

## SPIS TREŚCI

NUMERU 6 (90)

Przyszła historia Wszechświata <i>Dr John K. Lawrence</i>	str. 1
Dlaczego wiatr nie wieje w kierunku centrum niżu barometrycznego <i>Mgr Jerzy Dalek</i>	str. 6
Historia systemów dźwiękowych <i>Dr Krzysztof Dąbrowski</i>	str. 8
Patrz w niebo	str. 11
Mała Delta	str. 12
Zastosowanie probabilistyki w technice rolniczej <i>Dr Krzysztof Mikucki</i>	str. 14
Prehistoria układu SI	str. 15
Zadania	str. 16
Burze <i>Dr Allan J. Thorpe</i>	str. 17

W następnym numerze:  
Śnieg laserowy

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

## Komitet Redakcyjny:

doc. dr Jerzy Bartke  
doc. dr Andrzej Bączyński  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
prof. dr Kazimierz Goebel  
doc. dr Bolesław Grabowski  
dr Jan Hanasz  
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
doc. dr Tadeusz Iwiński  
doc. dr Andrzej Januszajtis  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
prof. dr Leon Jeśmanowicz  
dr Henryk Kaczorek  
prof. dr Marek Kuczma  
mgr Andrzej Mąkowski  
prof. dr Bohdan Paczyński  
prof. dr Zdzisław Pawlak  
prof. dr Arkadiusz Piekara  
doc. dr Sławomir Ruciński  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Zbigniew Semadeni  
doc. dr Grzegorz Sitarski

prof. dr Józef Smak  
prof. dr Jan Stankowski  
doc. dr Kazimierz Stepien  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
doc. dr Stefan Turnau  
prof. dr Jerzy Wdowczyk  
doc. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Janusz Zakrzewski —  
wiceprzewodniczący  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

## Redaguje Kolegium w składzie:

mgr Tomasz Chlebowski  
mgr Maciej Jędrzejczak  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr inż. arch. Jacek Mazur  
dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.  
dr Michał Szurek  
mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.  
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

## Adres Redakcji

ul. Hoża 69 pok. 151,  
00-681 Warszawa  
Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65  
Nr zam. 268/12/81 L-20

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej  
zł 30—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe  
i doręczyciele — w terminach:

— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny  
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.  
Jednostki gospodarki społecznej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie  
w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorki  
indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej,  
przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw,  
ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XVOI W-wa 1153-201045-139-11 w terminach  
podanych dla prenumeraty krajowej

## Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać  
„DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem  
lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście  
00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,  
Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550



Dr John K. LAWRENCE (Stany Zjednoczone)

Copyright © by the Astronomical Society of the Pacific (A.S.P.), 1978. Druk za zgodą redakcji czasopisma Mercury. A.S.P. jest międzynarodową organizacją astronomów. Bliższe informacje o jej publikacjach można otrzymać listownie pod adresem 1290-24th Avenue, San Francisco, Ca 94 122, U.S.A.

Od tysiącleci astronomowie i filozofowie zadają sobie pytanie, czy przestrzeń rozciąga się w nieskończoność, czy też istnieje jakaś jej granica. Odkąd odkryto rozszerzanie się Wszechświata, przed kosmologią pojawił się także problem czasu; czy miał on początek i czy będzie miał koniec?

W latach dwudziestych, używając 2,5-metrowego teleskopu umieszczonego na Mount Wilson, Edwin Hubble i Milton Humason odkryli, że dalekie galaktyki oddalają się od Ziemi z prędkością proporcjonalną do ich odległości od nas. Gdy śledzimy ten ruch wstecz w czasie, mówi on nam, że cała materia Wszechświata rozprzestrzenia się od jednego zdarzenia o charakterze kataklizmu, zwanego „wielkim wybuchem”, które zaszło około 15 mld lat temu. Wydarzenie to wyznacza chwilę, sprzed której nie dociera do nas żadna informacja. Odkrycie Hubble'a i Humasona oznacza zatem, że w skończonej przeszłości nastąpił pewien rodzaj „stworzenia”.

Dzięki postępowi techniki obserwacyjnej mamy coraz lepsze wyobrażenie o przeszłości. Możemy dzisiaj wykrywać obiekty znajdujące się dalej niż 10 miliardów lat świetlnych. Ponieważ światło nie rozchodzi się natychmiastowo, lecz z prędkością „tylko” 300 000 km/s, spojrzenie w przestrzeń jest również spojrzeniem w przeszłość. Znaczy to, że widzimy te obiekty w bardzo wczesnej fazie rozwoju Wszechświata. Aby zobaczyć „przyszłą historię”, potrzebujemy innego typu przyrządu: ludzkiego umysłu.

Dla przewidywania przyszłości budujemy teoretyczne modele Wszechświata. Zawierają one prawa fizyki w postaci zależności matematycznych. Jeśli uwzględnimy przeszły i obecny stan Wszechświata, to równania powiedzą nam, jak Wszechświat będzie rozwijał się w przyszłości.

## Geometria czasoprzestrzeni

Dla modeli kosmologicznych najważniejszymi prawami fizyki są prawa grawitacji. W roku 1916 Albert Einstein opisał grawitację nie jako siłę między masami, lecz jako rzeczywistą deformację geometrii przestrzeni i czasu, w których poruszają się wszystkie ciała. Z tego punktu widzenia orbita planety wokół Słońca nie jest zakrzywną drogą w „płaskiej” przestrzeni, lecz linią geodezyjną w „zakrzywionej” czasoprzestrzeni.

Jeśli wpływ grawitacji na zachowanie materii w skali kosmicznej jest dominujący i jeśli grawitacja jest własnością geometrii albo „kształtu” czasoprzestrzeni, to narzuca się pytanie, jaki mógłby być „kształt” Wszechświata. Nie interesują nas małe zniekształcenia geometrii przez pojedyncze gwiazdy lub galaktyki, lecz całościowy kształt Wszechświata. W podobnym sensie, abstrahując od istnienia gór i dolin, pytamy, czy Ziemia jest kulą.

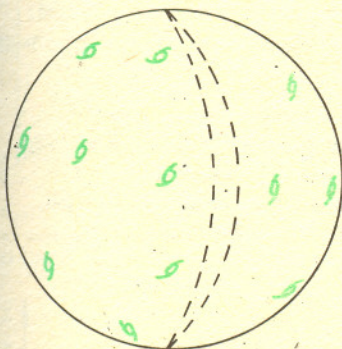
W celu zmniejszenia ilości możliwych „kształtów” do rozsądnej liczby, dokonamy upraszczającego założenia o podstawowej własności Wszechświata. Założenie to nazywa się „zasadą kosmologiczną” i mówi, że geometria Wszechświata, w danym momencie, musi wyglądać tak samo dla wszystkich obserwatorów, niezależnie od ich położenia. Jeśli przyjmiemy to ograniczenie, to pozostają tylko trzy możliwe kształty Wszechświata.

Jednym z możliwych jest kształt wszechświata zamkniętego. Jest on analogiczny do powierzchni kuli, ale z dodanym jeszcze jednym wymiarem (rys. 1). Mówimy, że wszechświat ten ma geometrię trójwymiarowej powierzchni (sfery) czterowymiarowej hiperkuli. Jak widać na rys. 1 taki wszechświat zamyka się w sobie. Zawiera on skończoną „ilość przestrzeni” (jest ograniczony), ale nie ma brzegu. Ponadto jego geometria wygląda tak samo ze wszystkich punktów. Wreszcie zauważmy, że w takim wszechświecie wszystkie linie geodezyjne leżące w jednej płaszczyźnie przecinają się.

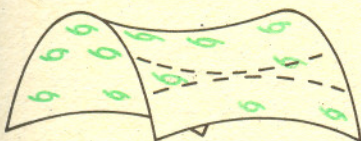
Drugi możliwy kształt jest „otwarty”. Jego dwuwymiarowym odpowiednikiem jest powierzchnia przypominająca kształtem siodło pokazane na rys. 2. Wszechświat ten musi być nieskończenie wielki, aby nie mieć brzegu (który naruszyłby zasadę kosmologiczną, ponieważ obserwatorzy blisko brzegu widzieliby obraz znacznie różniący się od widzianego z dala od brzegu).

W tym wszechświecie istnieją geodezyjne, które leżąc w jednej płaszczyźnie nie przecinają się. Geodezyjne takie rozbiegają się w nieskończoność.

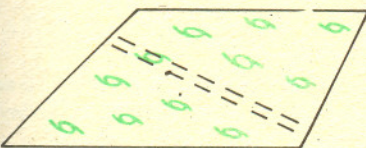
Trzeci przypadek (rys. 3) jest pośredni między dwoma pierwszymi. Geometria takiego wszechświata w ogóle nie jest zakrzywna, lecz jest „płaska” lub euklidesowa. Musi on być przy tym nieskończenie wielki, aby nie miał brzegu, a odległość między dwiema nie przecinającymi się geodezyjnymi leżącymi w tej samej płaszczyźnie (liniami równoległymi) jest wszędzie taką samą.



Rys. 1. Powierzchnia kuli jest dwuwymiarowym odpowiednikiem zamkniętego wszechświata Friedmana



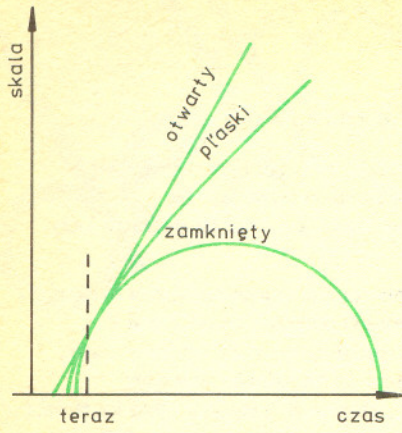
Rys. 2. Dwuwymiarowy odpowiednik otwartego wszechświata Friedmana



Rys. 3. Dwuwymiarowy odpowiednik wszechświata płaskiego

Linie geodezyjne na powierzchni odgrywają analogiczną rolę do prostych na płaszczyźnie. Definicję oraz ciekawe własności geodezyjnych znajdzie Czytelnik w artykule „O powierzchniach i liniach geodezyjnych” (Delta 2/1981).





Rys. 4. Skala wszechświata zmienia się w czasie na różne sposoby, w zależności od użytego modelu Friedmana

Ostatnie eksperymenty wykazują, że neutrina, cząstki uważane dotychczas za bezmasowe, mogą mieć niewielką masę (ok. 0,5 eV). Ich gęstość we Wszechświecie jest tak duża, że nawet znikoma masa wystarczylaby do przekroczenia gęstości krytycznej. Szczegóły znajdzie Czytelnik w artykule „Czego nie wiemy o neutrinach?” (Delta 5/1981).

Kiedy Einstein po raz pierwszy próbował budować modelowe wszechświaty wykorzystując swoją teorię, stwierdził, że nie mogą one trwać w spokoju, lecz muszą rozszerzać się albo zapadać. Wydawało mu się to tak absurdalne, że zmienił swą teorię, aby dopuścić istnienie Wszechświata statycznego. Modele rozszerzającego się Wszechświata zostały potraktowane bardziej poważnie przez matematyka rosyjskiego, Aleksandra Friedmana, który w 1922 r., na krótko przed śmiercią, opublikował swą pierwszą pracę. Dlatego też modele ekspandujących wszechświatów, które będziemy tu rozważać, noszą nazwę modeli Friedmana.

