. Turnau  
doc. dr J. Wdowczyk

Redaguje Kolegium w składzie:  
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.  
dr T. B. Iwiński  
B. Jaworska — Kordos — ilustracje  
dr M. Kordos — red. nac.  
mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.  
mgr K. Szypio — sekr. red.  
doc. dr M. Świącki  
Adres Redakcji  
ul. Hoża 69 pok. 151,  
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 136/77 F-15

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:  
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny  
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.  
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.  
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorki indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.  
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

**Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich**

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7

00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,

Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

# O kolorowaniu map



Dr Cezary BOWSZYC

Na mapie politycznej jakiegoś kontynentu obszary państw zwykle kolorowane są w ten sposób, że państwa sąsiadujące ze sobą wzdłuż pewnej linii granicznej (lub kilku takich linii) mają różne barwy. W ubiegłym wieku wyraźnie postawiono pytanie: Jaka jest najmniejsza liczba barw wystarczająca do tego, by można było pomalować nimi dowolną mapę na płaszczyźnie (z zachowaniem powyższego warunku)?

Będziemy zajmowali się jedynie takimi mapami na całej płaszczyźnie, które zawierają skończoną liczbę obszarów o granicach regularnych, złożonych ze skończonej liczby krawędzi (być może krzywych) połączonych w wierzchołkach i tworzących zamkniętą linię bez przecięć. Za obszar będziemy również uważać nieograniczoną część płaszczyzny. Np. mapa na rysunku 1 zawiera 9 wierzchołków, 14 krawędzi i 7 obszarów. Na następnych dwóch rysunkach pokazane są przykłady map nie spełniających założonych warunków: na rys. 2 jeden z obszarów sąsiaduje ze sobą wzdłuż krawędzi, na rys. 3 brzeg jednego z obszarów składa się z dwóch linii zamkniętych. Zbiór wierzchołków i krawędzi będziemy nazywać grafem mapy. Przy poczynionych założeniach graf mapy ma tę własność, że można przejść z jednego punktu grafu do dowolnego innego punktu grafu nie wychodząc z niego. Mówimy w tej sytuacji, że graf jest spójny.

Oznaczmy przez  $\alpha_0$  liczbę wierzchołków, przez  $\alpha_1$  liczbę krawędzi, a przez  $\alpha_2$  liczbę obszarów rozważanej mapy. W przykładzie z rys. 1 jest  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ . Okazuje się, że dla dowolnej mapy płaskiej o spójnym grafie zachodzi wzór Eulera:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2.$$

(Można sprawdzić, że wzór ten zachodzi dla mapy z rys. 2, ale nie zachodzi dla mapy z rys. 3, bo wartość lewej strony wzoru równa się 3.)

Wykażemy przez indukcję względem liczby krawędzi  $\alpha_1$ , że ogólniej, gdy graf mapy płaskiej rozpada się na  $s$  składowych spójnych, to

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 + s.$$

Gdy  $\alpha_1 = 0$ , a więc gdy nie ma w ogóle krawędzi, mamy na płaszczyźnie jedynie  $\alpha_0$  wierzchołków tworzących graf o  $s = \alpha_0$  składowych i jeden obszar:  $\alpha_2 = 1$ . Zatem w tym przypadku wzór zachodzi. Założmy, że wzór ten zachodzi dla dowolnej mapy płaskiej o liczbie krawędzi mniejszej od  $\alpha_1$  i rozważmy mapę o liczbie krawędzi  $\alpha_1$ . Usuńmy jedną krawędź  $K$  z grafu. Jeżeli  $K$  leży na brzegu dwóch obszarów, to po usunięciu  $K$  obszary te połączą się, zatem  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  zmaleją o 1, a  $\alpha_0$  i  $s$  pozostaną takie same. W tym przypadku obydwie strony równości nie zmieniają się. Jeżeli zaś  $K$  leży na brzegu tylko jednego obszaru (jak na rys. 2), to po usunięciu  $K$  składowa grafu zawierająca  $K$  rozpadnie się na dwie, liczba  $s$  składowych grafu wzrośnie o 1,  $\alpha_1$  zmaleje o 1, a  $\alpha_0$  i  $\alpha_2$  pozostaną bez zmian. W tym przypadku obydwie strony równości wzrosną o 1. Z zasady indukcji wynika więc słuszność dowodzonego wzoru, a więc również wzoru Eulera (dla  $s = 1$  — por. artykuł J. A. Rempały w Delcie 1/1976).

Możemy założyć, że w każdym wierzchołku naszej mapy schodzą się co najmniej 3 krawędzie (bo gdy schodzą się tylko dwie, to można zlikwidować wierzchołek i połączyć te dwie krawędzie w jedną). Liczba par: <krawędź — wierzchołek będący jej końcem> jest równa  $2\alpha_1 \geq 3\alpha_0$  na mocy powyższej uwagi. Wynika stąd, że

*Mapa zawiera przynajmniej jeden obszar, którego brzeg składa się z pięciu lub mniejszej liczby krawędzi.*

W przypadku przeciwnym brzeg każdego obszaru składałby się z co najmniej sześciu krawędzi i licząc pary: <krawędź — obszar, do którego przylega ta krawędź> uzyskalibyśmy nierówność  $2\alpha_1 \geq 6\alpha_2$ . Uwzględniając równanie Eulera

$$\begin{aligned} \text{i nierówności } \alpha_0 \leq \frac{2}{3} \alpha_1, \alpha_2 \leq \frac{1}{3} \alpha_1 \text{ mielibyśmy } 2 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \leq \frac{2}{3} \alpha_1 - \alpha_1 + \\ + \frac{1}{3} \alpha_1 = 0, \text{ co nie jest prawdą.} \end{aligned}$$

Można stąd wywnioskować przez indukcję względem liczby obszarów  $\alpha_2$ , że  
*Dowolną mapę płaską można pomalować pięcioma barwami.*

Załóżmy więc, że twierdzenie nasze zachodzi dla map o liczbie obszarów mniejszej niż  $\alpha_2$  i rozważmy mapę o  $\alpha_2$  obszarach. Jeżeli zawiera ona obszar  $O$  sąsiadujący z czterema (lub mniej) obszarami, to, na mocy założenia indukcyjnego, po pokolorowaniu pozostałych obszarów pozostanie nam jeszcze jedna z pięciu barw do pomalowania obszaru  $O$ . W przypadku przeciwnym istnieje obszar  $O$ , sąsiadujący z pięcioma obszarami kolejno  $O_1, O_2, O_3, O_4$  i  $O_5$  (rys. 4). Jeżeli  $O_1$  nie sąsiaduje z  $O_3$  i  $O_1 \neq O_3$ , to likwidując dwie krawędzie łączymy obszary  $O, O_1$  i  $O_3$ , uzyskując mapę o mniejszej liczbie obszarów i, na mocy założenia indukcyjnego, możemy ją pokolorować. Po wprowadzeniu z powrotem usuniętych krawędzi stwierdzamy, że obszary  $O_1$  i  $O_3$  mają tę samą barwę. Zatem obszary sąsiadujące z  $O$  są pomalowane co najwyżej czterema barwami. Obszar  $O$  możemy więc pomalować nie wykorzystanym kolorem. Jeżeli zaś  $O_1$  i  $O_3$  sąsiadują lub  $O_1 = O_3$ , to  $O_2$  nie może sąsiadować z  $O_4$  i  $O_2 \neq O_4$  (rys. 5). Wtedy postępujemy z obszarami  $O, O_2, O_4$  podobnie jak poprzednio z obszarami  $O, O_1, O_3$ . Rys. 6 przedstawia mapę, w której każdy z czterech obszarów ograniczonych sąsiaduje z każdym. Takiej mapy nie można pomalować mniej niż czterema barwami, ale cztery wystarczą. Wobec tego najmniejsza liczba barw wystarczająca do pomalowania dowolnej płaskiej mapy wynosi 4 albo 5. Nasuwa się pytanie, czy wystarczą cztery barwy.



Rozważmy dowolną mapę na płaszczyźnie. Wewnątrz każdego obszaru wybierzmy punkt jako stolicę. Stolicy sąsiadujących państw można połączyć krzywą przecinającą krawędź, wzdłuż której sąsiadują te obszary w ten sposób, by uzyskane krzywe nie przecinały się ze sobą poza stolicami. Otrzymany graf nazywamy grafem dualnym, a mapę przezeń wyznaczoną — mapą dualną. Rys. 7 ilustruje te pojęcia; liniami przerywanymi oznaczone są krawędzie grafu dualnego.

Gdybyśmy potrafili znaleźć mapę, w której pięć obszarów sąsiadowałyby każdy z każdym, rozwiązaniem naszego problemu byłoby: potrzeba i wystarczy użyć pięciu barw. Niestety taka mapa nie istnieje. Gdyby bowiem istniała, to w grafie dualnym znaleźlibyśmy podgraf położony na płaszczyźnie o  $\alpha_0 = 5$  wierzchołkach połączonych  $\alpha_1 = \binom{5}{2} = 10$  krawędziami każdy z każdym. Ze wzoru Eulera liczba obszarów mapy wyznaczonej przez ten graf wynosiłaby  $\alpha_2 = 2 - \alpha_0 + \alpha_1 = 7$ . Każdy z nich posiadałby brzeg złożony z co najmniej trzech krawędzi, więc  $2\alpha_1 \geq 3\alpha_2$  czyli  $20 \geq 21$ , co nie jest prawdą. Na rys. 8 przedstawiono pięć punktów. Nie można ich połączyć na płaszczyźnie każdy z każdym bez dodatkowego przecięcia.

Tak więc nie mamy rozwiązania problemu. Hipoteza, że cztery barwy wystarczą do pomalowania dowolnej płaskiej mapy mimo wysiłków wybitnych umysłów do niedawna nie była poprawnie udowodniona ani obalona. Stopniowo wzrastała liczba  $n$  państw w twierdzeniach typu: *Jeżeli liczba państw  $\alpha_2$  jest nie większa od  $n$ , to mapę można pomalować czterema barwami.* Udowodniono rozmaite warunki równoważne hipotezie czterech barw. Badano własności ewentualnych map, których nie można pomalować czterema barwami. W ubiegłym roku w Stanach Zjednoczonych udało się rozwiązać pozytywnie problem czterech barw, ale trzeba było odwołać się aż do pomocy ... maszyn matematycznych; podobno życia ludzkiego nie starczyłoby do sprawdzenia bardzo wielu możliwości...

Idea w uproszczeniu była taka: Zamiast malować obszary mapy można malować wierzchołki grafu dualnego tak, by połączone krawędzią wierzchołki miały rozmaite kolory. Można dalej założyć, że obszary wyznaczone przez ten graf mają brzegi złożone z trzech krawędzi, wprowadzając dodatkowe krawędzie, jak to pokazane jest na rys. 9 (linie przerywane). Takie mapy krótko nazwiemy *triangulacjami*. W tej sytuacji  $2\alpha_1 = 3\alpha_2$ . Jeżeli  $p_i$  oznacza liczbę krawędzi

schodzących się w  $i$ -tym wierzchołku dla  $i = 1, 2, \dots, \alpha_0$ , to  $2\alpha_1 = \sum_{i=1}^{\alpha_0} p_i$ . Ze

wzoru Eulera otrzymujemy  $2 = \alpha_0 - \frac{1}{3} \alpha_1 = \alpha_0 - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\alpha_0} p_i$ . Uwzględniając, że  $\alpha_0$  jest sumą  $\alpha_0$  jedynek, otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{\alpha_0} (6 - p_i) = 12.$$



Rozwiązanie zadania F 41. Gdybyśmy mieli tylko jedną elektrodę, z której wypływa prąd  $I$  i przyłożyli ją do punktu A, to ze względu na symetrię sieci prąd rozplywałby się jednakowo we wszystkich czterech kierunkach i ku punktowi B płynąłby prąd o natężeniu  $I/4$ . Podobnie, dla samej elektrody zbierającej prąd  $I$  przyłożonej do punktu B, gałęzią AB płynąłby prąd o natężeniu wynoszącym również  $I/4$ . Dla dwóch elektrod rozkład prądów jest sumą rozkładów od poszczególnych elektrod, a zatem przy podłączeniu naszej sieci do źródła w punktach A i B przez odcinek AB będzie płynął prąd o natężeniu  $I/4 + I/4 = I/2$ . W związku z tym między punktami A i B będzie napięcie  $U_{AB} = r \cdot I/2$ . Z określenia oporu zastępczego  $R$  mamy  $U_{AB} = R_{AB}I$ , a zatem  $R_{AB} = r/2$ . Zadanie powyższe jest zadaniem bardzo starym i znanym, jednakże mimo to — ze względu na bardzo ciekawe i pouczające zastosowanie symetrii — zostało ono wykorzystane jako jedno z zadań stopnia wstępnego XXVI Olimpiady Fizycznej. Jest rzeczą interesującą, że pokrewne zadanie, gdy punkty A i B nie są węzłami najbliższymi, nie daje się łatwo rozwiązać. Muszę przyznać, że na znalezienie np.  $R_{AC}$ , gdzie C jest punktem pokazanym na rysunku w tekście zadania, poświęciłem sporo czasu, ale bez skutku. Możliwe jednak, że ktoś z Czytelników będzie miał więcej szczęścia. Czytelników, którzy znajdą wartość  $R_{AC}$ , proszę o nadesłanie rozwiązania do Redakcji.

