



SPIS TREŚCI

NUMERU 10 (58)

Zakaz Pauliego, gaz zdegenerowany i astrofizyka <i>Dr Jan Piotr Lasota</i>	str. 1
Cząstki nieodróżnialne <i>Doc. dr Michał Świącki</i>	str. 2
Jeszcze o przybliżonej trysekcji kąta <i>Gourang Chandra Mohanty</i>	str. 4
Mała Delta	str. 7
O nicowaniu i sklejanii powierzchni i co z tego może wynikać <i>Doc. dr Andrzej Szybiak</i>	str. 10
Drobiazgi	str. 13
Esej o tęczy <i>Dorota Zielińska</i>	str. 14
Zadania	str. 15
Mechanika, komputer, człowiek (V) <i>Prof. dr Dominik Rogula</i>	str. 16

W następnym numerze:

Odcinek ma nieparzystą liczbę punktów

„Delta”
 matematyczno-fizyczny miesięcznik
 popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego i Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
 doc. dr J. Bartke
 doc. dr A. Bączyński
 doc. dr B. Gleichgewicht
 prof. dr K. Goebel
 doc. dr B. Iwazskiewicz
 doc. dr T. Iwiński
 doc. dr A. Januszajtis
 prof. dr Leon Jeśmanowicz —
 wiceprzewodniczący
 mgr H. Kaczorek
 prof. dr B. Karczewski
 prof. dr M. Kuczma
 mgr A. Mąkowski
 prof. dr Z. Pawlak
 prof. dr A. Piekara
 prof. dr Z. Semadeni
 prof. dr J. Stankowski

prof. dr M. Subotowicz
 doc. dr S. Turnau
 doc. dr J. Wdowczyk
 prof. dr Janusz Zakrzewski —
 przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
 doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
 dr T. B. Iwiński
 B. Jaworska-Kordos — ilustracje
 dr M. Kordos — red. nac.
 mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.
 mgr K. Szypcio — sekr. red.
 doc. dr M. Świącki
 Adres Redakcji
 ul. Hoża 69 pok. 151,
 00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
 Ossolińskich — Wydawnictwo
 Wrocław, Oddział w Warszawie
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
 wyd.; 2,50 ark. druk.;
 papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
 Wydrukowano w Drukarni im.
 Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65
 Nr zam. 949/78 S-86

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach
 — do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następnny
 — do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
 Jednostki gospodarki społecznej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
 Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
 Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
 Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
 Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,
 Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Zakaz Pauliego, gaz zdegenerowany i astrofizyka



Dr Jan Piotr LASOTA

Zgodnie z zakazem Pauliego, prawdopodobieństwo znalezienia dwóch elektronów (lub jakichś innych dwóch identycznych cząstek o spinach połówkowych) w tym samym stanie jest równe zeru. Zakaz Pauliego ma praktyczne znaczenie wtedy, gdy ilość stanów, w których mogą znajdować się elektrony (lub inne cząstki podlegające temu zakazowi), nie jest dużo większa od ilości elektronów w układzie. Jeżeli ochłodzimy gaz złożony z elektronów do temperatury zera bezwzględnego, to energia tego gazu powinna mieć najmniejszą możliwą wartość. Gdyby elektrony nie podlegały zakazowi Pauliego, to wszystkie zajęłyby stany podstawowe o najniższej, zerowej energii. Nie mogą jednak tego zrobić i wypełniają wszystkie kolejne stany energetyczne — aż do pewnego stanu odpowiadającego energii, której wielkość zależy od ilości elektronów. Taki gaz elektronowy nazywamy „zupełnie zdegenerowanym”.

Elektrony w tym gazie nie mają wyboru, muszą zajmować stany o najniższych energiach. Dopiero gdy temperatura jest bardzo wysoka i gaz rzadki — elektrony mają dużo miejsca i dużo dostępnych poziomów energetycznych. Zakaz Pauliego nadal wtedy obowiązuje, ale nie ma praktycznie znaczenia.

Okazuje się, że nawet przy stosunkowo dużych temperaturach (nawet rzędu miliona stopni i większych) gaz elektronów może być silnie (choć niezupełnie) zdegenerowany, jeżeli tylko gęstość tego gazu będzie odpowiednio duża. Zauważmy, że zakaz Pauliego wywołuje rodzaj „odpychania” między elektronami, a więc jest powodem występowania ciśnienia gazu zdegenerowanego. „Odpychanie” to nie jest żadnym prawdziwym oddziaływaniem, takim jak oddziaływanie grawitacyjne, elektromagnetyczne, słabe i silne i nie jest związane z żadnym polem fizycznym. Ponieważ jednak nie możemy zmusić dwóch elektronów, by znalazły się w tym samym miejscu, to w rezultacie występuje coś w rodzaju „siły odpychania”.

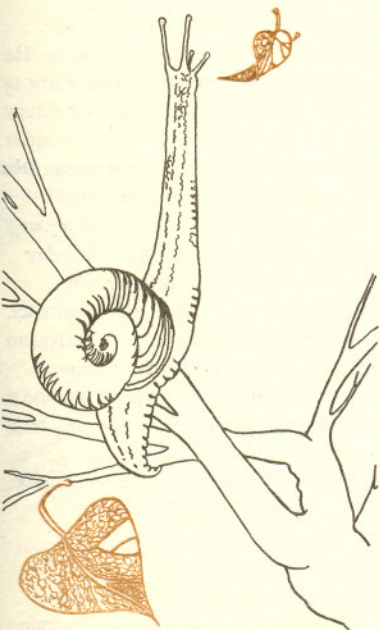
Jakie to ma znaczenie?

Rozpatrzmy ciało stałe — kryształ lub inne ciało o mniej regularnej strukturze. W takim ciele rozkład ładunków elektrycznych (ujemnych elektronów i dodatnich jonów) jest taki, że ich oddziaływania wzajemne są przyciągające. Przyciąganie to jest równoważone przez odpychanie między elektronami wywołane zakazem Pauliego — w ten, z grubsza biorąc, sposób osiągnięta jest równowaga dla ciał stałych.

Dla ciał bardziej masywnych, w których istotne jest przyciąganie grawitacyjne, sprawa wygląda inaczej. W dalszym ciągu zajmiemy się gwiazdami, a więc ciałami, w których przyciąganie grawitacyjne jest równoważone przez ciśnienie wewnętrzne. W gwiazdach „normalnych”, w których zachodzą reakcje termojądrowe, ciśnienie to jest wywołane przez ruchy cieplne cząstek. Gdy gwiazda wypali już swoje paliwo termojądrowe i nie ma już źródła ciepła, które mogłoby przeciwstawić się miażdżącemu działaniu siły ciężkości, w niektórych przypadkach ratują ją przed zagładą elektrony. Zostają one wyrwane z atomów i tworzą gaz, którego ciśnienie wywołane zakazem Pauliego przeciwdziała sile grawitacji. Gwiazdy, które wypaliły się już wewnątrz i istnieją dzięki zakazowi Pauliego dla elektronów, nazywają się białymi karłami.

Okazuje się jednak, że białe karły nie mogą być zbyt ciężkie, mianowicie gwiazda o masie większej od około $1M_{\odot}$ (masa Słońca) nie może istnieć jako biały karzeł. Odkrył to w latach trzydziestych amerykański astronom pochodzenia hinduskiego, S. Chandrasekhar. Cóż, grawitacja, mimo że jest najsłabszym ze znanych oddziaływań elementarnych, potrafi zdominować wszystkie siły odpychania, jeżeli tylko mamy do czynienia z odpowiednio dużymi masami.

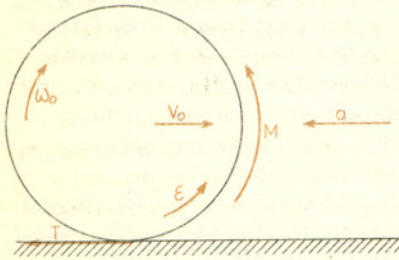
Elektrony nie są jedynymi cząstkami podlegającymi zakazowi Pauliego. Pamiętajmy o tym, że w gwiazdzie oprócz elektronów, odpowiadających w przypadku białych karłów za ciśnienie, znajdują się również jądra atomowe, które są cięższe od elektronów, a więc mniej ruchliwe i dające mały wkład do ciśnienia. Jądra te składają się z protonów i neutronów — cząstek podlegających zakazowi Pauliego.



Pulsary — to gwiazdy emitujące promieniowanie elektromagnetyczne w formie krótkich pulsów. Pulsy te powtarzają się w sposób bardzo regularny.



Rozwiązanie zadania F 58
Na kulke działają: 1° siła tarcia posuwistego T powodująca liniowe opóźnienie kulki a w kierunku zaznaczonym na rysunku,



2° moment tarcia potoczystego M . Opóźnienie kątowe kulki zostało oznaczone na rysunku przez ϵ . Ponieważ kulka się toczy, więc M ma maksymalną możliwą wartość równą kmg .

O wartości siły tarcia T nie można zakładać, że ma maksymalną wartość równą fmg , gdyż nie ma poślizgu.

Korzystając z praw dynamiki możemy wypisać następujące dwa równania:

$$ma = T$$

$$I\epsilon = kmg - Tr$$

oraz równanie wyrażające brak poślizgu:

$$a = r\epsilon$$

I oznacza tu moment bezwładności kulki równy $\frac{2}{5}mr^2$. Otrzymałymi 3 równania z trzema

niewiadomymi a , ϵ i T . Rozwiązując ten układ równań dostajemy:

$$T = \frac{5}{7} \frac{kmg}{r}$$

$$a = \frac{5}{7} \frac{kg}{r}$$

$$\epsilon = \frac{5}{7} \frac{kg}{r}$$

Siła tarcia T nie może przekraczać maksymalnej wartości $T_{\max} = fmg$. Zatem

$$\frac{5}{7} \frac{kmg}{r} \leq fmg$$

Stąd

$$5k \leq 7fr$$

co jest właśnie szukanym związkem.

Mając a łatwo można obliczyć czas trwania ruchu bez poślizgu. Po krótkich obliczeniach otrzymujemy, że kulka zatrzyma się po czasie

$$t = \frac{7v_0 r}{5kg}$$

W normalnych warunkach neutrony swobodne żyją krótko (~ 15 min.) i rozpadają się na proton, elektron i antyneutrino. Ale w gwiazdzie wypełnionej zdegenerowanym gazem elektronowym neutron nie może się rozpaść — znowu zakaz Pauliego — elektron z rozpadu nie ma miejsca dla siebie, wszystkie możliwe stany są już szczelnie zapełnione. Następuje wtedy proces odwrotny (jeśli odpowiednio zwiększy się gęstość materii) — jądra wychwytyują elektrony i protony zamieniają się na neutrony (plus neutrino, ale ono ucieka z gwiazdy). W wyniku takiej neutronizacji, gwiazda składać się będzie przede wszystkim z neutronów, które znowu tworzą gaz zdegenerowany. Takie gwiazdy neutronowe są obserwowane jako tzw. pulsary.

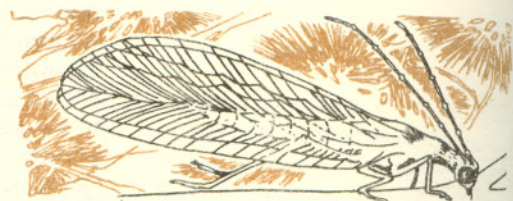
Niestety, okazuje się, że neutrony nie są wcale „mocniejsze” od elektronów — znowu istnieje masa maksymalna, powyżej której nie mogą istnieć gwiazdy neutronowe. Masa ta jest co do rzędu wielkości równa masie znalezionej przez Chandrasekhara dla białego karła. Może się to wydawać dziwne — neutrony są przecież dużo cięższe od elektronów. Występowanie masy maksymalnej wiąże się jednak z tym, że cząstki tworzące gaz zdegenerowany stają się wraz ze wzrostem gęstości relatywistyczne. To znaczy, że ich energie są dużo większe od ich masy spoczynkowej. Nieważną jest zatem masa spoczynkowa cząstki — liczy się jej całkowita energia ($E = mc^2$, ale w tym wzorze m nie jest masą spoczynkową).

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

i tu m_0 — to jest dopiero masa spoczynkowa),

a ta jest podobna dla zdegenerowanego gazu elektronów i neutronów.

