delta

SPIS TREŚCI

NUMERU 12(72)

Rysunki techniczne:
Bogusław Kretkiewicz

W następnym numerze:
Drobiazgi

„Delta"
matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61×86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 1061/79 C-36

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch" oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch".
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ":

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona" Krakowskie Przedmieście 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earlscourt Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5,— nr indeksu 35723/35550

Szczególna teoria względności jest powszechnie uznana za najtrudniejszą i absolutnie niemożliwą do zrozumienia teorię fizyczną. Któż bowiem jest w stanie uwierzyć, że w różnych układach poruszających się względem siebie czas płynie nie tak samo, co przewiduje ta teoria.

Zrozumieć się tego nie da, jeśli przedtem trzeba sobie wyobrazić nieskończenie długi pociąg poruszający się z prędkością światła, jak nam to proponują niektórzy popularyzatorzy. Powiedziałbym więcej: zrozumieć się tego nie da, nawet (a może tym bardziej) jeśli czyjaś wyobraźnia dopuści się podobnego eksperymentu. Popularyzacja bowiem nie ominęła szczególnej teorii względności (jakżeby mogła) i stąd ten paniczny, łagodnie mówiąc, nastrój, jaki to zagadnienie otacza.

Popularyzacja bowiem igra z naszą wyobraźnią przeważnie nie tam, gdzie by należało. Zainteresowanych odeślę może do artykułów madame Pipsztyckiej (np. Delta 11 1979), artykułów, których nieporównana ohyda, naciągana i sztuczna wesołość, wulgarność użytych porównań itp. mogłyby ostrzec Czytelnika i skłonić rzetelnego popularyzatora do lekceważenia, gdyby nie fakt, że właśnie do takiej popularyzacji przywykliśmy, że właśnie taką mamy, wraz ze wszystkimi zgubnymi jej skutkami i konsekwencjami. Szczególna teoria względności? — ach, to nieskończenie długi pociąg. Hasło i odzew, między które nie da się wcisnąć ani źdźbła zrozumienia, czy choćby zainteresowania. „Pijane cząstki", „Zabawmy się w czarną dziurę", „Zagrajmy w antymaterię", „Powróżmy ze stokrotki: neutron, proton, mezon π, hiperon, bozon, czort go wi (stwierdzamy niezerowe prawdopodobieństwo odkrycia nowej cząstki)".

Sprawa wbrew pozorom zasługuje na uwagę. Popularyzacja jest istotnym elementem pracy naukowej, a nie wchodząc w praktyki tej szczegóły i zawiłości powiem, że wyrazić rzecz prosto oznacza nic innego, jak zrozumieć ją głęboko. Czy prosto ma jednak znaczyć prymitywnie (a za to sensacyjnie)? Zabawmy się, zagrajmy, wyobraźmy sobie, poznamy namacalnie (niejako zmysłowo) mechanizm zjawiska — zupełnie podobną sytuację mamy na Słońcu, w czarnych dziurach, w ciele stałym, lub też w świecie cząstek elementarnych. Idźmy na łąkę i przyjrzyjmy pasącym się tam krowom, następnie przyjmijmy do wiadomości istnienie (w afrykańskich sawannach) takusieńkich krów, które mając 3,5 metra wzrostu mają ponadto dwumetrową szyję, skórę lamparcią i jelenie rogi. Prawda, że już wiecie, jak wygląda żyrafa?

Dla każdego (z wyjątkiem może madame Pipsztyckiej) jest oczywiste, że pionki na szachownicy czy też bawiące się dzieci nie mają absolutnie nic wspólnego z elektronami w metalu. Może wspólny jest model matematyczny? Po pierwsze „może", bo na ogół rzecz cała nie jest do końca przez autorów sprawdzona i przemyślana (gdyby to uczyniono, mogłoby się okazać, że cała gra, zabawa czy gra wyobraźni nie jest już do niczego potrzebna). Po drugie jabłko+jabłko = dwa jabłka. Z elektronami rzecz się ma rzeczywiście podobnie — nie jest to jednak wiele znacząca informacja o elektronach (jak zresztą i o jabłkach).

Nie należy się potem dziwić, że Czytelnik zaprawiony w takich rozważaniach traktuje na równi sensację naukową z informacjami o zielonych ludzikach z Marsa (w końcu: zielony ludzik+zielony ludzik to zapewne dwa zielone ludziki, a wyobraźnię mamy wytrenowaną uniwersalnie i zielone ludziki to dla nas małe piwo w porównaniu z nieskończenie długim pociągiem).

Otóż nieprawda. Fizyka wcale nie jest taka trudna, jak to dowodzą (niestety skutecznie) rozmaici popularyzatorzy. Szczególna teoria względności jest najprostszą teorią fizyczną i proste jej przedstawienie jest oczywiście możliwe. Temu właśnie celowi poświęcamy niniejszy gwiazdkowy numer Delty.

Szczególna teoria względności opiera się na dwóch prostych, prawie oczywistych założeniach. Pierwszym jest trójwymiarowość przestrzeni oraz fizyczna realność upływu czasu, jako forum (zwane czasoprzestrzenią), na którym zachodzą wszystkie zjawiska. Prócz tego zakłada się, że za pomocą żadnego doświadczenia nie można odróżnić ruchu jednostajnego od spoczynku. Jest to tzw. zasada względności. Okazuje się, że po uczynieniu tych dwóch założeń nie mamy już żadnej dowolności. Stosując z żelazną konsekwencją proste reguły logicznego wnioskowania dowodzimy, że o ostatecznej postaci teorii decyduje wartość tylko jednej, nieznanej stałej o wymiarze prędkości. Stałą tę możemy wyznaczyć w jakimkolwiek czysto kinematycznym doświadczeniu. Zmierzona wartość wynosi $3 \cdot 10^5$ km $\cdot$ s^{-1} i równa się prędkości światła w próżni.

Wszystkie podstawowe wyniki szczególnej teorii względności (skrócenie długości, wydłużenie czasu czy też $E = mc^2$) mogą być udowodnione za pomocą bardzo prostych metod geometrii oraz algebry. Wyniki te mogą się wydać absurdalne, sami się jednak na nie skazaliśmy, czyniąc powyższe założenia. Logika jest bowiem surową panią i nie pozwala na żadne dowolności. Chcąc obalić teorię względności musielibyśmy zmienić któreś z jej założeń. Warto przy tym przypomnieć, że we wszystkich wykonanych dotychczas doświadczeniach, zarówno w świecie cząstek elementarnych, jak i gwiazd oraz planet, nie zaobserwowano żadnych rozbieżności z przewidywaniami teorii względności. Pułapka jest więc, jak dotąd, bardzo szczelna i nie ma po prostu sposobu na to, by np. czas nie płynął różnie w różnych układach.

PS. Miłośnikom popularyzacji w stylu madame Pipsztyckiej ze względu na niewątpliwe wrażenie niedoinformowania, jakiego doznają w związku z bieżącym numerem, polecamy następujące ćwiczenie. Udajcie się do kuchni. Obejrzyjcie znajdujący się tam lejek. Wyobraźcie sobie taki sam czterowymiarowy. Powinno się przydać w celach treningowych.

Diabelska arytmetyka czyli przyczynek do angelologii

Mgr Marcin MOSTOWSKI i *doc. dr Lesław W. SZCZERBA*

Sławny problem „ile diabłów mieści się na ostrzu szpilki" istotnie bywał rozpatrywany, z tym jednak, że takie sformułowanie problemu jest już dziełem renesansowych prześmiewców. Poważnie problem ten rozpatrywał Tomasz z Akwinu w *Summa Theologiae*, część II (*O aniołach*) rozdział LII § 3: „*Czy wielu aniołów może być równocześnie w tem samem miejscu*". Niektórych Czytelników może zaskoczyć ta zmiana: chodzi ostatecznie o diabły czy anioły? Nie ma tu żadnej zmiany! Każdy diabeł jest również aniołem jak to wynika z tego co pisze wspomniany wyżej Tomasz z Akwinu, zwany z racji swej wiedzy o aniołach „doctor angelicus",

Rozwiązanie zadania M 212

Posłużymy się indukcją. Dla $n = 0$ nasza teza jest prawdziwa. Jeżeli zaś $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ma tę własność, że $p(k) = 2^k$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, to dla wielomianu $q(x) = p(x+1) - p(x)$ mamy $q(k) = 2^{k+1} - 2^k = 2^k$ dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Na mocy założenia indukcyjnego stopień wielomianu q jest nie mniejszy niż $n-1$. Równocześnie $q(x) = a_m((x+1)^m - x^m) + a_{m-1}((x+1)^{m-1} - x^{m-1}) + \ldots + a_0 = a_m(mx^{m-1} + \ldots + 1) + r(x)$ jest stopnia $m-1$. Wobec tego stopień $p \geqslant 1 +$ stopień $q \geqslant n$.

w *Summa Theologiae* rozdział LXII § 1 oraz rozdział LXIII § 8 i § 9. Dużo poważniejsza zmiana mogła umknąć uwadze wielu czytelników: w jednym sformułowaniu mówi się o ostrzu szpilki a w drugim o miejscu. Jest to różnica bardzo istotna: ostrze szpilki ma symbolizować punkt, natomiast o pojęciu miejsca Akwinas mówi (*Summa Theologiae* rozdział LII § 2): „*Jednak co do tego pomylili się niektórzy. Jedni bowiem nie potrafiąc wyjść poza wyobraźnię, przypuścili niepodzielność anioła na sposób niepodzielności punktu i dlatego myśleli, że anioł może być tylko w miejscu, które jest punktem. — Lecz jest oczywistem, że się omylili; punkt bowiem jest czymś niepodzielnym mającym położenie, lecz anioł jest niepodzielny istniejąc poza rodzajem ilości i położenia. Stąd nie potrzeba, by anioł miał określone jedno miejsce niepodzielne co do położenia, lecz czy to podzielne, czy niepodzielne, czy większe, czy mniejsze, według tego jak z wolnej woli stosuje swą moc do ciała większego lub mniejszego*".

W tej sytuacji przez m i e j s c e będziemy rozumieli dowolny podzbiór trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Gdy będziemy rozpatrywać ilu aniołów może być w jednym miejscu musimy wiedzieć co to znaczy, że anioł jest w jakimś miejscu. Doctor angelicus mówi (*ibidem*):
„*... anioł jest w miejscu, przez zastosowanie swej mocy do tego miejsca, ...*"
Jeszcze dobitniej wyraża tę myśl Damascen (*II de Fid. Orth.* cap. 3):
„*... gdzie anioł działa, tam jest*".

Tomasz powołuje się zresztą na ten cytat w *Summa Theologiae* rozdział LII § 2. Możemy zatem powiedzieć:

(1) Anioł jest w miejscu X wtedy i tylko wtedy gdy jest przyczyną zdarzeń zachodzących w tym miejscu.

Na tytułowe pytanie Akwinas odpowiada następująco:
„*... dwaj aniołowie nie istnieją równocześnie w tem samem miejscu*" (*ibidem* § 3). Do takiego wniosku doprowadza go następujące rozumowanie (*ibidem*):
(*) „*A ta jest tego przyczyna, że jest niemożliwem, by dwie przyczyny zupełne były bezpośrednimi przyczynami jednej i tej samej rzeczy. Jest to jasnem w każdym rodzaju przyczyn...*"

Aby wyjaśnić szczegóły tego rozumowania, wyjaśnić owo „*Jest to jasnem...*", zajrzyjmy do Arystotelesa (*Fizyka* II, § 3 str. 194b–195a) gdzie znajduje się klasyfikacja przyczyn. Filozof podaje tam następujące przyczyny:

1] Przyczyna materialna — ma to być materia, z której zrobiony jest skutek. Arystoteles wyjaśnia to na przykładzie kamiennego posągu: jego przyczyną materialną jest kamień. Podobnie, aby podać przykład nieco bardziej współczesny materialną przyczyną Delty jest papier klasy III i farba drukarska. Oczywiście

(2) anioł nie może być przyczyną materialną zjawisk cielesnych ponieważ sam jest niecielesny;

Tomasz w zapowiedzi do rozdziału L *Summa Theologiae* pisze
„*Następnie należy rozważać ... o stworzeniu czysto duchowem które w Piśmie św. nazywa się aniołem, ...*"

2] Przyczyna formalna — ma to być forma jaką przybiera skutek. W przypadku posągu jest to jego kształt, w przypadku Delty treść jej artykułów. Wydaje się naturalne przyjęcie założenia, że

(3) anioł nie może być przyczyną formalną zjawisk cielesnych.

3] Przyczyna sprawcza — jest to istota lub zjawisko, które powoduje skutek. Dla posągu taką przyczyną jest rzeźbiarz lub on i zamawiający to dzieło mecenas, a ściślej decyzja rzeźbiarza by wykonać posąg. Przyczynę sprawczą Delty redakcja nam wykreśliła.

4] Przyczyna celowa — jest to to po co zdarzenie zachodzi. W przypadku posągu jego przyczyną celową jest ozdoba parku, dla Delty natomiast przyczyną celową ... A właśnie, uzupełnienie poprzedniego zdania pozostawiamy Czytelnikowi.

Wróćmy teraz do Tomaszowego rozumowania. Mamy zatem wykazać, że w dowolnym miejscu może być tylko jeden anioł, czyli musimy wykazać, że jeśli anioły A_1 i A_2 są w miejscu X, to $A_1 = A_2$ czyli, że A_1 i A_2 to ten sam anioł. Załóżmy, że A_1 i A_2 są w miejscu X. Oznacza to po prostu, że anioły A_1 i A_2 są przyczynami zjawisk zachodzących w miejscu X. Wobec założeń (2) i (3) możliwe są trzy przypadki:

a] Oba anioły są przyczynami sprawczymi. Ten przypadek zdaje się wynikać ze słowa „*zupełny*" w cytacie (*). Jak się zdaje Tomasz przyjmuje w tym miejscu założenie:

(4) Jeśli anioł A_1 jest przyczyną sprawczą zdarzeń w miejscu X a anioł A_2 jest przyczyną sprawczą w tym samym miejscu X, to A_1 i A_2 są tym samym aniołem.

b] Oba anioły są przyczynami celowymi. W tym przypadku rozumowanie opiera się o pewne prawa działań celowych:

(5) Każde działanie jest celowe.

(6) Każde działanie ma tylko jeden cel.

Gdyby zatem różne anioły były przyczynami celowymi zdarzeń w miejscu X, musiałyby się odbywać w miejscu X dwa działania, a więc dwaj aniołowie musieliby być przyczynami sprawczymi w miejscu X. Możliwość ta została jednak wykluczona w przypadku a.

c] Jeden z aniołów jest przyczyną sprawczą a drugi celową. Jak nam się wydaje przypadek ten został przez Akwinasa przeoczony. Przyjęcie odpowiedniego założenia nie jest dostatecznie uzasadnione tekstem *Summa Theologiae*. Być może więc Doctor Angelicus popełnił w tym miejscu błąd w rozumowaniu.