Najciekawsze rozwiązanie zostanie przedstawione w „Delcie”. Termin nadsyłania rozwiązań: 31 lipca br.



Rozwiązanie zadania M 121. Możemy przyjąć, że dla pewnej liczby  $\alpha$  zachodzą

$$\text{równości: } a = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad b = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (\text{dlaczego?}),$$

gdzie  $\sin \alpha \cos \alpha \neq 0$ .

Zachodzi oczywista nierówność.

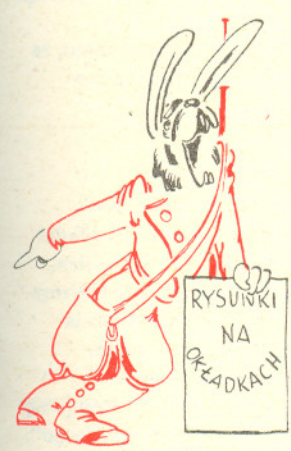
$$(\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha)^2 \geq 0,$$

z której wynika, że

$$\begin{aligned} \cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha &\geq 2 \cos^3 \alpha \sin^3 \alpha, \\ \cos^4 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin^4 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) &\geq 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \\ \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha &\geq \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha \sin^3 \alpha + \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sin^4 \alpha} + \frac{1}{\cos^4 \alpha} \geq \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{2}{\cos \alpha \sin \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$\frac{1}{\sin^4 \alpha} + \frac{1}{\cos^4 \alpha} \geq \left( \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} \right)^2, \\ a^4 + b^4 \geq (a+b)^2, \quad \text{c.d.n.}$$



Rozwiązanie zadania M 123. Zauważmy, że liczba  $-1$  jest pierwiastkiem tego równania.

Zachodzi równość

$$\begin{aligned} ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a &= \\ = a(x+1)(x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Ax + 1), \end{aligned}$$

gdzie  $A = \frac{b-a}{a}$ ,  $B = \frac{c-b+a}{a}$ .

Musimy więc rozwiązać równanie

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0.$$

Równanie to jest równoważne równaniu

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + A \left( x + \frac{1}{x} \right) + B = 0,$$

gdyż zero nie jest jego pierwiastkiem.

Podstawmy  $x + \frac{1}{x} = y$ . Jest wówczas

$$\begin{aligned} x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} &= y^2, \\ \text{skąd } y^2 - 2 + Ay + B &= 0. \end{aligned}$$

Do rozwiązania tego równania wystarczają cztery działania arytmetyczne i wyciąganie pierwiastków kwadratowych. Podobnie jest z równaniem

$$x + \frac{1}{x} = y, \quad \text{równoważnym równaniu}$$

$$x^2 - yx + 1 = 0, \quad \text{co kończy dowód.}$$

Wzór ten podał A. B. Kempe już w końcu ubiegłego wieku. Wynika z niego m.in., że każda triangulacja musi zawierać wierzchołki, w których schodzi się nie więcej niż pięć krawędzi (co w dualnej formie udowodniliśmy już wcześniej). Gdyby istniały triangulacje nie dające się pomalować czterema barwami, to istniałaby wśród nich *triangulacja minimalna*, tzn. o najmniejszej ilości wierzchołków. Kempe udowodnił, że w triangulacji minimalnej nie mogą wystąpić wierzchołki, w których schodzi się mniej niż pięć krawędzi, skąd wynika, że w triangulacji minimalnej musiałyby wystąpić co najmniej 12 wierzchołków pięciokrotnych, skąd (już nie tak prosto) wynika, że w takiej triangulacji co najmniej jeden wierzchołek pięciokrotny musiałby sąsiadować bądź z pięciokrotnym, bądź z sześciokrotnym ...

Rozważania tego rodzaju doprowadziły do stworzenia pojęcia *zbioru nieuniknionego* t.j. listy konfiguracji (grafów) o następującej własności: gdyby istniała triangulacja minimalna, to musiałaby ona zawierać przynajmniej jedną konfigurację z tej listy. Znanе są przykłady różnych zbiorów nieuniknionych: najprostszы z nich to lista jednoelementowa, na której występuje konfiguracja złożona z jednego wierzchołka o krotności 5 i pięciu połączonych wierzchołków sąsiednich.

Konfiguracja nazywa się *redukowalną*, jeśli nie może ona wystąpić w żadnej triangulacji minimalnej. Najprostszы przykład konfiguracji redukowalnej to — jak wynika z tw. Kempego — konfiguracja złożona z wierzchołka czterokrotnego i jego sąsiadów. Na ogół sprawdzanie redukowalności jest zadaniem bardzo praco- i czasochłonnym.

G. D. Birkhoff zauważył w r. 1913, że twierdzenie o czterech barwach byłoby udowodnione, gdyby udało się podać przykład zbioru nieuniknionego złożonego z samych konfiguracji redukowalnych: z istnienia takiej listy wynikałoby, że nie może istnieć triangulacja minimalna, a więc tym bardziej nie może istnieć jakakolwiek triangulacja nie dająca się pomalować czterema barwami.

W znalezieniu takiej listy dopomógł fakt, że wzór Kempego można interpretować w sposób ... elektryczny: z każdym wierzchołkiem triangulacji związana jest liczba  $6 - p_i$ , którą można traktować jako ładunek elektryczny, znajdujący się w tym wierzchołku. Rozładowanie grafu polega na przemieszczaniu ładunków dodatnich pomiędzy wierzchołkami, a graf uznaje się za rozładowany, jeśli we wszystkich wierzchołkach są ładunki niedodatnie. Wzór Kempego orzeka więc, że każda triangulacja nie da się w pełni rozładować.

K. Appel i W. Haken opisali pewien algorytm  $D$  (służący do rozładowywania grafu) oraz sporządzili listę  $\Delta$  (liczącą 1936 konfiguracji), o których udowodnili, że jeśli triangulacja minimalna nie zawiera żadnej konfiguracji z listy  $\Delta$ , to daje się rozładować przy pomocy algorytmu  $D$ .

Ponieważ jednak żadna triangulacja nie daje się rozładować, to twierdzenie to orzeka po prostu, że  $\Delta$  jest zbiorem nieuniknionym. Jednocześnie zaś metoda budowania konfiguracji należących do  $\Delta$  pozwalała przypuszczać, że każda z tych konfiguracji jest redukowalna. Należało to sprawdzić. W zasadzie wiadomo było, jak to zrobić i rzecz sprowadzała się do przeprowadzenia ogromnie praco- i czasochłonnym, ale mechanicznym analiz. Tu właśnie dopomogły odpowiednio zaprogramowane komputery.

\*

Nasza Ziemia jest kulą i można by pytać o liczbę barw dla map na powierzchni kuli czyli sferze, albo jeszcze ogólniej na dowolnej powierzchni. Rys. 10 pokazuje, że jeżeli ze sfery usuniemy jeden punkt, np. biegun północny, to resztę powierzchni kuli będziemy mogli przez rzutowanie z tego bieguna odwzorować wzajemnie jednoznacznie na płaszczyznę. Mapie na sferze będzie odpowiadała mapa na płaszczyźnie i widać, że liczba barw dla map sferycznych jest taka sama jak dla płaskich, a więc wynosi 4.

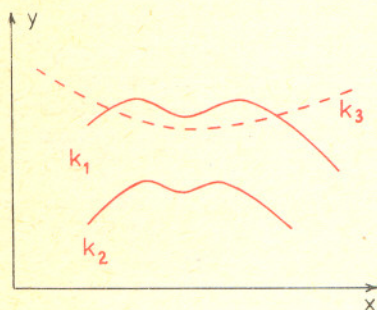
Jest rzeczą dziwną, że analogiczne zagadnienia dla innych powierzchni zostały rozwiązane wcześniej (w 1968 r. przez G. Ringela i I. W. T. Youngsa, bez uciekania się do pomocy maszyn matematycznych), podczas gdy najprostszы powierzchnie: sfera czy płaszczyzna najdłużej stawały opór w wyjawieniu swych tajemnic. Trudności w przypadku innych powierzchni zresztą polegały na czym innym: nie na tym, by wykazać, że każdą mapę można pomalować odpowiednią ilością kolorów (znaną już P. J. Heawoodowi w końcu ubiegłego wieku), ale na tym, by na powierzchni wskazać mapę o tylu obszarach parami sąsiadujących ze sobą. Okazuje się np., że dla map na *torusie* czyli „dętce” najmniejsza liczba barw wynosi 7. Rys. 11 podaje przykład mapy na torusie złożonej z 7 obszarów, z których każde dwa sąsiadują ze sobą.

## 1. Ilościowo a jakościowo

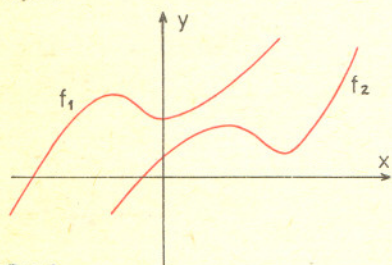
Przyjęło się powszechnie, że tylko wtedy dana dziedzina wiedzy jest ścisła, gdy dostarcza ona opisu ilościowego. W myśl utartych stereotypów ideałem wiedzy ścisłej jest fizyka, gdzie ciągle coś się mierzy, oblicza, zaś ukoronowaniem wyników badań jest formuła ilościowa, do której można podstawiać dane liczbowe. Można czasem usłyszeć jako podstawową zasadę fizyki: „fizyk może w odpowiedzialny sposób mówić tylko o rzeczach, które jest w stanie zmierzyć”. *Mierzenie* jest to przyporządkowywanie liczby układowi fizycznemu w określonym stanie. A zatem liczba miałaby stanowić ostateczną potrzebę ludzkiego intelektu?

Fizycy eksperymentatorzy w swojej ciężkiej pracy bardzo lubią posługiwać się wykresami. Jest naszą ludzką cechą, że posługując się wykresami jesteśmy znacznie operatywniejsi niż gdybyśmy posługiwali się wyłącznie danymi liczbowymi. Ale czy nie chodzi w tym przypadku o coś głębszego?

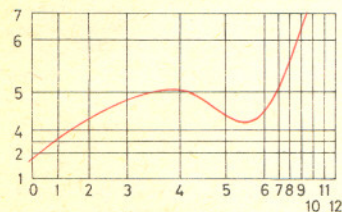
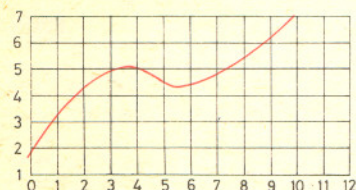
René Thom przedstawił następujący przykład. Wyobraźmy sobie eksperymentatora dokonującego pomiarów, który wyniki pomiarów przedstawił później za pomocą wykresów. Przypuśćmy, że w wyniku kolejnych eksperymentów uzyskał on krzywe  $k_1, k_2, k_3$  takie, jak na rys. 1. Patrząc na wykresy będzie on skłonny uznać, że zjawisko scharakteryzowane krzywą  $k_1$  ma wiele wspólnego ze zjawiskiem, któremu odpowiada  $k_2$ , zaś zjawisko związane z  $k_3$  ma raczej odmienny charakter. Podstawą takiej oceny jest podobieństwo formy krzywych  $k_1, k_2$ , pomimo faktu, że  $k_1$  ilościowo jest bardziej zbliżone do  $k_3$  aniżeli do  $k_2$ . Okazuje się, że życie bardzo często przyznaje rację takiej intuicji, opartej na podobieństwie formy.



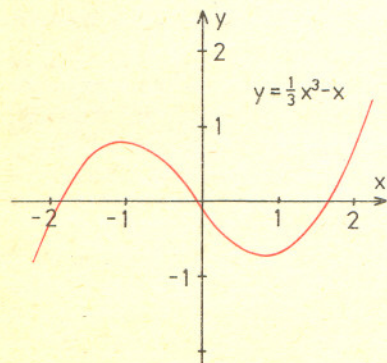
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

## 2. Forma funkcji w matematyce

Uchwycenie powyższej intuicji „formy” bardzo często jest celem poczynań matematyków. Kogokolwiek uczono analizy matematycznej, ten nieraz miał do czynienia z zadaniem: zbadać przebieg funkcji. W takim zadaniu chodzi o ustalenie przedziałów, w których funkcja maleje, w których rośnie, czy występują maksima lokalne, minima, punkty przegięcia etc. Przypatrzmy się teraz dwom funkcjom, do których stosuje się następujący opis słowny: najpierw funkcja monotonicznie rośnie (w pewnym przedziale od  $-\infty$ ), osiąga maksimum lokalne, maleje monotonicznie w skończonym przedziale, osiąga minimum lokalne, ponownie rośnie monotonicznie (do  $+\infty$ ). Na rysunku 2 podaliśmy wykresy dwu funkcji, do których stosuje się powyższy opis. Oceniając wizualnie te wykresy stwierdzamy, że forma ich ma „coś wspólnego”. Będziemy dążyć do matematycznego sprecyzowania istoty tego ich podobieństwa.