## Rozszerzający się Wszechświat

Podczas gdy w Europie rozwijano teorię, amerykańscy astronomowie odkrywali, że Wszechświat rzeczywiście się rozszerza. Praca ta doprowadziła do słynnego artykułu Hubble'a z 1929 r., w którym wykazał, że światło dalekich galaktyk jest „poczerwienione” (ma większą długość fali) o wielkość proporcjonalną do odległości tych galaktyk. To przesunięcie ku czerwieni jest spowodowane oddalaniem się galaktyk od nas, podobnie jak obniża się ton gwizdka lokomotywy oddalającego się pociągu. Jeśli przyjmijemy tę interpretację, to wynika z niej, że żyjemy w którymś z ekspandujących wszechświatów opisanych przez Friedmana. Jeżeli Wszechświat rozszerza się i jeśli występuje wzajemne przyciąganie grawitacyjne całej materii, pojawia się nowe pytanie. Czy Wszechświat będzie ekspandował zawsze, czy też grawitacja spowoduje jego zahamowanie i zapadnięcie się. Odpowiedź na to pytanie zależy od tego, który z wyżej opisanych modeli pasuje do rzeczywistego Wszechświata (trzy możliwe przypadki pokazane są na rys. 4). Według Friedmana kształt Wszechświata nie ulega zmianie, zmienia się jedynie jego całkowity rozmiar albo skala. W momencie wielkiego wybuchu rozmiar wynosił zero, a w chwili obecnej powiększa się. W przypadku Wszechświata zamkniętego osiągnie on maksymalną wielkość, a potem zmaleje do zera. Teoria Einsteina mówi, że jeśli Wszechświat jest zamknięty, gęstość materii musi być większa od krytycznej gęstości równej ok.  $10^{-29}$  g/cm<sup>3</sup>. Oznacza to, po prostu, że zamknięcie geometrii Wszechświata wymaga pewnej minimalnej masy. Ta krytyczna gęstość jest taka sama, jaka jest potrzebna, aby grawitacyjnie zatrzymać i odwrócić ekspansję. W przypadku Wszechświata otwartego rozszerzanie się nigdy nie ustaje. Przypadek ten zachodzi, kiedy gęstość masy jest mniejsza niż gęstość krytyczna. W przypadku płaskim ekspansja ustaje po nieskończonym czasie, a to wymaga gęstości masy dokładnie równej wartości krytycznej.

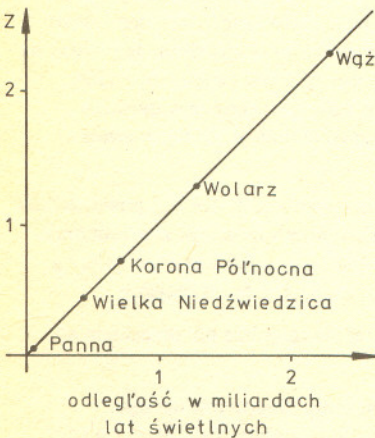
Nie wiadomo jeszcze, który z tych trzech modeli (i czy którykolwiek) opisuje rzeczywisty Wszechświat. Proponowano wiele sposobów wybrania spośród nich właściwego modelu. Jednym z nich jest określenie całkowitej gęstości materii. Ostatnie pomiary, choć nie rozstrzygające, wskazują, że gęstość jest 10 do 100 razy mniejsza niż gęstość krytyczna. Jeśli okazałoby się to prawdą, znaczyłoby, że Wszechświat jest otwarty, nieskończenie wielki i wiecznie ekspandujący.

## Diagramy Hubble'a

W naszym artykule spoglądaliśmy dotąd na Wszechświat w sposób abstrakcyjny, tak jak byśmy byli poza nim i spoglądali na niego „z zewnątrz”. Zastanówmy się jednak, jak wyglądałoby nasze życie w różnych możliwych wszechświatach w różnych chwilach czasu. Wszechświat widziany od wewnątrz może być w danym momencie scharakteryzowany przez tzw. diagram Hubble'a. Aby uzyskać taki diagram wykonujemy obserwacje dużej liczby galaktyk znajdujących się w różnych odległościach od Ziemi. Każda galaktyka jest reprezentowana na wykresie przez punkt, którego rzędna jest określona przez „poczerwienienie”, a odcięta przez odległość galaktyki od nas. Na niewielkich odległościach galaktyki będą układać się wzdłuż linii prostej zgodnie z odkryciem Hubble'a. Na rys. 5 pokazany jest taki diagram.

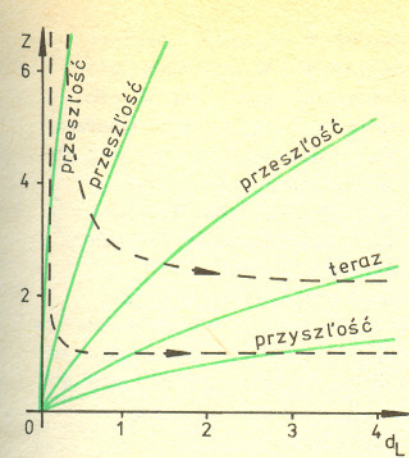
Bardzo odległe galaktyki będą się odchylać od linii prostej pokazanej na rys. 5, ponieważ pojawiają się efekty „krzywej geometrii” i zmieniającej się skali Wszechświata. Aby to zrozumieć, musimy przeanalizować pojęcia „poczerwienienia” i „odległości”.

Poczerwienienie jest określone przez liczbę  $z$ , która jest stosunkiem wzrostu długości fali w czasie jej podróży na Ziemię do jej początkowej długości. Przesunięcie ku czerwieni zinterpretowaliśmy jako skutek oddalania się galaktyk. Dla naszych obecnych celów wygodniej będzie jednak spojrzeć na to przesunięcie w inny sposób. Kiedy światło biegnie przez przestrzeń, długość jego fali jest określona względem skali Wszechświata. Skoro więc skala zwiększa się lub zmniejsza, długość fali świetlnej również się zmienia. Możemy więc wyrazić  $z$  jako wzrost rozmiaru Wszechświata w czasie, gdy światło biegło do Ziemi, podzielony przez rozmiar w momencie, gdy było ono wyemitowane. Jeśli Wszechświat jest większy w chwili obserwacji światła niż był w momencie jego emisji, mówimy, że światło jest „poczerwienione”. Jeśli Wszechświat jest mniejszy w chwili obserwacji niż był w czasie emisji, światło będzie „przesunięte ku błękitowi” (długość jego fali zmniejszy się). Przesunięcie ku błękitowi odpowiada ujemnym wartościom  $z$ .

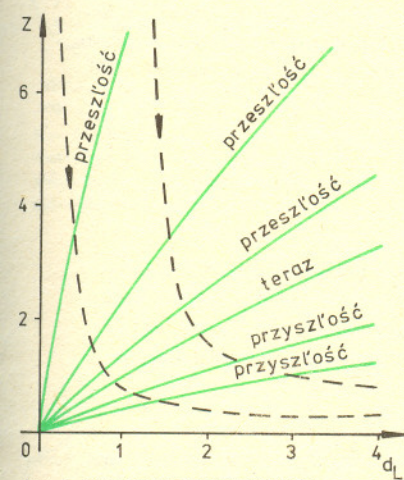


Rys. 5. Diagram Hubble'a przedstawiający przesunięcia ku czerwieni i odległości gromad galaktyk z różnych gwiazdozbiorów

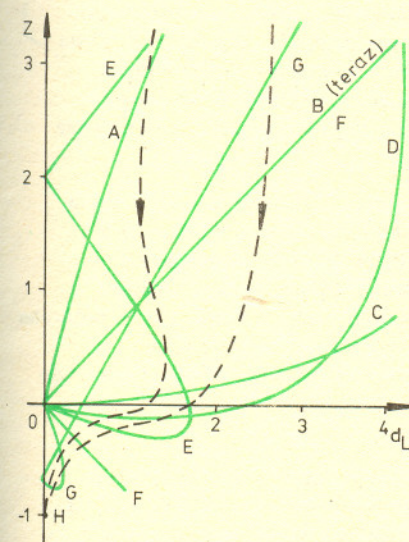




Rys. 6. Diagramy Hubble'a otwartego wszechświata Friedmana w różnych chwilach. Pozioma skala w dziesiątkach miliardów lat świetlnych



Rys. 7. Diagramy Hubble'a płaskiego wszechświata Friedmana w różnych chwilach



Rys. 8. Diagramy Hubble'a zamkniętego wszechświata Friedmana w różnych chwilach

Ważną własnością światła jest fakt, że energia niesiona przez kwant światła (foton) jest odwrotnie proporcjonalna do długości jego fali. A więc poczerwienione światło traci energię, a błękitniejące zyskuje. Wzrost lub zmniejszenie skali Wszechświata powodują również wzrost lub zmniejszenie się odległości między fotonami w wiązce światła, a to pociąga za sobą zmniejszenie lub wzrost natężenia światła, powodując, że dana galaktyka przy obserwacjach fotometrycznych wydaje się ciemniejsza lub jaśniejsza.

Na osi poziomej diagramu Hubble'a odłożone są odległości galaktyk. W praktyce astronomowie używają tzw. „odległości jasnościowych” —  $d_L$ . Aby zdefiniować  $d_L$ , przypuśćmy, że możemy obserwować w dalekiej przestrzeni galaktykę lub inny obiekt, którego rzeczywistą, własną jasność znamy (kosmologowie obserwatorzy spędzają wiele czasu na poszukiwaniu takich obiektów). Mierzmy potem jasność widomą obiektu widzianego z Ziemi  $i$ , porównując obie jasności, możemy obliczyć odległość  $d_L$  przy założeniu, że przestrzeń jest płaska. Zapamiętajmy — im ciemniejszy jest obiekt widziany z Ziemi, tym większa jest jego odległość jasnościowa.

W rzeczywistym Wszechświecie zakrzywienie geometrii i zmieniająca się skala wpłyną na pomiar  $d_L$ . W zamkniętym Wszechświecie zakrzywienie będzie ogniskować promienie świetlne i powodować, że galaktyki będą wydawały się jaśniejsze, a więc bliższe. We Wszechświecie otwartym — na odwrót. We Wszechświecie rozszerzającym się światło będzie poczerwienione, a więc przyćmione, jak opisano wyżej, powodując, że galaktyki wydawać się będą bardziej oddalone. W zapadającym się Wszechświecie światło będzie przesunięte ku błękitowi, a galaktyki będą wydawać się jaśniejsze i bliższe.

## Kilka wykresów

Można obliczyć, jaki jest wpływ tych wszystkich efektów na wygląd diagramów Hubble'a wykonywanych przez astronomów w różnych chwilach w trzech możliwych wszechświatach. Wyniki tych obliczeń pokazane są na rysunkach 6, 7 i 8. Na każdym rysunku linią ciągłą oznaczono krzywe, wzdłuż których układałyby się galaktyki widziane przez astronoma w pewnej konkretnej chwili. Linie przerywane pokazują, jak zmieniałyby się położenia pojedynczych galaktyk na diagramie Hubble'a, jeśli można by było obserwować je przez bardzo długi okres. Te teoretyczne diagramy zawierają obiekty odległe znacznie bardziej niż te, które możemy zaobserwować. Dzisiejszy obserwacyjny diagram Hubble'a, taki jak na rys. 5, zająłby tylko mały prostokąt na każdym z trzech wykresów, odpowiadający małym  $z$  i  $d_L$ . Zauważmy, że w tym obszarze (i na rys. 5) linie odpowiadające chwili obecnej i oznaczone „teraz” są prawie identyczne we wszystkich trzech typach wszechświata. To właśnie ta zgodność powoduje tak wielkie trudności z określeniem, który model odpowiada rzeczywistemu Wszechświatowi.