Rozwiązanie zadania M 213

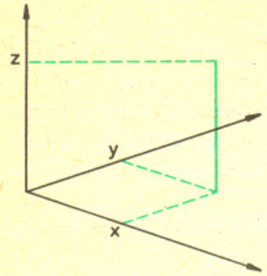
Łatwo sprawdzić, że warunki (1)–(3) spełnione są przez funkcję $f(x, y) = \mathrm{NWW}(x, y)$. Wykażemy, że jest to jedyna taka funkcja. Przypuśćmy, że g też spełnia warunki (1)–(3). Wykażemy indukcyjnie, że dla każdego n mamy $f(x, y) = g(x, y)$ dla wszystkich par x, y takich, że $x + y < n$. Dla $n = 1$ teza wynika z warunku (1). Jeżeli teraz $x_0 + y_0 = n$ i $x_0 > y_0 \geqslant 1$, to

$f(x_0, y_0) = \dfrac{x_0}{x_0 - y_0} f(x_0 - y_0, y_0)$ na mocy (2) i $g(x_0, y_0) = \dfrac{x_0}{x_0 - y_0} g(x_0 - y_0, y_0)$.

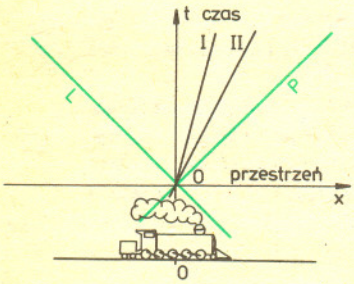
Ponieważ zaś $(x_0 - y_0) + y_0 < n$, więc $f(x_0 - y_0, y_0) = g(x_0 - y_0, y_0)$ i wobec tego $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$. Z warunków (3) i (1) otrzymamy stąd, że $f(x, y) = g(x, y)$ dla wszystkich par (x, y) takich, że $x + y = n$. To kończy dowód.

Czasoprzestrzeń

Dr Robert GOLDBLATT, Nowa Zelandia

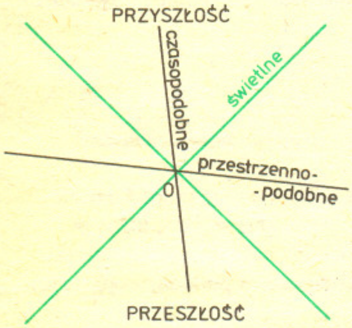


Aby opisać położenie przedmiotu w przestrzeni, potrzebna jest trójka liczb $\langle x, y, z\rangle$, określająca współrzędne tego przedmiotu w trzech wymiarach względem pewnego zadanego początku O. Przedmiot może jednak poruszać się w przestrzeni w pewnym czasie. Aby opisać jego zachowanie, wprowadzamy więc czwartą współrzędną określającą czas (chwilę) t, w którym przedmiot zajmuje położenie o współrzędnych przestrzennych $\langle x, y, z\rangle$. I tak, pełne umiejscowienie przedmiotu w czasie i przestrzeni dane jest przez czwórkę liczb $\langle x, y, z, t\rangle$, tj. przez punkt w czterowymiarowej przestrzeni znanej jako czasoprzestrzeń Minkowskiego od nazwiska Hermanna Minkowskiego (1864–1909), który pierwszy zdefiniował tę przestrzeń i zbadał jej własności geometryczne.

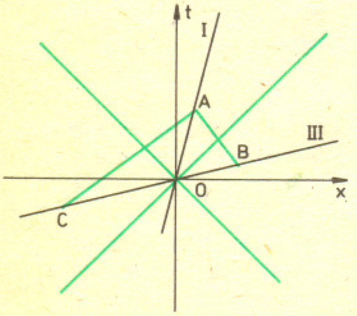


Chociaż nie możemy ani narysować ani wyobrazić sobie przestrzeni czterowymiarowych, możemy zobrazować własności czasoprzestrzeni rozważając jej dwu- i trójwymiarowe aspekty. Ta właśnie metoda została zastosowana przez Alberta Einsteina (1879–1955), twórcę teorii względności, która jest teorią czasu i przestrzeni używaną w fizyce współczesnej. Einstein tłumaczył swoje koncepcje analizując przykład pociągu poruszającego się wzdłuż toru. W tym przypadku wystarczy rozpatrywać tylko jeden wymiar przestrzeni i umiejscowienie przedmiotu jest określone przez punkt $\langle x, t\rangle$ w geometrii dwuwymiarowej, gdzie x jest położeniem na ustalonej prostej (na torze) w czasie t. Ta dwuwymiarowa czasoprzestrzeń wygląda tak jak obok.

Jeżeli pociąg jest nieruchomy, to jego współrzędna przestrzenna x jest stale równa 0 i historia pociągu reprezentowana jest przez pionową oś t. Tę prostą nazywa się linią świata pociągu. Kiedy pociąg porusza się na prawo ze stałą prędkością, jego linia świata jest nachylona w prawo (prosta I), gdyż x zwiększa się jednostajnie ze wzrostem t. Im szybciej jedzie pociąg, tym szybszy jest wzrost x wraz z t, a więc tym bardziej na prawo znajduje się odpowiednia linia świata (prosta II). Istnieje jednak ograniczenie na położenie tej prostej. Zgodnie z teorią względności pociąg nigdy nie może poruszać się szybciej niż światło. Kolorowe proste są liniami świata fotonu (cząstki światła) poruszającego się wzdłuż toru w prawo (P) lub w lewo (L). Żadne przedmioty nie mogą poruszać się szybciej niż foton i wszystkie ich linie świata zawsze znajdują się w obszarze powyżej kolorowych linii. Obszar ten przedstawia wszystkie możliwe przyszłe położenia czasoprzestrzenne początku układu współrzędnych O. Obszar poniżej kolorowych linii reprezentuje wszystkie możliwe położenia przeszłe.



Proste przechodzące przez O i leżące w obszarach przeszłości (dolnym) i przyszłości (górnym) nazywa się czasopodobnymi, podczas gdy linie kolorowe noszą nazwę zerowych (świetlnych). Wszystkie inne proste przechodzące przez O są przestrzennopodobne i leżą w obszarach na lewo i na prawo. Obszary te przedstawiają zdarzenia, które nie znajdują się w czasie ani przed ani po punkcie O. Niektóre z tych zdarzeń są równoczesne z O, czyli zachodzą w tym samym czasie $t = 0$. Takie pojęcie równoczesności jest jednak względne. W istocie już samo pojęcie ruchu jest względne. Nie istnieje ruch bezwzględny, istnieje jedynie ruch względem pewnego punktu odniesienia. Jeżeli uznamy się za nieruchomych „obserwatorów", których linią świata jest oś t, to pociąg mający linię świata I będzie oddalać się od nas. Ale obserwator znajdujący się w pociągu ma prawo uważać się za nieruchomego, a nas za oddalających się od niego. Punkty na prostej I przedstawiają dla niego te same położenia przestrzenne, podczas gdy dla nas są to położenia różne. Zasada względności stwierdza, że oba te punkty widzenia są równouprawnione. Prawa fizyki nie przemawiają na korzyść żadnego z nich.



Tak więc punkty (zdarzenia) na osi x są dla nas równoczesne, gdyż wszystkie mają współrzędną czasową $t = 0$. Jednak dla obserwatora poruszającego się w pociągu zdarzenia te zachodzą w różnych chwilach. Punkty, które są równoczesne dla niego, leżą na innej prostej, a mianowicie na prostej III z następnego rysunku.

Aby to zrozumieć, zauważmy, że jeżeli z punktów B i C (które nie są dla nas równoczesne) zostaną w stronę pociągu wysłane fotony, to do obserwatora w pociągu dotrą one w tej samej chwili (punkt A), a więc i ich wysłanie uzna on za równoczesne.

Kiedy dwie proste są związane w ten właśnie sposób, że jedna jest linią świata poruszającego się obserwatora, a druga prostą składającą się z punktów dla niego równoczesnych, wtedy mówimy, że te proste są ortogonalne. Istnieje proste algebraiczne przedstawienie tego pojęcia. Niech punkt A ma współrzędne (x_1, t_1), a punkt B — (x_2, t_2). Wprowadzamy następującą wielkość:

$$A \cdot B = x_1 x_2 - t_1 t_2.$$

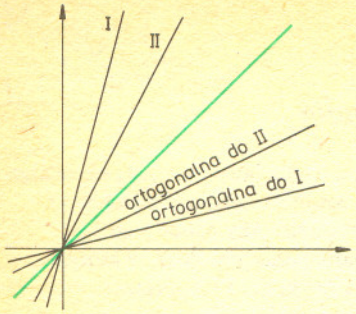
Liczbę $A \cdot B$ nazywamy iloczynem wewnętrznym A i B. Znajdujemy, że prosta OA jest, w opisanym wyżej sensie, ortogonalna do prostej OB wtedy i tylko wtedy, kiedy iloczyn wewnętrzny A i B równa się zero, czyli, gdy $A \cdot B = 0$.

Jeżeli $A = B$, to iloczyn wewnętrzny przybiera postać

$$A \cdot A = x_1^2 - t_1^2.$$

Rozwiązanie zadania M 211

Przypuśćmy, że taki wielomian istnieje. Ponieważ NWW $(m, km) = km$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$, więc równanie $p(x) - x = 0$ ma wówczas nieskończenie wiele rozwiązań $x_k = km$. Wynika stąd, że wielomian p jest tożsamościowo równy x. To przeczy temu, że $p(1) = m \neq 1$.

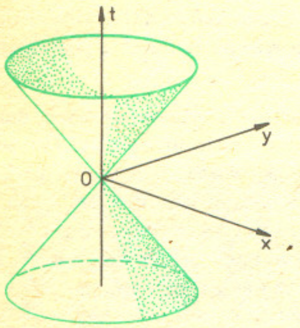


Wyrażenie to może być wykorzystane do rozróżnienia i scharakteryzowania wprowadzonych poprzednio trzech rodzajów prostych, co pokazuje tabelka

OA jest	$A \cdot A$ jest
czasopodobna	ujemny
zerowa	zero
przestrzennopodobna	dodatni

Zauważmy, że zgodnie z poprzednią definicją prosta zerowa jest ortogonalna sama do siebie. Jest tak dlatego, że im szybciej porusza się przedmiot, tym silniej będzie nachylona prosta punktów dla niego równoczesnych, a więc prosta ta znajdzie się tym bliżej linii świata przedmiotu.

Gdy przedmiot porusza się tak szybko, jak to tylko możliwe, czyli z prędkością światła, obie proste pokrywają się.

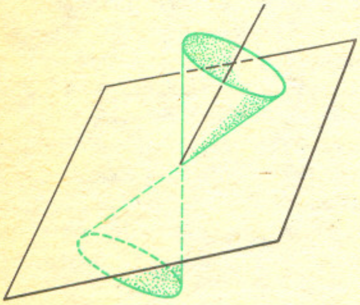


Opisana wyżej dwuwymiarowa geometria jest znana jako płaszczyzna Lorentza, od nazwiska fizyka H. Lorentza (1853–1928), który podał formuły wiążące obliczenia (pomiary) wykonywane przez dwóch obserwatorów poruszających się względem siebie ze stałą prędkością.

Możemy teraz wprowadzić do naszych rozważań dodatkowy wymiar, rozpatrując przedmioty poruszające się względem siebie w dwóch wymiarach, powiedzmy na pewnej płaszczyźnie. Sytuacja taka tworzy czasoprzestrzeń trójwymiarową.

Linie świata fotonów tworzą teraz stożek, nazywany stożkiem światła. Proste znajdujące się wewnątrz stożka (takie jak oś t) są czasopodobne — są to historie poruszających się jednostajnie obserwatorów — zaś proste na zewnątrz stożka są przestrzennopodobne (takie jak oś x).

Każdy punkt w tej czasoprzestrzeni ma trójkę współrzędnych $\langle x, y, t\rangle$ — dwie określają położenie, a jedna czas. Dla danych punktów $A = \langle x_1, y_1, t_1\rangle$ oraz $B = \langle x_2, y_2, t_2\rangle$ ich iloczyn wewnętrzny określony jest teraz wzorem



$$A \cdot B = x_1 x_2 + y_1 y_2 - t_1 t_2.$$

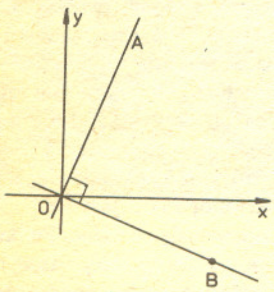
Wtedy można stosować ten sam, jak poprzednio, opis ortogonalności — OA jest ortogonalna do OB wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cdot B = 0$.

W przypadku, gdy $A = B$, mamy teraz

$$A \cdot A = x_1^2 + y_1^2 - t_1^2.$$

W oparciu o to wyrażenie możemy scharakteryzować trzy typy prostych nowej geometrii za pomocą tej samej, jak poprzednio, tabelki.

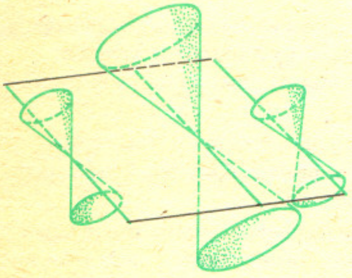
Obecna sytuacja różni się od dwuwymiarowej tym, że istnieją pary przestrzennopodobnych prostych ortogonalnych, na przykład osie x i y. Teraz bowiem wszystkie punkty, które są równoczesne dla jakiegoś obserwatora, tworzą płaszczyznę. Dla nieruchomego obserwatora, którego linią świata jest oś t, będzie to płaszczyzna xy. Dla obserwatora poruszającego się jest ona nachylona do tej płaszczyzny pod pewnym kątem.



Taka płaszczyzna zdarzeń równoczesnych nie zawiera prostych zerowych. Składa się ona wyłącznie z prostych przestrzennopodobnych i przypomina znajomą płaszczyznę euklidesową. Na płaszczyźnie euklidesowej mamy inny iloczyn wewnętrzny, zwykle nazywany iloczynem skalarnym punktów $A = \langle x_1, y_1\rangle$ oraz $B = \langle x_2, y_2\rangle$, dany wzorem

$$A \cdot B = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Z taką postacią iloczynu wewnętrznego proste są ortogonalne ($A \cdot B = 0$), gdy są prostopadłe (tzn. tworzą kąt 90°). Dla pewnego obserwatora w czasoprzestrzeni para ortogonalnych przestrzennopodobnych prostych będzie się składać ze zdarzeń równoczesnych. Proste te będą dla niego reprezentować dwa prostopadłe kierunki przestrzenne.