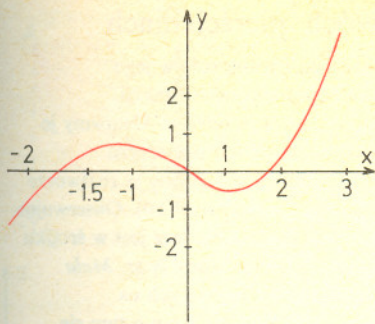
Rysunek 3 przedstawia pewien sposób zdeformowania płaszczyzny wykresu, przy którym wykres  $f_1$  przejdzie na wykres  $f_2$ .

Przedstawioną deformację przeprowadzamy w ten sposób, by linie równoległe do osi  $y$ -ów po deformacji również pozostały liniami prostymi równoległymi do tej osi, podobnie jest z liniami równoległymi do osi  $x$ -ów. Linie opatrzone poszczególnymi numerkami na górnym wykresie przechodzą na linie o tych samych numerkach na dolnym wykresie. Powyższe ponumerowanie możemy zinterpretować jako pewien sposób „wycechowania” osi  $x$ -ów i  $y$ -ów (w takim sensie, w jakim są wycechowane skale fizycznych przyrządów pomiarowych). Dzięki takiemu wyskalowaniu osi  $x$ -ów i  $y$ -ów nasze wykresy można zinterpretować jako graficzne przedstawienie pewnej funkcji rzeczywistej (która liczbom przyporządkowuje liczby). Zauważmy teraz, że przy tak przyjętych wyskalowaniach osi współrzędnych wykresy na rys. 3 są wykresami tej samej funkcji. Sposób wyskalowania osi na górnym wykresie będziemy skłonni uznać za „naturalny” — kolejnym liczbom całkowitym odpowiadają punkty w równych odstępach. Czy musimy zawsze trzymać się tej zasady? Jeżeli ktokolwiek z Czytelników miał kiedyś okazję oglądać przyrząd zwany higrometrem włosowym, ten mógł się przekonać, że używane są podziałki, gdzie kreski odpowiadające liczbom o jednakowych różnicach nie są rozmieszczone równomiernie. Jednostki wilgotności używane przez fizyków są adekwatniejsze, aniżeli jednostki wynikię z równomiernego wyskalowania podziałki higrometru włosowego.

## 3. Pojęcie typu funkcji

Odstąpienie od zasady równomiernego skalowania osi  $x$ -ów i  $y$ -ów może przynieść istotne korzyści również z punktu widzenia rozważań czysto matematycznych.

Przyjrzyjmy się najpierw (rys. 4) wykresowi funkcji  $y = \frac{1}{3}x^3 - x$  w „normalnie” wyskalowanych osiach  $x, y$ ; widzimy, że wykres ten ma tę samą „formę”, co rozważane poprzednio wykresy na rys. 1, i można go w opisany wyżej sposób zdeformować do któregośkolwiek z wykresów  $f_1, f_2$ , — zatem po odpowiednim doborze skal wykresy te mogą być wykresami funkcji  $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ .



Rys. 5

Dzięki swobodzie doboru skali mając dany wykres możemy interpretować go jako graficzne przedstawienie funkcji o bardzo prostym zapisie, a więc bardzo wygodnej w operowaniu nią. Rysunek 5 przedstawia wyskalowanie osi współrzędnych, przy którym wykres  $f_2$  z rys. 2 jest wykresem funkcji  $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ . Uzyskujemy je następująco: niech  $a$  oznacza punkt stanowiący lokalne maksimum wykresu  $f_2$ ,  $b$  jego minimum lokalne. Punktowi  $a$  musimy przyporządkować zatem  $y = \frac{2}{3}$ , zaś punktowi  $b$  wartość  $y = -\frac{2}{3}$  (takie są wartości funkcji  $y = \frac{1}{3}x^3 - x$  w jej maksimum lokalnym i minimum lokalnym). Pozostałe wartości  $y$  dobieramy tak, by uzyskać zwykłą skalę „równomierną” (w przypadku wykresu tego typu, co  $f$ , jest to dopuszczalne). Wówczas wartości na osi  $x$ -ów są jednoznacznie określone przez warunek, że danej wartości  $y$  odpowiada  $x$  spełniające  $y = \frac{1}{3}x^3 - x$  (funkcja  $y = \frac{1}{3}x^3 - x$  jest wzajemnie jednoznaczna w przedziałach: od  $-\infty$  do  $-1$ , od  $-1$  do  $+1$  oraz od  $1$  do  $+\infty$ ). W analogiczny sposób nasz wykres  $f_2$  może odpowiadać funkcji  $y = x^5 - x$  albo funkcji  $y = x^7 - \sin x$ , albo..., ale nie moglibyśmy posłużyć się np. funkcją  $y = x$ . Zanim przystąpimy do wykazania tego ostatniego, zauważmy, że to co określiliśmy jako „wyskalowanie osi” można zdefiniować jako wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie tej osi (czyli prostej euklidesowej) na zbiór liczb rzeczywistych; przekształcenie takie przyporządkowuje każdemu punktowi osi pewną liczbę rzeczywistą. Przypuśćmy teraz, że istnieje możliwość takiego wyskalowania osi układu współrzędnych dla funkcji  $y = \frac{1}{3}x^3 - x$  oraz takiego wyskalowania osi dla funkcji  $y = x$ , że przy tych wyskalowaniach obu funkcjom odpowiada ten sam wykres. Niech  $h_1$  i  $g_1$  będą takimi wyskalowaniami odpowiednio osi  $x$ -ów i osi  $y$ -ów dla funkcji  $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ , a  $h_2$  i  $g_2$  — dla funkcji  $y = x$ . Oznaczmy przez  $h$  złożenie  $h_2 \circ h_1^{-1}$ , niech  $g = g_1^{-1} \circ g_2$ . Odwzorowania te przyporządkowują liczbom liczby i są wzajemnie jednoznaczne (ponieważ z założenia  $h_1, h_2, g_1, g_2$  są wzajemnie jednoznaczne). Założenie, że przy przyjętych wyskalowaniach obie nasze funkcje mają ten sam wykres oznacza teraz, że

$$\text{dla każdego } x: \frac{1}{3}x^3 - x = g \circ h(x).$$

Jest to jednak niemożliwe, ponieważ po prawej stronie mielibyśmy funkcję wzajemnie jednoznaczną, zaś funkcja  $y = \frac{1}{3}x^3 - x$  taką nie jest. Możemy powiedzieć, że funkcje  $y = \frac{1}{3}x^3 - x$  oraz  $y = x$  mają różny typ, ich wykresy mają różną „formę”. Sprezycujemy to w następującej definicji:

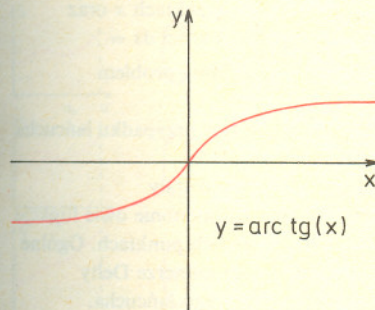
**Definicja.** Mówimy, że dwie różniczkowalne funkcje rzeczywiste  $f_1, f_2$  mają ten sam typ (*typologiczno-różniczkowy*), jeśli istnieją dwie funkcje  $h, g$  odwzorowujące wzajemnie jednoznacznie zbiór liczb rzeczywistych na cały zbiór liczb rzeczywistych, spełniające równość:

$$f_1 = g \circ f_2 \circ h, \quad \text{tzn. dla każdego } x \quad f_1(x) = g(f_2(h(x))).$$

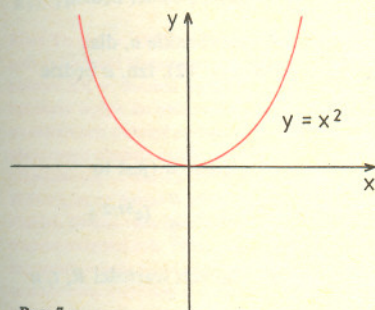
Zakładamy przy tym, że każda z funkcji  $h, g$  ma ciągłą pochodną, i że tę samą własność mają funkcje odwrotne do nich. Funkcje  $h, g$  (ogólniej — odwzorowania) spełniające warunki podane w powyższej definicji matematycy nazywają *diffeomorfizmami*.

Warunki, jakie nałożyliśmy na  $h$  i  $g$  w powyższej definicji wyrażają żądanie, by dopuszczać tylko takie sposoby wyskalowania osi  $x, y$ , przy których wykres funkcji wszędzie różniczkowalnej będzie wszędzie gładki, bez ostrych załamań, a także by funkcja o tym samym typie co funkcja różniczkowalna również była różniczkowalna.

Na rysunkach 6—9 mamy przykłady funkcji mających różne typy.



Rys. 6

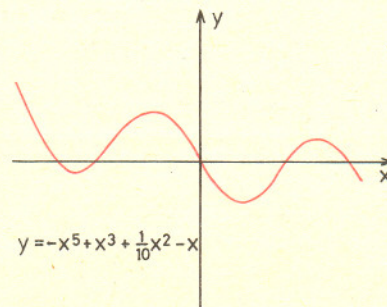


Rys. 7

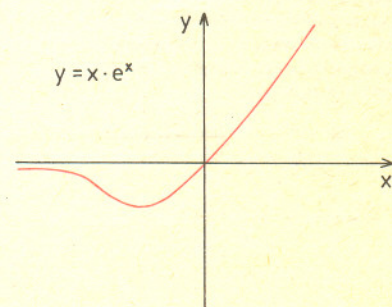
\*Profesor A. Trautman wielokrotnie wyrażał ubolewanie nad maszkarno cią tego potworka językowego, którego pierwszy człon (diffeo-) został wzięty z łaciny, zaś drugi (-morfizm) z greki.

Podobne ubolewanie wyrażał profesor R. Sikorski z powodu traktowania przedrostka diffeo — jako łacińskiego, gdyż Rzymianie nie znali takiego zwrotu — pisali natomiast differo-.

Na marginesie dodam, że jeszcze prężniejszej brzmi „wiązka kostyczna”, gdzie zlepiłono łaciński przedrostek „co” ze „styczna”.

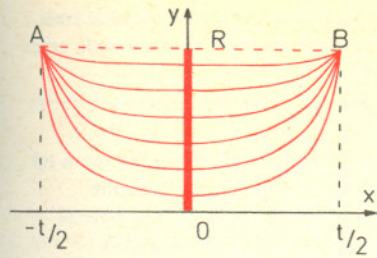


Rys. 8

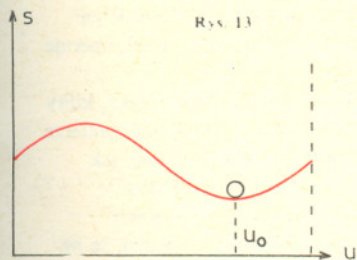


Rys. 9





Rys. 13



Rys. 14

Zauważmy, że  $u$  możemy interpretować jako wartość zmiennej  $y$ , którą przyjmuje odpowiadająca jej funkcja w punkcie  $x = 0$ . Mamy więc do czynienia z rodziną funkcji „numerowaną” punktami na osi  $y$ -ów z przedziału  $0 < y < R$  (rysunek 13). Wartości granicznej  $y = R$  odpowiada sytuacja, w której nasza powierzchnia degeneruje się do powierzchni bocznej walca. Przy  $u$  zbliżającym się do zera nasza powierzchnia coraz bardziej upodabnia się do dwóch membran wypełniających wnętrza pierścieni i połączonych osiowo cienką rurką, której grubość maleje do zera. Dla  $u = 0$  nasza powierzchnia degeneruje się więc do dwóch oddzielnych membran, wypełniających wnętrza pierścieni.

Każdej wartości  $u$  zatem jednoznacznie odpowiada krzywa wyznaczająca powierzchnię obrotową, której wartość pola powierzchni zapiszemy  $S(u)$ . Mamy zatem funkcję  $S = S(u)$ , która jest ciągła i różniczkowalna. Funkcja ta ma wartości graniczne:  $2\pi R^2$  dla  $u \rightarrow 0$  oraz  $2\pi Rt$  dla  $u \rightarrow R$  (dlaczego?). Wartość  $u_0$  odpowiadająca minimum tej funkcji (rys. 14) jest „numerkiem” powierzchni z naszej rodziny, która będzie zrealizowana przez fizycznie istniejącą błonę mydlaną. Gdybyśmy wykres funkcji  $S = S(u)$  wykonali tak, by mogła po nim toczyć się kulka (zakładając, że pion wyznacza oś  $S$ ), wówczas wartości  $u_0$  odpowiada położenie stabilnej równowagi kulki, jak to symbolicznie zaznaczyliśmy na rysunku. Funkcja  $S(u)$  zależy oczywiście od odległości między pierścieniami. Dlatego przy zmieniającej się odległości  $t$  będziemy mieli rodzinę funkcji  $S_t(u)$ , parametryzowaną przez  $t$ .