Trzeba podkreślić, że na rys. 6, 7 i 8 zakładamy istnienie pewnych obiektów w bardzo dużych odległościach, a więc, ze względu na skończoną prędkość światła, w bardzo wczesnej fazie rozwoju. W rzeczywistości istnieją pewne przesłanki, aby sądzić, że nie ma obserwowalnych obiektów z przesunięciami ku czerwieni dużo większymi niż  $z = 3$ . Znaczący to, że obiekty takie musiałyby być widoczne tak, jak wyglądały przed powstawaniem galaktyk. Zakładamy przy tym, że każdy efekt pociemnienia spowodowany przez materię międzygwiazdową możemy zaniedbać lub uwzględnić w poprawkach.

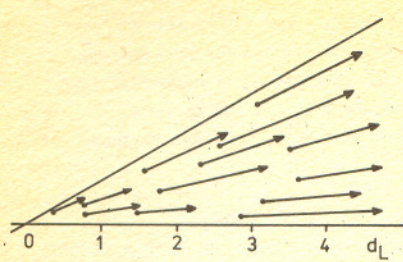
Rys. 6 i 7 przedstawiają wyniki dla wszechświata, odpowiednio otwartego i zamkniętego, przy użyciu tych upraszczających założeń. Wszechświata te są takie, jak się można było spodziewać, ekspandujące, ale spowalniające. We wczesnych chwilach galaktyki są silnie poczerwienione. Z upływem czasu poczerwienienia zmniejszają się, dążąc w końcu do stałej wartości (zera w przypadku płaskim). Równocześnie galaktyki ciemnieją i ich odległości jasnościowe rosną.

## Wszechświat zamknięty

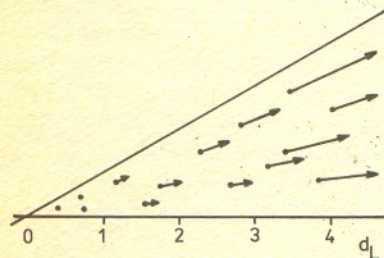
Rys. 8 pokazuje wyniki dla zamkniętego wszechświata Friedmana. Ponieważ wykres ten jest dość skomplikowany, dodano rys. 9, 10, 11 i 12 dla ułatwienia jego interpretacji. Te cztery wykresy ukazują spojrzenie ziemskiego obserwatora w kosmos w różnych chwilach. W każdym przypadku obserwator znajduje się w początku układu współrzędnych. Poczerwienione galaktyki przedstawione są strzałkami skierowanymi od obserwatora, natomiast galaktyki zbliżające się, strzałkami skierowanymi do obserwatora. Im punkt jest dalej od obserwatora, tym większa jest jego odległość jasnościowa; skala odległości jest taka sama, jak na wykresach Hubble'a (z wyjątkiem rys. 12, gdzie skala została powiększona o czynnik 4).

Zanim przyjrzymy się rys. 8 dokładniej, zauważmy, że najbardziej interesujące cechy wszechświata zamkniętego wynikają z dwóch powodów. Po pierwsze, Wszechświat w tym modelu zachowuje się różnie w różnych chwilach, najpierw rozszerzając się, potem zapadając;

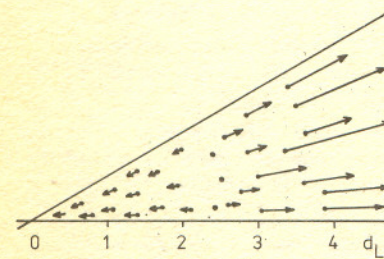




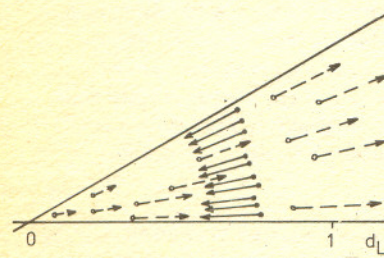
Rys. 9. Zamknięty wszechświat Friedmana w chwili obecnej. Strzałki skierowane na zewnątrz pokazują, że przesunięcia ku czerwieni są proporcjonalne do odległości. Odpowiada to linii B na rys. 8



Rys. 10. Wszechświat zamknięty w momencie osiągnięcia maksymalnych rozmiarów. Odpowiada to linii C na rys. 8



Rys. 11. Wszechświat zamknięty po rozpoczęciu zapadania się. Światło bliskich galaktyk jest przesunięte ku błękitowi. Odpowiada to krzywej D na rys. 8



Rys. 12. Wszechświat zamknięty w chwili, kiedy zapadając się osiąga z powrotem dzisiejsze rozmiary. Skala rysunku została powiększona czterokrotnie w porównaniu z rys. 9, 10 i 11. Galaktyki-widma oznaczone są otwartymi kółkami i przerywanymi strzałkami. Odpowiada to linii F na rys. 8

inaczej niż w pozostałych, które jedynie ekspandują. Ponieważ światło biegnie ze skończoną prędkością, obserwator w pewnej chwili będzie obserwował różne części Wszechświata takimi, jakie były w różnych momentach; im dalej od niego, tym wcześniej w czasie. A więc w fazie zapadania się obserwowane będą w tym samym czasie zarówno efekty ekspansji, jak i zapadania się. W czasie ekspansji natomiast, obserwator widzi wszechświat poczerwieniony, który wygląda bardzo podobnie do wszechświata otwartego lub płaskiego. W momencie, kiedy zamknięty wszechświat osiąga maksymalne rozmiary, obserwator widzi tylko najbliższe galaktyki jako statyczne. Bardziej odległe są ciągle poczerwienione. Podobnie, w fazie zapadania obserwator widzi światło pobliskich galaktyk przesunięte ku błękitowi. Bardziej odległe galaktyki, obserwowane w punkcie zwrotnym, są nie zmienione, a jeszcze dalsze, widziane w trakcie ekspansji, są ciągle poczerwienione. Drugą przyczyną komplikacji w przypadku wszechświata zamkniętego jest sama jego zamkniętość. Powoduje ona, że promienie świetlne opuszczające galaktykę zbiegają się w punkcie „po przeciwnej stronie” wszechświata i tworzą w tym punkcie obraz galaktyki, jak to widać na rys. 14. Ze względu na czas podróży światła, które musi dotrzeć do obserwatora, takie obrazy pojawiłyby się tylko w fazie zapadania.

Pamiętając o tych faktach, możemy przyjrzyć się dokładniej rysunkom. Na rys. 8 krzywa A odpowiada obrazowi wszechświata w momencie wcześniejszym niż chwila obecna. Linia B przedstawia dzisiejszy wygląd wszechświata i ta epoka pokazana jest również na rys. 9. Krzywa C ukazuje wszechświat zamknięty, kiedy osiąga on maksymalną skalę, co pokazane jest również na rys. 10. Dla bliskich galaktyk nachylenie linii C jest równe zeru, ponieważ w tej chwili wszechświat nie ekspanduje. Światło bardziej odległych galaktyk zostało wyemitowane, gdy wszechświat był mniejszy niż w momencie obserwacji, i dlatego jest poczerwienione, zakrzywiając linię C do góry.

## Zapadanie

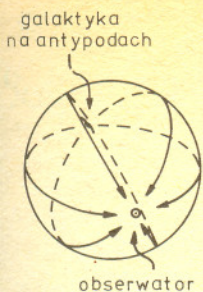
Krzywa D i rys. 11 obrazują wszechświat po momencie, kiedy zaczął się zapadać. Światło bliskich galaktyk zostało wyemitowane w czasie, gdy wszechświat był większy niż w chwili obserwacji. Natomiast światło galaktyk bardziej odległych zostało wyemitowane, kiedy wszechświat był mniejszy niż w momencie obserwacji, i dlatego jest wciąż przesunięte ku czerwieni.

Linia E pojawia się jeszcze później. W punkcie  $z = 2$  zakrzywia się ona z powrotem do osi  $d_L = 0$ . To powtórne zakrzywienie pojawia się właściwie dla wszystkich krzywych poczynając od C, ale przy zbyt dużym  $z$ , aby ujawnić się na rysunku. Galaktyka w punkcie, gdzie krzywa dotyka osi  $d_L = 0$ , jest w zamkniętym wszechświecie w miejscu „przeciwnym” do położenia obserwatora; podobnie jak Biegun Południowy na Ziemi dla obserwatora na Biegunie Północnym. Przez analogię będziemy nazywali ten punkt antypodami obserwatora. Światło wyemitowane z antypodów przebyło cały wszechświat dokoła w różnych kierunkach i całe zbiegło się znowu w miejscu, gdzie znajduje się obserwator; podobnie, jak dzieje się to z południkami Ziemi, które wychodzą z Bieguna Południowego w różnych kierunkach i spotykają się znowu na Biegunie Północnym. Ponieważ całe światło wyemitowane przez galaktykę jest odbierane przez obserwatora, mówimy, że odległość jasnościowa wynosi zero.

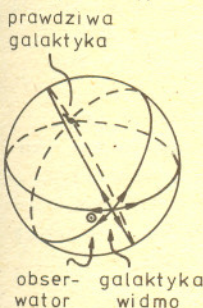
Inna gałąź krzywej E wychodzi z punktu  $d_L = 0$  i  $z = 2$  do góry. Galaktyki na tej linii nie są prawdziwymi galaktykami, ale pewnymi obrazami lub galaktykami „widmami”. Obrazy te tworzą się, kiedy światło po przebiegnięciu całego wszechświata zbiega się w antypodach i znowu się rozbiega. Bliski obserwator widzący rozbiegające się światło miałby wrażenie istnienia galaktyki w punkcie wszechświata przeciwnym do rzeczywistej galaktyki, jak to pokazano na rys. 14. Galaktyki-widma nie pojawiają się, dopóki wszechświat nie osiągnie swojej maksymalnej skali, tyle czasu zajmuje najwcześniejszemu światłu pokonanie drogi do punktu antypodalnego. Obserwator, który znalazłby się na antypodach, powiedzmy, kwazara, miałby ciekawy spektakl.

Linia F opisuje późniejszą chwilę, taką, że skala wszechświata jest taka sama w momencie emisji światła na antypodach i jego odbioru przez obserwatora. W tym czasie światło wszystkich „prawdziwych” galaktyk jest przesunięte ku błękitowi. Choć nie pokazano tego na rys. 8, to na rys. 12 jest wyraźnie widoczne, że prawie wszystkie galaktyki pojawiają się z takim samym przesunięciem ku błękitowi i w tej samej odległości. Wszystkie galaktyki-widma znajdują się na tej samej linii, na której znajdują się obecnie prawdziwe galaktyki. W tym momencie wszechświat wygląda, w pewnym sensie, jak dzisiaj. Istnieje jednak duża liczba galaktyk o świetle przesuniętym ku błękitowi, których dzisiaj nie widać. Spodziewamy się również, że obrazy galaktyk będą raczej nieostre ze względu na odchylenie promieni świetlnych w różnych małoskalowych polach grawitacyjnych, przez które promienie te przechodziły w czasie podróży dokoła wszechświata.





Rys. 13. Wszechświat zamknięty. Obserwator zobaczy „za chwilę” światło od galaktyki na antypodach.



Rys. 14. Wszechświat zamknięty. Galaktyka-widmo pojawia się dzięki zbiegnięciu się promieni światła prawdziwej galaktyki na jej antypodach

Krzywa  $G$  odpowiada jeszcze późniejszej chwili. Prawie wszystkie prawdziwe galaktyki są na dolnej części „niebieskiej” pętli tego wykresu. Odpowiada to momentowi, kiedy skala zapadającego się wszechświata osiągnie 0. Przesunięcie  $z = -1$  oznacza, że długość fali świetlnej jest przesunięta do zera lub do nieskończonej energii.