A co się dzieje z gwiazdami, które są za ciężkie, by stać się białymi karłami lub gwiazdami neutronowymi? No cóż, albo udaje im się jakoś zrzucić nadwagę (wybuchając, albo łagodniej wydmuchując część swojej masy), albo kończą życie jako czarne dziury. Ale to już inna historia.



Cząstki nieodróżnialne

Doc. dr Michał ŚWIĘCKI

Zacniemy od wyników doświadczeń, chociaż zostały one przewidziane uprzednio przez teorię. Wiązkę jąder izotopu helu ${}^3\text{He}$ skierowano na tarczę helową, którą może być ciekły hel, tyle że złożony z innego izotopu ${}^4\text{He}$. Jądra ${}^3\text{He}$ po przejściu przez tarczę ulegną rozproszeniu.

Rozpraszanie to zachodzi w zasadzie tylko na jądrach ${}^4\text{He}$ tarczy, gdyż elektrony atomowe są zbyt lekkie na to, by zaburzyć ruch ciężkich jąder wiązki helowej. W wyniku rozpraszania jądra ${}^3\text{He}$ zmieniają kierunek swego biegu, natomiast jądra ${}^4\text{He}$ zostaną odbite pod pewnym kątem. Kąty te możemy mierzyć. Zależą one oczywiście od tego, jak daleko od środka uderzonej cząstki z tarczy przebiegała cząstka z wiązki. Ponieważ różne cząstki przebiegają w różnych odległościach od jąder tarczy, więc otrzymujemy pewien rozkład kątów, pod którymi lecą cząstki po rozproszeniu. Dla symetrii rozpatrujemy całe rozpraszanie w układzie środka masy. W tym układzie obie cząstki zbliżają się, a po zderzeniu oddalają się z tymi samymi pędami. Kąty rozproszenia między pędami początkowymi i końcowymi będą oczywiście znowu różne dla różnych cząstek z wiązki. Między innymi otrzymamy cząstki, które rozprósza się pod kątem 90° . Nie ma w tym wszystkim nic nadzwyczajnego. Nic też istotnego nie zajdzie, jeśli ograniczymy energię wiązki do takiej wartości, by padające jądra ${}^3\text{He}$ nie mogły zbliżyć się do jąder ${}^4\text{He}$ na odległości porównywalne z zasięgiem sił jądrowych ($\sim 10^{-14}$ m). Po prostu przy zbyt niskiej energii nie pozwoli na to odpychanie coulombowskie między dodatnimi ładunkami jąder. W takich warunkach rozpraszanie zachodzi wyłącznie przez oddziaływania elektromagnetyczne między jądrami. Oddziaływania silne nie grają tu żadnej roli.

Teraz na tę samą tarczę ${}^4\text{He}$ skierujemy wiązkę cząstek o tej samej, co uprzednio energii, tyle że złożoną z jąder izotopu ${}^4\text{He}$, a nie ${}^3\text{He}$. Okaże się, że wynik rozpraszania będzie inny.

W szczególności pod kątem 90° otrzymamy dwa razy więcej rozproszonych jąder ${}^4\text{He}$ niż poprzednio jąder ${}^3\text{He}$.

Pomimo że dwa izotopy helu to dwie różne cząstki, jednak otrzymana w tych doświadczeniach różnica wcale nie jest trywialna. Przeciwnie zadbaliśmy o to, żeby rozpraszanie zachodziło wyłącznie



przez oddziaływania elektromagnetyczne, a te dla dwóch izotopów tego samego pierwiastka są praktycznie identyczne. Z punktu widzenia oddziaływań elektromagnetycznych, decydujących o rozpraszaniu, jądra ^3He i ^4He są takie same. Skąd więc bierze się czynnik dwa dla ich rozpraszania pod kątem 90° ?

Można by się jeszcze zapytać, jak będą przebiegały doświadczenia gdy w tarczy zamiast ^4He użyjemy ^3He . Otóż dla rozpraszania jąder ^3He na tarczy ^3He wynik będzie znów inny, a pod kątem 90° nie rozproszy się teraz żadna cząstka.

Paradoksów tych nie można w żaden sposób wyjaśnić w ramach fizyki klasycznej. Mechanika kwantowa radzi sobie z nimi stosunkowo łatwo. W teorii tej cząstki niezaburzone żadnym pomiarem zachowują się jak fale. W pewnym sensie są falami (falami prawdopodobieństwa — patrz „Delta” 9/1976) i dopiero w pomiarach przeprowadzonych za pomocą makroskopowych przyrządów okazuje się, że oddają energię i pęd małymi, zlokalizowanymi przestrzennie porcjami, które identyfikujemy jako cząstki. Dla fal charakterystyczne jest zjawisko interferencji i ono właśnie jest odpowiedzialne za nietypowe wyniki opisanych doświadczeń.

Zawsze interferują ze sobą takie możliwe przebiegi zjawiska, których nie potrafimy rozróżnić. Nie wiemy na przykład, które fotony przechodzą przez które szczeliny siatki dyfrakcyjnej i dlatego na ekranie otrzymujemy obraz interferencyjny. Gdybyśmy znali tory wszystkich fotonów, to nie moglibyśmy dalej mówić o jednej spójnej fali płaskiej, padającej na siatkę. Zamiast tego mielibyśmy wiele niezależnych, a więc niespójnych wiązek fotonowych — promieni świetlnych — przechodzących przez różne szczeliny. Zniszczylibyśmy w ten sposób obraz interferencyjny. Sytuacja byłaby bowiem podobna do zbioru źródeł światła, każde oświetlające jedną szczelinę siatki.

Tak więc interferują sytuacje, w których różne drogi dojścia do tego samego stanu są nieodróżnialne. Co więc nierozróżnialnego może być przy rozpraszaniu cząstek? Przede wszystkim same cząstki. Jedno jądro ^4He niczym nie różni się od innego jądra ^4He i chociaż przed rozproszeniem wiemy, które pochodzi z tarczy, a które z wiązki, po rozproszeniu sytuacja jest całkowicie niejasna. Nie mamy żadnej metody żeby stwierdzić, które jądro zostało rozproszone, a które uderzone. Pojawia się interferencja. Nie występuje ona przy rozpraszaniu jąder ^3He na jądrach ^4He , gdyż różnią się one masą i różnica ta może być wykryta, jeżeli dobrze przyjrzymy się przyrządowi pomiarowemu.

Obie sytuacje rozpraszania (^4He na ^4He i ^3He na ^4He) różnią się tak, jak różni się obraz na ekranie za siatką dyfrakcyjną oświetloną raz przez jedno spójne źródło światła, a drugi raz przez wiele niezależnych źródeł, po jednym na każdą szczelinę siatki. W tym ostatnim przypadku na ekranie otrzymamy obraz będący sumą natężeń światła wychodzącego z różnych szczelin. W pierwszym przypadku natomiast pojawi się typowy obraz interferencyjny z charakterystycznymi ciemnymi prążkami i maksimami.

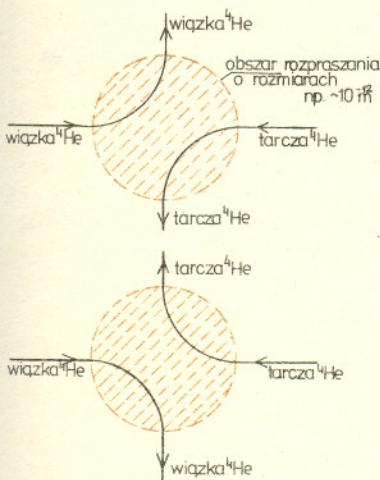
Dla dwóch szczelin natężenie światła w maksimum obrazu będzie dwa razy większe niż suma natężeń światła wychodzącego z obu szczelin. To jest właśnie szukana dwójka różniąca rozpraszanie ^3He — ^4He oraz ^4He — ^4He pod kątem 90° . A dlaczego właśnie 90° ? Bo pod tym kątem obie cząstki rozpraszają się dokładnie tak samo (w układzie środka masy) i nie tylko cząstki końcowe niczym się nie różnią, ale też ich stany są identyczne. Identyczne stany identycznych cząstek muszą odpowiadać identycznym natężeniom wiązki rozproszonej (przypominamy, że nie wolno jednak dodawać tych natężeń). Natężenie fali to kwadrat jej amplitudy. Stąd amplitudy tych dwóch nierozróżnialnych sytuacji rozproszonych powinny co najwyżej różnić się znakiem.

Możemy to zobaczyć jeszcze w inny sposób.

Zamiana cząstek w stanie końcowym to przejście do innego stanu. Powtórna zamiana to powrót do sytuacji wyjściowej. Stąd operacja zamiany może jedynie zmienić znak amplitudy.

Przy kącie 90° amplitudy opisujące rozpraszanie cząstek identycznych są więc dla obu sytuacji albo takie same, albo różnią się znakiem. W pierwszym przypadku otrzymujemy maksimum z charakterystycznym czynnikiem dwa, w drugim zero (odpowiednik ciemnego prążka). Wyciągamy stąd oczywisty wniosek, że dla rozpraszania ^4He na ^4He obowiązuje znak plus, a dla rozpraszania ^3He na ^3He — minus, co wyjaśnia wynik naszego doświadczenia. Przypomnijmy jeszcze, że dla rozpraszania ^3He na ^4He (czy też ^4He na ^3He) interferencja w ogóle nie zachodzi. Powyższą zasadę można uogólnić. Brzmi ona wtedy:

Wszystkie cząstki dzielą się na dwie klasy. Cząstki o spinie całkowitym, zwane bozonami np. ^4He , foton, mezon π rozchodzą się jak fale interferujące ze znakiem plus i stąd obserwujemy stany zawierające znacznie zwiększoną ich liczbę — na tym opiera się działanie lasera. Cząstki o spinie połówkowym, zwane fermionami, np. ^3He , elektron, proton, interferują ze znakiem minus i stąd w jednym stanie może znaleźć się najwyżej jedna taka cząstka. Dwa, trzy i więcej fermionów w jednym stanie daje w wyniku interferencji zerowe natężenie — ciemny prążek. To jest właśnie słynny zakaz Pauliego. Zakaz ten powoduje, że na najniższym, podstawowym poziomie energetycznym atomu (poziom ten zawiera dwa możliwe stany) mogą znaleźć się co najwyżej dwa elektrony, na następnym osiem (bo stanów jest tu osiem) itd. Stąd wynika obserwowana struktura układu okresowego pierwiastków. Oczywiście, różne cząstki z definicji są w różnych stanach i dla nich (np. przy rozpraszaniu fotonów na ^4He) dodajemy zwyczajnie natężenia. A skąd bierze się akurat plus przy bozonach i minus przy fermionach? To przyporządkowanie nie daje się, niestety, łatwo uzasadnić. Pisaliśmy o tym w „Delcie” 2/1978.



Dwie możliwości przebiegu reakcji rozpraszania cząstek identycznych nie mogą być rozróżnione przez żadną obserwację (układ środka masy).





Jeszcze o przybliżonej trysekcji kąta

Gourang Chandra MOHANTY

Autor jest studentem fizyki w Ravenshaw College w Kattak (Cuttack), Indie. Tytuł pochodzi od Redakcji, która też poczyniła znaczne skróty i pewne modyfikacje w nadesłanym maszynopisie.

W angielskim kręgu językowym konstrukcje platońskie nazywane są euklidesowymi.

Słynny problem konstrukcyjnej trysekcji kąta wyzwał wiele ludzkiej pomysłowości zarówno w starożytności jak i obecnie — mimo, iż udowodniono, że nie jest ona możliwa do przeprowadzenia. W związku z tym dysponujemy dużą ilością metod (przybliżonych lub nie-euklidesowych) rozwiązania tego problemu. W tym artykule omawiamy metodę przybliżoną opartą na geometrycznym rozwiązaniu równania trzeciego stopnia opisującego związek między cięciwą opartą na kącie środkowym, cięciwą opartą na jednej trzeciej tego kąta oraz promieniem okręgu.

1. Równanie

Rozważmy w kole o promieniu r kąt środkowy θ oparty na łuku AB . Niech c będzie długością cięciwy AB , a ξ długością cięciwy wyznaczonej przez kąt środkowy $\theta/3$. W pracy: G.C. Mohanty, *Approximate Euclidean Angle Trisection*, Math. Teacher (India) 11(1975), wykazano, że

$$(1) \quad \xi^3 - 3\xi r^2 + cr^2 = 0$$

oraz że, dla wszystkich ostrych kątów θ , spełniona jest nierówność

$$(2) \quad c/3 < \xi < 3c/8.$$

Tu podamy inne, prostsze wyprowadzenie tych związków.