## 5. O „katastrofalnym” pęknięciu błony mydlanej

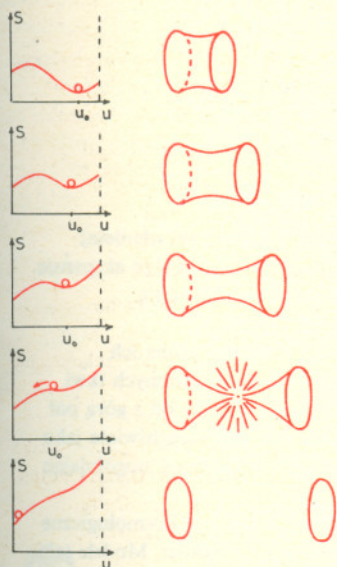
Prześledzimy teraz, jak będzie zmieniać się funkcja  $S_t(u)$  przy systematycznie rosnącym  $t$  poczynając od wartości bliskiej zeru. Ewolucję tę będziemy systematycznie konfrontować z fizyczną sytuacją błony rozpiętej na pierścieniach. Na rysunku 15 mamy „historyjkę obrazkową”, którą będziemy przeglądać od góry do dołu. Z prawej strony mamy układ fizyczny, z lewej — odpowiadającą mu funkcję  $S_t(u)$ . W początkowej sytuacji, gdy  $t < R$ , prawy koniec wykresu  $S_t(u)$  znajduje się niżej niż lewy, bowiem wówczas  $2\pi Rt < 2\pi R^2$ , wartość odpowiadająca  $u_0$  stanowi minimum absolutne  $S_t(u)$ . Przy wzroście  $t$  podnosi się prawy koniec wykresu, podnosi się i przemieszcza w lewo jego minimum w  $u_0$ , co objawia się w mocniejszym przewężeniu błony na środku jej długości. Dochodzi do tego, że minimum lokalne w  $u_0$  przestaje być minimum absolutnym funkcji  $S_t(u)$ , jednak w dalszym ciągu jest ono fizycznie realizowane przez błonę mydlaną, bowiem przejście do innych  $u$  musiałoby odbywać się wbrew działaniu sił napięcia powierzchniowego. Tak samo kulka znajdująca się w  $u_0$  nie może tego miejsca opuścić, dopóki jest tam minimum lokalne, nie może bowiem toczyć się pod górę. Wreszcie przy odpowiednio dużym  $t$  wykres funkcji  $S_t(u)$  „wyprostowuje się” do tego stopnia, że minimum lokalne w  $u_0$  przestaje istnieć: nasza kulka zaczyna gwałtownie się staczać dążąc do  $u = 0$ . Odpowiada temu przejście katastrofalne w naszym układzie fizycznym: w pewnym momencie błona zaczyna gwałtownie się zweźać w swej środkowej części, aż dochodzi do przerwania jej ciągłości, w wyniku czego przybiera ona postać dwóch membran wypełniających wnętrza pierścieni. Przy dalszym wzroście  $t$  funkcja  $S_t(u)$  staje się coraz szybciej rosnącą funkcją monotoniczną, zaś w układzie fizycznym panuje sytuacja zdegenerowana, odpowiadająca kresowi dolnemu wartości  $S_t(u)$  na odcinku  $0 < u < R$ .

Moment katastrofalnego przejścia, które drastycznie zmieniło sytuację w rozważanym układzie fizycznym jest dokładnie tym momentem, w którym funkcja  $S_t(u)$  zmieniła swój typ topologiczny. Do momentu krytycznego funkcja  $S_t(u)$  miała typ topologiczny funkcji  $y = u^3 - u$ , natomiast po jego przekroczeniu ma ona typ funkcji ściśle monotonicznie rosnącej, reprezentowanej przez  $y = u$ . Gdybyśmy dla każdej wartości  $t$  odpowiednio dobrali sposób numerowania alternatywnych powierzchni parametrem  $u$ , wówczas wyrażenie  $S_t(u)$  przybrałoby następującą, „kanoniczną” postać:  $S_t(u) = u^3 + (t - t_0)u$ . Z punktu widzenia „katastrof elementarnych” Thoma w opisanym przykładzie mieliśmy do czynienia z przejściem katastrofalnym „faldy”, jest ono najprostsze spośród elementarnych katastrof. W przyszłości opowiemy o nich bardziej szczegółowo.

## 6. Konkluzja

Opisany wyżej przykład stanowi ilustrację, w jaki sposób można pogodzić dwie pozornie przeciwstawne zasady filozoficzne: z jednej strony mamy tzw. zasadę Leibniza, mówi ona, że jeżeli jakieś parametry ilościowe układu fizycznego są zależne, to zależność ta jest ciągła (o ile oczywiście parametry te określimy w dostatecznie naturalny sposób). Zasada Leibniza odegrała ogromną rolę w fizyce, zwłaszcza w mechanice kwantowej korzysta się z niej w sposób jawny („warunki zszycia”). Z drugiej strony filozofowie dialektycy głoszą, iż „przejścia skokowe są prawidłowością rozwoju”, jako przykład podają oni proces ogrzewania wody, który w pewnym momencie doprowadza do gwałtownego przejścia w stan lotny.

Przyjrzyjmy się, co się dzieje w kryształach ciała stałego, systematycznie podgrzewanym. Zmieniają się w nich parametry takie jak: prędkości poszczególnych molekuł, ich położenia, średnia prędkość molekuly etc. Wszystkie te wielkości zmieniają się w sposób ciągły. Każda molekula porusza się w rejonie swego węzła sieci Bravais. W miarę wzrostu temperatury molekuly poruszają się coraz szybciej i coraz większy obszar jest penetrowany przez poszczególne molekuly.

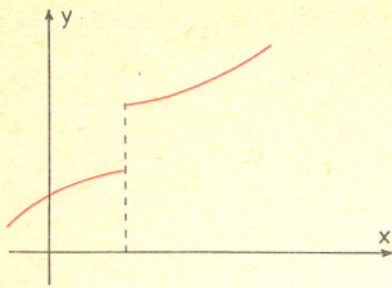


Rys. 15

René Thom (ur. 1923), najwybitniejsza indywidualność matematyczna drugiej połowy XX w. Swoimi wynikami wywarł ogromny wpływ na oblicze matematyki współczesnej: położył podwaliny bardzo obszernego obecnie działu topologii różniczkowej — teorii kobordyzmów (ok. 1954 r.), za co dostał w 1958 r. medal Fieldsa. Swoim twierdzeniem o transwersalności (ok. 1956) przyczynił się do zapoczątkowania teorii osobliwości jako samodzielnej dziedziny o silnych, specyficznych dla niej metodach. Swoim przypuszczeniem o prawdziwości twierdzenia przygotowawczego Weierstrassa dla funkcji rzeczywistych klasy  $C^\infty$  przyczynił się do powstania nowej dziedziny zwanej analizą różniczkową. W ogromnym stopniu wpłynął on na ukształtowanie oblicza tzw. teorii gładkich układów dynamicznych (tw. o nieistnieniu globalnych całek pierwszych). Jego najgłośniejszym osiągnięciem jest wytoczony przezeń program matematycznej teorii morfogenezy, zwanej potocznie „teorią katastrof”.

Wniósł wiele interesujących myśli do filozofii matematyki.





Dochodzi do momentu, kiedy pojęcie sieci Bravais dla scharakteryzowania ruchu molekuł traci sens: molekuly uzyskują swobodę poruszania się po całym rejonie wypełnianym pierwotnie przez kryształ. Mówimy wówczas, że kryształ uległ stopieniu. Widzimy więc, że ta skokowa przemiana, jaką jest topnienie, polega na zmianie charakterystyk topologicznych ruchu poszczególnych molekuł, ilościowych skoków tu nie ma.

Celem sprostowania nieporozumień, jakie narosły wokół teorii Thoma, podkreślam: w teorii tej nie ma miejsca na nieciągłości takie, jak na rysunku obok. W grę wchodzi tam wyłącznie nieciągłości własności jakościowych. Zwróćmy uwagę, że wyrażenie  $u^3 + tu$ , w którym obecna jest nieciągłość polegająca na skokowej przemianie typów topologicznych, pod względem zależności od parametrów  $u, t$  jest wzorowym przykładem „porządnej” funkcji w sensie jej „zwykłej” ciągłości, różniczkowalności etc. Tylko takimi funkcjami i odwzorowaniami operuje teoria Thoma.

Z opisanego wyżej przykładu wynika jeszcze inny morał. Można wyobrazić sobie fizyka, który będzie starał się wyjaśnić opisaną zjawisko wysuwając hipotezy o zmieniającym się charakterze sił napięcia powierzchniowego przy malejącej grubości błony, można sobie wyobrazić, jak będzie on budował coraz bardziej skomplikowane modele na poziomie molekularnym. Otóż Thom wskazuje, że być może taki właśnie błąd popełniają współcześni biologowie urzeczni postęпами biochemii i biologii molekularnej, którzy podświadomie uwierzyli, że na molekularnym poziomie znajdują wyjaśnienie „tajemnicy życia”. Wiele wskazuje na to, że szereg zjawisk fizjologicznych znajdzie swoje wyjaśnienie w globalnych własnościach żywego organizmu, nawet bez potrzeby odwoływania się do poziomu komórkowego, tak jak opisanie przez nas zjawisko znajduje wyjaśnienie w globalnej geometrii układu.

## Kosmologia geometryczna, czyli ewoluująca geometria

*Dr hab. Bronisław KUCHOWICZ*

Gdybym miał wymienić jedną tylko, ale za to najbardziej fundamentalną (moim zdaniem) właściwość Wszechświata, nie miałbym wątpliwości i bez wahania wymieniałbym jego ekspansję. Czyż nie jest bowiem czymś niezwykle uderzającym owo nieustanne rozszerzanie się Wszechświata?

Jest to fakt. Nauka jednak — to nie tylko zbiór faktów. Niezbędna jest choć próba ich wyjaśnienia, powiązania ze sobą. Dziś u podstaw wyjaśnienia faktów kosmologicznych tkwi ogólna teoria względności Einsteina — współczesna teoria czasoprzestrzeni. Już od z górą pół wieku trwają próby zastosowania tej skądinąd niezwykle owocnej teorii do Wszechświata jako całości. Próby takie podejmował sam Einstein, podejmowali (i podejmują do dziś, uogólniając teorię) inni, tworząc modele Wszechświata.

Wspominaliśmy już w pierwszym artykule z cyklu kosmologicznego, że modele kosmologiczne są to konstrukcje teoretyczne opisujące zachowanie się Wszechświata jako całości. Modele takie dopasowuje się do istniejących danych obserwacyjnych. Uznanie takich faktów, jak np. ekspansja kosmiczna albo obecność promieniowania szcztątkowego (o których była mowa w numerach Delt 8/1976 i 10/1976), prowadzi do odrzucenia tych modeli, które nie przewidują ekspansji ani promieniowania tła. Tak więc odrzucono został pierwszy spośród modeli kosmologicznych opartych o ogólną teorię względności, zaproponowany przez samego Einsteina w 1917 roku model statycznego Wszechświata. Było to jeszcze na długo przed ogłoszeniem przez Hubble'a wyników jego badań nad odległymi galaktykami, przed stwierdzeniem ich powszechnej ucieczki. Wydawało się wtedy rzeczą naturalną przyjąć, że Wszechświat jako całość musi być niezmienny w czasie, statyczny. Mogą wprawdzie powstawać gwiazdy i układy planetarne (wystarczy wspomnieć o starej teorii Kanta-Laplace'a), zmieniać się mogą drobiazgi, ale porządek kosmiczny pozostaje trwały. Dlaczego bowiem miałyby się zmieniać? W latach 1922–1924, kiedy koncepcja statycznego, niezmiennego Wszechświata wydawała się czymś naturalnym, pojawiły się dwie prace młodego, nieznanego ani Einsteinowi, ani innym fizykom zachodnim matematyka z Leningradu, A. A. Friedmanna. Już w pierwszej z nich, zatytułowanej „O krzywiznie przestrzeni”, udało mu się uzyskać nieoczekiwany wynik, pozorny sprzeczny z całą nagromadzoną do tej pory wiedzą. Geometria Wszechświata (patrz artykuł Einsteina, Delta 2/1977) zmieniać się miała nieustannie z upływem czasu, zakrzywienie przestrzeni i gęstość materii stale miały maleć lub rosnać, to samo odnosiłoby się do odległości wzajemnej dwóch punktów. Otrzymany przez Friedmanna model Wszechświata był modelem ewoluującym i stanowił wynik rozwiązania układu równań ogólnej teorii względności. Rozwiązania takiego nie znalazł poprzednio Einstein. Nic więc dziwnego, że po przeczytaniu pracy Friedmanna posłał do redakcji list z uwagami krytycznymi, wskazującymi na to, że model Friedmanna wzbudza poważne wątpliwości i że praca najprawdopodobniej jest błędna. List ten redakcja wydrukowała.