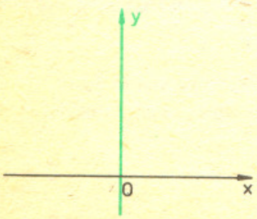


Zauważmy, że w trójwymiarowej czasoprzestrzeni również występują płaszczyzny Lorentza. Przykładem jest dowolna płaszczyzna zawierająca oś t — przecina ona stożek światła wzdłuż dwóch prostych zerowych. Istnieje jednak jeszcze jeden rodzaj płaszczyzny odpowiadający obecności nowych ortogonalnych par prostych: zerowej i przestrzennopodobnej. Ten nowy rodzaj płaszczyzny pojawia się jako płaszczyzna styczna do stożka światła, tzn. przecinająca go wzdłuż jednej tylko prostej.

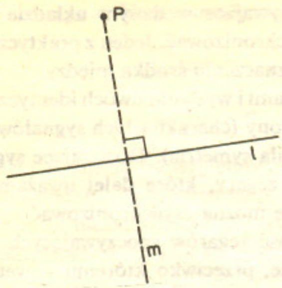
Dwuwymiarowa wersja tej sytuacji, czyli płaszczyzna izotropowa, jest przedstawiona na rysunku niżej i zawiera tylko jedną prostą zerową przechodzącą przez środek układu współrzędnych.

Własności płaszczyzny izotropowej można omawiać, posługując się innym jeszcze iloczynem wewnętrznym, który dla $A = \langle x_1, y_1\rangle$ i $B = \langle x_2, y_2\rangle$ przyjmuje postać

$$A \cdot B = x_1 x_2 + 0 \cdot y_1 y_2 = \\ = x_1 x_2.$$



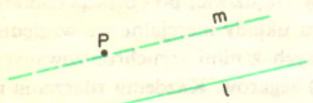
Teraz, jeżeli $A \cdot B = 0$, to jeden z dwóch punktów musi mieć współrzędną x równą 0 i musi leżeć na osi y. Tak więc na płaszczyźnie izotropowej oś y jest prostą osobliwą, co oznacza, że jest ona ortogonalna do każdej innej prostej na tej płaszczyźnie. Wszystkie inne proste przechodzące przez środek układu współrzędnych są ortogonalne do niej i tylko do niej.



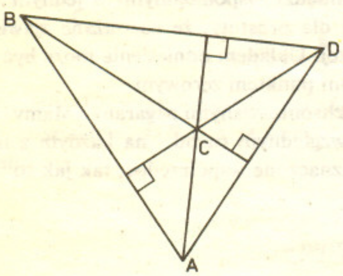
W czasoprzestrzeni, jeżeli linia świata fotonu jest ortogonalna do pewnej prostej przestrzennopodobnej, to jakiś obserwator zobaczy ten foton poruszający się w pewnym kierunku ortogonalnym do kierunku wyznaczonego przez tę prostą przestrzennopodobną.
Dla obserwatora poruszającego się z prędkością światła punkty (zdarzenia) dla niego równoczesne tworzą płaszczyznę izotropową zawierającą jego zerową linię świata.
Można rozwinąć aksjomatyczną postać definicji rozważanych dotychczas związków ortogonalności. Do opisu ortogonalności w płaszczyznach dwuwymiarowych potrzebne są cztery aksjomaty.

Aksjomat 1. Jeżeli prosta *l* jest ortogonalna do prostej *m*, to *m* jest ortogonalna do *l*.

Aksjomat 2. Na dowolnej płaszczyźnie, jeżeli *l* jest prostą nieosobliwą, to dla każdego punktu *P* istnieje jedna i tylko jedna prosta *m* przechodząca przez *P* i ortogonalna do *l*.
Na płaszczyźnie euklidesowej Aksjomat 2 można zilustrować, jak na rysunku wyżej, podczas gdy na płaszczyźnie Lorentza, jeżeli *l* jest zerowa, to *m* jest również zerowa i równoległa do *l*.

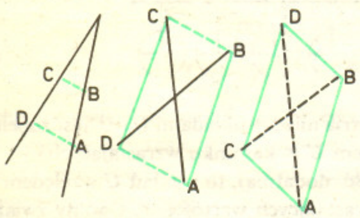


Aksjomat 3. Dla dowolnych czterech punktów *A*, *B*, *C*, *D*, jeżeli prosta *AB* jest ortogonalna do prostej *CD* i *AC* jest ortogonalna do *BD*, to *AD* jest ortogonalna do *BC*.
Na płaszczyźnie euklidesowej Aksjomat 3 przyjmuje postać jak obok, podczas gdy na płaszczyźnie Lorentza istnieją inne możliwości — jak niżej.



Aksjomat ten jest, w istocie, ściśle związany ze stwierdzeniem, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Wreszcie potrzebny jest aksjomat wprowadzający rozróżnienie między trzema możliwymi rodzajami płaszczyzn.

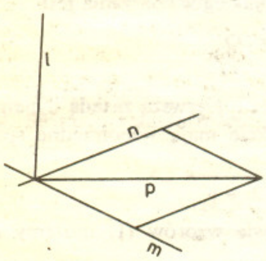
Aksjomat 4. Na dowolnej płaszczyźnie, albo
(i) nie istnieją proste ortogonalne same do siebie (euklidesowa), albo
(ii) istnieje co najmniej jedna prosta ortogonalna sama do siebie, lecz nie istnieją proste osobliwe (Lorentza), albo (iii) istnieje prosta osobliwa (izotropowa).



Aby scharakteryzować ortogonalność w czasoprzestrzeni trójwymiarowej, utrzymujemy w mocy Aksjomaty 1 do 4 i dodajemy

Aksjomat 5. Jeżeli *l* jest ortogonalna do dwóch różnych prostych *m* i *n* oraz *p* leży w płaszczyźnie zawierającej *m* i *n*, to *l* jest ortogonalna do *p*.

Aksjomat 6. Istnieją proste ortogonalne same do siebie, lecz nie istnieją proste osobliwe (tzn. nie istnieją proste ortogonalne do każdej prostej w trójwymiarowej czasoprzestrzeni).



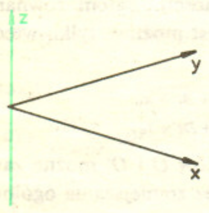
Po dokonaniu dokładnej analizy geometrii w czasoprzestrzeni trójwymiarowej stosunkowo łatwo jest opisać strukturę czterowymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego przez proste „zwiększenie wymiaru o jeden". Iloczyn wewnętrzny jest teraz postaci

$$A \cdot B = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - t_1 t_2$$

i zachowuje poprzednią definicję ortogonalności, a wyrażenie

$$A \cdot A = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - t_1^2$$

używane jest, jak poprzednio, do określenia trzech rodzajów prostych.
Punkty (zdarzenia), dla danego obserwatora w danej chwili równoczesne, tworzą teraz nie płaszczyznę, lecz trójwymiarową rozmaitość (trójwymiarową geometrię).
Dla obserwatora poruszającego się wolniej niż światło rozmaitość ta jest pewnym rodzajem trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, w której „ortogonalny" oznacza „pod kątem 90°".
Każda trójwymiarowa rozmaitość zawierająca oś *t* wygląda jak czasoprzestrzeń trójwymiarowa z zawartym w niej trójwymiarowym stożkiem światła, pochodzącym z przecięcia rozmaitości ze stożkiem czterowymiarowym (zbiorem prostych zerowych).
Wreszcie, dla obserwatora poruszającego się z prędkością światła, trójwymiarowa rozmaitość punktów jednoczesnych jest styczna do stożka światła — rozważana niezależnie wygląda ona tak, jak na rysunku



gdzie oś *z* jest linią świata owego zerowego (świetlnego) obserwatora. Rozmaitość ta jest tworem analogicznym do płaszczyzny izotropowej. Struktura jej określona jest przez następujący iloczyn wewnętrzny

$$A \cdot B = x_1 x_2 + 0 y_1 y_2 + 0 z_1 z_2 =$$
$$= x_1 x_2.$$

W celu przedstawienia pojęcia ortogonalności w geometrii Minkowskiego w postaci aksjomatycznej, zachowujemy Aksjomaty 1 do 4, zaś 5 i 6 zastępujemy przez

Aksjomat 5'. Jeżeli *l* jest ortogonalna do prostych *m*, *n* i *p*, które nie leżą na jednej płaszczyźnie, zaś *q* należy do trójwymiarowej rozmaitości zawierającej *m*, *n* i *p*, to *l* jest ortogonalna do *q*.
Aksjomat 6'. Istnieją proste ortogonalne same do siebie, ale nie ma prostych osobliwych, a żadne dwie przecinające się proste, które są ortogonalne same do siebie, nie są wzajemnie ortogonalne.

Najogólniejsza transformacja współrzędnych i czasu

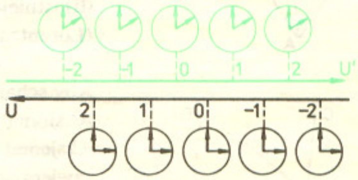
Doc. dr Andrzej SZYMACHA

Transformację Lorentza, będącą osnową szczególnej teorii względności, można wyprowadzić na wiele sposobów. Sam Lorentz znalazł ją jako pewne pomocnicze przekształcenie zmiennych zachowujące równania Maxwella w niezmienionej postaci — nie przypisywał jej zresztą realnego znaczenia. Einstein w swoim wyprowadzeniu oparł się na dwóch postulatach — zasadzie względności i niezależności prędkości światła od ruchu źródła. Istota pracy Einsteina polegała na nadaniu transformacji Lorentza realnego sensu; występujące w transformacji zmienne x' i t' mają sens współrzędnej i czasu mierzonego przez obserwatora posługującego się nowym układem U'. Einstein ponadto zapostulował niezmienniczość wszystkich praw przyrody (z wyjątkiem praw grawitacji, dla której stworzył potem tzw. ogólną teorię względności) względem tej nowej transformacji, czyli rozszerzył równoprawność różnych układów inercjalnych do formułowania wszelkich praw fizyki. Postulat stałej prędkości światła budzi jednak najwięcej oporów psychologicznych u tych, którzy po raz pierwszy spotykają się z teorią względności, i dlatego warto zbadać, jak daleko można zajść w teoretycznej analizie związków między wynikami pomiarów współrzędnych i czasu w dwóch różnych układach, nie korzystając z tego postulatu, a jedynie z prostszego założenia o całkowitym równouprawnieniu dwóch dowolnych inercjalnych układów odniesienia, równouprawnieniu dotyczącym wszelkich wypowiedzi odnoszących się do tych najbardziej fundamentalnych wielkości fizycznych, jakimi są położenie i czas.

Samo sformułowanie powyższego założenia zawiera szereg zwrotów implikujących pewne założenia, oznaczających, że będziemy posługiwali się językiem fizyki. A więc zakładamy słuszność I zasady dynamiki (które definiuje, co to jest układ inercjalny), zakładamy, że nie nastręcza wątpliwości, co to jest zdarzenie, oraz że wiemy, jak w danym układzie odniesienia mierzyć jednoznacznie współrzędne przestrzenne zdarzenia oraz jego współrzędną czasową. Zakładamy, że istnieje możliwość sformułowania słowami, co to jest wzorzec jednostki długości i jak zbudować zegar „tykający" co 1 jednostkę czasu. Ponieważ za chwilę będziemy rozważać różne układy odniesienia będące we względnym ruchu więc aby móc w pełni wykorzystać ich równoprawność, będziemy przyjmowali, że obserwatorzy związani z tymi układami posługują się identycznie brzmiącymi receptami dla zbudowania wzorców spoczywających w ich układach odniesienia. Np. wzorcem długości mogłaby być krawędź sześcianu zawierającego określoną liczbę — powiedzmy 10^{30} — atomów platyny w temperaturze punktu potrójnego wody. (Jest oczywiste, że wzorzec taki byłby bardzo niewygodny, choćby ze względu na cenę platyny — Czytelnik może sobie wymyślać inne przykłady). Podobnie wzorcem czasu mógłby być na przykład średni czas życia swobodnego, spoczywającego w danym układzie neutronu. Jest faktem doświadczalnym, że relacje między różnymi wzorcami, określanymi według recept podobnych do powyższych, odtwarzanymi w różnych układach inercjalnych pozostają nie zmienione i to jest — między innymi — wyraz równouprawnienia różnych układów.

Nim przystąpimy do wyprowadzenia najogólniejszej relacji między współrzędnymi i czasem zdarzenia mierzonymi w różnych układach inercjalnych, musimy zwrócić uwagę, że pomiaru czasu różnych zdarzeń w danym układzie odniesienia można dokonywać pod warunkiem posiadania wielu zegarów spoczywających w danym układzie i znajdujących się w bezpośredniej bliskości każdego ze zdarzeń. Wszystkie te zegary — oprócz tego, że identyczne — muszą być jakoś „równo puszczone w ruch" — czyli, jak mówimy, zsynchronizowane. Zegary spoczywające w danym układzie odniesienia można wszystkie zsynchronizować. Jeden z praktycznych sposobów mógłby polegać na wyznaczeniu środka między synchronizowanymi dwoma zegarami i wysłaniu dwóch identycznych sygnałów symetrycznie w dwie strony (charakter tych sygnałów może być dowolny, byle zachodziła symetria). Docierające sygnały uruchamiają ustawione na zero zegary, które dalej uważamy za zsynchronizowane. Zakładamy, że można zsynchronizować w powyższym sensie dowolną ilość zegarów spoczywających względem siebie. Jest to założenie, przeciwko któremu nawet fanatyczny przeciwnik Einsteina, a zwolennik Newtona, nie mógłby zaprotestować, choć mógłby się dziwić, po co ta pedanteria.

Wyobraźmy sobie teraz dwa układy inercjalne we względnym ruchu i dwie klasy związanych z nimi zsynchronizowanych (oddzielnie w każdej klasie) zegarów. Każdemu zdarzeniu możemy przypisać współrzędne przestrzenne i czas mierzony w tych dwóch układach. Jaki jest związek między współrzędnymi w jednym i drugim układzie? Załóżmy dla prostoty, że rozważane zjawiska zachodzą wzdłuż jednej prostej. Układem odniesienia może być sztywny długi pręt z ustalonym punktem zerowym i przymocowanymi doń zsynchronizowanymi zegarami. Mamy dwa takie pręty będące we względnym ruchu i na każdym z nich obrany jest początek oraz zaznaczone współrzędne, tak jak to pokazuje rysunek.