Niech OC i OD będą promieniami dzielącymi kąt AOB na trzy części przecinającymi cięciwę AB odpowiednio w punktach E i F i niech G będzie drugim z punktów przecięcia prostej CO z okręgiem. Oczywiście jest, że

$$(3) \quad c = 2r \sin \frac{\theta}{2}$$

oraz

$$(4) \quad \xi = 2r \sin \frac{\theta}{6}.$$

Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkąta OAE otrzymujemy

$$\frac{AE}{AO} = \frac{\sin \frac{\theta}{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{6}\right)}.$$

Zatem

$$(5) \quad AE = 2r \sin \frac{\theta}{6} = \xi = BF.$$

Ponadto z twierdzenia o cięciwach mamy

$$GE \cdot EC = AE \cdot EB,$$

czyli, jeśli przyjąć $OE = OF = \eta$,

$$(r + \eta)(r - \eta) = \xi(c - \xi),$$

skąd

$$(6) \quad \eta^2 = r^2 + \xi^2 - \xi c.$$

Odcinek OE leży na dwusiecznej kąta AOF , więc $OA/OE = AF/EF$, czyli

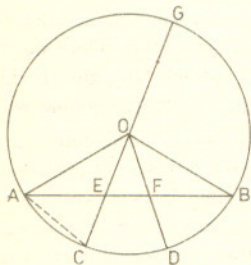
$$(7) \quad \frac{r}{\eta} = \frac{\xi}{c - 2\xi}.$$

Ze związków (6) i (7) wnioskujemy, że

$$c\xi^3 - 4c\xi r^2 + c^2 r^2 - \xi^4 + 3\xi^2 r^2 = 0,$$

skąd

$$(c - \xi)(\xi^3 - 3\xi r^2 + cr^2) = 0.$$





Rozwiązanie zadania M 172

Niech A, B, C będą trzema niewspółliniowymi punktami powierzchni \mathcal{S} i niech D będzie punktem powierzchni \mathcal{S} nie należącym do okręgu K wyznaczonego przez A, B, C . Niech T będzie sferą lub płaszczyzną wyznaczoną przez punkty A, B, C, D . Jeżeli M jest dowolnym punktem powierzchni T , to przez M i D przechodzi okrąg K_1 zawarty w T i przecinający okrąg K w dwóch punktach. Okrąg K_1 ma z powierzchnią \mathcal{S} trzy punkty wspólne, a mianowicie D i dwa punkty przecięcia z K , zatem $K_1 \subset \mathcal{S}$, $M \in \mathcal{S}$, $T \subset \mathcal{S}$. Przyjmijmy teraz, że istnieje punkt E należący do $\mathcal{S} \setminus T$. Przez punkt E i dowolny punkt przestrzeni F przechodzi okrąg mający z T dwa punkty wspólne. Okrąg ten ma z powierzchnią \mathcal{S} trzy punkty wspólne (E i punkty przecięcia okręgu z T), cały więc jest zawarty w \mathcal{S} , zatem $F \in \mathcal{S}$, czyli dowolny punkt przestrzeni należałby do \mathcal{S} , co jest niemożliwe. Założenie istnienia punktu E doprowadziło więc do sprzeczności, zatem $\mathcal{S} = T$.

Ponieważ zaś $c \neq \xi$, to drugi czynnik musi być równy zero, co dowodzi związku (1). (Związek ten można też wyprowadzić bezpośrednio z równości (3) oraz (4). Z (3) i (4) wynika również, że

$$\frac{\xi}{c} = \frac{\sin \frac{\theta}{6}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{3}}$$

co wobec nierówności $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ daje

$$\frac{1}{3} < \frac{\xi}{c} < \frac{1}{1 + \sqrt{3}} < \frac{3}{8},$$

a więc nierówność (2). Gdybyśmy teraz potrafili geometrycznie — z zachowaniem zasad konstrukcji cyrklem i linijką — rozwiązać równanie (1), to problem trysekcji byłby rozwiązany. Zrobimy to następująco [chodzi oczywiście o rozwiązanie przybliżone — Red.]

2. Rozwiązywanie równania

Dla prostoty przyjmijmy, że $r = 1$. Równanie (1) sprowadza się teraz do

$$(8) \quad \xi^3 - 3\xi + c = 0.$$

Rozważmy na razie ogólniejsze równanie postaci

$$(9) \quad z^3 + pz + q = 0,$$

tzw. zredukowane równanie sześciennne. Zauważmy przede wszystkim, że równaniem prostej normalnej (prostopadłej) do paraboli $y^2 = 4ax$ jest

$$(10) \quad y = mx - 2am - am^3,$$

gdzie m jest współczynnikiem kierunkowym tej prostej. Równanie to można przepisać w postaci

$$(11) \quad m^3 + \left(2 - \frac{x}{a}\right)m + \frac{y}{a} = 0.$$

Porównując równania (9) i (11) stwierdzimy, że będą one miały te same pierwiastki dla

$$x = a(2 - p) \text{ i } y = qa.$$

Zatem, przy danych p i q , możemy dowolnie dobrać parametr a i znaleźć wykres odpowiedniej paraboli. Przy tym współczynniki kierunkowe prostych normalnych do tej paraboli przechodzących przez punkt (x, y) są pierwiastkami równania (9). Będą one zależały od położenia punktu (x, y) względem tej paraboli.

Powróćmy teraz do naszego równania przyjmując $a = 1$, $x = 5$ i $y = c$. Przez punkt $(5, c)$ możemy poprowadzić proste o współczynnikach kierunkowych $m_1 = \xi_1 \stackrel{\text{df}}{=} c/3$ i $m_2 = \xi_2 \stackrel{\text{df}}{=} 3c/8$, a więc odpowiednio o równaniach

$$(12) \quad y = \frac{c}{3}x - \frac{2c}{3}$$

i

$$(13) \quad y = \frac{3c}{8}x - \frac{7c}{8}.$$

Odcinek paraboli $y^2 = 4x$ odcięty tymi prostymi w ćwiartce $(+, -)$ (rozważamy tylko tę ćwiartkę, ponieważ poszukujemy dodatniego pierwiastka) można przybliżyć odcinkiem prostej. Rzędnymi punktów przecięcia prostych (12) i (13) z parabolą w tej ćwiartce są odpowiednio

$$(14) \quad y_1 = \frac{1}{c}(6 - 2\sqrt{9 + 2c^2})$$

oraz

$$(15) \quad y_2 = \frac{1}{3c}(16 - 2\sqrt{64 + 21c^2}).$$

Punkty K i L o takich rzędnych na prostych (12) i (13) można wyznaczyć za pomocą cyrkla i linijki. Po połączeniu ich odcinkiem KL można poprowadzić prostopadłą do tego odcinka przez punkt $(5, c)$. Współczynnik kierunkowy tej prostopadłej będzie pierwszym przybliżeniem rozwiązania równania (8), a to już oznacza, że jesteśmy w stanie dokonać przybliżonej trysekcji kąta. (Gdyby wolno nam było rysować parabolę, to byłibyśmy w stanie przeprowadzić trysekcję dokładną).

3. Jeszcze o rozwiązaniu

Interesujący nas współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do odcinka KL — przybliżona wartość pierwiastka — jest liczbą przeciwną do odwrotności współczynnika kierunkowego prostej KL .



Rozwiązanie zadania M 174

Pochodna $f'(x)$ ma oczywiście wszystkie pierwiastki rzeczywiste i różne. Niech będą to liczby x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Niech x_1, x_2, \dots, x_n będą pierwiastkami wielomianu $f(x) - a$ oraz y_1, y_2, \dots, y_n — pierwiastkami wielomianu $f(x) - b$. Jest oczywiście $x_1 < x_1 < x_2 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_{n-1} < x_n$ i $y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \dots < y_{n-1} < x_{n-1} < y_n$. Przedziały o końcach x_i, y_i nie mają punktów wspólnych, gdyż zawarte są one w rozłącznych przedziałach $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, +\infty)$. Wielomian $f(x)$ przyjmuje w punktach x_i, y_i wartości a i b , zatem wewnątrz przedziału o tych końcach przyjmuje wartość c . Tak więc wielomian $f(x) - c$ przyjmuje wartość 0 dla n różnych liczb rzeczywistych.



Niech x_1 i x_2 będą odpowiednio odciętymi punktów K i L . Ponieważ punkty te leżą na paraboli $y^2 = 4x$, więc oczywiście

$$x_1 = \frac{y_1^2}{4} \text{ i } x_2 = \frac{y_2^2}{4},$$

skąd wnioskujemy, że współczynnikiem kierunkowym prostej KL jest

$$M = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4}{y_1 + y_2},$$

wobec czego nasze przybliżenie pierwszego rzędu pierwiastka ξ określone jest wzorem

$$\xi_{01} = -\frac{1}{M} = -\frac{1}{4}(y_1 + y_2).$$

Podstawiając tu wartości y_1 i y_2 z (14) i (15) otrzymamy

$$\xi_{01} = \frac{1}{k_{01}} \cdot c,$$

gdzie

$$(16) \quad k_{01} = \frac{3\sqrt{9+2c^2} + \sqrt{64+21c^2} - 17}{6c^2}.$$

(Indeks 0 oznacza pierwiastek, indeks 1 — informuje o tym, że jest to przybliżenie pierwszego rzędu.) Z wzoru (16) wynika, że przybliżenie to rzeczywiście daje się skonstruować przy pomocy cyrkla i linijki.

Możemy również rozważać przybliżenia drugiego rzędu. Aby je otrzymać należy sprawdzić, czy ξ_{01} jest bliższe ξ_1 , czy ξ_2 . (Dla małych kątów będzie bliższe ξ_1 , dla dużych — ξ_2 . Jeśli wartość ξ_{01} leży mniej więcej pośrodku, to jest ona bliska ξ_0 i nie ma potrzeby wykonywania kolejnego kroku.) Praktycznym sposobem ustalenia tego jest sprawdzenie, czy rozważana prostopadła tworzy mniejszy kąt z prostą o współczynniku kierunkowym $m_1 = \xi_1$ czy $m_2 = \xi_2$.

Jeśli ξ_{01} jest bliższe ξ_1 niż ξ_2 , to ponawiamy konstrukcję opisaną powyżej prowadząc przez punkt $(5, c)$ proste o współczynnikach kierunkowych $m_1 = \xi_1$ i $m_{01} = \xi_{01}$, otrzymując drugie przybliżenie ξ_{02} . (Analogicznie postępujemy w przypadku, gdy ξ_{01} jest bliższe ξ_2 .) Postępowanie to można oczywiście iterować. W ogólnym przypadku odpowiednikiem wzoru (16) będzie

$$(17) \quad k_{0n} = \frac{2c^2}{\sqrt{k_{1,n-1}^2 + (5 - k_{1,n-1})c^2} + \sqrt{k_{2,n-1}^2 + (5 - k_{2,n-1})c^2} - (k_1 + k_2)}$$

gdzie $k_{1,n} = \frac{1}{\xi_{1,n} \cdot c}$, $k_{2,n} = \frac{1}{\xi_{2,n} \cdot c}$

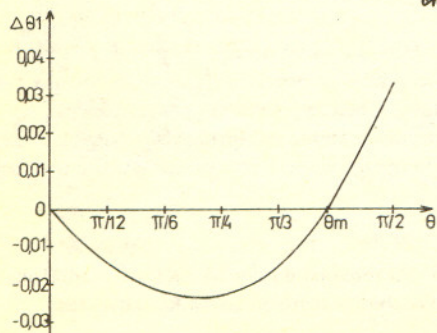
a $\xi_{1,n}$ i $\xi_{2,n}$ są współczynnikami kątowymi prostych, od których rozpoczyna się konstrukcja (dla $k_{1,n-1} = 3$ i $k_{2,n-1} = \frac{8}{3}$ równanie (17) sprowadza się do (16)). Można pokazać, że przy

dostatecznie dużej liczbie iteracji błąd rozwiązania będzie mniejszy od dowolnie małej liczby dodatniej. Okazuje się jednak (jak zobaczymy), że dla celów praktycznych wystarcza już drugie lub trzecie przybliżenie.