Aleksander Aleksandrowicz Friedmann, ur. 17 VI 1888, zm. 15 IX 1925, w 1909 ukończył studia na uniwersytecie w Petersburgu (sekcja matematyki), gdzie najbardziej interesowała go meteorologia dynamiczna. Po studiach pracował jako matematyk w Instytucie Dróg i Mostów, Instytucie Górnictwa; po wybuchu Pierwszej Wojny Światowej zgłosił się jako ochotnik na front, gdzie służył w lotnictwie, wykorzystując wolny czas na pisanie rozpraw naukowych. Oto co pisał w liście z frontu: „Zajmuję się obecnie zagadnieniem wyznaczenia temperatury i ciśnienia, gdy dane są prędkości... Potem przystąpię do napisania, jeśli uznacie to za właściwe, dla „Geograficznego Sbornika” niewielkiej notki o przyczynach powstawania i znikania turbulencji w atmosferze, choćby w najogólniejszej postaci matematycznej”. Nie ma w tym nic dziwnego, jeśli wziąć pod uwagę, że pierwszą w swym życiu pracę naukową (poświęconą liczbom Bernoulliego) posłał Friedmann do druku w poważnym czasopiśmie (wśród którego redaktorów byli ludzie tej klasy, co Klein i Hilbert) jeszcze jako uczeń ostatniej klasy gimnazjalnej. Praca ta ukazała się w druku, gdy Friedmann ukończywszy gimnazjum ze złotym medalem wstępował na studia. Po zakończeniu Pierwszej Wojny Światowej, jeszcze w latach wojny domowej, prowadził wykłady hydrodynamiki i analizy tensorowej na uniwersytecie w Leningradzie, wydał książki „Doświadczenia z hydrodynamiki cieczy ściśliwych” oraz „Świat jako przestrzeń i czas” i prace kosmologiczne, o których wspominaliśmy w tekście, wreszcie kierował Głównym Laboratorium Geofizycznym w Leningradzie. Niestety, w pełni sił zachorował i zmarł na tyfus.

Spowodowało to natychmiastową odpowiedź Friedmanna Einsteinowi, gdy tylko czasopismo owo dotarło do Leningradu. Friedmann wyjaśnił szczegółowo swe stanowisko, Einstein wszystko sprawdził i ku swemu zdziwieniu doszedł do wniosku, że to Friedmann ma rację. W 1923 roku ukazała się odpowiedź Einsteina. Oto fragment: „Wyniki pana Friedmanna uważam za słuszne; rzucają one nowe światło na problem. Okazuje się, że równania pola dopuszczają dla struktury przestrzeni obok rozwiązań statycznych również i rozwiązania dynamiczne (tj. zmieniające się z czasem) o symetrii sferycznej”. Mimo tego odwołania, modele zaproponowane przez Friedmanna nie od razu przyjęły się w kosmologii. Było to jeszcze na parę lat przed odkryciem rozszerzania się Wszechświata — tego, co właśnie przewidywały modele Friedmanna. A więc — mogły one uchodzić za poprawne rozwiązania równań Einsteina, poprawne i nieprzydatne do niczego. Pojawiły się za wcześniej! Od tej pory minęło ponad pół wieku, pojawiło się wiele dalszych modeli kosmologicznych, coraz bardziej złożonych matematycznie, uzyskiwanych z równań Einsteina przy coraz to ogólniejszych założeniach. Wszystkie one mogą nadawać się do opisu rzeczywistego Wszechświata, wciąż jednak najbardziej przydatnymi w praktyce okazują się modele Friedmanna. Jak dotąd, żadne dane obserwacyjne nie są w stanie wykluczyć ich stosowności w kosmologii. Należy się więc tym modelom kilka słów w naszym artykule.

Zacznijmy od założeń, przy których modele te zostały wyprowadzone. Pierwsze — dość istotne (jak by się nam wydawało) założenie, to uznanie słuszności równań ogólnej teorii względności. Równania te wiążą geometrię czasoprzestrzeni z wypełniającą ją materią. Mówi się nieraz krótko: Rozkład mas w przestrzeni wyznacza jej strukturę geometryczną. Gdy teraz spojrzeć na ucieczkę galaktyk, to od razu stwierdzamy, że średnia gęstość materii we Wszechświecie nieustannie maleje. Czy nie musi to spowodować jakiejś ukierunkowanej zmiany geometrii? W modelach Friedmanna przyjmuje się jednorodny rozkład mas i izotropową ekspansję Wszechświata, jako najprostsze możliwe założenia robocze dla otrzymania wyniku rachunkowego — geometrycznego modelu Wszechświata. Założenia te — to nic innego jak omawiana przez nas przed kilku miesiącami zasada kosmologiczna. Można więc modele Friedmanna wyprowadzić z teorii Einsteina przy użyciu zasady kosmologicznej. Komu modele te wydają się zbyt prymitywne (bo niby dlaczego ekspansja ma być izotropowa?), może posłużyć się modelami ogólniejszymi. Dziś już dostępnych jest wiele innych modeli, różniących się szczegółami od modeli Friedmanna, nic jednak istotnie nowego wszystkie te uogólnienia nie wnoszą. Wszak muszą być one zgodne z wynikami obserwacji, te zaś dają pewną górną granicę anizotropii czy też niejednorodności dla Wszechświata. Wewnątrz zaś obserwacyjnie danych granic tych wielkości modele niejednorodne i nieizotropowe nie różnią się w sposób zasadniczy od modeli Friedmanna.

Do modeli Friedmanna dojść można nie tylko w einsteinowskiej, ale i w newtonowskiej teorii grawitacji. Posłużymy się tą ostatnią teorią dla elementarnego wyprowadzenia tzw. równania ekspansji, które formalnie ma taką samą postać w obu teoriach. Przyjmijmy najprostszy rodzaj ośrodka ciągłego wypełniającego Wszechświat: pył o gęstości  $\rho$ . Ruch cząsteczek pyłu rozważamy w tzw. współporuszającym się (z tymi cząsteczkami) układzie współrzędnych. Zastosujmy wreszcie zasadę kosmologiczną do pewnej wyciętej we Wszechświecie kulki o promieniu  $R$ , zawierającej masę  $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ . Wraz z całym Wszechświatem kulka ta będzie ekspandować izotropowo, gęstość w niej wciąż będzie jednorodna (choć oczywiście będzie się zmieniać w czasie). Rozważmy teraz energię małej masy  $dm$ , umieszczonej na powierzchni kulki. Uczestniczy ona w tej ekspansji, zwiększając swą odległość  $R$  od środka kulki. Jej prędkością jest więc  $v = \frac{dR}{dt}$ , a energią kinetyczną  $E_k = \frac{1}{2} dm \left( \frac{dR}{dt} \right)^2$ . Masa ta jest zarazem przyciągana przez kulkę, i jej potencjalna energia grawitacyjna wynosi

$$E_{pot} = -\frac{GMdm}{R} = -\frac{4}{3} \pi GR^2 \rho dm.$$

Przyjmijmy, że zachodzi zachowanie energii:  $E_k + E_{pot} = \text{constans}$ . Oznaczmy wielkość stałą jako  $-\frac{1}{2} \epsilon^2 dm$ , wtedy po uproszczeniu przez  $dm$  zasada zachowania energii przybiera postać:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{4}{3} \pi GR^2 \rho = -\frac{1}{2} \epsilon^2.$$

Jest to właśnie owo równanie ekspansji.

Gdy  $\epsilon > 0$ , układ jest związany siłami grawitacyjnymi, gdy  $\epsilon < 0$  — nie jest związany. Równanie ekspansji, wyprowadzone przez nas dla teorii newtonowskiej, pozostaje w mocy dla ekspansji izotropowej w teorii Einsteina, gdzie jego rozwiązania dają modele Friedmanna dla Wszechświata wypełnionego materią pyłową (mogą być bowiem i inne wypełnienia dla modeli Friedmanna).



Rozwiązanie zadania M 122. Podstawiając  $x = 1, 2, 3$  znajdujemy rozwiązanie  $(x, y) = (3, 11)$ . Możemy więc zakładać w dalszych rozważaniach, że  $x > 3$ .

Zauważmy, że

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \left( x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} \right)^2 + \frac{5}{8}x + \frac{55}{64}$$

i jednocześnie

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \left( x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}(x+1)(x-3).$$

Jeżeli liczby naturalne  $x, y$  spełniałyby równość

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^2,$$

to byłoby:

$$\left( x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} \right)^2 < y^2 < \left( x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right)^2,$$

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} < y < x^2 + \frac{x}{2} + \frac{4}{8},$$

co jest niemożliwe, gdyż liczba całkowita  $y$  leżałaby między kolejnymi ułstkami o mianowniku 8. Równanie nie ma więc rozwiązań, w których  $x > 3$ .

Rozwiązanie powyższego równania można łatwo uzyskać dla  $\epsilon = 0$ . Podstawiamy wyrażenie wskazujące jak gęstość pyłu w kulce zależy od jej promienia:  $\rho = \rho_0/R^3$ , i mamy równanie

$$\text{różniczkowe dla funkcji } R = R(t). \text{ Rozwiązaniem jego jest: } R = (6\pi G \rho_0 t^2)^{1/3} \text{ i } \rho = \frac{1}{6\pi G t^2}.$$

Promień kulki rośnie z czasem nieograniczenie, gęstość pyłu — spada. Można wykazać, że rozwiązanie to przedstawia model Wszechświata z geometrią euklidesową. Dla  $\epsilon < 0$  otrzymujemy również nieograniczone rozszerzanie — przy geometrii hiperbolicznej. Jeśli wreszcie  $\epsilon > 0$ ,

wtedy możliwa jest sytuacja taka, iż w pewnej chwili  $\frac{dR}{dt} = 0$ , tzn. ekspansja kończy się, układ

osiąga maksymalną wartość promienia  $R$ , a następnie zaczyna się faza kontrakcji ( $\frac{dR}{dt} < 0$ ).

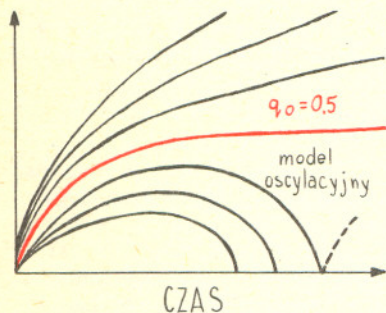
Mówimy wtedy o modelu tzw. zamkniętego Wszechświata (model z  $\epsilon = 0$  nazywamy też modelem płaskim, model z  $\epsilon < 0$  — modelem otwartym). Przebieg zależności wielkości  $R$  od czasu dla trzech typów modeli Friedmanna widać na rysunku obok.

Funkcja  $R(t)$ , której przebieg przedstawiliśmy, charakteryzuje wzajemnie odległości dwóch cząstek czy też punktów materialnych we Wszechświecie. Nazywa się ją nieraz czynnikiem skali, charakteryzuje ona bowiem skalę odległości. Zauważmy, że wszystkie wyobrażone przez nas modele zaczynają się w czasie od wartości  $R(t) = 0$ . Czy to możliwe, by w początkowej chwili ekspansji rozmiary Wszechświata były punktowe, a gęstość materii nieskończona? Czy nie załamałyby się wtedy zwykle, znane nam prawa fizyki? Jest to istotny problem fizyki i kosmologii współczesnej, problem tzw. początkowej osobliwości (dla modelu zamkniętego osobliwość taka powstanie i pod koniec ewolucji). Do problemu tego powrócimy jeszcze w przyszłości, obecnie zauważymy jedynie, że pojawienie się osobliwości wskazuje na niestosowalność współczesnej teorii do stanów materii o dostatecznie wysokiej gęstości, kiedy być może dotychczasowe poglądy na strukturę materii i przestrzeni tracą moc.

Porównując wyniki obliczeń przeprowadzonych dla różnych modeli Friedmanna (otwarte, zamknięte i płaskie, wypełnione pyłem, promieniowaniem albo mieszaniną obu itd.)