Przy takim zwrocie osi symetria między układami U i U' jest zupełna. Jeśli U' porusza się względem U w kierunku wzrastających współrzędnych (ma prędkość dodatnią), to i układ U względem U' porusza się w kierunku wzrastających wartości x'. Ogólny związek między wartościami x, t i x', t' jakiegoś zdarzenia jest

$$x = f(x', t') \qquad t = g(x', t'). \tag{1}$$

Weźmy ciało swobodne. Zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki zdarzenia zachodzące w tym punkcie mają współrzędne spełniające związek

$$\alpha x + \beta t = \gamma \tag{2}$$

(ruch jednostajny). Na podstawie wzorów (1) możemy napisać dla tego ciała

$$\alpha f(x', t') + \beta g(x', t') = \gamma. \tag{3}$$

Ale ciało swobodne musi spełniać I zasadę dynamiki również w układzie U' (zasada względności). Zatem równanie (3) musi być liniowe, co jak się okazuje jest możliwe tylko wtedy, gdy same funkcje f i g są liniowe. Zatem

$$x = Ax' + Bt' + x_0 \qquad t = Cx' + Dt' + t_0. \tag{4}$$

Przez odpowiedni wybór początków O i O' można zawsze uczynić stałe x_0 i t_0 równe zeru, zatem bez zmniejszania ogólności możemy napisać

$$x = Ax' + Bt' \qquad t = Cx' + Dt'. \tag{5}$$

Liczby A, B, C i D, stałe dla danej pary układów, mogą zależeć tylko od prędkości względnej układów, którą oznaczymy przez V. Rozwiązując układ równań (5) względem x' i t' dostajemy

$$x' = \frac{D}{AD-BC}x + \frac{-B}{AD-BC}t \qquad t' = \frac{-C}{AD-BC}x + \frac{A}{AD-BC}t. \tag{6}$$

Ze względu na pełną symetrię między U i U' powinna to być transformacja o identycznych współczynnikach jak w (5). Zatem

$$\frac{D}{AD-BC} = A, \quad \frac{-B}{AD-BC} = B, \qquad (7)$$
$$\frac{-C}{AD-BC} = C, \quad \frac{A}{AD-BC} = D.$$

O ile U i U' nie są we względnym spoczynku, to musi być $B \neq 0$ (inaczej punkt o współrzędnej $x' = 0$ miałby w U współrzędną x równą zeru, niezależnie od t', czyli spoczywałby w U). Jeśli $B \neq 0$, to układ równań (7) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$BC - AD = 1, \quad A = -D. \qquad (8)$$

Zdarzenia zachodzące w punkcie $x' = 0$ mają współrzędne w U równe

$$x = A\cdot 0 + Bt' = Bt' \qquad (9)$$
$$t = C\cdot 0 + Dt' = Dt'.$$

Stosunek $\frac{x}{t}$ to nic innego, jak prędkość V. Zatem

$$\frac{x}{t} = \frac{Bt'}{Dt'} = \frac{B}{D} = V. \qquad (10)$$

Równanie (10) wraz z równaniami (8) pozwala trzy spośród współczynników A, B, C i D wyrazić przez jeden z nich, np. D. Dostajemy

$$A = -D(V),$$
$$B = VD(V), \qquad (11)$$
$$C = \frac{1-D^2(V)}{VD(V)}.$$

Podstawiając (11) do (5) dostajemy

$$x = -D(V)x' + VD(V)t' \qquad (12)$$
$$t = \frac{1-D^2(V)}{VD(V)}x' + D(V)t'.$$

Wybór orientacji osi układu U' przeciwny do orientacji układu U był wygodny dla znalezienia powyższej postaci. Teraz nic nie stoi na przeszkodzie, by zmienić znak współrzędnych $x' \to -x'$. Prowadzi to do związku

$$x = D(V)x' + VD(V)t' \qquad (13)$$
$$t = \frac{D^2(V)-1}{VD(V)}x' + D(V)t'.$$

Rozważmy trzeci układ U'' poruszający się względem U' z prędkością Ω. Stosując transformację (13) z zamianą $x \to x'$, $x' \to x''$, $V \to \Omega$, dostajemy

$$x' = D(\Omega)x'' + \Omega D(\Omega)t'' \qquad (14)$$
$$t' = \frac{D^2(\Omega)-1}{\Omega D(\Omega)}x'' + D(\Omega)t''.$$

Aby ustalić związek między x'', t'' a x, t, podstawiamy (14) do (13). Dostajemy

$$x = D(V)[D(\Omega)x'' + \Omega D(\Omega)t''] + VD(V)\left[\frac{D^2(\Omega)-1}{\Omega D(\Omega)}x'' + D(\Omega)t''\right] \qquad (15)$$
$$t = \frac{D^2(V)-1}{VD(V)}[D(\Omega)x'' + \Omega D(\Omega)t''] + D(V)\left[\frac{D^2(\Omega)-1}{\Omega D(\Omega)}x'' + D(\Omega)t''\right].$$

Grupując wyrazy z x'' i t'' mamy

$$x = \left[D(V)D(\Omega) + \frac{D(V)V}{D(\Omega)\Omega}(D^2(\Omega)-1)\right]x'' + [D(V)D(\Omega)\Omega + D(V)D(\Omega)V]t''$$
$$t = \left[\frac{D(\Omega)}{D(V)V}(D^2(V)-1) + \frac{D(V)}{D(\Omega)\Omega}(D^2(\Omega)-1)\right]x'' + \qquad (16)$$
$$+\left[\frac{D(\Omega)\Omega}{D(V)V}(D^2(V)-1) + D(V)D(\Omega)\right]t''.$$

Transformacja (16) jest znów transformacją między dwoma inercjalnymi układami odniesienia i musi mieć wszelkie ogólne własności transformacji (13). Spośród tych własności wykorzystamy fakt, że współczynnik przy nowej współrzędnej w wyrażeniu na starą współrzędną jest równy współczynnikowi przy starym czasie w wyrażeniu na nowy czas. (Jest to stare równanie $A = -D$ z uwzględnieniem, że teraz wszystkie osie mają identyczną orientację).

Daje to równanie

$$D(V)D(\Omega) + \frac{D(V)V}{D(\Omega)\Omega}(D^2(\Omega)-1) = \frac{D(\Omega)\Omega}{D(V)V}(D^2(V)-1) + D(V)D(\Omega), \qquad (17)$$

które po redukcji i uporządkowaniu wyrazów przepisujemy w postaci

$$\frac{D^2(\Omega)-1}{D^2(\Omega)\Omega^2} = \frac{D^2(V)-1}{D^2(V)V^2}. \qquad (18)$$

Ponieważ V i Ω są niezależne, powyższe równanie oznacza, że kombinacja $(D^2-1)/D^2V^2$ jest w ogóle niezależna od V, czyli jest po prostu uniwersalną stałą.
Oznaczmy tę stałą literą E. Mamy

$$\frac{D^2(V)-1}{D^2(V)V^2} = \mathrm{E} = \frac{D^2(\Omega)-1}{D^2(\Omega)\Omega^2}, \qquad (19)$$

co po rozwiązaniu względem D daje

$$D(V) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{E}V^2}}. \qquad (20)$$

Ponieważ dla prędkości $V = 0$ powinniśmy dostać transformację tożsamościową ($x = x'$, $t = t'$), musimy wybrać znak „+" i transformację (1) przepisujemy ostatecznie w postaci

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\mathrm{E}V^2}} \qquad (21)$$
$$t = \frac{t' + V\mathrm{E}x'}{\sqrt{1-\mathrm{E}V^2}}.$$

Jest to najogólniejsza postać zgodna z naszymi założeniami, czyli z zasadą względności. Stała E jest zupełnie dowolna z punktu widzenia naszego rozumowania. W szczególności wybór stałej $\mathrm{E} = 0$ prowadzi do relacji

$$x = x' + Vt' \qquad (22)$$
$$t = t'$$

zwanej transformacją Galileusza, stanowiącą podstawę mechaniki klasycznej. Widzimy, że postać ta nie jest narzucona (aczkolwiek nie jest też wykluczona) przez samą zasadę względności. Zasada względności narzuca postać (21), ale stała uniwersalna E pozostaje nie określona przez powyższe rozumowanie.
Z wzorów (16) możemy odczytać wartość prędkości układu U'' względem U. Oznaczmy tę prędkość symbolem „$V+\Omega$", gdyż według fizyki klasycznej prędkość ta powinna być istotnie sumą prędkości V i Ω. Dzieląc współczynnik przy t'' w wyrażeniu na x przez współczynnik przy x'' w wyrażeniu na x dostajemy (zgodnie z dyskusją prowadzącą do wzorów (13)) szukaną prędkość wypadkową

$$„V+\Omega" = \frac{D(V)D(\Omega)V + D(V)D(\Omega)\Omega}{D(V)D(\Omega) + \frac{D(V)V}{D(\Omega)\Omega}(D^2(\Omega)-1)} = \qquad (23)$$
$$= \frac{V+\Omega}{1 + \frac{V\Omega}{D^2(\Omega)\Omega^2}(D^2(\Omega)-1)} = \frac{V+\Omega}{1+\mathrm{E}V\Omega}.$$

Dla $\mathrm{E} = 0$ wzór powyższy redukuje się istotnie do zwykłej sumy. Różnica między fizyką klasyczną a szczególną teorią względności (czyli fizyką relatywistyczną) zasadza się na tym, że w fizyce klasycznej przyjmowano $\mathrm{E} = 0$, podczas gdy w fizyce relatywistycznej przyjmuje się (zgodnie z doświadczeniem), że $\mathrm{E} \neq 0$.
Stałą E wyznaczyć jest w zasadzie bardzo łatwo. Wystarczy np. zmierzyć trzy prędkości występujące we wzorze (23), tj. V, Ω i „$V+\Omega$". Jeśli jednak E jest w zwykłych jednostkach bardzo małe (jak to ma miejsce w rzeczywistości), prędkości V i Ω nie są zbyt duże, a dokładność pomiaru nie jest niezwykle wielka, to w granicach dokładności może nam wyjść np. $\mathrm{E} = 0 \pm 10^{-10}\,\frac{s^2}{m^2}$, z czego niewiele się dowiadujemy. Toteż całe pokolenia fizyków sądziły, że po prostu $\mathrm{E} = 0$. Żeby zmierzyć E wystarczająco dokładnie na to, by stwierdzić, że w rzeczywistym świecie stała ta jest różna od zera, trzeba posługiwać się dużymi prędkościami ciał i układów.

Zamiast omawiać któreś z tysięcy znanych obecnie doświadczeń tego typu załóżmy, że $E \neq 0$, i zbadajmy jedną z konsekwencji tego faktu. Patrząc na wzór (19) widzimy, że stała E ma wymiar $\frac{s^2}{m^2}$. Zdefiniujmy nową stałą

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{E}} \tag{24}$$

o wymiarze prędkości. Łatwo dowieść, że dla $V, \Omega < v_0$ prędkość wypadkowa „$V+\Omega$" dana wzorem (23) jest też mniejsza od v_0. Na proces rozpędzania ciała możemy patrzyć w specjalny sposób, jako na proces składania prędkości. Układem wyjściowym, względem którego mierzymy prędkości i względem którego ciało na początku spoczywało, jest układ U. Po pewnym czasie (niewielkim) rozpędzone ciało uzyskało prędkość Δv. Wprowadzamy układ U' poruszający się względem U z prędkością Δv. Względem tego nowego układu ciało spoczywa pod koniec pierwszego etapu rozpędzania. Ale przypuśćmy, że czynnik rozpędzający działa nadal. Nada on w drugim etapie prędkość $\Delta v'$ względem U'. Wypadkowa prędkość względem układu wyjściowego wyniesie

$$„\Delta v+\Delta v'" = \frac{\Delta v+\Delta v'}{1+E\Delta v\cdot\Delta v'} < v_0. \tag{25}$$

Możemy znów wprowadzić układ poruszający się z tą prędkością i rozważyć kolejny etap prowadzący do prędkości

$$„„\Delta v+\Delta v'"+\Delta v''" < v_0, \tag{26}$$

znów mniejszej od v_0. Niezależnie od ilości etapów rozpędzania końcowa prędkość nie tylko nie przekroczy, ale nawet nie osiągnie v_0. Prędkość v_0 pozostaje prędkością graniczną. Można dowieść, że gdy czynnik rozpędzający nadaje w kolejnym etapie tę samą prędkość Δv (względem układu, w którym ciało spoczywało na początku tego etapu), to po n etapach prędkość względem układu wyjściowego wyniesie

$$v(n) = \frac{\left(1+\frac{\Delta v}{v_0}\right)^n-\left(1-\frac{\Delta v}{v_0}\right)^n}{\left(1+\frac{\Delta v}{v_0}\right)^n+\left(1-\frac{\Delta v}{v_0}\right)^n}\, v_0 \tag{27}$$

(Czytelnik może spróbować udowodnić ten wzór przez indukcję), zbliża się zatem nieograniczenie do v_0, gdy $n \to \infty$. Łatwo również wykazać, że gdy prędkość $\Omega = v_0$, to „$V+\Omega$" $= v_0$ niezależnie od V.

Prędkość v_0, oprócz tego, że jest prędkością graniczną, ma własność pozwalającą nadać jej nazwę prędkości absolutnej. Jeśli jakiś obiekt porusza się z prędkością v_0 względem układu U', to porusza się z tą samą prędkością v_0 względem każdego innego układu U niezależnie od prędkości względnej U i U'. Teoria względności nie twierdzi, że obiekt czy obiekty takie muszą istnieć w przyrodzie, jeśli jednak istnieją, to ich prędkości są takie same i równe granicznej prędkości wszelkich ciał. Do obiektów takich należy między innymi światło, zatem możemy v_0 utożsamić z prędkością światła. Tak też zazwyczaj nazywa się tę stałą i oznacza symbolem c ($c \simeq 300000$ km/s). Pozwala to przepisać transformację Lorentza w znanej postaci

$$x = \frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad „V+\Omega" = \frac{V+\Omega}{1+\frac{V\Omega}{c^2}}.$$

Brukselka nie jest grą nową. Swego czasu była znana jako „mały topolog", potem jednak słuch o niej zaginął, a wydaje się, że warto ją przypomnieć. Brukselka jest grą dwuosobową, amatorzy mogą jednak tworzyć wariacje na jej temat (gra trójosobowa, czteroosobowa itd.). Do gry potrzebna jest kartka papieru i pisak. Grający rysują linie i kropki. Rzędem kropki będziemy nazywali liczbę wychodzących z niej linii. I tak poniższe kropki mają odpowiednio:

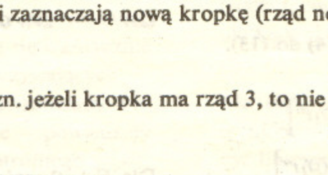
rząd = 0, 1, 2, 3.

Pozostałe przypadki nie będą nas interesowały.