Dwie przerywane linie na rys. 8 reprezentują dwie konkretne galaktyki, które są obserwowane przez cały czas ewolucji wszechświata. Ich poczerwienienia cały czas się zmniejszają. Bardziej odległa galaktyka zawsze wydaje się zbliżać, nawet wtedy, gdy wszechświat ekspanduje podczas pierwszej połowy czasu swego życia. Bliższa galaktyka początkowo zbliża się, potem przez pewien czas oddala, a potem znowu się zbliża. Zauważmy, że obie te galaktyki w czasie ekspansji są przesunięte ku czerwieni. Oznacza to, że chociaż galaktyka jest poczerwieniona, a więc oddala się, to obserwowana przez dłuższy czas będzie wydawała się zbliżać. Znaczy to również, że poczerwienione galaktyki na rys. 9, 10, 11 i 12 będą wydawały się poruszać w kierunku przeciwnym, niż pokazują strzałki. Oczywiście wszystkie galaktyki, łącznie z naszą, zakończą swój żywot w punkcie  $H$ .

Widać jasno z tych rezultatów, że historia wszechświata zamkniętego charakteryzować się będzie bogactwem zjawisk optycznych. Zjawisk tych pojawia się o wiele więcej, niż można się było spodziewać w oparciu o prosty pogląd przedstawiony na początku. Mimo, że zwykle zadaniem nauki jest sformułowanie prostego, abstrakcyjnego modelu na podstawie wyników obserwacji, czasami zabawniej jest zrobić rzecz odwrotną, jak my tutaj. Mimo, iż trzeba być obiektywnym w rozważaniu obserwacyjnych potwierdzeń każdego z trzech możliwych modeli Wszechświata, jest pokusa, aby opowiedzieć się z przyczyn estetycznych za wszechświatem zamkniętym. Z pewnością byłoby najciekawiej żyć w tym wszechświecie mimo nieuniknionego punktu  $H$ , który czeka na końcu.

(tłum. Tomasz CHLEBOWSKI)

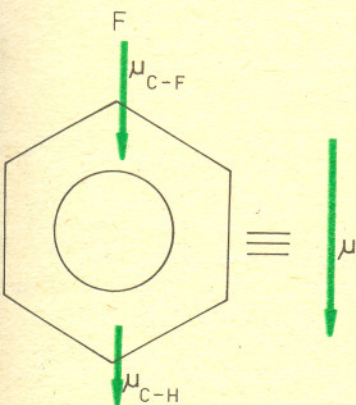


#### Rozwiązanie zadania F 95.

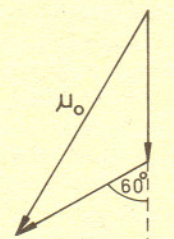
Związki, o których mowa w zadaniu, mają daleko bardziej złożoną budowę niż prosty układ dwóch jednakowych co do wartości, lecz różniących się znakiem ładunków, zwany dipolem. Jednak w obrębie cząsteczki można znaleźć elementy struktury będące z dobrym przybliżeniem dipolami. We wzorach strukturalnych odpowiadają im wiązania pomiędzy różnymi pierwiastkami. Każdemu z wiązań można więc przypisać pewien moment dipolowy.

W przypadku fluorobenzenu oczekiwać należy momentu dipolowego wzdłuż osi symetrii, będącego sumą momentów wiązań C—H i C—F, gdyż pozostałe momenty znoszą się.

Przyjmijmy teraz założenie, że wprowadzenie drugiego podstawnika nie zmienia wartości momentu od pojedynczego podstawnika oraz nie zakłóca zbytnio symetrii. Moment dipolowy dwulfuorobenzenu jest wtedy sumą momentów  $\mu_{C-H}$  i  $\mu_{C-F}$ . Otrzymujemy w ten sposób dla

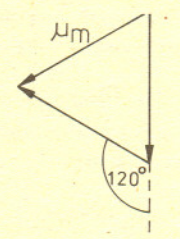


o-dwulfuorobenzenu



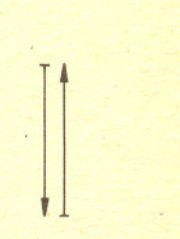
$$\mu_o = 3 \mu \approx 2,48D$$

m-dwulfuorobenzenu



$$\mu_m = \mu = 1,43D$$

p-dwulfuorobenzenu



$$\mu_p = 0$$

Skonfrontujmy nasze wyniki teoretyczne z danymi eksperymentalnymi. W tabeli podane są momenty dipolowe nie tylko dla fluorobenzenu, lecz także dla innych pochodnych benzenu. Wartości momentów podane są jak uprzednio w debajach:  $1D = 3,336 \cdot 10^{-30} C \cdot m$ .

Jeśli Czytelnik zechciałby wykorzystać przedstawiony w zadaniu model do obliczenia momentów dla trój- i więcej fluoropochodnych benzenu, to może porównać swoje wyniki z danymi eksperymentalnymi, które znajdzie np. w książce A. Chelkowskiego „Fizyka dielektryków”, Warszawa 1979, PWN, 162 s.

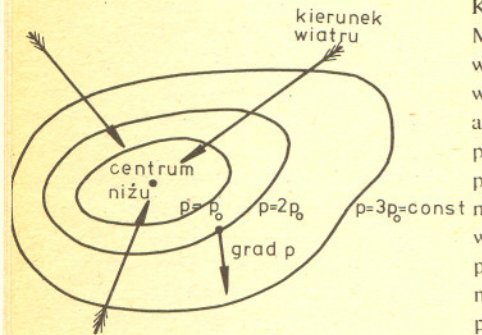
Podstawnik X	$\mu$ dla $C_6H_5X$	$\mu_o$ wartość teoretyczna	$\mu_o$ wartość eksperymentalna	Błąd oszacowania [%]	$\mu_m$ wartość teoretyczna	$\mu_m$ wartość eksperymentalna	Błąd oszacowania [%]
F	1.43	2.48	2.38	4	1.43	1.40	2
Cl	1.56	2.70	2.25	20	1.56	1.48	5
Br	1.52	2.63	2.12	24	1.52	1.46	4
J	1.30	2.25	1.69	33	1.30	1.27	2



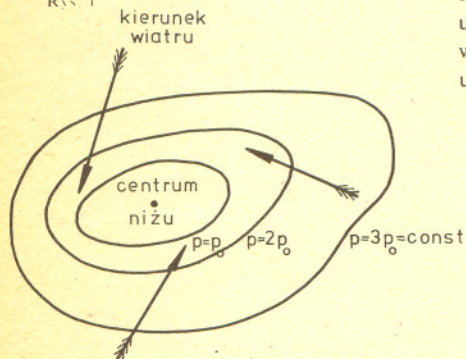
# Dlaczego wiatr nie wieje w kierunku centrum niżu barometrycznego?

Mgr Jerzy DAŁEK

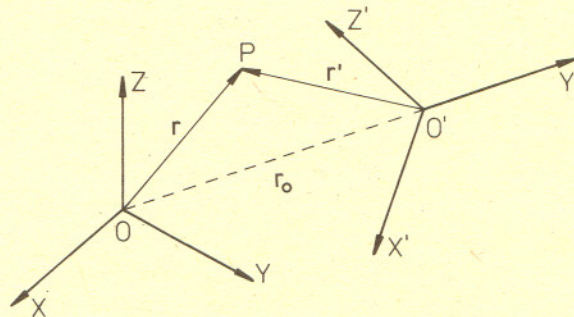
Każdego wieczoru, na zakończenie dziennika telewizyjnego, podawana jest prognoza pogody. Możemy obejrzać mapę Europy z naniesionymi wyżami i niżami barometrycznymi. Linie widoczne na mapie to izobary — linie stałego ciśnienia. Niże (zwane też cyklonami) to obszary w których ciśnienie jest obniżone w stosunku do otoczenia, podczas gdy wyż (zwane antycyklonami) to obszary o ciśnieniu podwyższonym. Wydawałoby się, że w obszarze niżu powinny wiać wiatry w kierunku jego centrum. Dlaczego? Oczywiście, dlatego, że masy powietrza powinny przesuwać się w kierunku najniższego ciśnienia. Używając języka matematycznego mówimy, że gradient ciśnienia, czyli wektor skierowany prostopadłe do izobar i mający zwrot w kierunku rosnącego ciśnienia, pokazuje kierunek przeciwny do kierunku, w którym powinien wiać wiatr (rys. 1). Kiedy spojrzymy jednak na mapę pogody, to okaże się, że wiatr nie wieje dokładnie w kierunku centrum niżu, tylko wykazuje tendencję do skręcania w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (rys. 2). Zajmiemy się wyjaśnieniem tego zjawiska. Do wyjaśnienia zjawiska konieczne będzie nieco rozważań teoretycznych. Rozpatrzmy dwa układy współrzędnych poruszające się względem siebie. Zastanówmy się, jaki jest związek między wielkościami opisującymi ruch w obu tych układach współrzędnych. Oznaczmy jeden z układów współrzędnych przez  $Oxyz$  a drugi przez  $O'x'y'z'$  (rys. 3).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Symbol  $\omega \times r$  oznacza iloczyn wektorowy  $\omega$  przez  $r$ . Ogólnie, iloczynem wektorowym dwu wektorów swobodnych  $\alpha$  i  $\beta$  nazywamy wektor prostopadły do nich obydwu, mający długość taką, ile wynosi pole równoległoboku o bokach  $\alpha$  i  $\beta$ , oraz skierowany tak, że trójka  $\alpha, \beta, \alpha \times \beta$  jest dodatnio zorientowana (prawoskrętna). Gdy  $\alpha = [a_1, a_2, a_3], \beta = [b_1, b_2, b_3]$  to  $\alpha \times \beta = [a_2b_3 - a_3b_2, b_1a_3 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1]$ . Jeżeli współrzędne wektorów  $\alpha$  i  $\beta$  zależą w sposób różniczkowalny od zmiennej  $t$ , to jest tak i dla wektora  $\alpha \times \beta$ . Mamy ponadto

$$\frac{d}{dt} (\alpha \times \beta) = \left( \frac{d}{dt} \alpha \right) \times \beta + \alpha \times \left( \frac{d}{dt} \beta \right).$$

Czytelnik, który chciałby dokładnie prześledzić wyprowadzenie wzoru (4), może zajrzeć np. do podręcznika W. Rubinowicza i W. Królikowskiego „Mechanika teoretyczna”, PWN, 1964, lub — do czego zachęcam — wyprowadzić wzór samemu, korzystając z następujących wskazówek. Związek między pochodną dowolnego wektora  $b$  w układzie  $Oxyz$  i  $O'x'y'z'$ , wynikający z wzoru (3), ma postać  $\frac{db}{dt} = \frac{d'b}{dt'} + \omega \times b$ .

Oczywiście  $\frac{d'}{dt'}$  oznacza różniczkowanie w układzie  $O'x'y'z'$ .