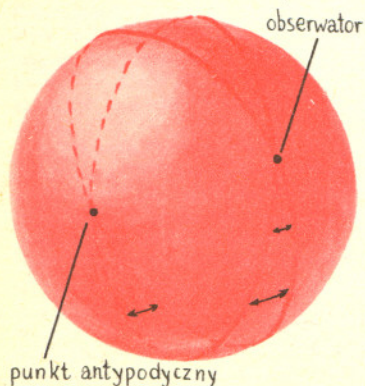
z obserwacjami ekspansji kosmicznej, usiłując dociec, czy ekspansja ta z upływem czasu ulega spowolnieniu czy też, na odwrót, przyspieszeniu, astronomowie przedstawiają argumenty na rzecz przyjęcia modeli o określonych parametrach. Sytuacja nie jest w pełni jasna do dziś, czy Wszechświat jest otwarty, zamknięty czy płaski. Znajdujemy się najprawdopodobniej w takim obszarze z lewej strony rysunku, na którym przedstawiono modele, że wszystkie krzywe  $R = R(t)$  biegną zbyt blisko siebie, by można było ustalić na podstawie danych obserwacyjnych, według której z nich przebiega ewolucja Wszechświata i jego geometrii. A jeszcze ważniejszym jest tu pytanie odnoszące się do przyszłości: Czy Wszechświat będzie się rozszerzał bez końca, czy też grozi mu przejście kiedyś w fazę kontrakcji, zagęszczania. Mówimy „grozi”, bo przy takim zagęszczeniu i Ziemia i Słońce kiedyś przestaną istnieć jako oddzielne ciała, i nawet jeśli nie dojdzie do stłoczenia całej materii Wszechświata do punktu (owej osobliwości, o której już mówiliśmy), to i tak materią zostanie z pewnością zagęszczona do pewnej niedużej objętości. Całe szczęście jednak, że gdyby nawet to nam groziło, to i tak już nas nie będzie; według oszacowań nawet najbardziej pesymistycznych nie mogłoby to nastąpić wcześniej niż za kilkadziesiąt miliardów lat!

Ekspansja Wszechświata stanowi naturalną konsekwencję równań Einsteina. Geometria Wszechświata zmienia się w czasie, a wraz z nią i gęstość materii. Ucieczka galaktyk prowadzi do wyjaśnienia paradoksu Olbersa. I to jeszcze nie wszystkie rezultaty wynikające z rozważań nad najprostszymi dynamicznymi modelami Wszechświata — modelami Friedmanna. Dalszymi konsekwencjami wpływającymi z tych modeli Wszechświata, odnoszącymi się do analizy stanu materii w odległych epokach, do odczytania zapisu procesów fizycznych, jakie wtedy zachodziły, zajmiemy się w następnych artykułach.



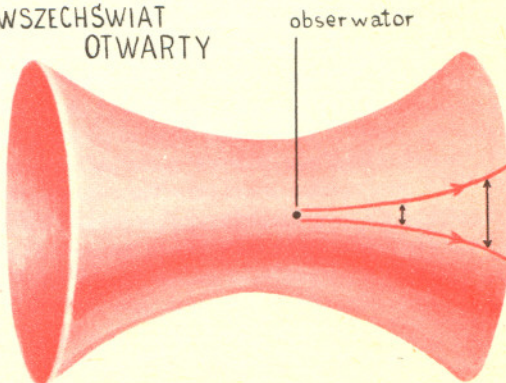
Różne modele friedmannowskie rozszerzającego się Wszechświata. Czynnikiem skali  $R(t)$  w zależności od czasu  $t$ . Model scharakteryzowany wartością parametru deceleracji  $q_0 = 0,5$  oddziela klasę modeli otwartych (ekspansja bez końca) od zamkniętych (dla których ekspansja zastępuje od pewnej chwili kontrakcją).

### WSZECZŚWIAT ZAMKNIĘTY



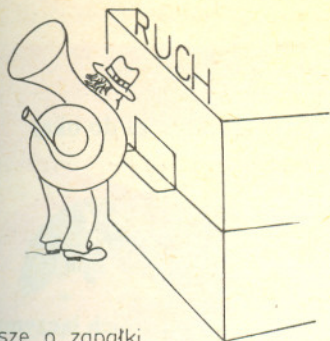
Dwuwymiarowe modele kosmologiczne. Przykłady Wszechświata zamkniętego (z krzywizną dodatnią) i otwartego (z krzywizną ujemną). We Wszechświecie zamkniętym promień świetlny może w zasadzie obejść całą przestrzeń i powrócić do punktu, z którego został wysłany; sytuacja taka jest nie do pomyślenia we Wszechświecie otwartym. Czy Wszechświat jest otwarty, czy zamknięty — zależy od ilości materii w nim. Jeśli gęstość materii jest dostatecznie duża, może ona doprowadzić w pewnej chwili do zatrzymania ekspansji, zamiany jej na kontrakcję.

### WSZECZŚWIAT OTWARTY



# Laboratorium w domu

Mgr inż. Henryk GAJ



Proszę o zapalki

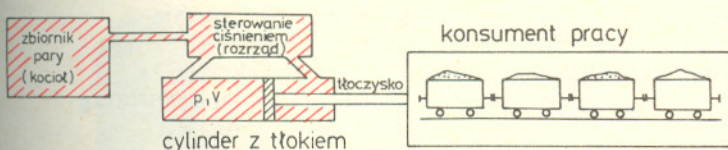
## Czym się różnią organy od maszyny parowej oraz o płomyku, który śpiewa w rurze

Każdy, kto choć raz widział organy i maszynę parową, wskaże oczywiście od razu wiele różnic, a prawie każdy na pewno powie, że mają się one do siebie jak przysłowiowa pięść do nosa i żadnych wspólnych cech urządzenia te nie mają. Jak się przekonamy, jest to przekonanie z gruntu błędne, co stwierdzi każdy spośród dociekliwych obserwatorów przyrody, których to zbiór chcemy wzbogacić własnymi skromnymi osobami.

Przypomnijmy sobie, że jedną z form energii, którą może mieć ciało gazowe, jest tak zwana praca przetwarzania równa iloczynowi ciśnienia gazu i jego objętości

$$L = p \cdot V.$$

## Co dzieje się w maszynie parowej?



Żeby zdać sobie z tego sprawę, przyjrzyjmy się schematowi jej głównej części — cylindrowi z tłokiem, pomijając wszelkie techniczne zawłości konstrukcji. Kiedy przy określonym ciśnieniu  $p$  objętość  $V$  zmieni się, np. od  $V_1$  do  $V_2$ , to wykonana zostanie praca

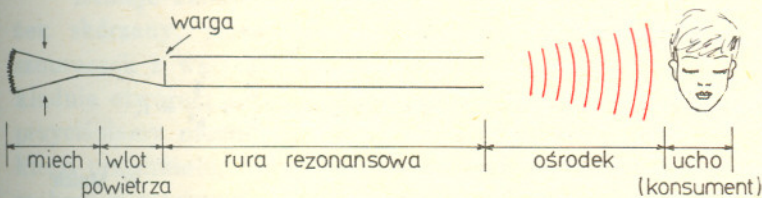
$$L = p (V_2 - V_1),$$

którą konsument może użyć wedle woli.

## A co się dzieje w organach?

Uznajmy, że wystarczy nam wiedzieć, co się dzieje w jednej piszczałce organowej, żeby wyrobić sobie sąd ogólny o organach. Kiedy piszczałka wydaje dźwięk, to jest ona źródłem energii akustycznej. Można to stwierdzić ponad wszelką wątpliwość, gdyż inaczej błona bębnekowa w naszym uchu nie ugięłaby się i nic byśmy nie słyszeli. Cały problem w tym, jak energia jest przekazywana na drodze miech — ucho. Otóż w rurze rezonansowej wytwarza się akustyczna fala stojąca,

której amplituda, pomimo strat energii, utrzymuje się za sprawą odpowiedniego przepływu powietrza przez szczelinę zwaną wargą. Odpowiedniego, to znaczy takiego, że iloczyn  $p \cdot V$  jest dodatni (w przypadku idealnym) lub większy od strat dla układu rzeczywistego (nieidealnego). No tak, ale skąd  $p$  i  $V$ , jeśli nie ma tu objętości ograniczonej sztywnymi ściankami cylindra i tłokiem. Nie szkodzi —



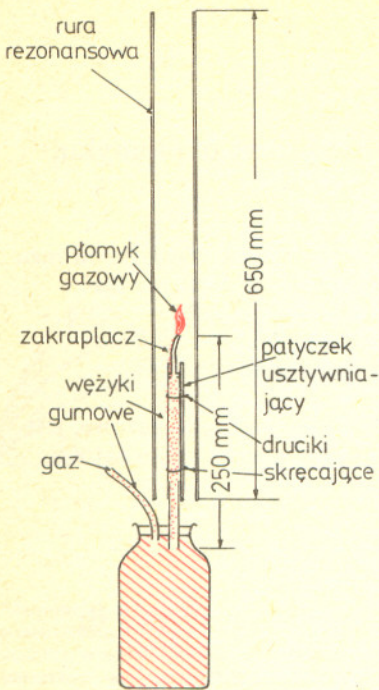
jeśli zmiany objętości są dostatecznie szybkie, bezwładność słupa gazu będzie wystarczającym ograniczeniem.

Teraz już możemy pokusić się o to, aby wskazać odpowiadające sobie elementy w obu opisanych urządzeniach.

maszyna parowa	piszczałka organowa
kocioł	miech
rozrząd	warga
cylinder	rura rezonansowa
tłocznisko	ośrodek — powietrze
ciągi	błona bębnekowa

Teraz już nikt nie powie prawdopodobnie o żadnych rzeczach, że mają się do siebie jak pięść do nosa, choćby z tego powodu, że zastanowi się najpierw, jak się istotnie ma pięść do nosa.

## A co z tym śpiewaniem w rurze?



Przyszedł wreszcie czas na to, żeby się wziąć do działania. Musimy się zaopatrzyć w niezbędne rzeczy. A oto ich spis:

1. rurka szklana średnicy 5 mm (można użyć szklanego zakraplacza do oka)
2. rurka gumowa (wążek)  $\varnothing$  wewn. 4 mm
3. butelka z grubą szyjką (słoik) o pojemności 0,5 l
4. rurka  $\varnothing$  40, długości 650 mm (może być nawet winidurowa)
5. korek gumowy z dwiema dziurkami
6. źródło gazu palnego.

Wszystkie te elementy łączymy następująco.

Z butelki wyprowadzamy dwie rurki przez korek gumowy. Jedną z nich łączymy ze źródłem gazu, drugą odpowiedniej długości wężukiem gumowym łączymy z zakraplaczem. Radzę usztywnić wążek, co ułatwi centryczne prowadzenie płomienia w rezonatorze. Otwieramy dopływ gazu i podpalamy zapalną gaz uchodzącą z kropłomierza. Płomyk powinien być krótki ( $\sim 8$  mm). Nakładamy następnie rurę-rezonator na płomyk i poruszając nią w górę i w dół szukamy miejsca, w którym wystąpi wzbudzenie akustyczne.

Kiedy wszystko prawidłowo wykonamy, z rury wydobędzie się piękny, czysty silny ton utrzymujący się dzięki obecności płomyczka w rurze. Dokładne zachowanie podanych wymiarów nie jest konieczne; ważne jest, aby proporcje między wymiarami były zbliżone do podanych.

Mało wytrwałych eksperymentatorów uprzedzam, że wzbudzenie drgań nie jest łatwe i czasem udaje się dopiero po wielu próbach. Wzbudzeniu sprzyja dmuchnięcie w górną krawędź rury lub uderzenie rurą w korek.

Bardzo istotnym jest dobranie odpowiedniej średnicy wylotu zakraplacza. Powinna ona wynosić  $0,5 \div 1$  mm. Jeśli jest większa, można zakraplacz troszkę zatopić nad płomieniem gazowym i w ten sposób zmniejszyć średnicę.

Muszę Wam tu dać poważną przestrożę. Wszelkie czynności z gazem palnym wymagają szczególnej ostrożności.

A teraz sprawa podstawowa — jak to działa? Zastanówcie się. Podpowiem tylko, że źródłem energii jest gaz palny. A może ktoś z Was wymyśli inną metodę wytwarzania dźwięku przy użyciu ciepła.



## Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

**M. 121.** Udowodnić, że jeżeli liczby rzeczywiste  $a$  i  $b$  spełniają warunek  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ , to  $a^4 + b^4 \geq (a+b)^2$ .

W. Mnich

Rozwiązanie na str. 3

**M 122.** Rozwiązać w liczbach naturalnych równanie

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^2.$$

Rozwiązanie na str. 9

**M 123.** Udowodnić, że równanie

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad (a \neq 0)$$

można rozwiązać, wykonując na jego współczynnikach cztery działania i wyciągając pierwiastki kwadratowe.