Jak się gra w brukselkę? Na początku na kartce papieru zaznaczonych jest n kropek, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Gracze kolejno prowadzą linie od kropki do kropki (może to być ta sama kropka) i na tej linii zaznaczają nową kropkę (rząd nowej kropki jest oczywiście równy 2). Reguły są następujące:

1) linie nie mogą się przecinać,
2) każda kropka może mieć rząd co najwyżej trzy, tzn. jeżeli kropka ma rząd 3, to nie może być ona ani początkiem, ani końcem nowej linii — nie bierze już udziału w grze,
3) przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu.

A oto przykładowe sytuacje końcowe, gra została zakończona:



$n = 2$ $n = 2$ $n = 3$

Gdy $n = 1$, przebieg partii jest zdeterminowany, nieciekawy, gracz, który zaczyna, skazany jest na porażkę. Kolejne fazy tej gry są następujące:

sytuacja wyjściowa po pierwszym ruchu po drugim ruchu lub i koniec.

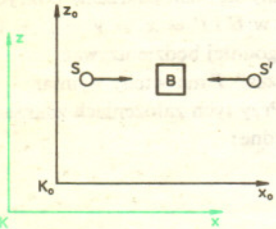
Załóżmy, że obaj gracze bardzo dobrze grają w brukselkę. Zastanówcie się, czy istnieje strategia wygrywająca dla któregoś z grających przy $n = 2, 3, 4, 5$ (dla $n = 2$ problem nie jest trudny).

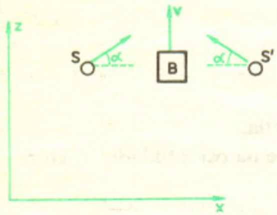
Dr Edward STACHOWSKI

Elementarne wyprowadzenie równoważności masy i energii

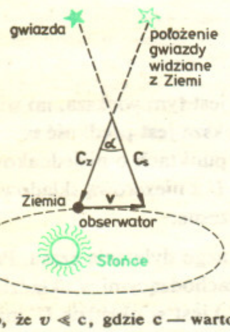
Albert EINSTEIN

Albert Einstein (1879–1955) był nie tylko uczonym, ale też popularyzatorem fizyki, a w pewnym sensie także publicystą naukowym. Zamieszczony obok jego artykuł popularny „Elementary Derivation of the Equivalence of Mass and Energy" nie znany jest szerokim kręgom, zapewne dlatego, że Einstein opublikował go w mało znanym fizykom piśmie izraelskim [*Technical Journal* (Haifa), 1946, V, 16–17]. Niniejszy tekst jest tłumaczeniem z rosyjskiego przekładu artykułu [Albert Einstein, *Sobranije naucznych trudow*, tom 2, 650–652, Izd. „Nauka", Moskwa 1966].





Aberracja światła, odkryta w 1726 r. przez astronoma angielskiego J. Bradleya, to zmiana położenia gwiazdy widzianej z Ziemi na skutek ruchu samej Ziemi. Aberracja roczna, uwarunkowana ruchem orbitalnym Ziemi wokół Słońca, widoczna jest jako ruch gwiazdy po maleńkiej (jak to widać z Ziemi) orbicie eliptycznej. Aberrację można poglądowo wyjaśnić jako wynik (wektorowego) sumowania się prędkości światła gwiazdy i prędkości obserwatora (wraz z Ziemią).



Wobec tego, że $v \ll c$, gdzie c — wartość prędkości światła, więc $c_Z \cong c_S - v$ i kąt aberracji $\alpha = \frac{v}{c}$ (prawo Bradleya). Ten przybliżony wzór bardzo dobrze zgadza się z wynikami pomiarów, co oznacza, że w tym przypadku ($v \ll c$) wystarczającą dokładność obliczeń zapewnia klasyczna reguła składania prędkości Galileusza.

Ponieważ dla $\frac{v}{c} \to 0$ transformacja Lorentza przechodzi w klasyczną transformację Galileusza, więc i wyrażenie na pęd ciała ma dla małych prędkości postać klasyczną. Związek $E = pc$, spełniony dla świetlnej paczki falowej, może być udowodniony przy pomocy transformacji Lorentza i zasady względności bez uciekania się do równań Maxwella. Dowód jest elementarny, choć dosyć długi.

Przedstawione tu wyprowadzenie prawa równoważności, dotychczas nigdzie nie publikowane, ma dwie zalety. Chociaż wykorzystuje się w nim szczególną zasadę względności, nie wymaga to jednak stosowania formalnego aparatu teorii; dowód opiera się jedynie na trzech znanych wcześniej prawach:

(1) zasadzie zachowania pędu,

(2) wyrażeniu na pęd promieniowania, czyli — na pęd pakietu falowego poruszającego się w danym kierunku,

(3) znanym wyrażeniu dla aberracji światła (wpływu ruchu Ziemi na widziane z Ziemi położenie nieruchomych gwiazd, czyli — na prawie Bradleya).

Rozpatrzmy teraz następujący układ. Niech ciało B spoczywa swobodnie w przestrzeni względem układu odniesienia K_0. Dwa pakiety falowe S i S', o energii $E/2$ każdy, poruszają się odpowiednio w dodatnim i ujemnym kierunku osi x_0, padają na ciało i są przez nie pochłonięte. W wyniku tego procesu energia ciała zwiększa się o E. Ciało B pozostaje przy tym w spoczynku względem układu K_0, a wynika to z symetrii zagadnienia.

Rozważmy teraz ten sam proces z układu odniesienia K poruszającego się względem układu K_0 ze stałą prędkością o wartości v w ujemnym kierunku osi z_0. W układzie K rozważany proces opisuje się następująco: ciało B porusza się w dodatnim kierunku osi z z prędkością o wartości v. Kierunki dwóch pakietów falowych w układzie K tworzą z osią x kąt α. Zgodnie z prawem aberracji, w pierwszym przybliżeniu zachodzi związek: $\alpha = \frac{v}{c}$, gdzie c — prędkość światła.

Z rozważań dotyczących przebiegu procesu w układzie K_0 wiemy, że prędkość ciała B po pochłonięciu pakietów falowych S i S' nie ulegnie zmianie.

Zastosujemy teraz do naszego układu prawo zachowania pędu dla składowych w kierunku z w układzie K.

I. Niech M oznacza masę ciała B do chwili pochłonięcia pakietów falowych; w takim razie Mv jest pędem ciała B (zgodnie z mechaniką klasyczną). Każdy pakiet falowy ma energię $E/2$, a więc — zgodnie ze znanym wnioskiem z teorii Maxwella — jego pęd ma wartość $E/2c$. Ściśle rzecz biorąc, tyle jest równy pęd pakietu falowego S względem układu odniesienia K_0. Kiedy jednak prędkość v jest mała w porównaniu z c, wówczas pęd w układzie K ma taką samą wartość — z dokładnością do wielkości małej drugiego rzędu $\left(\frac{v^2}{c^2}\text{ w porównaniu z } 1\right)$. Wartość składowej tego pędu wzdłuż osi z jest równa $\frac{E}{2c}\sin\alpha$, albo — z wystarczającą dokładnością (jeśli pominąć wielkości małe wyższych rzędów) — $\frac{E}{2c}\alpha$, lub $\frac{E}{2}\frac{v}{c^2}$. Zatem składowe pędów pakietów falowych S i S' wzdłuż osi z są w sumie równe $E\frac{v}{c^2}$. Tak więc pęd całkowity układu przed aktem pochłonięcia jest równy

$$Mv + \frac{E}{c^2}v.$$

II. Niech M' oznacza masę ciała B po akcie pochłonięcia. Z góry bierzemy tu pod uwagę możliwość zwiększenia masy po pochłonięciu energii E (jest to konieczne na to, aby ostateczny wynik naszych obliczeń był niesprzeczny). Wobec tego pęd układu po akcie pochłonięcia będzie równy

$$M'v.$$

Skorzystamy wreszcie z zasady zachowania pędu dla składowych wzdłuż osi z. Daje to związek

$$Mv + \frac{E}{c^2}v = M'v$$

lub

$$M' - M = \frac{E}{c^2}.$$

Związek ten wyraża prawo równoważności energii i masy. Zwiększenie energii o E wiąże się ze wzrostem masy o $\frac{E}{c^2}$. A wobec tego, że energię określa się zazwyczaj z dokładnością do stałej addytywnej, więc tę ostatnią możemy wybrać tak, aby zachodził związek:

$$E = Mc^2.$$

Względność równoczesności

Dr Andrzej KRASIŃSKI

Opis algebraiczny

Niech układ odniesienia U' porusza się względem układu U ze stałą prędkością $\boldsymbol{v}$. Wybierzmy w U i w U' kartezjańskie układy współrzędnych o osiach odpowiednio równoległych, przy czym oś x układu U i oś x' układu U' mają kierunek wektora $\boldsymbol{v}$. Ustalmy, że rachubę czasu w obu układach rozpoczynamy od chwili, w której ich początki pokrywały się, tzn. zdarzenie pokrycia się początków obu układów ma współrzędne $t = x = y = z = 0$ w U i $t' = x' = y' = z' = 0$ w U'. Dla geometrycznej interpretacji transformacji Lorentza wygodniej będzie używać współrzędnej $T = ct$ zamiast t (i $T' = ct'$ zamiast t'), bowiem „czas" T ma wtedy wymiar odległości i jest współmierny ze współrzędnymi przestrzennymi. Przy tych założeniach zdarzenie mające w U współrzędne (T, x, y, z) będzie miało w U' współrzędne:

$$T' = \frac{T-(v/c)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$x' = \frac{x-(v/c)T}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{1}$$

$$y' = y, \quad z' = z,$$

gdzie v jest współrzędną x wektora $\boldsymbol{v}$, zaś c jest prędkością światła.

Rozważmy teraz dwa dowolne, różne zdarzenia A i B, położone na osi x układu U, które w układzie U zachodzą równocześnie, tzn.:

$$x_A \neq x_B$$

$$y_A = y_B, \quad z_A = z_B,$$

$$T_A = T_B = T_{AB}.$$

Wtedy, w układzie U' mamy:

$$T'_A = \frac{T_{AB}-(v/c)x_A}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$T'_B = \frac{T_{AB}-(v/c)x_B}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{2}$$

$$T'_B - T'_A = \frac{(v/c)(x_A-x_B)}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

a więc $T'_A \neq T'_B$, przy czym wartość bezwzględna różnicy $(T'_A - T'_B)$ jest tym większa, im większa jest przestrzenna odległość $|x_A - x_B|$ dwu badanych zdarzeń i im większa jest prędkość v.

Wniosek: dwa zdarzenia zachodzące w układzie U równocześnie w punktach o niejednakowej współrzędnej x, w każdym układzie U' poruszającym się względem U z niezerową składową prędkości o kierunku osi x, zostaną zarejestrowane jako nierównoczesne.

Względność równoczesności jest ściśle analogiczna do zjawiska zwanego dylatacją czasu. Polega ono na tym, że odstęp czasowy między dwoma zdarzeniami A i B zachodzącymi w układzie U w tym samym miejscu ($x_A = x_B = x_{AB}$, $y_A = y_B$, $z_A = z_B$, $T_B > T_A$) jest w układzie U' inny niż w U. Mamy bowiem

$$T'_A = \frac{T_A-(v/c)x_{AB}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$T'_B = \frac{T_B-(v/c)x_{AB}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{3}$$

$$|T'_B - T'_A| = \frac{|T_B-T_A|}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > |T_B - T_A|.$$

Zatem obserwatorowi nieruchomemu w układzie U' wydaje się, że czas w U płynie wolniej niż jego czas własny.

Zauważmy teraz, że obserwator nieruchomy w U powiedziałby dokładnie to samo o upływie czasu w U'. Widać to łatwo, jeśli weźmiemy transformację odwrotną do (1) i porównamy upływ czasu T z upływem czasu T' między zdarzeniami o współrzędnych $(T'_A, x'_{AB}, y'_{AB}, z'_{AB})$ i $(T'_B, x'_{AB}, y'_{AB}, z'_{AB})$ w U' (sprawdzenie polecam Czytelnikom jako łatwe ćwiczenie). Zatem każdemu z dwu poruszających się względem siebie obserwatorów wydaje się, że czas płynie wolniej właśnie u tego drugiego.

Rozwiązanie zadania F 71

Czas, po którym sygnał z pierścienia o rozmiarach kątowych α (patrz rysunek) dociera do Ziemi, wynosi

$$t = \frac{r}{c} = \frac{(R^2+D^2-2RD\cos\alpha)^{1/2}}{c},$$

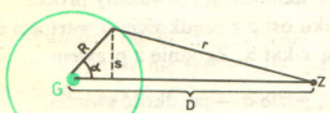
gdzie c jest prędkością światła. Promień krążka świecącego obserwowanego z Ziemi $s = R\sin\alpha$, a obserwowana prędkość rozszerzania się — $v = \frac{ds}{dt}$. Ponieważ

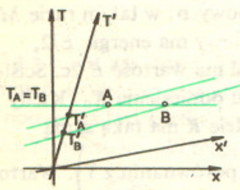
$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{d\alpha}, \text{ więc } \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\alpha}\bigg/\frac{dt}{d\alpha}.$$

Stąd

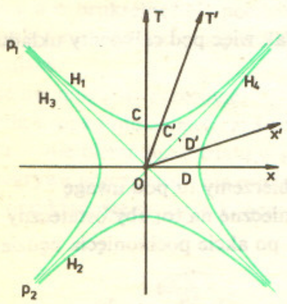
$$v = \frac{c\cos\alpha}{D\sin\alpha}(R^2+D^2-2RD\cos\alpha)^{1/2} \underset{D\gg R}{\simeq} c\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Dla $\alpha < \frac{\pi}{4}$ otrzymujemy $v > c$. Prędkość v może być większa od prędkości światła, gdyż obserwowane z Ziemi rozszerzanie krążka świetlnego nie ma nic wspólnego z żadnym procesem rozszerzania się samego obłoku, a jedynie z niejednakową odległością różnych części obłoku od Ziemi.

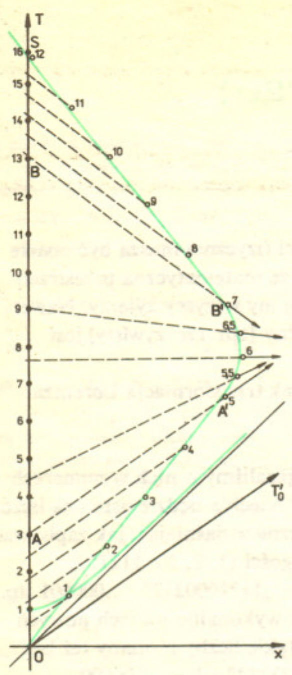




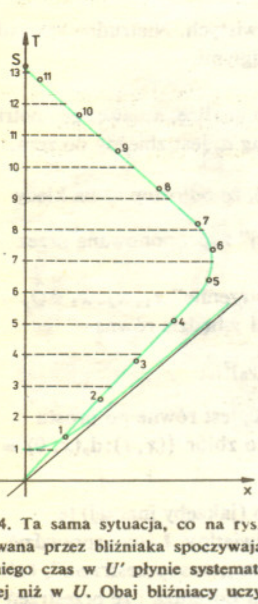
Rys. 1. Względność równoczesności. Zdarzenia A i B są równoczesne w układzie U (w sensie czasu T), lecz nie są równoczesne w układzie U' (w sensie czasu T').