4. Oszacowania błędów

Przybliżone obliczenia pokazują, że dla pierwszego przybliżenia błędy są ujemne w przedziale $(0, \theta_m)$ i dodatnie w przedziale $(\theta_m, \frac{\pi}{2})$. Konstrukcja jest dokładna już w pierwszym kroku dla pewnego kąta $\theta_m \approx 1.20220507355 \times \frac{\pi}{3}$, a maksimum błędu jest osiągnięte dla $\theta = \frac{\pi}{2}$ (zob. rysunek).

Błędy kolejnych przybliżeń dla $\theta = \frac{\pi}{2}$ są w przybliżeniu następujące:

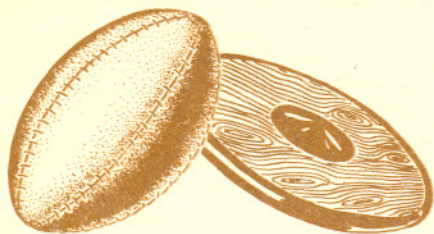
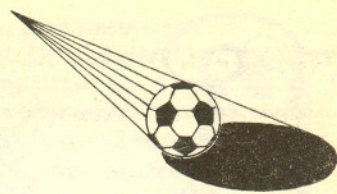


n	$\Delta_n \xi$	$\Delta_n \theta$
1	0.033000777	0.034088729
2	0.019873889	0.020547095
3	0.007111107	0.007358350
4	—	-0.005231552
5	—	0.002047171
6	—	-0.002947263
7	—	-0.000829884

Jak więc widać, już przybliżenia trzeciego rzędu są wystarczająco dobre

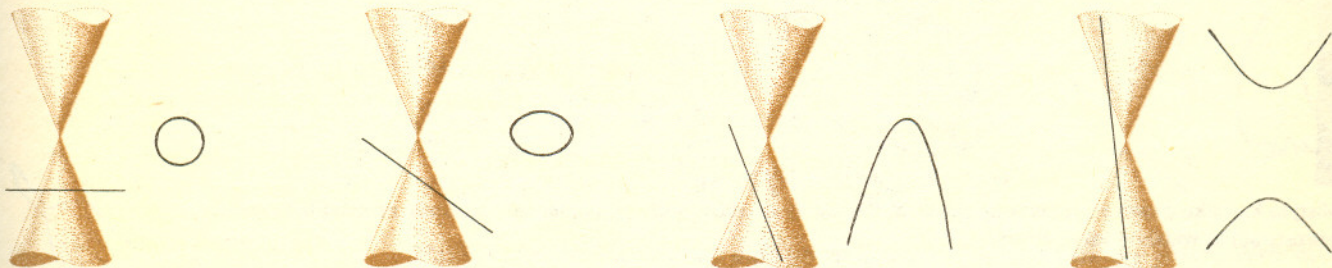
Autor szacuje błędy w sposób przybliżony. Z rozważań jego nie wynika, jak dokładnie są oszacowania tych błędów („błędy błędów”!). W związku z tym cytujemy jedynie niektóre z jego wyników bez uzasadniających je rozważań.

delta mata delta

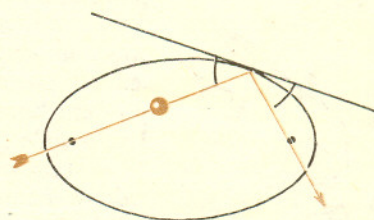
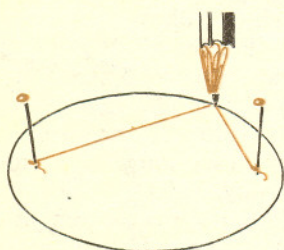


O elipsie

Elipsę znamy wszyscy. Tworzy ją oglądany z boku okrąg koła. Eliptyczny cień rzuca piłka, oświetlona z boku. Promienie świetlne wychodzące z jednego punktu tworzą stożek. Przecina go płaszczyzna, na której położyliśmy piłkę. Przecięcie stożka z płaszczyzną jest krzywą zwaną stożkową. Elipsa jest jedną z nich.

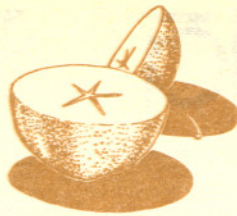
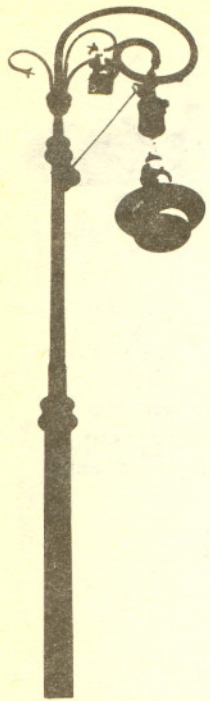


Narysować elipsę nietrudno. Wiążemy końce niedługiej nitki. Zaczepiamy o dwie wbite w karton pineski. Przesuwamy ołówek tak, by nić była stale napięta. Na kartonie pojawia się elipsa. Punkty, w których wbiliśmy pineski, są zwane ogniskami elipsy. Jest więc ona krzywą, złożoną z punktów, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów (ognisk) jest stała. A styczna do elipsy tworzy równe kąty z prostymi poprowadzonymi do ognisk z punktu styczności. Wyobraźmy sobie sprężystą metalową taśmę zamkniętą w elipsę i ustawioną na gładkim podłożu. Umieścimy w jednym z ognisk kulkę i pchnijmy ją w dowolnym kierunku. Po odbiciu od taśmy potoczy się ona w stronę drugiego ogniska. Czas, po jakim osiągnie to ognisko, nie zależy od kierunku, w jakim ją pchnęliśmy.



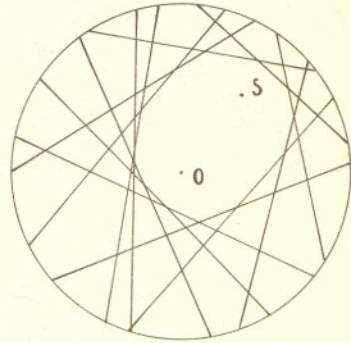
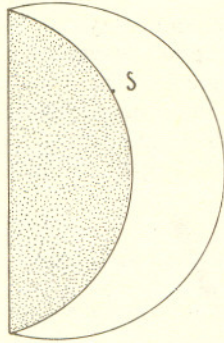
Jeżeli mamy napełnione wodą pudełko o eliptycznym brzegu i zanurzymy energicznie palec w punkcie odpowiadającym jednemu z ognisk, to po chwili w drugim ognisku zaobserwujemy nagłe spiętrzenie wody. Zwierciadło o eliptycznej powierzchni skupia promienie wychodzące z jednego ogniska w drugim. Zdalne zapalenie tą metodą statków nieprzyjacielskich należy jednak chyba zostawić autorom powieści fantastycznych.

Po elipsach biegają planety w ich rocznym obiegu wokół Słońca. Powierzchnie planet (i księżyców) nie są idealnie kuliste, lecz tworzą powierzchnię zwaną elipsoidą obrotową (zresztą też tylko w przybliżeniu). Taka powierzchnia powstaje z elipsy przez obracanie jej wokół osi symetrii; wygląda więc jak piłka do rugby lub dysk.

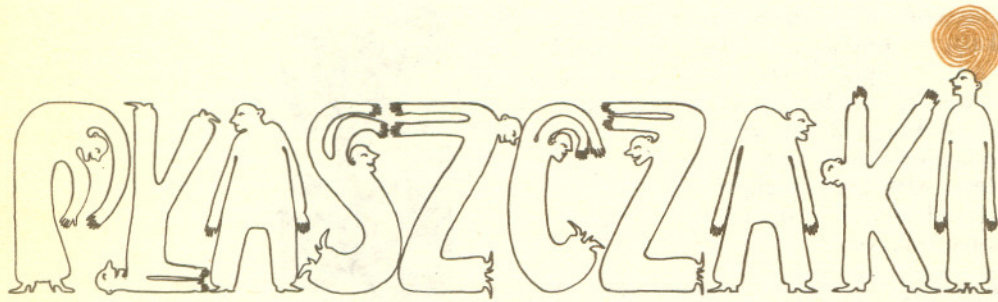


Sklepienia zaprojektowane w kształcie elipsoidy obrotowej mają szczególne właściwości akustyczne. Dwoje ludzi siedzących po przeciwnych końcach sali, w pobliżu ognisk, słyszy się doskonale, niezależnie od gwaru, jaki panuje dokoła. M.in. taki kształt ma sklepienie hallu w Kapitolu w Waszyngtonie.

Czy potraficie wskazać, gdzie jeszcze w przyrodzie i technice możemy spotkać elipsy i elipsoidy?



Na kolistym kawałku papieru zaznaczamy punkt *S*. Składamy na różne sposoby papier tak, by brzeg przechodził przez *S*. Po rozprostowaniu widzimy zarys elipsy.



„Punkt jest tym co nie ma części.

Linia zaś — długość bez szerokości.

Powierzchnia — jest tym co ma tylko długość i szerokość”.

Tak rozpoczął Euklides swoje wielkie dzieło „Elementy”. W jego określeniach punktu, linii i powierzchni można dopatrywać się pierwszych intuicji wymiaru.

Ścisła matematyczna definicja wymiaru obejmuje te intuicje geometryczne. Tak więc, ponieważ linia ma tylko jeden rozmiar — długość i daje się narysować

jednym pociągnięciem pióra, to przypisujemy jej wymiar równy jedności. Z kolei

powierzchnia ma długość i szerokość — mówimy, że jej wymiar jest równy dwa.

I krok dalej: ciała, które ma długość, szerokość i wysokość przypisujemy wymiar 3.

W naszym rzeczywistym życiu nitka, sznurek to w przybliżeniu przedmioty

jednowymiarowe — mają długość. Przedstawiciele dwuwymiarowego świata mają

już długość i szerokość. Można zaliczyć do nich wstążki, kawałki materiału, kartki

papieru. I w końcu domy, statki, samoloty, a również i my sami należymy do

obiektów mających oprócz długości i szerokości jeszcze trzeci wymiar — wysokość.

W tych rozważaniach można pójść jeszcze krok dalej i określić czwarty wymiar.

Być może istnieją przedmioty, które mają aż cztery wymiary, a tylko my — istoty

trójwymiarowe — nie jesteśmy w stanie ich zobaczyć.

Zanim jednak zaczniemy zastanawiać się, jak wygląda świat o czterech wymiarach,

spróbujmy wyobrazić sobie świat istot, które mają tylko dwa wymiary, a więc są

zupełnie płaskie. Możemy przyjąć, że są to rozumne stwory, które żyją

na płaszczyźnie. Nazwijmy te istoty płaszczakami.

Płaszczak zna tylko dwa wymiary — długość i szerokość, a trzeci wymiar —

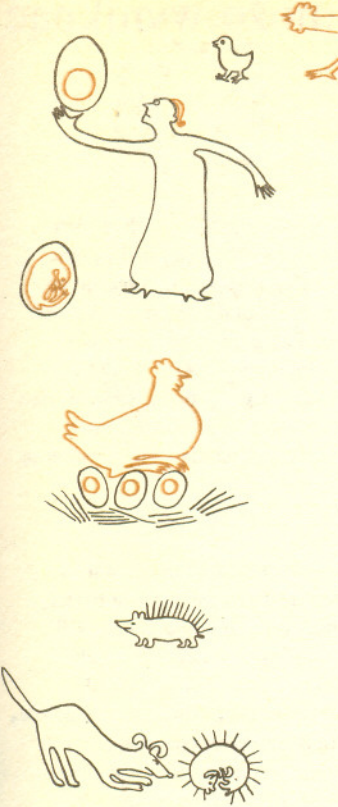
grubość — dla niego nie istnieje. Jeśli płaszczaka zamknijemy w okręgu, to będzie

to dla niego mūr nie do przebycia, ponieważ płaszczak może poruszać się tylko

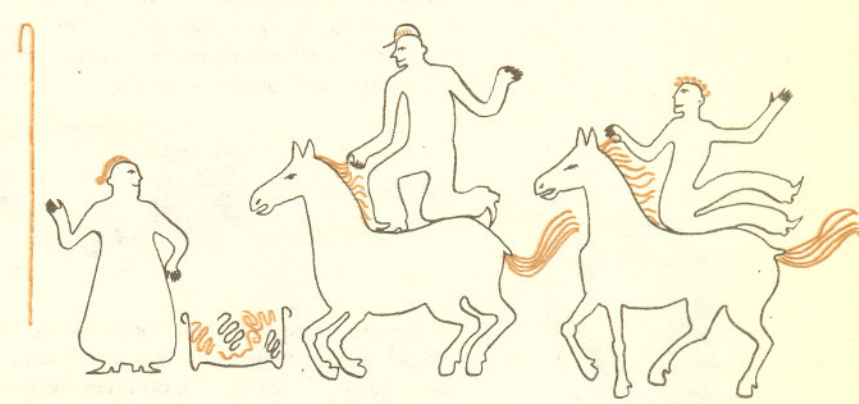
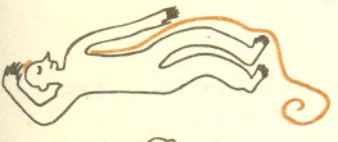
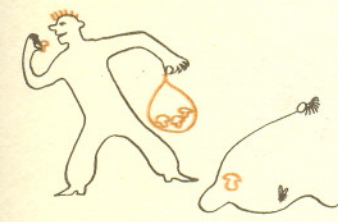
w dwóch wymiarach. Na to, aby wyjść na zewnątrz okręgu, musiałby wykonać ruch

w kierunku trzeciego wymiaru — do góry, a to dla niego jest niemożliwe.