Rozwiązanie na str. 3

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

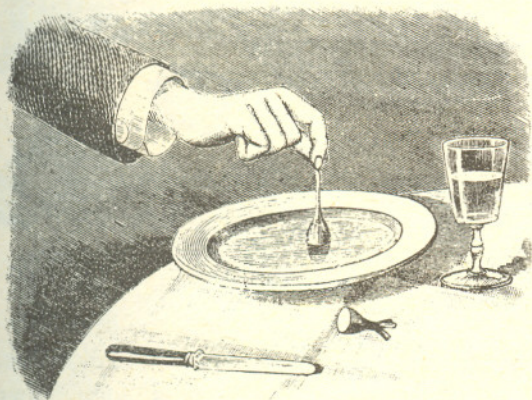
**F 41.** Dana jest nieskończona, płaska sieć druciana o oczkach kwadratowych, pokazana na rysunku. Opór każdego prostoliniowego odcinka drutu łączącego dwa najbliższe węzły wynosi  $r$ . Wyznaczyć opór zastępczy  $R_{AB}$  tej sieci w przypadku, gdybyśmy włączyli ją do obwodu w punktach A i B.

Rozwiązanie na str. 2



Otrzymaliśmy fragment starej książeczki z opisami prostych doświadczeń fizycznych i chemicznych. Nie udało nam się ustalić ani autora, ani tytułu, ani też roku wydania.

Bardzo prosimy o pomoc w identyfikacji. Czekaemy na listy.



Podnieś talerz za pomocą rzodkiewki.

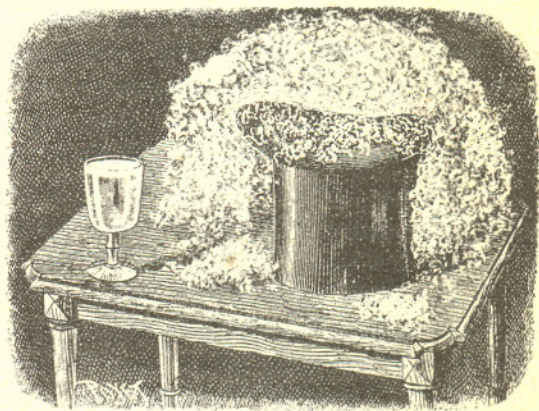
Istnieje zabawka bardzo ciekawa. Jest to krążek skórzany, przez środek którego przewlekamy sznureczek z węzłem na końcu, zamykającym dokładnie otworek; jeżeli taki krążek dobrze zwilżony przyciśniemy mocno do deski, albo do innego gładkiego przedmiotu, tak ażeby pomiędzy jego powierzchnią a powierzchnią przedmiotu nie znajdowało się wcale powietrza, to ów krążek, na skutek ciśnienia wywieranego nań przez powietrze atmosferyczne, przylgnie tak mocno, że z trudnością go oderwiemy.

Otóż zupełnie coś podobnego możecie zrobić za pomocą skromnej rzodkiewki. Przetnijcie ją w poprzek na połowę, wydrążcie z lekka wnętrze połówki z ogonkiem i pocierajcie nią silnie o powierzchnię talerza; wilgoć naturalna zawarta w rzodkiewce czyni zbytecznym zwilżanie jej wodą. Jeżeli teraz pociągniecie za ogonek, to ku wielkiemu zdziwieniu obecnych, okaże się, że talerz przyklejony do rzodkiewki da się unieść wraz z nią do góry.

Pełen kapelusz waty włożyc do kieliszka wódki.

Pokaż swojej publiczności kieliszek pełen spirytusu i cylinder napełniony watą, którą przedtem starannie powyciągałeś palcami, nadając jej możliwie największą objętość. Możecie śmiało zapewnić, że cały kapelusz waty zmieścicie w kieliszku, nie uroniwszy z niego ani kropli płynu.

Wystarczy w tym celu brać watę drobnymi kłaczkami i wprowadzać ją do spirytusu, którym szybko nasiąka. Nagromadzajcie ją stopniowo na dnie kieliszka, a przekonacie się, że zmieści się wszystko, przyczem spirytus pozostanie na dawnym

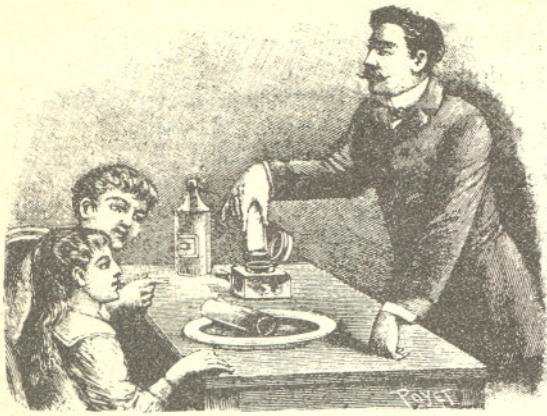


Pełen kapelusz waty włożyc do kieliszka wódki.

miejsu. Nikt wam nie zaprzeczy, żeście włożyli do kieliszka wódki cały kapelusz waty.

Tę własność waty absorbowania spirytusu użytkują do wyrobu kuchenek spirytusowych, które można przewrócić bez obawy wylania z niej płynu i w ten sposób zabezpieczamy się od pożarów lub poparzenia.





Włożyć biały papier do kałamarza z atramentem i nie poplamić go.

Do tej sztuki wybierz sobie duży kałamarz z szeroką szyjką.

Związawszy arkusik papieru białego w formę cylindra, pogrążasz go do kałamarza i natychmiast wyciągasz powalany atramentem. Połóż na spodku powalany papier i przekonaj widzów, że kałamarz zawiera rzeczywiście czarny atrament. Ażebym zastąpić zużyty atrament bierzesz butelkę stojącą na stronie i nalewasz jej zawartość do kałamarza. Idzie teraz o to, ażeby zmaczać w atramencie kawałek papieru podobny do poprzedzającego i wyciągnąć go równie białym, jakim był przed doświadczeniem. Pogrążając papier w sposób wskazany na rysunku, wydobywasz go nieskazitelnie białym.

A teraz wyjaśnienie tajemnicy. Kałamarz zawiera rzeczywiście atrament, butelka stojąca na stole jest starą i dobrze wysuszoną butelką od atramentu, do której w sekrecie wsypałeś trochę mialko sproszkowanej kalafonii.

Udając dolewanie atramentu do kałamarza, nasypałeś na powierzchnię trochę proszku, który tworzy rodzaj ochronnej powłoki, zabezpieczającej papier od zetknięcia się z cieczą; wyciągając papier nie zapomnij wstrząsnąć z nim lekko, ażeby proszek kalafonii spadł do kałamarza, a jeżeli postępowałeś zręcznie, nikt nie domyśli się twego podstępu.

Na tym samym sposobie opiera się stara sztuka pogrążenia ręki do wody bez zmoczenia jej.



### Skacząca stalka.

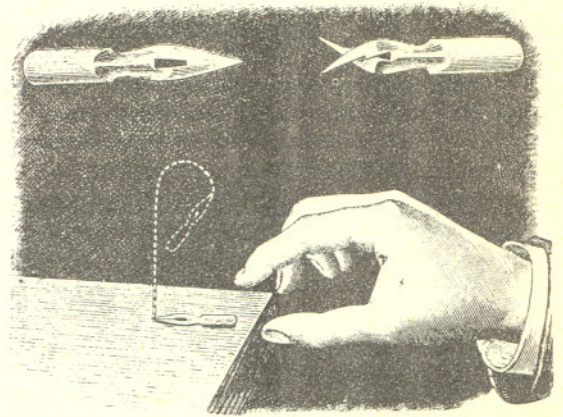
Nowa, albo stara stalka wystarczy nam do wykonania bardzo ciekawej sztuki. Wybierz tylko stalkę w formie wskazanej na rysunku i skrzyżuj jej końce naciskając ją silnie o stół.

Naciskając tak zgięte końce przy pomocy paznokcia, nadajesz stalce zwyczajną formę; wszystko to jednak czynisz w sekrecie, pokazujesz zaś widzom stalkę, która wygląda jak każda inna.

Teraz możesz zapewnić ich, że umieszczając prostopadle stalkę na stole końcem do góry i pozwalając jej upaść na stół, zrobisz tak, że sama podskoczy na 50 albo 60 centymetrów w górę.

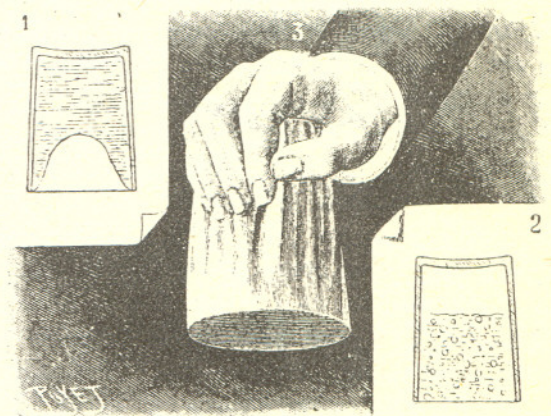
Ma się rozumieć, że nikt temu nie uwierzy, lecz ty możesz śmiało nawet się założyć. Tak się stanie.

W gruncie rzeczy niema nic prostszego. Skrzyżwione naprzód, a następnie ustawione na dawne



Skacząca stalka.

miejsce końce stalki dążą do tego, ażeby się znowu skrzyżować; lekkie wstrząśnienie stalki upadającej na stół wystarcza do wywołania tego powrotnego ruchu; jeden z końców przechodząc nagle po nad drugim, jak odpuszczona sprężyna, sprawi, że stalka podskoczy sama w górę.

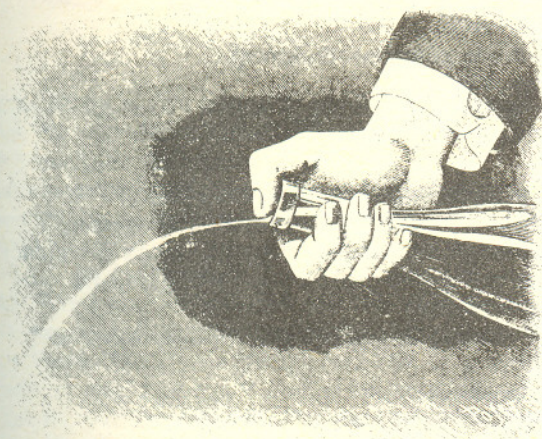


Zagotować wodę zimną ciepłem ręki.

Weźcie zwyczajną szklankę, napełnijcie ją do trzech czwartych wodą, przykrycie chustką z gęstego płótna, a końce sfaldujcie dookoła, wcisnąwszy uprzednio środek chustki tak, ażeby dotykała do powierzchni płynu. Teraz oprzyjcie silnie dłoń lewą na otwór szklanki, prawą zaś odwróćcie

ją do góry dnem i trzymajcie, jak wskazuje rysunek. Odejmując rękę lewą przekonacie się, że nie tylko ani jedna kropla wody nie wycieknie, ale nawet chustka, dzięki ciśnieniu atmosferycznemu zachowa swoją wklęsłość wewnątrz szklanki, jak to widać na figurze 1-ej na rysunku. Jeżeli w tem położeniu szklanki ściągniecie mocno brzegi chustki, tak ażeby płótno naprężyło się w otworze szklanki, jak skóra na bębnie, to plyn przyjmie zwykle położenie poziome, ale pomiędzy wodą a dnem szklanki powstanie próżnia, jak to objaśnia figura 2 na rysunku.

Otóż, jak mówili starożytni, przyroda nie znosi próżni, przeto powietrze zewnętrzne niezwłocznie zacznie przechodzić przez płótno i przez wodę w postaci pęcherzyków i robiący tę sztukę uczuje wstrząśnienie zupełnie takie samo, jak gdyby trzymał w rękę szklankę z wrzącą gwałtownie wodą. Widzowie zaś będą wyraźnie słyszeli gotowanie się plynu i świećcie uwierzą, żeście zagotowali wodę ciepłem ręki.

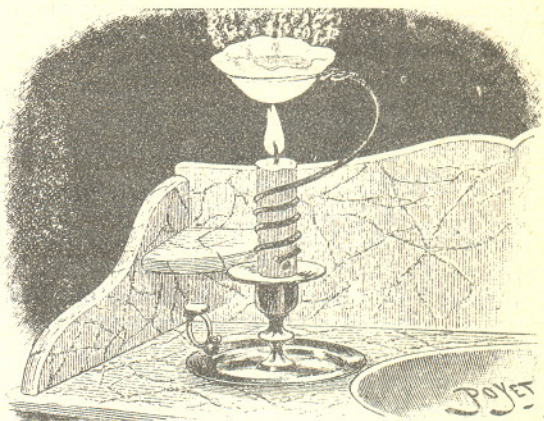


Sikawka z butelki.

Wszystkie gazy, a zwłaszcza powietrze, są ściśliwe. Korzystając z tego łatwo możesz zamienić butelkę na sikawkę.