Rys. 2. Wyznaczanie skal na osiach. Jeśli odcinek OC przyjmiemy za jednostkę czasu na osi T, to hiperbola H_1 dana równaniem $T^2 - x^2 = 1$ wyznaczy jednostkowy odcinek czasu na wszystkich innych osiach czasowych przechodzących przez punkt O (odpowiadających układom U' poruszającym się względem U ruchem jednostajnym w kierunku osi x). Podobnie, jeśli OD jest jednostką odległości na osi x, to hiperbola H_4 dana równaniem $T^2 - x^2 = -1$ wyznaczy jednostkę odległości na wszystkich osiach x' przechodzących przez punkt O. Proste p_1 i p_2 są asymptotami hiperbol H_1, H_2, H_3 i H_4.



Rys. 3. „Historia podróży" obserwowana przez podróżującego bliźniaka. Zaznaczone punkty odcinają kolejne jednostki czasu (lata) na osi T i na linii przedstawiającej ruch podróżnika. Niejednakowa długość odcinków na krzywej części toru wynika z nieizometryczności przestrzeni euklidesowej (płaszczyzny rysunku) z czasoprzestrzenią (patrz tekst). Małe strzałki i linie przerywane oznaczają chwilowe kierunki osi x' (linie stałego czasu T') w układzie spoczynkowym podróżującego bliźniaka. Na krzywym odcinku toru, a więc podczas doznawania przyspieszeń, podróżnik obserwuje przyspieszony upływ czasu u swojego spoczywającego brata: w punkcie A, równoczesnym z A' w sensie czasu T', dla U' upłynęło 5 lat, gdy dla U — tylko 3. W punkcie B, równoczesnym z B' w sensie T', dla U' upłynęło 7 lat, gdy dla U już 13.



Rys. 4. Ta sama sytuacja, co na rys. 3, opisywana przez bliźniaka spoczywającego. Dla niego czas w U' płynie systematycznie wolniej niż w U. Obaj bliźniacy uczynią w punkcie spotkania S to samo spostrzeżenie: mniej czasu upłynęło dla tego brata, który podróżował.

Wiąże się z tym tzw. paradoks bliźniąt. Gdyby jednego z braci bliźniaków wysłać w daleką podróż z dużą prędkością, a drugiego pozostawić na Ziemi, to po powrocie podróżnik okazałby się młodszy od swojego brata. Ale, z pozoru, podróżnikowi powinno wydawać się, że to jego bliźniak na Ziemi starzeje się wolniej. Kto ma rację?

Sekret polega na tym, że aby wrócić na Ziemię, podróżujący bliźniak musi najpierw wytracić całą swoją prędkość, a następnie nadać sobie dużą prędkość przeciwnie skierowaną. Nie może więc poruszać się cały czas ruchem jednostajnym, a wobec tego, podczas doznawania przyspieszeń, przestaje być równouprawniony w sensie transformacji Lorentza ze swoim bratem na Ziemi: jego układ spoczynkowy nie jest wówczas układem inercjalnym. W rezultacie bliźniak podróżujący jest po zakończeniu podróży młodszy obiektywnie, tzn. obydwaj bracia zgodzą się na ten sam wniosek w tej sprawie. Można to wykazać ścisłym rachunkiem, który nie jest elementarny, ale można też łatwo zilustrować rysunkami (patrz dalej).

Opis geometryczny

Posługując się interpretacją geometryczną transformacji Lorentza (1) musimy pamiętać, że rysujemy na płaszczyźnie kartki, która jest przestrzenią euklidesową, osie współrzędnych dwuwymiarowej czasoprzestrzeni, która jest nieeuklidesowa, bowiem odległość dwu punktów o współrzędnych (T_1, x_1) i (T_2, x_2) jest w niej dana wzorem:

$$(T_1-T_2)^2-(x_1-x_2)^2 = (T_1'-T_2')^2-(x_1'-x_2')^2, \tag{4}$$

zaś na płaszczyźnie kartki odległość jest dana przez:

$$(T_1-T_2)^2+(x_1-x_2)^2 \neq (T_1'-T_2)^2+(x_1'-x_2')^2.$$

Rysunkowe przedstawienie transformacji Lorentza nie oddaje więc dokładnie relacji metrycznych między układami U i U'.

Dwa zdarzenia A i B są równoczesne w układzie U, gdy leżą na jednej prostej równoległej do osi x (rys. 1), ponieważ mają wtedy tę samą współrzędną czasową $T_A = T_B$. Wówczas jednak ich współrzędne czasowe w układzie U' są różne, bowiem punkty o stałej wartości współrzędnej T' leżą na prostych równoległych do osi x'.

Aby przedyskutować paradoks bliźniąt, musimy najpierw wyskalować rys. 1. Zauważmy w tym celu, że równanie $T^2-x^2 = 1$ przedstawia parę hiperbol (H_1, H_2) na rys. 2, zaś równanie $T^2-x^2 = -1$ parę hiperbol (H_3, H_4). Punkt C o współrzędnych $(T, x) = (1, 0)$, wyznaczający jednostkę czasu na osi T, leży na H_1, zaś punkt D o współrzędnych $(T, x) = (0, 1)$, wyznaczający jednostkę odległości na osi x, leży na H_4. Ponieważ równanie $T^2-x^2 = \mathrm{const}$ jest niezmiennicze względem transformacji Lorentza (patrz równość (4)), punkty o współrzędnych (T', x') spełniających równanie $T'^2-x'^2 = \pm 1$ będą leżały odpowiednio na tych samych hiperbolach. Zatem hiperbole H_1 i H_4 wyznaczają na rys. 2 także jednostkę czasu na osi T' i jednostkę odległości na osi x'. Jeśli więc jednostką czasu na osi T jest odcinek OC, to na osi T' jednostką czasu jest odcinek OC', przy czym, w sensie geometrii czasoprzestrzeni, $OC = OC' = 1$.

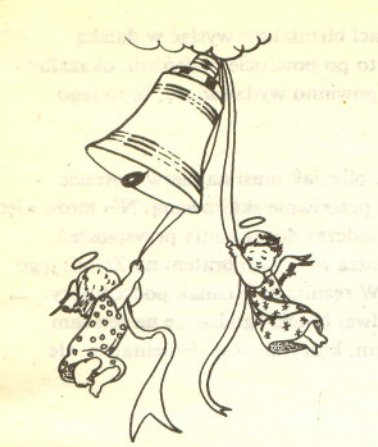
Paradoks bliźniąt można teraz łatwo objaśnić na rysunkach (rys. 3 i 4).

Jak można to sprawdzić

Istnieje proste doświadczenie, które demonstruje bezpośrednio spowolnienie upływu czasu w poruszającym się układzie. Wśród cząstek elementarnych większość stanowią cząstki nietrwałe, które po pewnym czasie rozpadają się na cząstki o mniejszej masie. Dla pojedynczej cząstki nie można przewidzieć, jak długo będzie istniała, lecz dla dużego zespołu cząstek można z bardzo dużą ścisłością stwierdzić, po jakim czasie ich liczba spadnie do połowy początkowej wartości. Czas ten, podzielony przez ln 2, nazywa się umownie średnim czasem życia cząstki nietrwałej.

Dla większości cząstek czas ten jest bardzo krótki, np. dla mionu wynosi on $2{,}3 \cdot 10^{-6}$ s. Zatem, gdyby nie spowolnienie czasu, mion poruszający się z prędkością światła $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s, a więc z maksymalną możliwą, mógłby przebyć średnio drogę $6{,}9 \cdot 10^4$ cm = 690 m przed rozpadem. Miony powstają w górnych warstwach atmosfery ziemskiej przy zderzeniach cząstek promieniowania kosmicznego z cząsteczkami atmosfery. Gdyby każdy mion mógł przebyć tylko tak małą drogę średnią, nie moglibyśmy ich obserwować w laboratoriach na powierzchni Ziemi. Mimo to, detektory na powierzchni Ziemi rejestrują znaczne ilości mionów powstających wiele kilometrów wyżej. Po prostu cząstki promieniowania kosmicznego o wielkiej energii wytwarzają miony poruszające się tak szybko, że opisane wyżej spowolnienie czasu „odmładza" je względem nas i pozwala im dolecieć aż do powierzchni Ziemi przed rozpadem. Efekt ten ujawnia się również w olbrzymiej liczbie doświadczeń z nietrwałymi cząstkami sztucznie wytwarzanymi w akceleratorach, które także przebiegają przed rozpadem drogi o wiele dłuższe, niż mogłyby przebiec, gdyby nie działał efekt dylatacji czasu.

O transformacji Lorentza pozbawionej sensu (fizycznego)



Mgr Krzysztof NOWIŃSKI

Nikt nie śmie wątpić w to, że matematyczne opisy rzeczywistości fizycznej muszą być oparte na analizie i arytmetyce zbudowanej na liczbach rzeczywistych, że matematyczna przestrzeń trójwymiarowa R^3 jest właściwą idealizacją przestrzeni, w której my wszyscy żyjemy. Nawet pieśń gminna głosi „Oj dana, dana, nie ma szatana, a świat realny (tzn. rzeczywisty) jest poznawalny".

Jasne jest więc, że poniższa próba opisu czegoś tak fizycznego jak transformacja Lorentza w innej arytmetyce jest całkowicie bezsensowna.

Otóż:

Dla celów teorioliczbowych zbudowano tzw. liczby p-adyczne (pisaliśmy o nich w numerach 9/1978 i 8/1979). Najkrótszy ich opis wygląda mniej więcej tak: Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą (powiedzmy 3). Wprowadzimy liczby naturalne p-adyczne wyjaśniając, jak zapisywać je w systemie p-tkowym: po prostu oprócz liczb skończonej długości (1, 2, 10, 112100, 121212121212) dopuścimy do konkurencji zapisy nieskończone: ...11210002121, ...000001 itp. Zwykłe algorytmy „pisemnego" dodawania i mnożenia są łatwo wykonalne na tych nowych „liczbach". Następnie, jako miłą niespodziankę, zauważmy, że takie liczby możemy też bez ograniczeń odejmować. Na przykład 0−1 = ...222222 — bo ...222222+1 = ...00000 (przypominamy, że rachujemy w systemie p-tkowym). Możemy także dzielić przez wszystkie liczby względnie pierwsze z p — w naszym przykładzie z 3. Na przykład 1/2 = ...11112 (można sprawdzić przez pomnożenie!), 1/21 = ...122011 (1/21 w układzie trójkowym to 1/7 w dziesiątkowym).

„Zwykła" liczba naturalna n da się zapisać jako $a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \ldots + a_1 p + a_0$, gdzie $0 \leqslant a_i < p$ są „p-tkowymi" cyframi jej rozwinięcia.
Wystarczy dzielić „od tyłu":

... 0001 : 21 = ... 22011
21
... 221
21
... 22
102
... 212
......

pamiętając, że liczymy w układzie trójkowym.

Wobec tego pozostaje nam jeszcze uzupełnić nasze „liczby" o ułamki postaci $\frac{a}{p^k}$, gdzie a jest liczbą p-adyczną opisanej już postaci (zwaną „naturalną"). W tym celu zauważmy, że p-adyczna liczba naturalna zakończona k zerami dzieli się przez p^k, i ustalmy definicję ostateczną:
Liczba p-adyczna jest tworem postaci $p^k a$, gdzie k jest zwykłą liczbą całkowitą, natomiast a jest p-adyczną liczbą naturalną postaci $\ldots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 : a_0 \neq 0$ (wszystkie cyfry p-adyczne spełniają warunek $0 \leqslant a_i < p$).

$p^k \cdot a + p^l \cdot b = p^m(p^{k-m}a + p^{l-m}b)$, $m = \min(k, l)$, wtedy $p^{k-m}a$ i $p^{l-m}b$ są już „liczbami naturalnymi". Po wykonaniu dodawania wyłączamy przed nawias najwyższą możliwą potęgę p. Podobnie postępujemy przy odejmowaniu.

$$(p^k a) \cdot (p^l b) = p^{k+l}(a \cdot b),$$
$$p^k a / p^l b = p^{k-l}(a/b).$$

Jak rachować na takich liczbach, już wiemy. Znamy zatem ich arytmetykę. Do uprawiania analizy (czy to rzeczywistej, czy zespolonej, czy p-adycznej) potrzebne jest najpierw pojęcie wartości bezwzględnej — służące potem do określenia odległości. „Wartość bezwzględną" liczby p-adycznej określa się wzorem $|p^k a|_p = p^{-k}$ i przyjmuje się dodatkowo, że $|0|_p = 0$. Liczbami „bliskimi 0" są zatem liczby podzielne przez wysokie potęgi p, tj. mające na końcu dużo zer. Ogólnie, o odległości dwu liczb p-adycznych decyduje, ile takich samych cyfr mają na końcu. Teraz możemy w zbiorze liczb p-adycznych (oznaczamy go przez $\hat{Q}_p$) wprowadzić pojęcie zbieżności, przyjmując, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} |x_n - x|_p = 0$. Tę ostatnią granicę rozumiemy oczywiście w sensie zbieżności ciągu liczb rzeczywistych. Nietrudno sprawdzić, że działania arytmetyczne na liczbach p-adycznych są operacjami ciągłymi.

Własności $|a|_p$ są niemal analogiczne do własności zwykłej wartości bezwzględnej: $|-a|_p = |a|_p$, $|0|_p = 0$, $|1/a|_p = 1/|a|_p$, $|ab|_p = |a|_p |b|_p$ i tylko zamiast $a+b|_p \leqslant |a|_p + |b|_p$ mamy więcej: $|a+b|_p \leqslant \leqslant \max(|a|_p, |b|_p)$.

Mamy więc wszystko, czego potrzeba, aby zacząć uprawiać algebrę i analizę, a nawet geometrię p-adyczną. Napotkamy tak wiele zabawnych własności (np. jeżeli ciąg a_n jest zbieżny do zera, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny; każdy trójkąt jest równoramienny itd.), że odłóżmy to na kiedy indziej, a zamiast tego zabawmy się w p-adyczną „teorię względności" zaproponowaną przez Stanisława Ulama i C. J. Everetta w 1966 roku.