Ruch drugiego układu względem pierwszego jest scharakteryzowany dwiema wielkościami: prędkością  $v_{tr}$  (zwaną prędkością translacyjną), z jaką porusza się początek układu  $O'$  względem początku układu  $O$  oraz prędkością kątową  $\omega$ , z jaką obraca się układ  $O'x'y'z'$  względem układu  $Oxyz$ . Weźmy punkt  $P$ , którego położenie w układzie  $Oxyz$  określa wektor  $OP = r$ . Prędkość  $v$  punktu  $P$  względem układu  $Oxyz$  równa się sumie prędkości  $v'$  punktu  $P$  względem układu  $O'x'y'z'$  i prędkości  $v_0$  zwanej prędkością unoszenia punktu nieruchomego w układzie  $O'x'y'z'$  względem układu  $Oxyz$ .

$$(1) \quad v = v' + v_0.$$

Z kolei prędkość  $v_0$  można przedstawić jako sumę prędkości translacyjnej i rotacyjnej

$$(2) \quad v_0 = v_{tr} + \omega \times r'.$$

Prędkość rotacyjna  $\omega \times r'$  jest prędkością liniową odpowiadającą prędkości kątowej  $\omega$ , ( $r' = O'P$ ). Rozkład prędkości unoszenia na część translacyjną i rotacyjną wynika ze znanego z geometrii twierdzenia, że każdą izometrię (zachowującą orientację) można przedstawić jako złożenie dwóch przekształceń — przesunięcia równoległego i obrotu. Ostatecznie, podstawiając (2) do (1) otrzymamy wzór na prędkość w układzie  $Oxyz$  w zależności od prędkości względem układu  $O'x'y'z'$ , prędkości translacyjnej i prędkości kątowej w postaci

$$(3) \quad v = v' + v_{tr} + \omega \times r'$$

prędkość w układzie Oxyz	=	prędkość w układzie O'x'y'z'	+	prędkość translacyjna	+	prędkość rotacyjna
--------------------------------	---	------------------------------------	---	--------------------------	---	-----------------------

Zgodnie z definicją, przyspieszenie punktu poruszającego się z prędkością  $v$  jest pochodną tej prędkości względem czasu:  $a = \frac{dv}{dt}$ . Różniczkując (3) otrzymamy:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt'} + \frac{dv_{tr}}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r' + 2\omega \times v' + \omega \times (\omega \times r'),$$





czyli

$$(4) \quad \begin{array}{c} a \\ \text{przyspieszenie} \\ \text{w układzie} \\ Oxyz \\ \text{OxyZ} \end{array} = \begin{array}{c} a' \\ \text{przyspieszenie} \\ \text{względne} \\ \text{w układzie} \\ O'x'y'z' \\ O'x'y'z' \end{array} + \begin{array}{c} a_{1r} \\ \text{przyspieszenie} \\ \text{translacyjne} \end{array} + \begin{array}{c} \frac{d\omega}{dt} \times r' \\ \text{przyspieszenie} \\ \text{powstające od} \\ \text{przyspieszenia} \\ \text{kąowego} \end{array} + \begin{array}{c} 2\omega \times v' \\ \text{przyspieszenie} \\ \text{Coriolisa} \end{array} + \begin{array}{c} \omega \times (\omega \times r') \\ \text{przyspieszenie} \\ \text{dośrodkowe} \end{array}$$

Rozwiązanie zadania M 264.

Powiemy, że wielomiany o współczynnikach całkowitych  $f(x)$  i  $g(x)$  przystają modulo  $p$ , piszemy  $f(x) \equiv g(x) \pmod p$ , gdy wszystkie współczynniki  $f - g$  dzielą się przez  $p$ . Można sprawdzić, że jeżeli  $f \equiv f_1 \pmod p$  i  $g \equiv g_1 \pmod p$ , to  $f+g \equiv f_1+g_1 \pmod p$ , oraz że dla  $p$  będącego liczbą pierwszą  $(x+1)^p \equiv x^p+1 \pmod p$ . Niech teraz  $n = k \cdot p + e$ , gdzie  $k = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ .

Mamy:

$$x^n + \dots + \binom{n}{p} x^p + \dots + 1 = (x+1)^n = (x+1)^{kp+e} = ((x+1)^p)^k (x+1)^e \equiv (x^p+1)^k (x+1)^e = (x^{pk} + \dots + \binom{k}{k-1} x^p + 1)(x+1)^e$$

Jedynym składnikiem stopnia  $p$  w tym iloczynie jest  $\binom{k}{k-1} x^p \cdot 1 = kx^p$  i z definicji przystawania modulo  $p$  mamy

$$p \mid \binom{n}{p} - k = \binom{n}{p} - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$$

Uwaga: Można na tej drodze wykazać, że gdy

$$n = n_0 + pn_1 + p^2n_2 + \dots + p^mn_m$$

$$i \quad k = k_0 + pk_1 + \dots + p^mk_m,$$

to

$$p \mid \binom{n}{k} - \binom{n_m}{k_m} \dots \binom{n_1}{k_1} \binom{n_0}{k_0}$$

Omówimy sens fizyczny wzoru (4). Stwierdza on, że przyspieszenie  $a$  w układzie  $Oxyz$  składa się z przyspieszenia względnego  $a'$  względem układu  $O'x'y'z'$  oraz dodatkowego przyspieszenia złożonego z czterech składników. Pierwszy z nich  $a_{1r}$ , to przyspieszenie względem układu  $Oxyz$ , jakiego doznaje punkt wskutek zmiany prędkości translacyjnej  $v_{1r}$  układu  $O'x'y'z'$  względem układu  $Oxyz$ . Pozostałe składniki, związane z prędkością kątową  $\omega$ , mogą być różne od zera tylko wówczas, gdy  $\omega \neq 0$ , czyli jeśli układ  $O'x'y'z'$  obraca się względem układu  $Oxyz$ . Składnik  $\frac{d\omega}{dt} \times r'$  przedstawia przyspieszenie punktu w układzie  $O'x'y'z'$  powstające dzięki przyspieszeniu kątowemu  $\frac{d\omega}{dt}$  układu  $O'x'y'z'$  względem układu  $Oxyz$ . Oczywiście, składnik ten jest równy 0, gdy prędkość kątowa jest stała w czasie. Składnik  $2\omega \times v'$  nazwany jest przyspieszeniem Coriolisa. Przyspieszenie Coriolisa działa na ciało jedynie wówczas, gdy porusza się ono w układzie  $O'x'y'z'$ , tzn. gdy  $v' \neq 0$  oraz gdy prędkość nie jest skierowana wzdłuż osi obrotu równoległej do wektora  $\omega$  (wiadomo bowiem, że iloczyn wektorowy wektorów równoległych jest wektorem zerowym). Wreszcie ostatni człon wzoru (4)  $\omega \times (\omega \times r')$  to przyspieszenie dośrodkowe, zwane tak dlatego, że skierowane jest do osi obrotu.

Rozpatrzmy teraz masę powietrza poruszającego się w kierunku centrum niżu. Ziemia obraca się wokół osi ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Przyjmijmy układ współrzędnych  $Oxyz$ , nieruchomy w stosunku do gwiazd, o początku w środku Ziemi. Układ  $O'x'y'z'$  będzie związany z obracającą się wokół osi Ziemią, a więc będzie się poruszał ruchem obrotowym w stosunku do układu  $Oxyz$ , z prędkością obrotu Ziemi. W rozważaniach zaniedbujemy ruch Ziemi wokół Słońca. Mamy więc w istocie sytuację opisaną teoretycznie powyżej. Przyspieszenie masy powietrza w układzie  $Oxyz$  wyraża się wzorem (4), przy czym, dzięki poczynionym założeniom, wzór (4) przyjmie prostszą postać

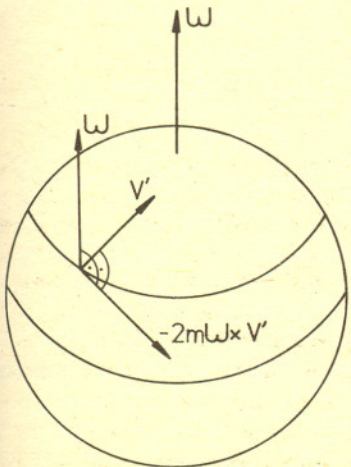
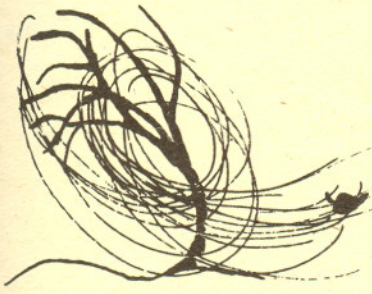
$$(5) \quad a = a' + 2\omega \times v' + \omega \times (\omega \times r')$$

ponieważ  $a_{1r} = 0$ , gdyż układy  $Oxyz$  i  $O'x'y'z'$  nie przesuwają się względem siebie, oraz  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ , gdyż  $\omega$  nie zależy od czasu. Zbadajmy, jakie siły działają na rozpatrywaną masę powietrza. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona siła jest równa iloczynowi masy i przyspieszenia:  $F = m a$ . Wstawiając do powyższego wzoru  $a$  z (5) otrzymamy

$$m a' = F - 2m\omega \times v' - m\omega \times (\omega \times r')$$

Człon  $-2m\omega \times v'$  nazywa się siłą Coriolisa, zaś człon  $-m\omega \times (\omega \times r')$  siłą odśrodkową. Są to „dodatkowe” siły, które pojawiają się w układzie poruszającym się  $O'x'y'z'$ . Pierwsza z nich — siła Coriolisa — będzie powodowała odchylenie kierunku wiatru. Zobaczmy, jaki będzie jej kierunek. Gdy znajdujemy się na półkuli północnej, to zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej, określającej zwrot iloczynu wektorowego, na masę powietrza poruszającego się z prędkością  $v'$  działa siła skracająca tę masę w prawo (rys. 4). Daje to odpowiedź na pytanie postawione w tytule, a zarazem stanowi treść reguły Buys-Ballota, która mówi, że na półkuli północnej niż barometryczny znajduje się po lewej stronie obserwatora zwróconego plecami do wiatru. Czytelnik łatwo może sprawdzić, że na półkuli południowej sytuacja odwraca się — niż znajduje się po prawej stronie obserwatora.

Siła Coriolisa daje o sobie znać nie tylko w przypadku wiatrów w obszarach niżu barometrycznego. Jej działaniu podlegają pasaty i antypasaty, a także prądy morskie. Chciałbym zwrócić uwagę na wiele upraszczających założeń, które po kolei wprowadzaliśmy, aby móc znaleźć odpowiedź na postawione pytanie. Nie o wszystkich jednak założeniach mówiliśmy jawnie w tekście. Najważniejszym z tych nie wymienionych założeń jest chyba to, że równania opisujące ruch punktu materialnego stosowane były do opisu ruchu mas powietrza. Jest to założenie dość grube, jednak upraszcza ono znacznie rozważania i daje „przyzwoity” zgodny z obserwacjami meteorologicznymi — wynik jakościowy. Całe nasze rozumowanie opierało się na matematycznym opisie zjawiska fizycznego. Taki sposób postępowania jest powszechnie stosowany w naukach przyrodniczych — tworzenie modelu fizycznego zjawiska, jego opis matematyczny, dyskusja otrzymanych z tego modelu wyników i ich porównanie z doświadczeniem.



Rys. 4



Dr Krzysztof DĄBROWSKI

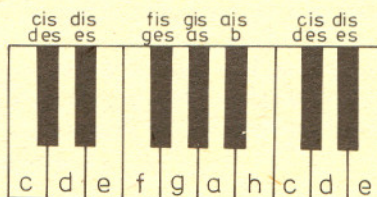
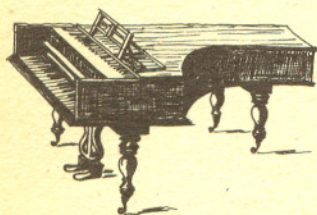
W tym artykule omówimy pewne matematyczne (a dokładniej, rachunkowe) metody wyznaczania i porządkowania zbioru wszystkich wysokości dźwięków, używanych w muzyce europejskiego kręgu kulturowego.

Początki muzyki sięgają początków istnienia człowieka.