Pomyślcie, ile zdumiewających cudów mogliśmy my, przedstawiciele trójwymiarowego świata zademonstrować płaszczakom. Oto, na przykład, możemy wyjąć takiego stworka z zamkniętego domu nie ruszając drzwi ani ścian, bo domem tym jest po prostu krzywa zamknięta. Nic nie przeszkadza nam wyjąć zawartość płaskiego jajka nie naruszając jego skorupki, albo zrobić operację serca obywatelowi płaszczyzny nie rozcinając jego klatki piersiowej. Możemy też podnieść dowolny przedmiot nad płaszczyznę i w ten sposób zabrać go z pola widzenia płaszczaków, spowodować, że zniknie on z ich świata.



Takie cudowne możliwości dają powiększenie wymiaru świata o jeden. Wróćmy więc teraz do naszych rozważań o świecie czterowymiarowym. Stwory czterowymiarowe muszą być tak wszechmocne wobec nas „trójwymiarowców”, jak my w stosunku do płaszczaków. Istota czterowymiarowa może, na przykład, oglądać nas jednocześnie od zewnątrz i od środka, albo tak, jak my robiliśmy to z płaszczakami wyjąć nas z domu pozostawiając nie tknięte drzwi i ściany. Równie niemożliwe wydaje się nam włożenie lewej rękawiczki na prawą rękę, albo prawego buta na lewą nogę. Ale przedstawiciel czterowymiarowego świata bez trudu mógłby unieść na chwilę i rękawiczkę, i but w kierunku swego dodatkowego wymiaru i oddać je stamtąd symetrycznie odwrócone. Niemożliwe? Zastanówcie się wobec tego, jak moglibyście pomóc płaszczakowi włożyć buty, gdyby okazało się, że ma dwa lewe. Żadne przesuwanie ani obracanie buta na płaszczyźnie nic tutaj nie pomoże — lewy but zawsze pozostanie lewym. Dopiero gdy skorzystamy z trzeciego wymiaru, uniesiemy but nad płaszczyznę, a następnie obrócimy i drugą stroną położymy z powrotem na płaszczyźnie, to okaże się, że z lewego buta zrobił się prawy. Podobnie mogłaby postąpić istota czterowymiarowa z naszym butem trójwymiarowym.



Świat czterowymiarowy jest więc bogaty w zjawiska geometryczne, o jakich nawet się nie śniło nie tylko poczciwym płaszczakom, ale i wielu trójwymiarowym obywatelom trójwymiarowego świata. Jeśli jednak zginie Wam but, nie zrzucajcie winy na „czterowymiarowca”. Zapewniam Was, że nie są to złośliwe istoty.

O nicowaniu i sklejanii powierzchni i co z tego może wyniknąć

Doc. dr Andrzej SZYBIAK

Skutki życzliwości dla zwierząt



Obserwując modele fizyczne powierzchni przyzwyczailiśmy się do wyróżniania na nich dwóch stron. Wiemy, że biedronka chcąc przejść z jednej strony paska papieru na drugą musi przejść przez jego kraj. Ułatwimy jej to zadanie, skręcając jeden brzeg paska o kąt półpełny i łącząc go z przeciwnym brzegiem, jak to pokazano na rysunku. Przechodząc przez odcinek AB , teraz już utożsamiony z odcinkiem $A'B'$, biedronka przejdzie na drugą stronę paska. Tak by się mogło wydawać. Ale czy możemy mówić, że pasek $ABA'B'$ po takim złączeniu boków AB i $A'B'$ ma jeszcze dwie strony? Wykonajmy model i spróbujmy zakreślować jedną jego stronę pozostawiając drugą nie zakreślowaną. Stwierdzimy, że rozpoczynając kreskowanie od dowolnego miejsca zakreślamy całą otrzymaną powierzchnię. Dlatego mówimy, że ta powierzchnia — nazywamy ją wstęgą Möbiusa — jest jednostronna.

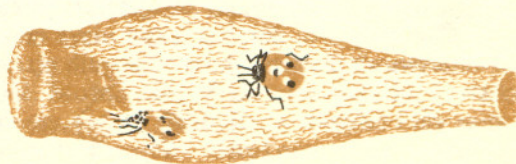
Utrata orientacji

Nie siląc się na ścisłą i ogólną definicję jednostronności podamy jeszcze jedną własność wstęgi Möbiusa. Połączmy środki odcinków AB i $A'B'$ odcinkami po jednej i po drugiej stronie paska $ABA'B'$. Po zrobieniu z paska wstęgi \mathcal{M} , a więc po utożsamieniu odcinka AB z odcinkiem $A'B'$, oba te odcinki utworzą zamkniętą krzywą, którą możemy nazwać równikiem wstęgi \mathcal{M} . Jeżeli w dowolnym punkcie C równika ustalimy parę wektorów u_0, w_0 takich, że u_0 jest styczny do równika, a w_0 do niego prostopadły, i układ ten będziemy przesuwać wzdłuż równika tak, aby u_0 pozostawał do równika styczny, to po obejściu całego równika doprowadzimy parę (u_0, w_0) do pary (u_1, w_1) takiej, że $u_1 = u_0$ i $w_1 = -w_0$. O układach (u_0, w_0) i (u_1, w_1) mówimy, że są przeciwieście zorientowane. A więc na \mathcal{M} można od układu wektorów przejść w sposób ciągły do układu przeciwieście zorientowanego (co nie jest możliwe np. na płaszczyźnie).

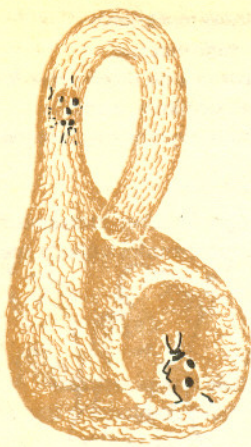


Nie będziemy nabijać w butelkę!

Podamy teraz inny przykład jednostronnego tworu dwuwymiarowego, nie będącego powierzchnią w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Wyobraźmy sobie powierzchnię boczną walca ograniczoną dwoma okręgami k i l . Jeżeli zegnijemy ten walec i złączymy wprost ze sobą okręgi k i l , to otrzymamy coś na kształt dętki, co się uczenie nazywa torusem. Biedronka zamknięta wewnątrz takiego torusa nie wyjdzie z niego, jak długo torus pozostanie torusem. Gdyby jednak udało się obrócić okrąg l wokół jednej z jego średnic o kąt półpełny, a potem złączyć go z okręgiem k , otrzymalibyśmy powierzchnię jednostronną. Ale takie skręcenie walca bez rozerwania go, albo przecięcia powierzchni z samą sobą, nie jest możliwe. Jeżeli jednak przyjmijemy możliwość przenikania się powierzchni bez samoprzecięć, to możemy wykonać (oczywiście w wyobraźni) następującą konstrukcję:



Rozdymamy walec do kształtu zbliżonego do szklaka od naftowej lampy o wydłużonej szyjce, następnie szyjkę tę odginamy, przeprowadzamy przez ściankę boczną bez przecinania się, a następnie łączymy z dolnym otworem. Otrzymany twór nie jest powierzchnią w przestrzeni trójwymiarowej i jego model fizyczny nie da się wykonać. Nazywamy go butelką Kleina. Rysunek obok pomoże nam wyrobić sobie pewien pogląd na jej strukturę. Przedstawia on (nie adekwatnie) jedną z połówek butelki Kleina. Sklejając ją z drugą symetryczną do niej połówką, tak jak muszlę szczeżui, otrzymamy powierzchnię obrazującą do pewnego stopnia butelkę Kleina. Co to znaczy do pewnego stopnia? To znaczy, że biedronka łażąca — powiedzmy — we wnętrzu szyjki mogłaby przejść przez ściankę bańki w miejscu przenikania, i poruszając się dalej, mogłaby przejść do „bańkowej” części butelki. Dalsze wędrówki biedronki nie znającej przeszkód tam, gdzie ścianki się przenikają bez samoprzecięć, mogą doprowadzić ją do dowolnego punktu butelki Kleina.



Konstrukcję butelki tej można ująć ściślej stosując metody współczesnej matematyki — albo na gruncie topologii, albo stosując metody geometrii różniczkowej. Interpretujemy butelkę Kleina jako pewną powierzchnię w pięciowymiarowej przestrzeni euklidesowej. Wyczerpujące opisanie sposobów zaprowadziłoby nas jednak za daleko, przynajmniej na razie.

Budujemy nowy świat

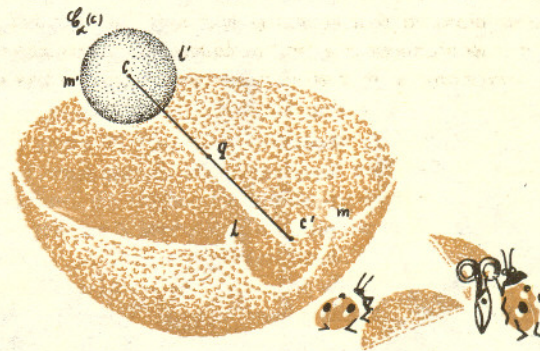
Rozważając wstęgę Möbiusa i butelkę Kleina nie zastanawialiśmy się nad jakimikolwiek metrycznymi strukturami tych przestrzeni. Poniżej podamy konstrukcję pewnej przestrzeni metrycznej o własnościach zasadniczo odmiennych od własności płaszczyzny euklidesowej. Weźmy pod uwagę połówkę sfery o środku q wraz z jej brzegiem, który jest kołem wielkim. Połówkę sfery bez brzegu oznaczmy przez P , a P wraz z brzegiem przez E . Ustalmy jednostkę miary kątowej. Wprowadzimy na P następującą funkcję ϱ pary punktów: Jeżeli $a, b \in P$, to za $\varrho(a, b)$ przyjmujemy miarę kąta pomiędzy półprostymi qa i qb . Bez względu na to, jaką jednostkę miary kątowej przyjmijemy, widzimy, że funkcja ϱ ma następujące własności:

1° $\varrho(a, a) = 0$ z $\varrho(a, a') = 0$ wynika, że $a = a'$.

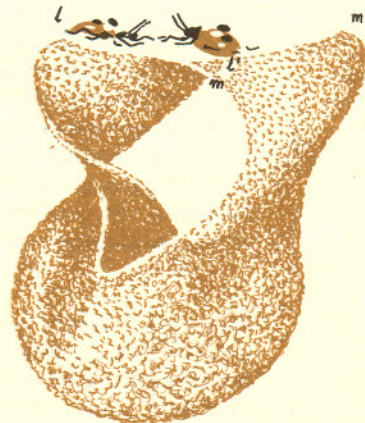
2° Dla dowolnych punktów $a, b, c \in P$ mamy $\varrho(a, b) + \varrho(c, b) \geq \varrho(a, c)$. (Dla dowodu wystarczy rozważyć trójścian o krawędziach qa, qb, qc).

3° ϱ spełnia nierówność $0 \leq \varrho(a, b) < m$, gdzie m jest równe mierze kąta półpełnego. A więc ϱ spełnia warunki wymagane od metryki i P z tak określoną metryką staje się przestrzenią

metryczną. W dalszych rozważaniach przyjmijmy taką jednostkę miary, by $m = 1$. (Taką samą metrykę moglibyśmy zresztą otrzymać wychodząc od pojęcia odległości „bliskich” punktów jako długości łączącego te punkty łuku koła wielkiego na sferze o promieniu $\frac{1}{2\pi}$).