Opiszmy jak zwykle przestrzeń zdarzeń przez jej współrzędne „przestrzenne" $x_1, x_2, x_3 \in \hat{Q}_p$ i „czas" t, również p-adyczny. Odległość „przestrzenna" punktów x i y będzie równa

$$d_p(x, y) = \sqrt{|(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2|_p},$$

co, jak łatwo (łatwiej, niż się wydaje na pierwszy rzut oka) sprawdzić, jest równe po prostu $\max(|x_1-y_1|_p, |x_2-y_2|_p, |x_3-y_3|_p)$. Oczywiście „stożek świetlny" to zbiór $\{(x, t) : d_p(x, 0) = |t|_p\}$.

Teraz możemy już określić „p-adyczne transformacje Lorentza" jako (jakżeby inaczej) te przekształcenia liniowe „czasoprzestrzeni", które zachowują stożek świetlny. Łatwo sprawdzić, że wszystkie „obroty przestrzenne" (czyli takie przekształcenia liniowe „czasoprzestrzeni", które nie zmieniają czasu ani odległości przestrzennych) są transformacjami Lorentza i że przestrzeń jest jednorodna ze względu na takie przekształcenia (tzn. jeżeli $d_p(x, 0) = d_p(y, 0)$, to x można przeprowadzić na y pewnym „obrotem przestrzennym").

Jednostki „odległości" i „czasu" dobraliśmy tak, by prędkość światła była równa 1.
Normą p-adycznego wektora A, oznaczoną przez $|A|_p$, nazywamy odległość $d(A, 0)$.

Gdy w chwili t'_0 obserwujemy dwa punkty X'_1, X'_2, obserwowane w innym układzie współrzędnych jako X_1 i X_2, mamy:

$$X'_2 = AX_1+Bt_1, \quad X'_2 = AX_2+Bt_2,$$

$$CX_1+dt_1 = t'_0 = CX_2+dt_2,$$

skąd

$$X'_2-X'_1 = A(X_2-X_1)+B(t_2-t_1) =$$

$$= A(X_2-X_1)+\frac{1}{2}B\times C(X_2-X_1) =$$

$$= d(A_1(X_2-X_1)+B_1\times C_1(X_2-X_1)).$$

Ale $|B_1|_p < 1$, $|C_1|_p < 1$ (ponieważ T jest właściwą transformacją Lorentza, czyli prędkość względna jest mniejsza od 1), natomiast A_1 jest obrotem, więc

$$|X'_2-X'_1|_p = |d|_p|A_1(X_2-X_1)+B_1\times C_1(X_2-$$

$$-X_1)|_p = |d|_p|A_1(X_2-X_1)|_p =$$

$$= |d|_p|X_2-X_1|_p$$

gdy nie zmieniamy jednostki miary ($d = 1$)

$$|X'_2-X'_1|_p = |X_2-X_1|_p.$$

Gdy teraz $t = t_2-t_1$ jest odstępem czasu między dwoma zdarzeniami w miejscu x w przestrzeni a t'_2 i t'_1 będą chwilami obserwacji tych zdarzeń w nowym układzie, to

$$t'_2-t'_1 = CX_0+dt_2-(CX_0+dt_1) = d(t_2-t_1)$$

i wobec tego $|t'_2-t'_1|_p = |t_2-t_1|_p$.

A wszystko to wynika oczywiście z mocnego warunku addytywności

$$|a+b|_p = \max(|a|_p, |b|_p)!$$

Niespodzianki zaczną się, gdy będziemy oglądać transformacje czasoprzestrzenne, które mają postać

$$T(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+b_1t \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+b_2t \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+b_3t \\ c_1x_1\ +c_2x_2\ +c_3x_3\ +dt \end{bmatrix}$$

lub krócej

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d \end{bmatrix}$$

lub jeszcze krócej, symbolicznie

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & d \end{bmatrix},$$

gdzie znaczenia A, B, C i d łatwo się domyślić.

Można mianowicie wykazać, że T jest postaci $d\cdot T'$, gdzie d jest tylko wspólną zamianą jednostek miary czasu i odległości, a $T' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & d \end{bmatrix}$, przy czym $|B'|_p \leqslant 1$, $|C'|_p < 1$, a gdy $|x'|_p = 1$, to $|A'X+B'|_p = 1$. Drogą prostych rachunków można stąd wyprowadzić nieco zaskakujące wnioski: otóż p-adyczne transformacje Lorentza zachowują odległości przestrzenne i odstępy czasu! Inaczej: p-adyczna „mechanika relatywistyczna" jest zwykłą mechaniką „galileuszowską". I jeszcze coś: jeżeli $|B'|_p = 1$, to mamy transformację układów poruszających się względem siebie z prędkością 1 — czyli prędkością światła. Możemy zatem obserwować sobie p-adyczny świat z punktu widzenia fotonu!

Mam nadzieję, że bezsensowność takich wniosków pogłębiła u Czytelników przekonanie o całkowitej niesłuszności pomysłu zajmowania się tak dziwnymi tworami jak p-adyczna teoria względności.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof NOWIŃSKI

M 211. Niech m będzie ustaloną liczbą naturalną, różną od 1. Wykazać, że nie istnieje wielomian p, przyjmujący dla każdej liczby naturalnej n wartość $p(n) = \mathrm{NWW}(m, n)$.

Rozwiązanie na str. 3

M 212. Wykazać, że stopień wielomianu p takiego, że $p(k) = 2^k$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, nie może być mniejszy niż n.

Rozwiązanie na str. 2

M 213. Znaleźć wszystkie funkcje $f: N\times N \to N$ (N oznacza zbiór liczb naturalnych) spełniające następujące warunki 1–3:

(1) $f(x, x) = x$,

(2) $xf(x+y, y) = (x+y)f(x, y)$,

(3) $f(x, y) = f(y, x)$.

Rozwiązanie na str. 2

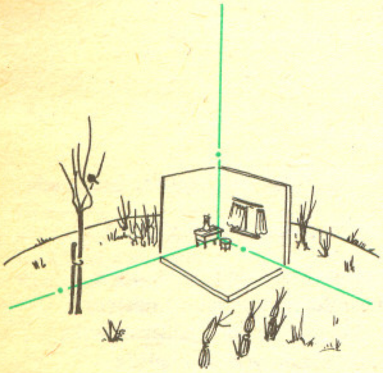
Redaguje dr Halina ABRAMOWICZ

F 71. Gwiazdę otacza sferyczny obłok pyłu. Pył pochłania docierające do niego promieniowanie gwiazdy i, praktycznie natychmiast, wysyła we wszystkich kierunkach promieniowanie wtórne (świeci). Z Ziemi obserwuje się rozbłysk gwiazdy znajdującej się w środku obłoku. Jaką prędkość rozszerzania się krążka świetlnego zobaczy astronom na Ziemi? Przyjmujemy, że gwiazda znajduje się w odległości znacznie większej od promienia obłoku.

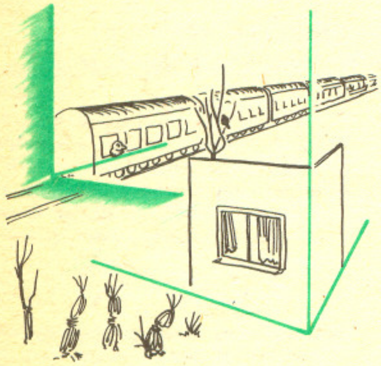
Rozwiązanie na str. 10

δ mała delta

Ruch jest względny



Położenie jakiegokolwiek przedmiotu znajdującego się w pokoju może być określone przez zmierzenie odległości przedmiotu od ścian, sufitu czy też podłogi tego pokoju. Znając zaś to położenie oraz rozmiary i rozmieszczenie innych pokoi w całym budynku bez trudu znajdziemy odpowiednie położenie względem ścian i podłóg jakiegokolwiek innego pokoju. Jedynie trudności natury technicznej powstrzymują nas od stwierdzenia, że równie łatwo rozciągnąć to postępowanie na wszystkie pokoje wszystkich budynków w okolicy, a nawet na całej kuli ziemskiej. Bez trudu można jednak zgodzić się z poglądem, że wybór pokoju nie ma istotnego znaczenia (choć ma bez wątpienia znaczenie praktyczne) i podanie odległości przedmiotu od ścian i podłogi dowolnego pokoju pozwala odpowiedzieć na pytanie, gdzie jest ten przedmiot. Wybór pewnego pokoju to nic innego, jak podanie tzw. układu odniesienia, względem którego określamy położenie przedmiotów. Stwierdzamy, że dowolnie przesunięty lub obrócony układ odniesienia jest równie dobry.



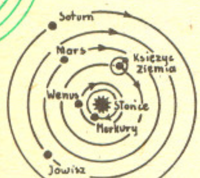
Charakterystyczną cechą wprowadzonych układów odniesienia (pokoi) było, że ich wzajemne rozmieszczenie zostało raz na zawsze ustalone. Można jednak równie dobrze wprowadzić układy poruszające się względem siebie.

Jak na przykład określić położenie rosnącego drzewa względem ścian i podłogi wagonu kolejowego, poruszającego się po prostej ze stałą prędkością równą 25 m/s (90 km/godz.). To proste, prawda? Wszystko liczy się tak samo, jak poprzednio, tyle, że w kierunku owej prostej trzeba co sekundę dodawać (lub odejmować) 25 m. Po prostu drzewo oglądane z pociągu porusza się (oddala lub przybliża) z prędkością 25 m/s.

Ograniczyliśmy się do jednostajnego i prostoliniowego ruchu pociągu, bo tak było łatwiej. To jednak nieistotne ograniczenie. Położenie, a także ruch każdego przedmiotu możemy opisywać względem jakiegokolwiek dowolnie poruszającego się układu, np. względem hamującego lub zakręcającego pociągu. Oglądany z okien pociągu ruch np. budynków nie będzie już wtedy ani prostoliniowy, ani jednostajny.

Wybór pociągu jest też oczywiście dowolny. Z każdego możemy patrzeć na wszystko, co się nam tylko podoba. Tyle, że obserwowany ruch będzie za każdym razem inny.

UKŁAD HELIOCENTRYCZNY KOPERNIKA

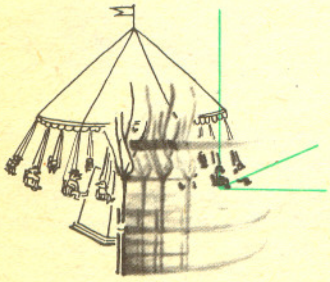


UKŁAD GEOCENTRYCZNY PTOLEMEUSZA

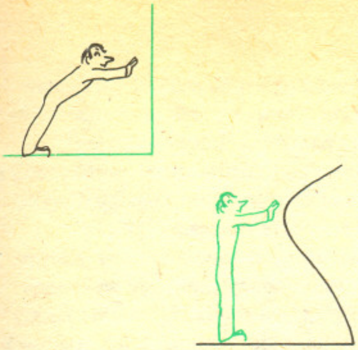
Tak więc wybór dowolnie poruszającego się układu odniesienia nie ma absolutnie żadnego znaczenia, choć w niektórych układach obserwowany ruch może być mniej złożony. Na przykład kamień upuszczony z okna pociągu będzie względem tego pociągu spadał po prostej, zaś względem obserwatora stojącego na zewnątrz — po pewnej krzywej zwanej parabolą. Ten drugi rodzaj ruchu jest oczywiście bardziej złożony. Układ odniesienia związany z pociągiem jest w tym przypadku lepszy.

Dla określenia ruchu planet lepszy jest układ związany ze Słońcem (układ Kopernika), bo w nim tory wszystkich planet są prawie kołowe, czego zupełnie nie widać z Ziemi (układ Ptolemeusza). Podobnie znacznie łatwiej opisać położenie np. budynków stojąc na ziemi niż kręcąc się na karuzeli.

Można więc powiedzieć, że do każdego rodzaju ruchu należy dobrać odpowiedni układ odniesienia, z którego ruch ten wygląda najprościej. Na przykład dla opisania ruchu kamienia rzuconego poziomo z pewną prędkością dobry będzie układ poruszający się jednostajnie po prostej z tą właśnie prędkością rzutu — w układzie takim kamień będzie spadał pionowo. Jeszcze lepszy byłby układ „rzucony" wraz z kamieniem.



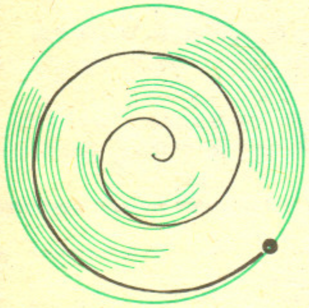
Przewidywanie nawet najprostszych ruchów przedmiotów jest jednak w niektórych układach odniesienia szczególnie trudne. Łatwo jest jedynie w układach poruszających się jednostajnie po prostej, tzw. układach inercjalnych. Wyróżnioną rolę tych układów stwierdzamy łatwo siedząc w rozpędzonym (ale nie trzęsącym) pociągu równie wygodnie, jak w domu. Każde jednak hamowanie czy też zakręt powodują pojawienie się nieznanej siły, która rzuca nas na jedną ze ścian wagonu.



Nie jest to żadna rzeczywista siła. Obserwowana z peronu cała historia wygląda tak, jak byśmy dalej bezwładnie poruszali się jednostajnie po prostej, a tylko hamujący lub zakręcający pociąg usiłował wpaść na nas ścianą swego wagonu. Występowaniem takich właśnie sił pozornych charakteryzują się wszystkie układy odniesienia nie poruszające się jednostajnie po prostej i dlatego ruch jest w takich układach szczególnie złożony.

Spróbujmy opisać ruch kulki pchniętej wzdłuż promienia kręcącej się płyty adapteru. Obserwowany z zewnątrz ruch ten będzie oczywiście bezwładnym jednostajnym ruchem po prostej (chyba, że tarcie o płytę jest za duże). Ale płyta się kręci i kulka zakreśli na niej krzywą, którą można łatwo krok po kroku wyznaczyć, znając prędkość kulki oraz częstość obrotów płyty.

Podobnie, krok po kroku (albo doświadczalnie) można wyznaczyć ruch kulki poruszającej się w dowolnym kierunku. Trzeba przy tym pamiętać, że prędkość elementu płyty jest tym większa, im dalej od środka.

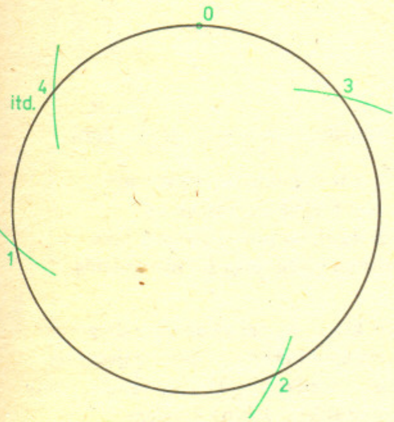


A teraz kilka **pytań**:

(i) Jaki jest ruch kamienia upuszczonego swobodnie w hamującym pociągu? A jaki w zakręcającym?