W praktyce muzycznej używano zarówno głosu ludzkiego, jak i przedmiotów, wydających dźwięki o określonej lub nieokreślonej wysokości. Takie przedmioty wydawały zwykle jeden dźwięk — były to różnego rodzaju gwizdki, zwierzęce rogi, cięciwy łuków, prymitywne instrumenty perkusyjne. Z czasem zaczęto budować instrumenty, wydające więcej dźwięków — w gwizdki wywiercono otworki i powstała fujarka, długość cięciwy łuku skracano palcami itp. Początkowo zbiór dźwięków, wydawanych przez takie instrumenty, był dosyć przypadkowy — dziurki w piszczałce wiercono w tych miejscach, w których jej dotykały swobodnie położone palce (tzn. nie tam ustawiano palce, gdzie były dziurki, tylko tam wiercono dziurki, gdzie były palce), cięciwę skracano w miejscach zupełnie dowolnych. W miarę rozwoju muzyki zaczęto zauważać potrzebę ujednoczenia wysokości dźwięków, uzyskiwanych z różnych instrumentów, pojawił się więc problem, jak dokładnie wyznaczyć wszystkie używane wysokości dźwięków, czyli system dźwiękowy.

Pierwsze badania stosunków długości strun i piszczałek przeprowadzano w czasach wczesnohistorycznych, jednak miały one charakter wycinkowy i niedokładny. Badaczem, który stworzył pierwsze dokładne podstawy teoretycznego wyznaczania wysokości dźwięków, był Pitagoras (VI w. p.n.e.).

Do omówienia jego systemu (i następnych) będą potrzebne używane w muzyce nazwy odległości dźwięków, tzw. interwały. (Przez odległość dźwięków należy rozumieć stosunek ich częstotliwości — dlaczego nie różnice, wyjaśnimy później). Podajemy też dla przykładu nazwę dźwięku odległego od dźwięku *c* o dany interwał.



Liczba półtonów między dźwiękami	nazwa interwału	dźwięk odległy o ten interwał od dźwięku <i>c</i>
0	pryma	<i>c</i>
1	sekunda mała	<i>cis, des</i>
2	sekunda wielka	<i>d</i>
3	tercja mała	<i>dis, es</i>
4	tercja wielka	<i>e</i>
5	kwarta	<i>f</i>
6	tryton	<i>fis, ges</i>
7	kwinta	<i>g</i>
8	seksta mała	<i>gis, as</i>
9	seksta wielka	<i>a</i>
10	septyma mała	<i>ais, b</i>
11	septyma wielka	<i>h</i>
12	oktawa	<i>c</i>

## KĄCIK ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI

SECRETARIAL

### READY TO MOVE INTO THE FUTURE ?

Tak zatytułowane (od biedy można to przetłumaczyć *Gotów do kroku w przyszłość?*) duże ogłoszenie w angielskim *The Times* z 4 marca 1980 roku donosi: Szukamy młodej sekretarki w wieku 18–22 lat, która poważnie patrzy w przyszłość. Niezależnie od zwykłych obowiązków sekretarskich, nauczymy cię posługiwać się końcówką komputera. Nasze wymagania są wysokie. Musisz mieć 5 ocen bardzo dobrych (przede wszystkim angielski i matematyka) i pisać na maszynie co najmniej 50 słów na minutę. Płacimy 3,750 rocznic etc. ...

Dodajmy, że tryton jest nazywany też kwartą zwiększoną, lub kwintą zmniejszoną (zależnie od zapisu), zaś nazwa „oktawa” oznacza nie tylko odległość dwóch sąsiednich dźwięków o tej samej nazwie, ale też zbiór wszystkich wysokości dźwięków pomiędzy dwoma sąsiednimi dźwiękami *c*. Poszczególne oktawy (w drugim znaczeniu) mają swoje nazwy, których nie będziemy tu podawać.

Doświadczenia Pitagorasa polegały na podziale struny na części przy pomocy przesuwanej podpórki. Była ona ustawiana w odległości 1/2, 1/3 i 1/4 długości struny od jednego z jej punktów zaczepienia. To doprowadziło do wyznaczenia następujących interwałów:



Gdy zapytano Pitagorasa: „Co to jest przyjaciel?” — odpowiedział „Przyjaciel to drugi ja; przyjaźń to stosunek liczb 220 i 284” (tak przynajmniej twierdzi Szczepan Jeleński w książce „Śladami Pitagorasa”). Polega to na tym, że suma dzielników 220 jest równa 284 i odwrotnie, suma dzielników liczby 284 jest równa 220. Liczby o tej własności nazywane są zaprzyjaźnionymi; pierwsze z nich to 220 i 284. Początkowe 17 liczb pierwszych to 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59. Ich suma wynosi  $2 \cdot 220$ . Suma ich kwadratów =  $59 \cdot 284$ . (Elvin J. Lee, *Journ. Recr. Math.* 12 (1980))

stosunek długości drgających części struny	interwał	stosunek częstotliwości
1 : 2	oktawa	2 : 1
2 : 3	kwinta	3 : 2
3 : 4	kwarta	4 : 3

Stosunki częstotliwości odpowiednich dźwięków są odwróceniem stosunków długości części struny.

Pitagoras uważał, że nie ma potrzeby dalej dzielić struny, ponieważ przez dodawanie i odejmowanie już otrzymanych interwałów można otrzymać wszystkie inne. Miało to polegać na mnożeniu lub dzieleniu wyjściowej częstotliwości przez otrzymane współczynniki, równe stosunkom odpowiednich częstotliwości.

Dla przykładu obliczmy współczynnik dla tercji wielkiej:

$c$	$g$	$d^1$	$a^1$	$e^2$	$e^1$	$e$
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{81}{32}$	$\frac{81}{64}$

Najpierw wyjściową częstotliwość pomnożyliśmy przez  $3/2$  dla przesunięcia o kwintę w górę, potem dzieliśmy przez 2 (=  $2/1$ ) dla przesunięcia do wyjściowej oktawy. Cyferki przy literach oznaczają liczbę oktaw, o które jest wyższy dany dźwięk od dźwięku oznaczanego tą samą literą, ale bez cyferki.

W systemie Pitagorasa wszystkie całe tony (czyli sekundy wielkie) miały współczynnik  $9/8$ . Były w nim dwa rodzaje półtonów:  $256/243$  i  $2187/2048$ , z których żaden nie odpowiadał połowie całego tonu. To prowadziło do tego, że gdy dźwięk podwyższyliśmy o pół tonu, to dostaliśmy inny dźwięk, niż wtedy, gdy obniżyliśmy o pół tonu dźwięk, leżący o cały ton wyżej, więc np. *cis* było wyższe od *des*. Tę różnicę odległości całego tonu i dwóch jednakowych półtonów nazywa się „komatem pitagorejskim”. Pitagoras uporządkował wszystkie interwały pod względem zgodności orzmienia dźwięków odległych o dany interwał (tzn. konsonansowości tego interwału), mianowicie interwał był bardziej konsonansowy, jeżeli był określony przez stosunek mniejszych liczb (tak przynajmniej uważał Pitagoras).

W średniowieczu, gdy powstała muzyka wielogłosowa, zauważono, że teoria Pitagorasa jest niezgodna z praktyką, ponieważ o wiele lepiej brzmiały dwa głosy prowadzone w odległości tercji (wielkiej lub małej), niż np. sekundy, podczas gdy, zgodnie z systemem Pitagorasa, sekunda była bardziej konsonansowa od tercji (np. tercja wielka miała, jak wiemy, współczynnik  $81/64$ , a sekunda wielka miała współczynnik  $9/8$ , więc różnica była dość znaczna). Stało się więc konieczne stworzenie nowego systemu, usuwającego tę niezgodność.

Dokonało się to w XIV w. Angielski teoretyk, Walter Odington, odnalazł prace filozofa greckiego Didymosa (I. w. p.n.e.), który kontynuował badania Pitagorasa; posuwając je o krok dalej, mianowicie zastosował podział struny w  $1/5$  jej długości. W ten sposób otrzymał tercję wielką, określoną stosunkiem  $5/4$ , a więc nieco mniejszą od pitagorejskiej. Różnica tych dwóch tercji nosi nazwę „komatu syntonicznego”, lub „didymejskiego”. Wprowadzenie nowego interwału uzasadniło konsonansowość tercji wielkiej i dało teoretyczne podstawy tworzenia muzyki wielogłosowej w oparciu o tercje.

Teraz interwały można było obliczać, stosując mnożenie, lub dzielenie nie tylko przez współczynnik  $3/2$  (lub  $4/3$ , który w połączeniu ze współczynnikiem  $2/1$  daje ten sam rezultat), lecz również przez  $5/4$ , co w przypadku wielu interwałów zmniejszyło liczby, tworzące ich współczynniki. Na podstawie takich obliczeń powstał tzw. „system naturalny”, utworzony z czterech dźwięków pitagorejskich —  $f, c, g, d$  — oraz z dźwięków odległych od nich o tercję wielką w górę i w dół, co dało wszystkich dwanaście dźwięków oktawy. Dla przykładu, współczynniki dźwięków gamy C dur były następujące:

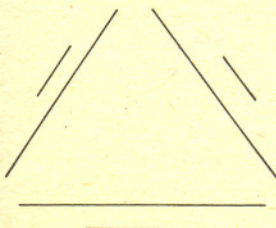
$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$a$	$b$	$c^1$
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Jak widać, w systemie naturalnym były dwa rodzaje całych tonów, np. między  $c$  i  $d$  był cały ton o współczynniku  $9/8$ , zaś między  $d$  i  $e$  — o współczynniku  $10/9$ , więc trochę mniejszy. To powodowało, że gdybyśmy chcieli zbudować system naturalny np. od dźwięku  $d$ , zamiast  $c$ , wtedy otrzymany system nie pokryłby się z systemem wyjściowym. Podobnie, jak w systemie pitagorejskim, dwa półtony nie dawały całego tonu, jednak tutaj — inaczej niż w poprzednim systemie — *cis* było niższe od *des*. Ta różnica była równa komatowi syntonicznemu.

Praktyczną konsekwencją było to, że w tym systemie można było grać tylko w niektórych tonacjach, ponieważ nie wszystkie akordy brzmiały czysto.



**Rozwiązanie zadania M 262.**  
Rozpatrzmy 6 odcinków rozmieszczonych tak, jak na rysunku. Łatwo zauważyć, że koniec odcinka „zewnątrznego” może być połączony tylko z końcem odpowiedniego odcinka „wewnętrzznego”. Ponieważ jednak co najmniej jeden z odcinków zewnętrznych musi mieć oba końce połączone z innymi punktami, łamana musiałaby zawierać czworokąt, co jest niemożliwe.







Rozwiązanie zadania M 26.5.

Niech  $f_1(x) = x^3 - x + 1$  i  $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$  dla  $n \geq 2$ . Mamy  $f_n(0) = f_{n-1}(1) = \dots = f_1(1) = 1$  i wobec tego wyrazem wolnym  $f_n$  jest 1. Wynika stąd, że dla każdego całkowitego  $a > 1$  liczba  $f_n(a)$  daje przy dzieleniu przez  $a$  resztę 1. W szczególności

$$f_k(m) = f_k \circ (f_1(m)) \equiv 1 \pmod{f_1(m)},$$

a więc  $f_k(m)$  i  $f_1(m)$  są względnie pierwsze.