Ustalmy teraz na brzegu punkt c i antypodyczny do niego punkt c' . Oznaczając przez $\mathcal{C}_\alpha(a)$ otwartą kulę o środku a i promieniu α usuniemy z E zbiory $E \cap \mathcal{C}_\alpha(c)$ i $E \cap \mathcal{C}_\alpha(c')$. Jeżeli wybierzemy α dostatecznie bliskie zeru, to po takim usunięciu zawsze coś dla dalszych rozważań pozostanie. Wyobraźmy więc sobie, że mamy wykonany z elastycznego tworzywa model tego, co zostało. Naciągamy „uszy” ograniczone łukami lm' i ml' i skleamy je tak, by punkty diametralnie przeciwległe (antypodyczne) zostały ze sobą złączone. Otrzymamy powierzchnię przypominającą koszyczek o skręconym — jak wstęga Möbiusa — uchu. Biedronka łącząca po powierzchni takiego koszyczka miałaby takie same możliwości poruszania się po całej powierzchni jak na tamtej wstędze.



Oznaczmy utworzoną powierzchnię przez Z_α . Odpowiedniość między punktami zbioru $P \setminus (\mathcal{C}_\alpha(c) \cup \mathcal{C}_\alpha(c'))$ a punktami zbioru Z_α jest wzajemnie jednoznaczna. Oznaczmy odwzorowanie $P \setminus (\mathcal{C}_\alpha(c) \cup \mathcal{C}_\alpha(c'))$ w Z_α przez f , a odwrotne do niego przez h . Odwzorowanie f daje się z łatwością rozszerzyć w sposób ciągły na domknięcie zbioru $P \setminus (\mathcal{C}(c) \cup \mathcal{C}_\alpha(c'))$, przy czym obrazy w odwzorowaniu f punktów antypodycznych są identyczne. Określamy funkcję d przyjmując dla $a, b \in Z_\alpha$

$$d(a, b) = \text{miara nie większego z kątów, które tworzą proste } qh(a) \text{ i } qh(b).$$

Stwierdzamy z łatwością, że d jest funkcją ciągłą na domknięciu Z_α i — wobec utożsamienia punktów antypodycznych na brzegach „uszu” — funkcja ta obok nierówności trójkąta spełnia warunek

$$d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b \text{ na } Z_\alpha.$$

A więc Z_α z tak określoną odległością jest przestrzenią metryczną. Rozważmy ciąg wartości α_n malejący do zera. Odpowiadał mu będzie ciąg przestrzeni metrycznych Z_{α_n} taki, że $Z_{\alpha_1} \subset Z_{\alpha_2} \subset \dots \subset Z_{\alpha_k} \subset Z_{\alpha_{k+1}}$. Przestrzeń graniczna w tym przypadku istnieje, ale nie da się ona przedstawić w postaci powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Możemy uznać, że jest to połowka sfery, w której dokonano utożsamienia punktów średnicowo sprzężonych, a metrykę oparto na mierze kątowej.

Wyżej skonstruowana przestrzeń metryczna nazywa się dwuwymiarową przestrzenią eliptyczną Riemanna. Będziemy ją oznaczać przez Z . Wiemy już, że od płaszczyzny euklidesowej różni się ona tym, że:

i) odległość dwóch punktów na Z nie przekracza liczby 1 (przy przyjętej przez nas wyżej jednostce miary).

ii) Z , podobnie jak płaszczyzna euklidesowa, nie ma brzegu, a w przeciwieństwie do płaszczyzny euklidesowej ma tylko jedną stronę. Jeżeli byśmy umieścili na modelu fizycznym przestrzeni Z_α biedronkę, to wędrując po tym modelu może ona zawsze zająć w położenie będące lustrzanym odbiciem poprzedniego, nie przechodząc przy tym przez żadną krawędź. Tę samą własność będzie mieć przestrzeń Z jako granica wstępującego ciągu przestrzeni Z_{α_n} .

Dla dalszych rozważań określimy na Z linie proste. Mianowicie przez prostą w przestrzeni Z będziemy rozumieć bądź obraz w odwzorowaniu f łuku koła wielkiego na półsfery, przy czym końce tego łuku utożsamiamy, bądź też obraz w odwzorowaniu f brzegu półsfery, w którym pary punktów antypodycznych uważamy za jeden punkt. Przyjmując taką definicję widzimy, że każda prosta w przestrzeni Z ma skończoną długość, przy naszej jednostce miary równą 1. Co więcej, każda taka prosta jest linią zamkniętą, tak jak okrąg euklidesowy. Jeżeli więc na prostej w przestrzeni eliptycznej ustalimy dwa różne punkty, to podzielimy ją na dwa odcinki, a nie jak w przypadku euklidesowym na odcinek i dwie półproste. Wobec tego, jeżeli mamy w przestrzeni eliptycznej trzy proste różne między sobą i nie przecinające się w jednym punkcie, to odcinki wyznaczone przez punkty przecięcia utworzą nie jeden, a cztery trójkąty, które pokryją całą przestrzeń Z .

Zastanówmy się nad prawdziwością następującego zdania: „Jeżeli p, r i s są trzema punktami prostej Z i r leży między p i s , to mamy $d(p, r) + d(r, s) = d(p, s)$ ”. W rzeczywistości powyższe stwierdzenie jest pozbawione sensu, gdyż pozbawione sensu jest pojęcie „leżenia między” dla punktów prostej eliptycznej.

Każde dwie proste w przestrzeni eliptycznej Z mają dokładnie jeden punkt przecięcia. Stwierdzamy to rozważając łuki kół wielkich na połowce sfery. A więc prostych rozłącznych w naszej przestrzeni nie ma. Tym zasadniczo różni się przestrzeń eliptyczna Riemanna od euklidesowej, jak również od nieeuklidesowej płaszczyzny Bolyaia-Łobaczewskiego, w której przez zadany punkt poza prostą l przechodzi nieskończenie wiele prostych nie przecinających się z l .

Czy tylko dla biedronek?

Można by zadać pytanie, po co konstruować takie dziwaczne przestrzenie i rozważać ich własności. Czy tylko dlatego, że one istnieją jako logicznie konsekwentne twory myślowe? Podobnie rozsądne pytanie mógłby zadać w starożytnym Egipcie Ptolemeusz mierniczy matematykowi aleksandryjskiemu. Mianowicie pytanie: po co zajmować się trygonometrią sferyczną, kiedy „zwykła” geometria wystarcza w zupełności do rozwiązywania wszystkich zadań związanych z wytyczaniem kanałów i międz. O tym, że może istnieć coś takiego, jak mapa Oceanii lub Eurazji, mierniczy ten miał prawo nie mieć pojęcia. Eratostenes też nie wiedział o istnieniu Oceanu Spokojnego, ale ponieważ wyobraźni i zakresem badań naukowych wybiegł poza geodezję obszaru nawadnianego przez Nil, zdołał obliczyć przybliżoną długość południka ziemskiego.

Tak, jak model powierzchni Ziemi można opisać w geometrii sferycznej, tak wyjaśnianie pewnych zjawisk fizycznych udaje się dopiero wtedy, kiedy wykorzystamy aparat geometrii różniczkowej przestrzeni nieeuklidesowych. Opracowanie takich metod zapoczątkował Bernard Riemann ok. r. 1854, a do postaci „użytkowej” doprowadził je Albert Einstein. Pewne wprowadzenie w poruszone wyżej zagadnienia znajdzie Czytelnik w książkach „Geometria pogładowa” D. Hilberta i S. Cohn-Vossena oraz we „Wstępie do geometrii dawnej i nowej” C. S. M. Coxetera.



Rozwiązanie zadania M 173

Zauważmy, że suma trzech liczb naturalnych jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy albo reszty z dzielenia tych liczb przez 3 są wszystkie różne, albo wszystkie równe.

Podzielmy zbiór $\{1, 2, \dots, 3n\}$ na klasy liczb dających przy dzieleniu przez 3 równe reszty:

$$\{3, 6, \dots, 3n\}, \{1, 4, \dots, 3n-2\}, \{2, 5, \dots, 3n-1\}.$$

Trójka liczb, której suma jest podzielna przez 3, składa się więc bądź z liczb z różnych klas, bądź z liczb tej samej klasy. Trójkę liczb złożonych z liczb z różnych klas jest oczywiście n^3 , trójkę zaś złożonych z liczb z jednej klasy

$$\text{jest } \left(\frac{n}{3}\right)^3.$$

Tak więc szukanych trójek jest $n^3 + 3\left(\frac{n}{3}\right)^3 = n^3 +$

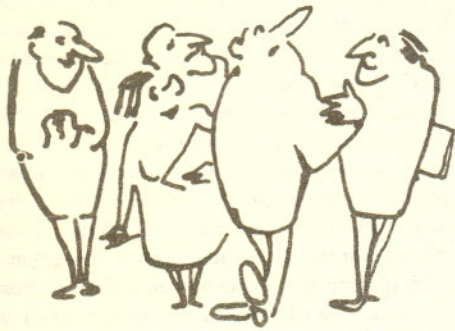
$$+ \frac{1}{2} n(n-1)(n-2) = \frac{n}{2} (3n^2 - 3n + 2).$$

Kącik filatelistyczny

Dzisiaj przerywamy cykl „historyczny” i poświęcamy nasz kącik Międzynarodowej Agencji Energii Atomowej (ang. International Atomic Energy Agency — IAEA). W ubiegłym roku minęło dwadzieścia lat od założenia tej organizacji, mającej swą siedzibę w Wiedniu. Zrzesza ona obecnie 110 państw, w tym również i Polskę. Działalność MAEA dotyczy wykorzystania energii jądrowej dla celów pokojowych: badań w zakresie zastosowań energii jądrowej w różnych dziedzinach gospodarki, opracowywania norm, wymiany informacji itp. W szczególności Agencja udziela pomocy krajom rozwijającym się poprzez kierowanie tam ekspertów i kształcenie potrzebnych specjalistów.

Reprodukujemy jeden z dwóch znaczków poświęconych MAEA, wydanych przez pocztę ONZ w roku 1958 oraz znaczek wydany w ub. roku przez pocztę Austrii z okazji 20-lecia Agencji. Znaczki poświęcone tej organizacji wydano również w Belgii (1958), Gabonie (1967), Kamerunie (1967), Mauretanii (1967) i Monako (1962). Szereg konferencji naukowych, zorganizowanych przez Agencję zostało również upamiętnionych znaczkami lub stemplami okolicznościowymi.

Jerzy BARTKE



— Stupstwo! zresztą, gdzieś już to chyba widziałem



Spiralę Archimedesesa można określić jako tor punktu poruszającego się jednostajnie po półprostej, która obraca się ze stałą prędkością kątową dokoła swego początku, przy czym w momencie początkowym punkt znajduje się w początku półprostej. W układzie współrzędnych biegunowych, którego biegunem jest początek półprostej a osią — początkowe położenie półprostej, spirala ma równanie $r = a\varphi$, gdzie a jest pewną stałą. Spirala Archimedesesa o tym równaniu umożliwia dokonanie trysekcji dowolnego kąta: wystarczy ramię kąta podzielić na 3 równe części i zatoczyć z bieguna okręgi przez punkty podziału. Punkty przecięcia okręgów ze spiralą łączymy z biegunem i trysekcja została dokonana:

$$\frac{r}{3} = a \frac{\varphi}{3}.$$

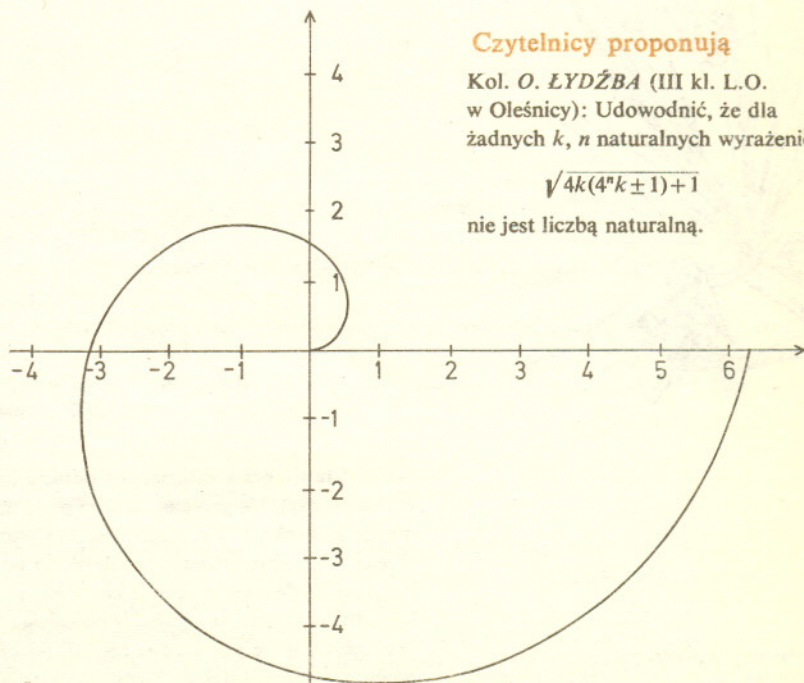
Podobnie można dokonać podziału danego kąta na n równych części.