(ii) Jak waha się wahadło w hamującym pociągu?

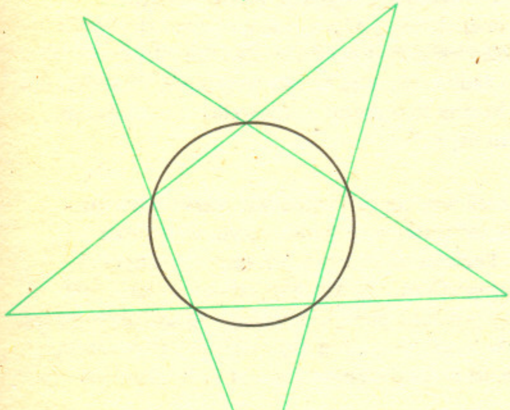
(iii) Stoimy na obracającej się tarczy i usiłujemy rzucić piłkę do kolegi stojącego na tej samej tarczy. Jak należy rzucać? A jak będzie wyglądał rzut do kolegi stojącego poza tarczą? Nie zapominajcie, że przy rzucie poruszamy się wraz z tarczą!



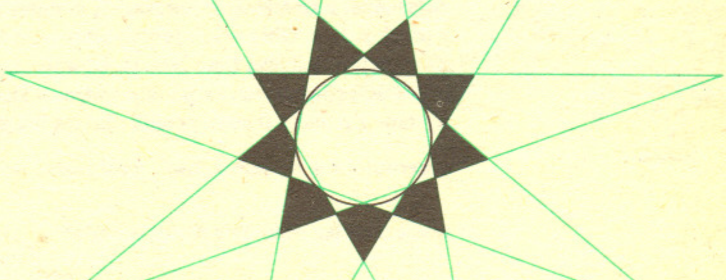
Gwiazdkowe pytania

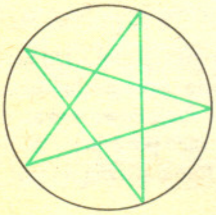
Aby narysować „równą" gwiazdkę, wygodnie jest podzielić okrąg na jednakowe części. Jeżeli będziemy okrąg dzielić cyrklem o takim rozwarciu, jakie było potrzebne do narysowania tego okręgu, to otrzymamy sześć części. A gdybyśmy chcieli podzielić np. na pięć? Wówczas najlepiej próbować na chybił trafił znaleźć odpowiednią rozwartość cyrkla. Może się udać.

Jeśli się nie uda, to możemy nie zrażać się, tylko zaznaczać następne punkty dalej, w kółko. Może uda się za drugim „obrotem". A może za trzecim.



I tu pierwsze pytanie: jeśli po wielu obrotach nasz podział się zamknie, to czy otrzymane punkty podzielą okrąg na równe części, czy niekoniecznie? W końcu jakoś podzieliliśmy nasz okrąg na równe części. Jeżeli połączymy kolejne na okręgu punkty podziału, otrzymamy bardzo marną gwiazdkę — wielokąt foremny. Jeśli jednak przedłużymy jego boki, to mogą się one ze sobą przecinać i wtedy dadzą nam następne gwiazdki. I tu drugie pytanie: ile tych gwiazdek będzie?





Dla trójkąta i kwadratu nic nowego nie otrzymamy. Dla pięciokąta foremnego będzie jedna, dla sześciokąta też jedna. A dla dziewięciokąta — trzy. Może można „z góry" wiedzieć, ile gwiazdek będzie dla siedmiokąta, a ile dla jedenastokąta? Gdy postąpimy przeciwnie, łącząc nie punkty położone najbliżej, a najdalsze, to np. w przypadku pięciokąta otrzymamy ten sam rysunek, tylko mniejszy. I tu pytanie trzecie: czy zawsze rysunek będzie taki sam w przypadku łączenia najbliższych i najdalszych punktów?

Skrócenie długości

Pomiar długości sztaby polega na r ó w n o c z e s n y m zmierzeniu współrzędnych jej końców. Jeśli sztaba spoczywa względem pewnego układu odniesienia, to równoczesność pomiarów przeprowadzanych w tym układzie nie ma oczywiście żadnego znaczenia. Łatwo jednak wyobrazić sobie, że nierównoczesne wyznaczanie współrzędnych obu końców sztaby poruszającej się może dać długość zupełnie dowolną, a nawet zamienić kolejność tych końców. Dlatego długość definiujemy przez pomiary wykonane równocześnie. Ma to szczególne znaczenie w teorii względności, w której równoczesność zdarzeń odległych przestrzennie zachodzi tylko w jednym układzie odniesienia. Równoczesny pomiar współrzędnych końców sztaby może być wykonany za pomocą sieci zsynchronizowanych zegarów umieszczonych gęsto na drodze tej sztaby. Każdy inny, na przykład fotograficzny, rodzaj pomiaru wymaga wprowadzenia odpowiednich poprawek.

Niech więc sztaba porusza się z prędkością v wzdłuż osi x pewnego układu U. W układzie odniesienia U' związanym ze sztabą współrzędne jej końców oznaczymy przez x_1' oraz x_2'. Stąd długość sztaby nieruchomej wynosi $L_0 = |x_1'-x_2'|$.
Początki obu układów współrzędnych wybieramy tak, że dla $x = t = 0$ mamy $x' = t' = 0$.
W układzie U współrzędne końców sztaby w pewnej chwili t wynoszą x_1 oraz x_2, skąd długość $L = |x_1-x_2|$.
Korzystając z transformacji Lorentza (patrz artykuł A. Szymachy) możemy wyrazić współrzędne x_1' oraz x_2' poprzez x_1, x_2, oraz t

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

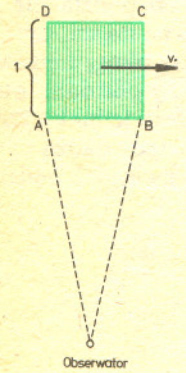
(to samo t!), skąd otrzymujemy

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

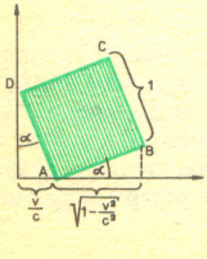
Długość poruszającego się pręta ulega skróceniu w kierunku ruchu i dla $v \to c$ dąży do zera.

Oczywiście odpowiedni pomiar długości pręta, spoczywającego w układzie U, wykonany z układu U' wykaże takie samo skrócenie. Można to wszystko przeanalizować także na rysunkach czasoprzestrzennych (patrz artykuł A. Krasińskiego), co pozostawiamy jako ćwiczenie dla Czytelnika. W kierunku prostopadłym do kierunku ruchu pręt się nie zmienia.

Co się jednak stanie, gdy pręt poruszający się prostopadle (w kierunku osi y) do swej długości z prędkością v względem pewnego układu U będzie obserwowany z rakiety U' poruszającej się względem U w kierunku równoległym do pręta (wzdłuż osi x) z prędkością V. Tak obserwowany pręt będzie n a c h y l o n y do osi x' układu U' związanego z rakietą. Różne bowiem współrzędne x' zmierzone wzdłuż pręta w tej samej chwili t_0' odpowiadają różnym chwilom t w układzie U. Dla różnych czasów t odpowiednie elementy pręta przebędą różną drogę $v \cdot t$ w kierunku $y = y'$. Ponieważ na pręt nie działa żadna siła, więc zasada względności upewnia nas, że nie zostanie on zgięty, a jedynie nachylony. Można to wykazać bezpośrednim rachunkiem, korzystając z transformacji Lorentza w kierunku osi x.



Na koniec zastanówmy się, jak w szczególnej teorii względności wyglądają nierównoczesne obserwacje fotograficzne. Niech sześcian o boku jednostkowym (zmierzonym w układzie związanym z sześcianem) porusza się w dużej odległości od obserwatora (patrz rysunek) z prędkością v. Obserwacja jest wykonywana fotograficznie (w krótkim czasie) w chwili gdy sześcian jest najbliżej (nad głową). Równoczesny pomiar z punktu odległego od sześcianu nie jest oczywiście równoczesny z punktu widzenia siatki z zegarów, którą mija sześcian, gdyż światło wysłane z punktu D musi przejść dłuższą drogę niż światło z punktu A i na to by dojść do obserwatora w tej samej chwili musi zostać wysłane wcześniej. Wcześniej o $t = \frac{1}{c}$. Ale w tym czasie sześcian przesunie się na odległość $\frac{v}{c}$, co spowoduje, że boczna ściana sześcianu (AC) będzie widziana nie prostopadle nad głową, ale nachylona tak, że jej rzut wyniesie $\frac{v}{c}$. Stąd kąt nachylenia $\alpha = \arcsin(v/c)$. Równocześnie ściana sześcianu równoległa do kierunku ruchu (AB) ulegnie skróceniu do wartości $\sqrt{1-v^2/c^2}$, co może być również interpretowane jako nachylenie pod pewnym kątem. Korzystając ze związku $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-v^2/c^2}$, łatwo wykazać, że kąt ten jest równy kątowi nachylenia ściany bocznej. Sześcian uległ więc pozornemu obróceniu (bez deformacji). Pozostawiamy Czytelnikowi odpowiednią analizę fotograficzną innych poruszających się brył.



Patrz w niebo

Na grudniowym niebie pojawia się charakterystyczny gwiazdozbiór Byka (*Taurus*, *Tau*) i na północ od niego gwiazdozbiór Perseusza (*Per*). Szczegółami, które najprędzej rzucają się w oczy w tej części nieba są małe grupki gwiazd — w pobliżu najjaśniejszej gwiazdy w Byku (α *Tau*), Aldebarana — to Hiady, oraz nieco na północny wschód od nich Plejady. Również gołym okiem można dojrzeć dwie dużo słabsze plamki w gwiazdozbiorze Perseusza — *h* i χ*Persei*. Wszystkie cztery obiekty to tzw. gromady otwarte gwiazd.

Patrząc na Plejady nawet przez niedużą lunetę dostrzegamy już kilkadziesiąt gwiazd (zanurzonych w rzadkiej chmurze gazowej). Wiadomo z dokładnych obserwacji, że gromady otwarte zawierają średnio po około 100 gwiazd, których cechą charakterystyczną jest to, że są to układy stabilne — ich składniki związane siłami grawitacyjnymi stosunkowo rzadko odrywają się od gromady przyczyniając się do jej rozpadu.

Skąd to wiadomo? Bardzo łatwo jest narysować diagram H-R dla większości gwiazd wchodzących w skład gromady. Zakładając, że wszystkie gwiazdy w gromadzie są równo od nas odległe (błąd takiego przybliżenia prawie nigdy nie przekracza 1%), umieszczamy na osi pionowej skalę widomych wielkości gwiazdowych, na osi poziomej kolor i nanosimy gwiazdy na taki diagram H-R. Znając absolutne wielkości gwiazdowe składników gromady (z teorii ewolucji i porównania do bliższych nam gwiazd) możemy od razu wyznaczyć dwie rzeczy: odległość do gromady i przebieg ciągu głównego na narysowanym przed chwilą wykresie H-R. Stopień odejścia gwiazd od ciągu głównego (spowodowany ewolucją) mówi nam o wieku gromady. (W tym miejscu założyliśmy, że wszystkie gwiazdy wchodzące w skład gromady są równie stare, tzn. razem „rodziły się"). Z obserwacji potwierdzonych obliczeniami teoretycznymi wynika, że wiek większości znanych nam gromad otwartych waha się od 5 milionów do 10 miliardów lat. Z wymienionych na początku, widocznych gołym okiem gromad najmłodsze są *h* i χ*Per* (10 milionów lat), Plejady są starsze od nich pięciokrotnie, a Hiady liczą już sobie prawdopodobnie 600 milionów lat.

Mgr Tomasz CHLEBOWSKI

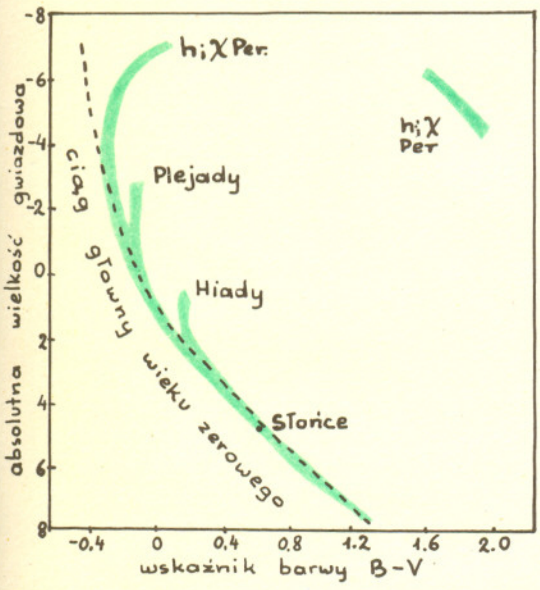


Diagram H-R dla czterech widocznych gołym okiem gromad otwartych.

Od redakcji

Już po zamknięciu numeru dostaliśmy list, który przytaczamy w całości.

Szanowna Redakcjo. Z oburzeniem, graniczącym z niesmakiem przeczytaliśmy dostarczony przez zaUFOnych współpracowników rękopis artykułu p. Nowickiego (przepraszam, jeśli przekręcam nazwisko) o *p*-adycznej teorii względności. Ze zwykłą u Was zarozumiałością autor sądzi, że to, czego nie może zobaczyć w Waszej telewizji już na pewno nie istnieje. Na planetach krążących wokół naszego słońca, p-Adyriusza, przestrzeń fizyczna jest właśnie przestrzenią $\hat{Q}_p^3$ ($\hat{Q}_2^3$ na drugiej planecie, $\hat{Q}_3^3$ na trzecie, $\hat{Q}_5^3$ na piątej itd). I u nas niektórzy maniacy zajmują się *R*-teorią względności, stanowiącą graniczny, zdegenerowany przypadek wszystkich na wskroś fizycznych *p*-adycznych teoryj. Te „relatywistyczne" efekty (skrócenie przedmiotów, spowolnienie czasu itp.), którymi zachłystują się wasze publikatory i naukowe (he, he!) periodyki to wynik degeneracji waszych teoryj; chyba, że degeneracji waszych zmysłów (nie tylko wzroku i słuchu, domyślam się). Kogo nie przekonuje, że latając w kółko nie będzie dłużej żvł, albo że rozpędzona krowa nie jest krótsza, niech to sobie przeliczy — tak zresztą, jak p. Nowecki w swym artykule. Kończąc wyrażam nadzieję, że Redakcja zamieści ten artykuł p. Nowaka, aby mógł on do głębi skompromitować się w naszych oczach.

P. Ad.