Ta sytuacja zaczęła przeszkadzać w baroku, gdy zaczęto komponować utwory, wykorzystujące przejścia od jednej tonacji do drugiej, tzw. modulacje (wtedy zresztą powstało samo pojęcie tonacji). W związku z tym należało znaleźć jeszcze inny system, który by umożliwił modulacje. Chodziło o to, żeby po zbudowaniu takiego systemu od różnych dźwięków otrzymać, przynajmniej w przybliżeniu, jednakowe wyniki. Stworzono wiele systemów tego typu. Omówimy tu tylko najważniejszy z nich, nazywany „systemem równomiernie temperowanym”, który jest wykorzystywany do czasów obecnych. Stworzył go J. G. Neidhardt w roku 1706. Punktem wyjścia dla jego systemu było to, że odległość dwunastu kwint różniła się od odległości siedmiu oktaw o komat pitagorejski:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx \frac{129,746}{128} \approx 1,014.$$

Neidhardt odległość tę podzielił przez 12 i interwał kwinty zmniejszył o otrzymany wynik. Skutkiem tego było to, że teraz dwanaście kwint było równe siedmiu oktawom, dwa półtony odpowiadały całemu tonowi i system, zbudowany od dowolnego innego dźwięku, niż  $c$ , dawał dokładnie system wyjściowy, można więc było modulować do dowolnej tonacji.

Najdonioślejszym zastosowaniem nowego systemu było stworzenie przez Jana Sebastiana Bacha w 1772 r. pierwszego z dwóch tomów zbioru „Das wohltemperierte Klavier”, zawierającego 24 preludia i fugi we wszystkich tonacjach durowych i molowych.

W związku z powstaniem nowego systemu dźwiękowego, należało zmienić sposób wyrażania interwałów współczynnikami liczbowymi. Teraz już bardzo niewygodne było stosowanie ułamków zwykłych, lepiej było je zamienić na ułamki dziesiętne.

Obok tego sposobu istnieje również inny, wygodniejszy, wykorzystujący prawo Webera-Fechnera, mówiące, że wszystkie zmysły człowieka reagują „w skali logarymicznej” — wrażenie, wywołane przez bodziec, jest proporcjonalne nie do natężenia tego bodźca, lecz do logarytmu z jego natężenia. Znalazło to zastosowanie w określaniu jasności gwiazd przez tzw. „wielkości gwiazdowe”, jak również w wyrażaniu głośności przy pomocy decybeli. W naszej sytuacji ma miejsce podobne zjawisko — wrażenie, wywołane w mózgu człowieka przez dźwięk, nie jest proporcjonalne do jego częstotliwości, tylko do logarytmu z jego częstotliwości. Dlatego zmiany częstotliwości w stałym stosunku człowiek odbiera jako zmiany o stałą odległość. Dźwięki odległe od siebie o całkowitą liczbę oktaw, tzn. takie, których częstotliwości pozostają w stosunku całkowitoliczbowym, są bardzo podobne pod względem brzmienia, dlatego są oznaczane tą samą literą.

W związku z tym, wprowadzono odległość milioktawy (oznaczenie mO), będącej tysięczną częścią oktawy, tzn. dodanie jednej milioktawy do danej wysokości oznacza pomnożenie częstotliwości o  $\sqrt[1000]{2}$  czyli ok. 1,00069. Dla wyrażenia wielkości interwału w milioktawach należy obliczyć logarytm przy podstawie 2 z jego współczynnika liczbowego i wynik pomnożyć przez 1000. W wyniku zastosowania logarytmów mnożenie zmienia się na dodawanie, a dzielenie na odejmowanie, co ułatwia obliczanie interwałów. Podstawa 2 została przyjęta ze względu na podobieństwo dźwięków odległych o oktawę, a więc o częstotliwościach różniących się dwukrotnie.

Istnieje też inna jednostka — cent (w skrócie ct), będąca tysiąc dwusetną częścią oktawy. Została ona wprowadzona z tego względu, że oktawę dzieli się na 12 półtonów, więc wygodnie by było wiedzieć, jak się ma dany interwał do półtonu temperowanego, równego 100 ct i odpowiadającego współczynnikowi  $\sqrt[12]{2}$ .

Wprowadzone jednostki są bardzo wygodne przy porównywaniu interwałów. Np. dla obliczenia wielkości kwinty temperowanej należy, zgodnie z tym, co było napisane, odległość siedmiu oktaw, tzn. 7000 mO, podzielić na 12 części, a więc kwinta temperowana ma wielkość 583 mO. Dla porównania, kwinta naturalna ma wielkość 585 mO. Te same interwały po wyrażeniu w centach mają wielkości odpowiednio 700 ct i 702 ct.

\* \* \*

Mogłoby się wydawać, że od tego trzeba było zacząć — jeżeli chcemy mieć system dźwiękowy jednakowy z punktu widzenia każdego składowego dźwięku, trzeba podzielić oktawę równo na 12 półtonów. Jednak przyjęta na początku droga miała swoje racje — interwały, powstałe przez podział struny na części, odpowiadające odwrotnościom liczb całkowitych, są na pewno naturalniejsze, niż interwały temperowane. Te drugie zostały sztucznie stworzone przez człowieka na drodze obliczeń, natomiast te pierwsze są stworzone przez przyrodę — powstają same przez samorzutny podział struny na pewną ilość części, co zawsze ma miejsce podczas drgania — struna nigdy nie drga całą swoją długością.

W związku z tym prowadzono (i prowadzi się nadal) poszukiwania systemów, dzielących oktawę na inną ilość równych części, niż 12, w nadziei, że się uda w ten sposób pogodzić temperację z bardziej naturalnym brzmieniem interwałów. Nic jednak na razie nie wskazuje na to, że te systemy znajdą w najbliższej przyszłości szersze zastosowanie.

### Kącik Czytelniczy

— Po prostu chcemy szybko dorobić się majątku. Mamy nawet makietę maszyny matematycznej. Mówimy wszystkim, że to taka zabawka ze światełkami, które zapalają się i gasną, ale nikt nam nie chce uwierzyć.

(Cosmo Saltana w powieści J. B. Priestleya „Londyn”)





SAGITTARIUS

## Patrz w niebo

Czerwcowe noce stają się tak krótkie i zmierzch zapada tak późno, że tylko „nocne marki” mają szansę przez niezbyt długi zresztą czas obserwować niebo. Pozostałe osoby właściwie niewiele tracą, bo jedyną dużą atrakcją czerwcowego nieba jest najlepsza widoczność okolic Centrum Galaktyki — gwiazdozbiory Strzelca (*Sagittarius*), Niedźwiadka (*Scorpio*) i Wężownika (*Ophiuchus*) górują późnymi wieczorami nisko nad południowym horyzontem umożliwiając posiadaczom nawet niewielkich teleskopów obserwacje „gestych” obszarów Drogi Mlecznej, gdzie kłębią się miliardy gwiazd, chmury gazu i pyłu.

Dzisiaj zajmiemy się gwiazdą leżącą („chwilowo”) w gwiazdozbiornie Wężownika, lecz nie mającą nic wspólnego z Centrum Galaktyki. Znajduje się ona w odległości 1,84 parseka od nas w porównaniu z odległością 8500 parseków od nas do środka Galaktyki.

Katalogowa nazwa tej gwiazdy brzmi *LFT 1385*, jednak przyjęła się w środowisku astronomicznym inna nazwa — od nazwiska jej odkrywcy, E. Barnarda (1916) nadano jej imię „gwiazda Barnarda”. Jest to właściwie bardzo rzadki przypadek (jest w sumie chyba tylko kilkanaście gwiazd noszących imiona swoich odkrywców). Na ogół gwiazdy mają numery katalogowe, od znośnych (jak  $\alpha$  Per, 18 Lac, EX Hya) przez coraz mniej mówiące (*VI1223 Sgr*, powyższa *LFT 1385*), aż po zupełnie niemożliwe do zapamiętania (np. *1E 0643.0—1648*). Oczywiście każda litera i cyfra w każdej nazwie jest pewną informacją dla astronomów, np. ostatnia z nazw mówi, że chodzi o gwiazdę, którą będzie można znaleźć w pierwszym (stąd 1) katalogu obiektów zaobserwowanych przy pomocy satelity EINSTEIN (stąd E) w okolicach punktu o współrzędnych  $\alpha = 06^h43^m0$ ,  $\delta = -16^{\circ}48'$ .

Wracając do gwiazdy Barnarda wspomnieliśmy, że przebywa ona chwilowo w gwiazdozbiornie Wężownika. Otóż to „chwilowo” jest przyczyną jej sławy. Gwiazda Zbieg (bo tak też ją niektórzy nazywają) jest obiektem o największym tzw. ruchu własnym spośród znanych nam gwiazd. Ruch własny jest to prędkość kątowna, z jaką porusza się dana gwiazda na tle dalekich, praktycznie nieruchomych obiektów. Jest ona odbiciem ruchu gwiazdy względem naszego Słońca. Gwiazda Barnarda potrzebuje jedynie ok. 170 lat, aby przebyć drogę (kątowną) równą średnicy Księżyca.

Tak duży ruch własny jest spowodowany również tym, że jest to obiekt bardzo bliski. (Prędkość kątowna samochodu przejeżdżającego tuż przed obserwatorem jest przecież dużo większa niż samochodu jadącego z tą samą prędkością liniową, widocznego na horyzoncie). Tylko potrójny system  $\alpha$  Cen znajduje się bliżej nas.

Mimo tak małej odległości gwiazda ta nie jest widoczna gołym okiem. Jej jasność widoma wynosi  $9^m5$ , a więc jest ona dostępna jedynie dla posiadaczy stosunkowo dużych instrumentów. Gwiazda Barnarda należy do klasy czerwonych, zimnych (3200 K), mało masywnych ( $0,16 M_{\odot}$ ) karłów. O podobnych gwiazdach pisaliśmy w grudniu zeszłego roku.

Dzięki temu, że również zbliża się ona do nas z dość dużą prędkością — 140 km/s (ale bez paniki — nie leci prosto na nas!) osiągnie ona najmniejszą odległość od Układu Słonecznego za około 8000 lat pędząc wtedy z prędkością kątowną = średnica Księżyca / 70 lat.

Dodatkową atrakcją związaną z tą gwiazdą spowodowaną jest przez fakt, że jest to najlepiej udokumentowany przypadek (poza Układem Słonecznym) posiadania planet przez gwiazdy. Gwiazdę Barnarda okrąża planeta odległa średnio o ok. 80% średniej odległości Słońce — Jowisz, o masie 1,5 razy większej niż Jowisz. Nie wykluczone jest istnienie większej liczby planet w tym układzie.

Jednak tych, którym już świta w głowie pytanie: „czy tam jest życie?” muszą zmartwić: na powierzchni tamtejszego „Jowisza” temperatura jest tak niska (przy założeniu nie posiadania własnego źródła energii), że mało ruchliwe atomy bardzo wolno i „niechętnie” łączą się w jakiegokolwiek skomplikowane związki, co jest przecież warunkiem powstania życia. Rachunki wykazują, że wokół gwiazdy Barnarda nie ma możliwości istnienia planety (nawet baaardzo blisko gwiazdy), która byłaby stabilna i na powierzchni której byłaby dostatecznie wysoka temperatura, aby atomy węgla, wodoru, tlenu i azotu „zechciały” się wiązać tworząc związki organiczne.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI





Jeśli obserwowaliście kiedyś Słońce czy Księżyc świecące zza lekkiej chmury, albo latarnię uliczną w czasie mgły, to na pewno zauważyliście jasną poświatę otaczającą, w niewielkiej odległości, źródło światła. Być może, w sprzyjających warunkach, udało Wam się zaobserwować nawet nie jeden biały pierścień, ale kilka o delikatnych barwach. Jeśli nie — nic straconego! Możecie z łatwością wywołać to zjawisko za pomocą butelki, gumowej rurki i dobrej latarki.