Czytelnicy proponują

Kol. O. LYDŹBA (III kl. L.O. w Oleśnicy): Udowodnić, że dla żadnych k, n naturalnych wyrażenie

$$\sqrt{4k(4^n k \pm 1) + 1}$$

nie jest liczbą naturalną.



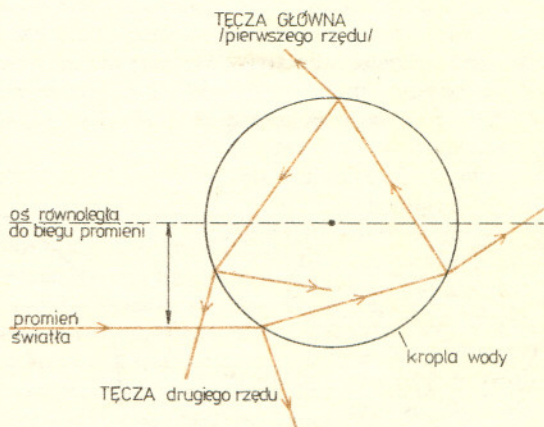
Tęcza jest tak wspaniałym zjawiskiem przyrody... że nie mógłbym wymyślić piękniejszego do sprawdzania mych teorii.

Descartes

W czasie pisania artykułu autorka była uczennicą III klasy V Liceum Ogólnokształcącego w Krakowie.

Tęcza jest pomostem między poezją i nauką. Obie bowiem od wieków już starały się ją opisywać. Może się wydawać, że z naukowego punktu widzenia problem ten, jako dotyczący tylko optyki geometrycznej, dawno już został rozwiązany, a dziś zajmujemy się nim raczej z historycznego punktu widzenia. A jednak teoria tęczy silnie się rozwinęła dopiero w ostatnich latach. Opiera się ona nie tylko na prawach optyki geometrycznej, ale wykorzystuje wszelkie poznane dotąd cechy światła, jak interferencja, dyfrakcja, polaryzacja czy moment pędu promienia świetlnego. Pojedynczy, jasny łuk widziany po deszczu to tęcza pierwszego rzędu. Oczywiście jej najbardziej rzucającą się w oczy cechą jest wspaniały wachlarz kolorów, rozpostartych wokół siebie zawsze w tej samej kolejności; pomiędzy fioletem po wewnętrznej stronie, a czerwinią, będącą zewnętrzną granicą, kolejno błękit przechodzi przez wszystkie odcienie zieleni w kolor żółty a następnie pomarańczowy. Trudniej jest już dostrzec inne cechy zjawiska tęczy. Wyżej bowiem znajduje się znacznie słabsza tęcza drugiego rzędu, o odwróconej kolejności barw. Poza tym, oko uważnego obserwatora dostrzeże, iż obszar pomiędzy tęczami jest wyraźnie ciemniejszy niż poza nimi. Jest on zwany pasmem Alexandra, od imienia greckiego filozofa z II wieku n.e., który po raz pierwszy opisał to zjawisko. Jeszcze trudniejsze jest uchwycenie po wewnętrznej stronie tęczy pierwszego rzędu (a także po zewnętrznej stronie tęczy drugiego rzędu) leżących na przemian różowych i zielonych pasów.

Pierwszym, który podjął się wyjaśnienia powstawania tęczy, był prawdopodobnie Arystoteles. Zakładał on, że jest to specjalny rodzaj odbicia światła od całej chmury, tworzący stożkowo rozchodzące się promienie. Przewidział poprawnie, że tęcza nie jest ściśle zlokalizowanym obiektem materialnym, ale że jest to zbiór kierunków, wzdłuż których rozszczerzone światło dochodzi do oczu obserwatora. Pierwszy, bardziej matematyczny opis pochodzi jednak dopiero z roku 1266. Roger Bacon jako pierwszy zauważył stałość kąta między kierunkami od obserwatora do tęczy i do Słońca (tzw. kąta tęczy), szacując go dosyć dokładnie na 138° dla tęczy pierwszego rzędu i 130° dla tęczy drugiego rzędu. W 1304 roku niemiecki mnich, Teodoryk z Freibergu, przeciwstawił teorii Arystotelesa hipotezę, w której każda pojedyncza kropla, a nie dopiero ich zbiór, tłumaczy powstanie tęczy. W trzy wieki później, niezależnie, także Descartes doszedł do wniosku, że wszystkie główne cechy tęczy można wytłumaczyć analizując przebieg promieni światła przez pojedynczą kroplę. I tak część promieni padających na powierzchnię kropli ulega odbiciu, a część załamaniu na granicy dwóch ośrodków. Promienie, które po jednokrotnym odbiciu wewnątrz wydostały się na zewnątrz, odpowiedzialne są za tęczę pierwszego rzędu, natomiast te, które dwukrotnie odbijają się od wewnętrznej powierzchni, tworzą tęczę drugiego rzędu. Podział wejściowego promienia na każdej granicy dwóch ośrodków na część odbitą i załamaną jest przyczyną różnicy (spadku) natężenia światła w tęczy drugiego rzędu i powoduje, że dalsze rzędy w ogóle są niewidzialne. Ze względu na sferyczną, a więc symetryczną budowę kropli, kąt odbicia i załamania dla każdej grupy równoległych promieni jest jedynie funkcją odległości punktu padania promienia od osi kropli.

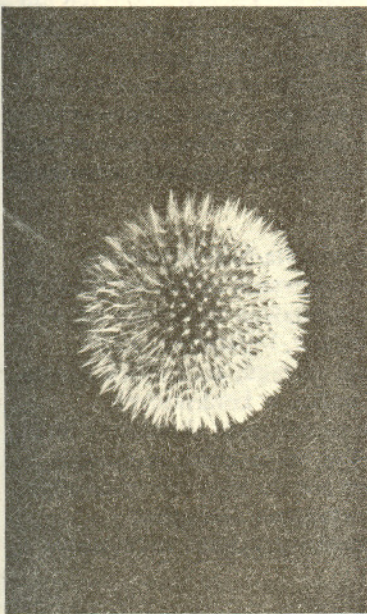


Na podstawie praw załamania i odbicia łatwo określić, gdzie musi padać promień, by wchodził w skład tęczy. Ale przecież światło pada na całą powierzchnię kropli i odbija się także w wielu innych kierunkach. Dlaczego więc jest ono wzmacniane właśnie w kierunku tęczy? Spróbujmy przeanalizować tor światła w zależności od miejsca padania. Jeżeli promień dosięgnie powierzchni, kropli w jej środku, zachowa kierunek, a tylko zmieni zwrot biegu. W miarę oddalania się od osi kąt odbicia maleje, osiągając w odległości $7/8$ promienia minimum równe 138° (dla promieni tworzących tęczę pierwszego rzędu), po czym znowu rośnie. Natomiast promienie wywołujące powstanie tęczy drugiego rzędu zwiększają swój kąt odbicia osiągając maksimum równe 130° .

Ponieważ kropla oświetlana jest jednorodnie, niezależnie od miejsca powierzchni, więc wzmocnienie natężenia światła powstaje tam, gdzie kąt odbicia zmienia się najwolniej. W miejscu o najsilniejszym zagęszczeniu promieni, a więc dla kątów ekstremalnych (130° i 138°) powstają wzmocnione tęcze. Ponieważ zaś żadne promienie rozważanego typu nie są odbijane pod kątami pomiędzy 130° i 138° , więc powstaje tu zaciemnienie. Jak widać, wielkość kropli nie ma wpływu na kąty określające położenie poszczególnych obszarów.

Do tej pory nie zajmowaliśmy się najbardziej typową dla tęczy cechą, a mianowicie grą kolorów. Już w 1666 roku Newton zauważył, że światło białe jest mieszaniną wiązek różnobarwnych o różnych współczynnikach załamania. Różne współczynniki załamania dają różne ekstremalne kąty tęczy. I tak np. dla światła czerwonego wynosi on $137^\circ 58'$, a dla fioletu $139^\circ 43'$. Na podstawie tego oraz ze znanej szerokości kątowej tarczy słonecznej Newton ocenił szerokość tęczy na $2^\circ 15'$, co było zgodne z jego obserwacjami. Tak więc Newton na podstawie optyki geometrycznej umiał uzasadnić występowanie i grę kolorów tęczy pierwszego i drugiego rzędu, ciemniejszy obszar między nimi, a nawet określić ich położenie. Nie był jednak w stanie wytłumaczyć pochodzenia barwnych prążków leżących po wewnętrznej części tęczy pierwszego rzędu. Po wewnętrznej stronie tęczy pierwszego rzędu oraz po zewnętrznej stronie drugiego — zawsze znajdziemy dwa promienie, które padały na kroplę z obu stron promieni tworzących tęczę i odbiły się w tym samym kierunku. Kąt tęczy jest bowiem kątem ekstremalnym. Stąd też, dla każdego kąta nieco większego od wartości kąta tęczy (w przypadku tęczy pierwszego rzędu) odbite światło zawiera równoległe promienie, które przeszły różne drogi o różnych długościach. W czasach Newtona natężenia spowodowane łąčeniem się kilku grup promieni mogły być tylko po prostu dodane. Dlatego też przewidywał on ciągle jednostajny spadek natężenia w funkcji kąta bez żadnych prążków. Dopiero po odkryciu Younga dotyczącym możliwości interferencji fal świetlnych sam autor wpadł na pomysł, że takie promienie przechodzące przez kroplę zachowują się analogicznie, jak promienie przechodzące przez dwa otwory w jego słynnym doświadczeniu. To „podtęczowe” zjawisko wyjaśnił więc następująco. Dla kątów bliskich kątowi tęczy różnica dróg między sąsiednimi promieniami jest nieznaczna, więc interferują ulegając wzmocnieniu. Gdy różnica osiąga połowę długości fali, promienie wzajemnie się wygaszają. Dla dalszego wzrostu różnicy dróg światło konsekwentnie zostaje dalej na przemian wzmacniane i osłabiane, czego efektem są powstające prążki. Ponieważ kąt obserwacji, przy którym następuje wzmacnianie i osłabianie zależy od różnicy dróg przejścia odpowiednich promieni przez kroplę, więc całe zjawisko zależy tym razem od wielkości kropli. W większych kroplach następuje szybsza zmiana różnicy, gwałtowniejszy jej wzrost powodujący zbliżanie się prążków. Wyjaśnia to fakt, że bliżej wierzchołka łatwiej je dostrzec. Bo po prostu krople deszczu spadając rosną.

Dokładne wyjaśnienie wszelkich niezauważalnych gołym okiem subtelności tęczy wymaga posłużenia się pełną teorią fal elektromagnetycznych stworzoną przez Maxwella. Odpowiednie rachunki wcale nie są proste. Łatwo natomiast zrozumieć pewną ciekawą własność światła tworzącego tęczę. Okazuje się, że światło to jest praktycznie całkowicie spolaryzowane w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny, w której zachodzi odbicie promieni. Kąt wewnętrznego odbicia dla promieni tworzących tęczę pierwszego rzędu jest bowiem przez niezwykle przypadek równy kątowi Brewstera, przy którym światło całkowicie polaryzuje się przez odbicie. Zjawisko polaryzacji światła tęczowego może zaobserwować każdy, kto ma okulary polaryzacyjne lub inne urządzenie polaryzujące światło.