Pokaż widzom butelkę do połowy napełnioną wodą, trzymając ją za szyjkę prawą ręką a wskazującym palcem zatykając szczelnie otwór. W odpowiedniej chwili przesun z lekka palec nie odrywając go, tak ażeby odsłonić małą część wylotu. Wtedy z butelki wytryśnie cienki strumień wody dosyć daleko; możesz go skierować na jednego z widzów, o którym wiesz, że ma łagodne usposobienie i nie obrazi się za ten żart niewinny. Chcąc jednak dokonać tej sztuki, musisz nadmuchać mocno kilka razy do butelki, zatykając starannie jej otwór wielkim palcem, ilekroć musisz wciągać powietrze do płuc. Powietrze nagromadza się coraz bardziej w bu-

telce, wywiera na powierzchnię plynu silne ciśnienie, jeżeli więc otworzysz wodzie najmniejsze wyjście, to wytryśnie z butelki podobnie jak się to dzieje w zwyczajnym syfonie od wody sodowej.



Zagotować wodę bez garnka i ognia.

Wytnij z mocnego papieru krążek na 15 centymetrów średnicy, weź kawałek dość grubego drutu żelaznego, zrób pierścien o średnicy 7 centymetrów na jednym z końców, drugi zaś zakrzyw i okręć na około świecy śrubowato, ażeby się dobrze na nim trzymał, jak to widzisz na rysunku.

Kiedy skończyłeś te przygotowania, połóż krążek papieru na dłoni i nadaj mu palcem wklęsłą formę, następnie połóż go na drucianym pierścieniu bacząc, aby przynajmniej 2 centymetry papieru sterowało po nad drutem. Dzięki tej ostrożności możesz wlać do papierowego kociołka tyle wody, że poziom jej będzie nieco wyżej po nad pierścieniem z drutu, co jest konieczne, ażeby doświadczenie się udało.

Teraz zapal świecę i ureguluj tak wysokość pierścienia, ażeby koniec płomienia znajdował się pośrodku papieru i z lekka go lizał. Możesz utrzymać drut w żądanem położeniu, wtykając w świecę pod śrubą szpilkę, która podtrzymuje drut i nie pozwala mu się ześlizgnąć na dół.

Po kilku chwilach, ku wielkiemu zdziwieniu widzów, woda zacznie się gotować w papierowym kociołku, który zostanie nieuszkodzony, pomimo bliskiego sąsiedztwa płomienia.

Dzieje się tak dla tego, że wszystko ciepło dostarczane przez płomień świecy zużywa się na obrócenie wody w parę.



# INSTRUKCJA DLA CZYTELNIKÓW PRAC NAUKOWYCH

We współczesnych pracach naukowych występują tradycyjne, powszechnie stosowane zwroty. Podajemy ich *właściwe* (sekretnie) znaczenie.

## Wstęp:

*Dobrze wiadomo, że...* (Nie miałem czasu znaleźć odsyłacza do pracy, w której podano to po raz pierwszy).

*Ma ogromne znaczenie teoretyczne i praktyczne* (Osobiście wydaje mi się to dość ciekawe).

*Ponieważ nie udało się odpowiedzieć na wszystkie te pytania równocześnie...*

(Doświadczenie nie udało się, ale powinienem mieć publikację).

*Zastosowano nowe podejście* (B. F. Meissner stosował to podejście co najmniej 30 lat temu).

*Oczywiście...* (Nie sprawdzałem tego, ale na zdrowy rozum...).

*Wyniki te zostały uzyskane cztery lata temu* (Nie miałem nowszego materiału, a bardzo chciałem pojechać na konferencję).

## Opis metodyki doświadczalnej:

*Podczas budowy tego urzędnictwa chcieliśmy uzyskać następujące jego parametry...*

(Parametry te zostały uzyskane przypadkiem, kiedy udało nam się w końcu zmusić to urządzenie do pracy).

*Osiągnęliśmy postawiony sobie cel* (Na ogół nie wychodzi, ale prototyp doświadczalny działa świetnie).

*Wybrano stop bizmutu z ołowiem, gdyż właśnie dla niego oczekiwany efekt powinien zaznaczyć się najwyraźniej* (Innego stopu w ogóle nie mieliśmy).

*...bezpośrednim sposobem...* (na siłę).

*Wybraliśmy trzy próbki w celu przeprowadzenia bardziej szczegółowych badań* (Wyniki otrzymane dla pozostałych dwudziestu próbek były od Sasa do Lasa).

*...został przypadkiem nieco uszkodzony w czasie pracy* (spadł na podłogę).

*...traktowaliśmy z wyjątkową ostrożnością* (nie spadł na podłogę).

*Urządzenie automatyczne* (Ma wyłącznik).

*Układ na tranzystorach* (Zawiera diodę półprzewodnikową).

*Częściowo przenośny* (Zaopatrzony w rączkę).

*Przenośny* (Zaopatrzony w dwie rączki).

## Przedstawienie wyników:

*Typowe wyniki przedstawiono na...* (Przedstawiono najlepsze wyniki).

*Chociaż na zamieszczonej reprodukcji szczegóły są zatarte, ale z oryginalnej mikrofotografii jasno widać...* (Na oryginalnej mikrofotografii też nic nie widać).

*Parametry urzędnictwa zostały w istotny sposób poprawione* (w porównaniu z rozlatującym się zeszlorocznym modelem).

*Oczywiście trzeba będzie wykonać znaczną dodatkową pracę nim zrozumiemy...* (Nie rozumiem tego).

*Zgodność krzywej teoretycznej z doświadczeniem*

— świetna (rozsądna)

— dobra (zła)

— zadowolająca (podejrzana)

— rozsądna (wymagowana)

— zadowolająca, jeśli weźmie się pod uwagę przybliżenia zrobione przy analizie (nie ma żadnej zgodności).

*Wyniki te będą opublikowane później* (Będą albo i nie).

*Najbardziej obiecujące wyniki uzyskał Jones* (To mój magistrant).

## Dyskusja wyników:

*W tej sprawie panuje całkowita jednomyślność* (Znam jeszcze dwóch ludzi, którzy są tego zdania).

*Można podyskutować z tym, że...* (Sam wymyśliłem ten kontrargument, ponieważ mam na niego świetną odpowiedź).

*Prawdziwe co do rzędu wielkości* (Nieprawdziwe).

*Można oczekiwać, że praca ta stanie się bodźcem dla dalszego postępu rozpatrywanej dziedziny* (Praca ta nie reprezentuje sobą nic specjalnego, ale to samo można powiedzieć o wszystkich innych pracach na ten żalony temat).

*Nasze badania wykazały perspektywiczność tego podejścia* (Niczego na razie nie otrzymaliśmy, ale chcemy, żeby władze dały potrzebne pieniądze).

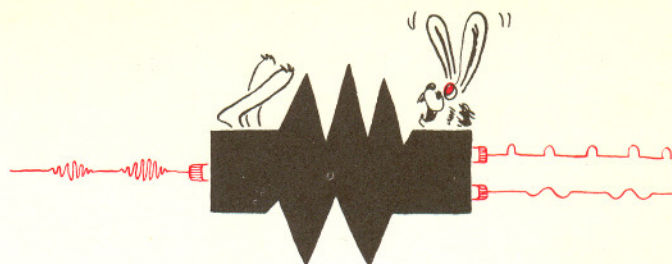
## Podziękowania:

*Dziękuję J. Smithowi za pomoc w przeprowadzeniu doświadczeń i J. Brownowi za cenne uwagi* (Smith otrzymał wszystkie wyniki, a Brown wyjaśnił, co one znaczą).

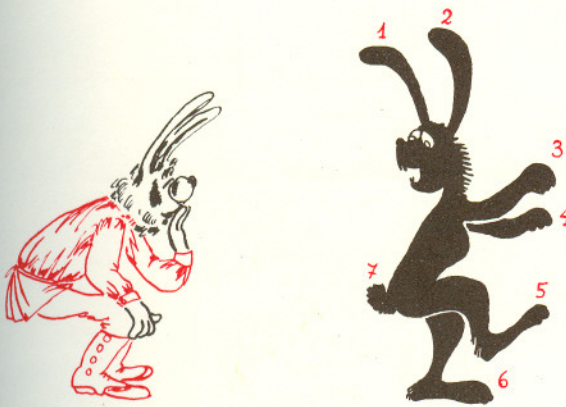
Według: IRE Transaction on Audio 11, Nr 5 (1963) i The Journal of Irreproducible Results 9, Nr 1 (1960).



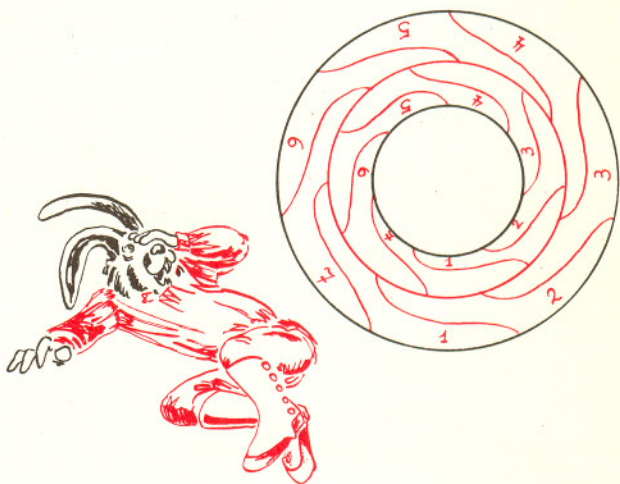
Istnieje w psychologii taka szkoła uprawiania tej nauki, w której człowieka traktuje się jako czarną skrzynkę. Ma wejście, ma wyjście — a w środku to nie bardzo wiadomo co jest. Jak na wejściu pojawi się bodziec (coś, co działa na zmysły), to na wyjściu pojawia się reakcja (jakieś wywołane tym bodźcem zachowanie się człowieka). W matematycznej teorii informacji mamy sytuację podobną: analizuje się tu m.in. kanały informacyjne, mające wejście i wyjście. Jeśli do wejścia podłączy się (wszystko całkiem abstrakcyjnie) nadajnik, a do wyjścia odbiornik, to można mierzyć pojemność tego kanału — maksymalną ilość informacji, jaką jest on w stanie jednorazowo przepuścić.



Teraz już widać, co dalej. Traktujemy człowieka jako kanał informacyjny i badamy jego pojemność. Atakujemy go dźwiękami o różnych wysokościach i sprawdzamy, ile jest w stanie poprawnie odróżnić. Kłujemy go jednocześnie w kilku miejscach i sprawdzamy, ile ukłuc jest w stanie poprawnie różnić. To samo z roztworami soli o różnym stężeniu. To samo z dźwiękami o różnym natężeniu. Ponieważ ilości informacji zawartych i w bodźcu, i w reakcji dają się łatwo zmierzyć, to wyniki takich badań (zwanych eksperymentami nad ocenianiem bezwzględnym) pozwalają określić, jakie są maksymalne ilości informacji przekazywanej między bodźcem a reakcją. Wyniki bywają różne u różnych ludzi w różnych eksperymentach, ale średnio określają pojemność człowieka-kanału informacyjnego na 2,6 bita i na ogół niewiele odbiegają od tej liczby. Jest to w przybliżeniu ilość informacji wystarczająca do wyboru jednej z *siedmiu* jednakowo prawdopodobnych możliwości.



Tę samą liczbę *siedem* można w psychologii uzyskać inaczej. Na przykład z badań nad tzw. zakresem pamięci świeżej wiadomo, że przeciętny człowiek jest w stanie poprawnie odtworzyć z pamięci przeciętnie do *siedmiu* szybko po sobie następujących sygnałów (słów, sylab, liter, cyfr itp. — o ile nie układają się w żadną sensowną, regularną całość, bo wtedy oczywiście o wiele więcej). Wiadomo też (z badań nad tzw. zakresem uwagi), że jeśli na ekranie zabłysną na krótko (1/5 s) przypadkowo rozrzucone punkty świetlne, to przeciętny człowiek na ogół poprawnie podaje ich dokładną ilość, jeśli jest ich mniej niż *siedem*, i na ogół tylko zgaduje, jeśli jest ich więcej niż *siedem*. Od dawna też wiadomo, że jeśli chce się, by człowiek oceniał ilościowo stan swych uczuć, stosunek do czegoś, lubienie itp., to najlepiej w praktyce zdaje egzamin skala *siedmiopunktowa*: przy większej ilości możliwych ocen powstają trudności z wyborem, skala krótsza jest odczuwana jako za uboga. Wszystkie te fakty przytacza amerykański psycholog G. A. Miller w swym artykule zatytułowanym



**MAGICZNA LICZBA SIEDEM  
(PLUS-MINUS DWA)  
CZYLI  
O GRANICACH NASZYCH MOŻLIWOŚCI  
PRZETWARZANIA INFORMACJI**

ostrzegając jednocześnie przed zestawianiem ich z siedmioma cudami świata, siedmioma morzami, siedmioma córkami Atlasa — Plejadami, siedmioma kręgami piekieł, siedmioma dźwiękami skali muzycznej i siedmioma dniami tygodnia — i pochopnym wyciąganiem jakichkolwiek wniosków z tych faktów.

Artykuł, opublikowany w r. 1956 w czasopiśmie *Psychological Reviews*, jest do dziś bardzo sławny.