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 172. Udowodnić, że jeżeli powierzchnia \mathcal{S} ma następującą własność: jeżeli punkty A, B, C należą do \mathcal{S} , to okrąg przechodzący przez A, B, C jest zawarty w \mathcal{S} , to \mathcal{S} jest płaszczyzną lub sferą. Rozwiązanie na str. 5

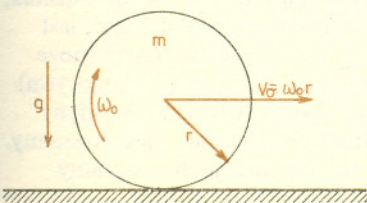
M 173. Ile jest trójek liczb naturalnych nie większych od $3n$, których suma jest podzielna przez 3? Rozwiązanie na str. 12

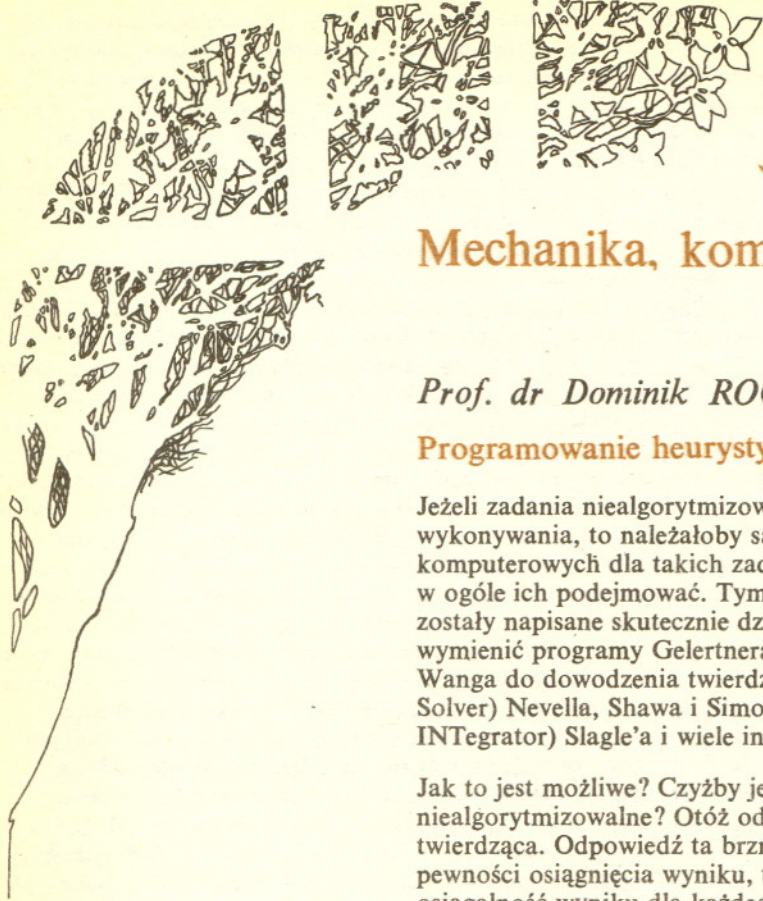
M 174. Wykazać, że jeżeli $f(x)$ jest wielomianem stopnia n o współczynnikach rzeczywistych oraz a i b są takimi liczbami rzeczywistymi, że wielomiany $f(x) - a$ i $f(x) - b$ mają po n różnych pierwiastków rzeczywistych, to dla każdej liczby c leżącej między a i b wielomian $f(x) - c$ ma n różnych pierwiastków rzeczywistych.

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

F58. Na poziomą powierzchnię stołu położono jednorodną kulkę o masie m i promieniu r wirującą z prędkością ω_0 wokół osi poziomej przechodzącej przez środek kulki. Jednocześnie środkowi kulki nadano prędkość liniową $v_0 = \omega_0 r$ w kierunku prostopadłym do osi obrotu. Współczynnik tarcia posuwistego kulki o stół wynosi f , a potoczystego k . Jaki warunek powinny spełniać k, f i r , aby ruch kulki aż do chwili zatrzymania odbywał się bez poślizgu? Rozwiązanie na str. 2





Mechanika, komputer, człowiek (V)

Prof. dr Dominik ROGULA

Programowanie heurystyczne

Jeżeli zadania niealgorytmizowalne miałyby nie nadawać się do maszynowego wykonywania, to należałoby sądzić, że wszelkie próby pisania programów komputerowych dla takich zadań są z góry skazane na niepowodzenie i nie warto w ogóle ich podejmować. Tymczasem dla wielu zadań niealgorytmizowalnych zostały napisane skutecznie działające programy ich rozwiązywania. Można tutaj wymienić programy Gelertnera do dowodzenia twierdzeń geometrycznych, Hao Wanga do dowodzenia twierdzeń logicznych, program GPS (General Program Solver) Nevella, Shawa i Simona, program SAINT (Symbolic Automatic INTEgrator) Slagle'a i wiele innych.

Jak to jest możliwe? Czyżby jednak maszyna mogła wykonywać zadania niealgorytmizowalne? Otóż odpowiedź na ostatnie pytanie jest w pewnym sensie twierdząca. Odpowiedź ta brzmi wprawdzie „nie”, jeżeli żądać od maszyny pewności osiągnięcia wyniku, tzn. działania według reguł a priori zapewniających osiągalność wyniku dla każdego zadania szczegółowego. Jeżeli jednak dopuścić możliwość niepowodzenia w pewnych przypadkach, to odpowiedź brzmi „tak”. Programowanie tego rodzaju nie może już polegać na wykorzystaniu algorytmu, który miałby być niezawodną procedurą na wszystkie możliwe okazje, a który przecież nie istnieje. Polega ono na stosowaniu tzw. heurystyk, czyli „dobrych rad”, mówiących jakie próby w różnych sytuacjach warto podejmować. Jest to podejście zwane programowaniem heurystycznym w szerokim sensie tego terminu. Programy oparte na tej zasadzie mogą być lepsze lub gorsze w zależności od zastosowanych heurystyk i sposobu posługiwania się nimi. Im lepsze heurystyki, tym lepsze programy, czyli tym rzadziej nie umiające poradzić sobie z postawionym zadaniem. Niealgorytmizowalność oznacza tylko, że nie można napisać „absolutnie dobrego” programu.

Aby lepiej uzmysłowić sobie praktyczną rolę programowania heurystycznego, posłużymy się analogią z popularnym sposobem rozwiązywania zadań matematyki stosowanej za pomocą szeregów nieskończonych. Do niedawna wydawało się, że metoda taka jest dobra, jeżeli otrzymuje się szereg zbieżny, i niedobra, jeżeli rozbieżny. Z czasem jednak wyjaśniło się, że zbieżność szeregu, aczkolwiek istotna w ogólnych zagadnieniach teoretycznych, jest mniej ważna w konkretnych obliczeniach, gdzie trzeba poprzestać na przybliżeniu określonym skończoną liczbą wyrazów. Zbieżność szeregu bowiem ani nie gwarantuje, że ustalona skończona liczba jego wyrazów da dobre przybliżenie, ani też nie jest do tego celu niezbędna: często udaje się uzyskać asymptotyczne rozwiązanie, wyrażone szeregiem rozbieżnym, lecz takim, że kilka jego pierwszych wyrazów przybliży rozwiązanie z wystarczającą dokładnością.

W programowaniu heurystycznym nie chodzi wprawdzie o liczbowe przybliżanie rozwiązań problemów obliczeniowych, lecz o stosowanie procedur, które są niepewne w tym sensie, że w niektórych przypadkach mogą nie znaleźć rozwiązania, lecz jeśli rozwiązanie zostanie znalezione, to na pewno dobre. „Przybliżony” jest jak gdyby sposób poszukiwania rozwiązań. Zastosowanie takiego podejścia może być podyktowane faktem, że „ścisty” sposób poszukiwania rozwiązania (algorytm) nie istnieje, a więc że zadanie jest niealgorytmizowalne. Nie jest to jednak jedyny możliwy powód: może się zdarzyć, że algorytm zadania, choć istnieje, jest nieznan. Albo znany, lecz trudny i nadmiernie uciążliwy. W takich sytuacjach programy heurystyczne mogą stanowić praktyczne rozwiązanie.



Przykładem może tutaj być gra w szachy. Jako gra skończona jest ona oczywiście algorytmizowalna. Jednakże prymitywny algorytm oparty na systematycznym przeglądaniu wszystkich możliwości jest praktycznie nierealizowalny, a lepsze algorytmy nie są znane. Mimo to można pisać programy heurystyczne, a jakość ich gry zależy od jakości heurystyk (Botwinnik).

Programowanie heurystyczne jest atrakcyjną metodą również z tego względu, że odzwierciedla istotną cechę myślenia ludzkiego i, być może, inteligencji w ogóle. Zatrzymamy się jeszcze przez chwilę na kwestii, czy programowanie heurystyczne jest istotnie nową metodą w stosunku do zwykłego „programowania algorytmicznego”. Można bowiem przedstawić takie mniej więcej rozumowanie.

Obmyślając bądź objaśniając swój program, autor operuje pojęciem heurystyki, mówi, że program „próbuje”, „stawia hipotezę” itp. Jest to oczywiście w porządku, ale są to tylko wyobrażenia autora programu, mające dla tegoż autora znaczenie heurystyczne. Ostatecznie napisany program jest jednak algorytmem, czyli przepisem skłaniającym maszynę do działania w ściśle określony sposób. Cała tajemnica leży w tym, że nie jest on algorytmem realizacji zadania, które autor miał na myśli, tylko czymś w rodzaju „gorszej wersji” takiego algorytmu. Jednakże jest to zapewne algorytm jakiegoś innego zadania i gdyby ktoś zadał sobie trud i zbadał ten algorytm dokładnie, to mógłby znaleźć szczegółowy wariant zadania, o którym dałoby się z góry udowodnić, że nie zostanie zrealizowany — należy do „wyjątków”. Mamy więc do czynienia nie tyle z niedoskonałym sposobem rozwiązywania doskonałego zadania, ile z doskonałym sposobem rozwiązywania niedoskonałego zadania.

Pod pewnymi względami należy się z powyższym rozumowaniem zgodzić, z następującymi jednakże uwagami. Po pierwsze, w przedstawionej wyżej sytuacji mamy do czynienia z dwoma poziomami opisu programu: spojrzenie na program jako na algorytm odnosi się do jego mikrostruktury, podczas gdy opisanie go jako programu heurystycznego oznacza odwołanie się do pewnej jego makrostruktury.

Ta makrostruktura może pod wieloma względami okazać się dużo ważniejsza. Z podobną sytuacją często mamy do czynienia w fizyce: stan gazu w zbiorniku można opisać szczegółowo, nie zapominając o żadnej jego cząsteczce, bądź też bardziej globalnie, przy pomocy pojęć kinetycznej teorii materii. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z opisem nadmiernie szczegółowym i przez to praktycznie nieprzydatnym. Prawie wszystkie użyteczne wyniki opierają się na opisie drugim. Analogia ta jest pouczająca jeszcze pod jednym względem: w mikroskopowym opisie molekularnym gaz jest układem deterministycznym i odwracalnym, a w opisie kinetycznym — stochastycznym i nieodwracalnym.

Oznacza to, że tak ważne cechy układu jak determinizm zależą od poziomu opisu. Odpowiednikiem fizycznego pojęcia procesu deterministycznego jest, według powyższej analogii, proces algorytmiczny; sam algorytm odpowiada przy tym deterministycznym prawom ewolucji układu.

Po drugie, fakt, że w opisie postępowania heurystycznego dopuszczalna jest kategoria wyboru oznacza, że realizujący to postępowanie proces nie musi już być procesem zalgorytmizowanym czy deterministycznym. Proces wyboru może być deterministyczny, ale może też, bez szkody dla postępowania heurystycznego, być stochastyczny.

Odpowiednio skonstruowane procedury zawierające operacje wyboru z nieskończonego zbioru możliwości wykazują następującą cechę: nie istnieje żaden szczegółowy wariant zadania ogólnego, który nie mógłby być wykonany w wyniku realizacji takiej procedury, nawet jeżeli zadanie to jest niealgorytmizowalne. Jest to więc istotnie nowa cecha w stosunku do mikro-algorytmicznych programów heurystycznych.

Czy w konkretnych przypadkach lepszy jest wybór odpowiednio umotywowany, czy przypadkowy, to jeszcze inna sprawa, dotycząca już samej techniki konstruowania procedur wyboru. Ogólnie biorąc ważne jest, że wybór może zawierać elementy stochastyczne, wskutek czego klasa maszyn nadających się do realizacji procedur wyboru jest rzeczywiście szersza niż klasa maszyn nadających się do realizacji algorytmów.