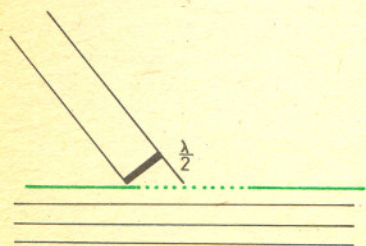
Przede wszystkim potrzebna będzie mgła lub kawałek chmury. Potem wystarczy tylko zakryć źródło światła przesłoną z niewielkim otworem i spojrzeć na nie przez mgłę z odległości 2—3 metrów. A więc do dzieła!

Na dno litrowej butelki z gładkiego, bezbarwnego szkła nalejcie trochę wody — tyle tylko, by przykryła dno. Rurkę połączcie z butelką i dmuchajcie mocno, tak żeby podniosło się ciśnienie wewnątrz. Możecie oczywiście użyć pompki. Następnie ściśnijcie rurkę i odczekajcie kilkanaście sekund, aż temperatura wewnątrz butelki zrówna się z temperaturą otoczenia (w czasie sprężania powietrze się ogrzało). Otwórzcie teraz bardzo szybko szyjkę butelki. Im szybciej to zrobicie, tym lepszy będzie efekt. Powietrze gwałtownie rozpręży się, a wewnątrz butelki znajdziecie bardzo lekką, widoczną tylko w silnym świetle, mgiełkę. Rozprężający się gaz wykonuje pracę (mógłby na przykład przesunąć tłoczek) i energia jego cząsteczek, a więc i temperatura, maleje. Dlatego, po szybkim otwarciu butelki, powietrze wewnątrz gwałtownie się oziębia. Nadmiar pary wodnej, której w chłodnym gazie mieści się mniej niż w ciepłym, zbiera się w kropelki. Te kropelki to właśnie nasza mgła. W podobny sposób powstają niektóre chmury. Ciepłe, wilgotne powietrze unosi się do góry, gdzie ciśnienie jest mniejsze. Następuje rozprężenie, powietrze oziębia się i część pary wodnej ulega skropleniu.

Jak się przekonacie, Wasza chmura jest jednak zbyt rzadka. Żeby dostać bardziej gęstą, trzeba pobudzić parę wodną do gromadzenia się w kropelki. Wystarczy do tego trochę cząstek naładowanych elektrycznie. Można je wytworzyć na kilka sposobów, na przykład wywołując wewnątrz butelki kilkanaście błyskawic za pomocą piezoelektrycznej zapalniczki do gazu. Dobra jest też lampa kwarcowa albo płomyk gazowy. Po takim zabiegu wystarczą dwa kolejne sprężenia i rozprężenia, żeby otrzymać całkiem gęstą chmurę. Patrząc przez nią na odległe źródło światła możecie wreszcie zaobserwować barwne pierścienie.

Spróbujcie wymyślić inne sposoby pobudzenia pary wodnej do tworzenia kropelek. Świetne wyniki daje zastosowanie dymu. To właśnie dym był przyczyną powstawania słynnej londyńskiej mgły. Pojawia się ona znacznie rzadziej, od kiedy wydano zakaz palenia w kominkach węglem i drewnem. Światło obserwowane przez chmurę zbudowaną na cząsteczkach dymu otoczone jest jednak tylko jednym białym pierścieniem. Dlaczego? Czym różni się taka chmura od chmury „elektrycznej”? W pierwszej kropole różnią się znacznie między sobą, bo różne są cząsteczki dymu, na których wyrosły. Druga natomiast składa się z kropel o prawie identycznych promieniach.

Żeby zobaczyć, jaki to ma związek z kolorami pierścieni, zastanówmy się, co się dzieje ze światłem padającym na jedną małą kropelkę. Możemy, jak zwykle, pomóc naszej wyobraźni obserwując fale na wodzie. Przyjrzyjcie się fali o prostych, równoległych grzbietach rozbijającej się na niewielkiej przeszkodzie. Albo lepiej — przeciskającej się przez otwór w tamie równoległej do grzbietów. We wszystkich punktach otworu woda drga tak samo; jednocześnie do wszystkich dochodzi grzbiet lub dolina. Taki sam efekt dały grzający w otworze gęsty grzebień. Wszystkie jego zęby unosiłyby się lub opadały jednocześnie, pociągając za sobą powierzchnię wody. Każdy z nich stałby się w ten sposób źródłem fali kolistej. Falowanie wody po drugiej stronie tamy jest sumą takich fal.





Przy obserwacji w kierunku zaznaczonym na rysunku grzbiet fali pochodzącej od pierwszego zęba spotyka się z doliną fali od zęba środkowego; fale wygaszają się wzajemnie. Podobne wygaszenie następuje dla wszystkich pozostałych fal. Zauważcie, że im większa długość fali, tj. odległość między grzbietami, tym większy jest kąt, pod którym obserwujemy takie wygaszenie.

A jak będzie dla przeszkody o tej samej wielkości co otwór? Oczywiście fala rozbita o przeszkodę musi całkowicie wygaszać falę z otworu, bo przez tamę bez otworu nic nie przechodzi. Takie wygaszenie jest jednak możliwe tylko wtedy, kiedy z grzbietem wszędzie spotka się dolina o głębokości równej wysokości grzbietu. Wynika stąd, że kierunki całkowitego wygaszenia są w obu wypadkach takie same.

Myślę, że teraz już wiecie, skąd się biorą pierścienie i dlaczego mają różne barwy. Pod kątem, w którym jest całkowicie wygaszana barwa niebieska (mała długość fali), obserwujemy mieszaninę barw dopełniających, tj. żółto-pomarańczową. Pod największym kątem wygaszana jest barwa czerwona i dlatego największą średnicę ma pierścień niebiesko-zielony. Jeszcze większe kąty obserwacji odpowiadają wzmocnieniu kolejno barwy niebieskiej, żółtej i czerwonej. Spróbujcie rozstrzygnąć, który z efektów obserwujecie — wygaszenie czy wzmocnienie? A czy wiecie teraz, dlaczego dla niektórych chmur pojawia się tylko jeden biały pierścień? Spróbujcie zaprojektować doświadczenie, w którym oszacowalibyście rozmiary kropelek na podstawie średnicy katowej żółto-pomarańczowego pierścienia. Przyjmijcie długość fali światła niebieskiego równą  $4 \cdot 10^{-4}$  mm.

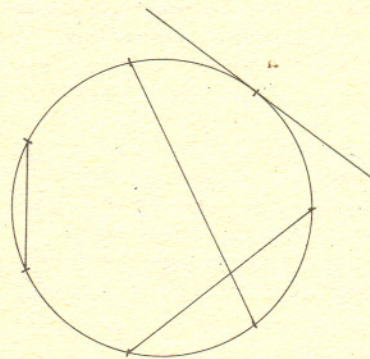
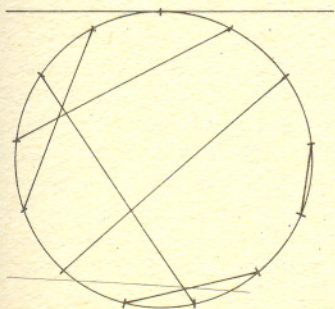
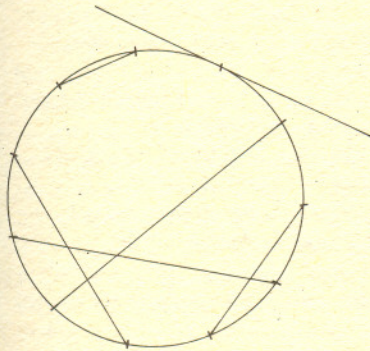
## Dwie proste zagadki

Rozmieśmy na okręgu  $2n+1$  punktów tak, by tworzyły wielokąt foremny

Czy można  $2n$  spośród nich połączyć  $n$  cięciwami tak, by

- 1) żadne dwie cięciwy nie miały równych długości,
- 2) żadne dwie cięciwy nie były równoległe ani nie były równoległe do stycznej w pozostałym  $(2n+1)$ -szym punkcie?

Dla  $n = 1, 2, 4$  nie można — i to łatwo wykazać. Dla  $n = 3, 5, 6$  da się i rozwiązania widzimy na zamieszczonych rysunkach. Nie ma rozwiązań przy  $n = 7$ , a znów są dla  $8, 9, 10$ . Narysujecie? A dalej? Mało kto to wie!



Do wziętej dowolnie liczby naturalnej  $N$  (np. 139) dodajmy jej odwrócenie: 931. Otrzymamy 1070. Znow dodajmy odwrócenie:  $1070 + 0701 = 8080$  i jeszcze raz:  $8080 + 0808 = 8888$ .

Wystartujmy na przykład z 1982:  $1982 + 2891 = 4873$ ;  $4873 + 3784 = 8657$ ;  $8657 + 7568 = 16225$ ;  $16225 + 52261 = 68486$ . Znow doszliśmy do tzw. liczby

palindromicznej: tj. takiej, która czytana od końca jest tą samą liczbą. Możecie sprawdzić, że dla innych liczb też prędzej czy później otrzymacie liczbę palindromiczną. Możecie mieć jednak pecha, na przykład dla  $N = 89$  taką liczbę (= 8813200023188) dostaniecie dopiero za 24 razem. Wśród liczb  $\leq 10000$  jest aż 249 takich, które dają liczbę palindromiczną aż poza setnym razem. Nie znamy żadnej metody obliczenia, za którym razem ona się pojawi. Co więcej, nie wiadomo, czy rzeczywiście zawsze opisany proces doprowadzi do takiej liczby. Jak zwykle w takich wypadkach, hipotezę tę sprawdzono dla bardzo dużych liczb za pomocą maszyn cyfrowych.



Powszechnie uważa się dziś za rzecz naturalną stosowanie matematyki dosłownie wszędzie. Nie zawsze jednak wiemy, na czym owo stosowanie polega, jak i co się robi. Poniższy artykuł prezentuje właśnie typowe użycie matematyki na potrzeby całkowicie niematematycznej gałęzi gospodarki, jaką w tym przypadku jest rolnictwo.

## Zastosowania probabilistyki w technice rolniczej

Dr Krzysztof MIKUCKI

W technice jest wiele zjawisk, które można uznać za losowe. W technice rolniczej dochodzi jeszcze jeden „losowy” parametr — pogoda, czy np. ściśle związana z nią długość sezonu agrotechnicznego. Dlatego np. przy planowaniu liczby maszyn rolniczych potrzebnych do wykonania określonego zadania należy wziąć też pod uwagę te losowe wielkości. W dwóch kolejnych artykułach omówimy pokrótce niektóre badania w tym zakresie przeprowadzone w Instytucie Badawczym Mechanizacji i Elektryfikacji Rolnictwa.

Zajmiemy się wykorzystaniem kombajnów zbożowych. Kombajn taki jest samobieżną maszyną rolniczą, którą można wykorzystywać tylko w ściśle określonym okresie (sezonie agrotechnicznym). Długość takiego okresu agrotechnicznego (mierzoną w dniach) traktujemy jako dyskretną zmienną losową. Również efektywna wydajność mierzona w ha/h (hektarach na godzinę) jest zmienną losową. Jest to oczywiście ciągła zmienna losowa. Przyjmujemy, że w ciągu dnia kombajn może pracować określoną liczbę godzin. Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$L$  — długość okresu agrotechnicznego mierzona w dniach,

$X$  — wydajność efektywna mierzona w ha/h,

$D$  — liczba godzin pracy w ciągu dnia,

$Y$  — zadanie do wykonania mierzony w ha.

Ilość pracy mierzony w ha, którą może wykonać  $n$  kombajnów zbożowych w ciągu sezonu agrotechnicznego, można wyrazić za pomocą następującego wzoru

$$(1) \quad Z_n = n \cdot LDX.$$

Przyjeliśmy, że  $L$  jest dyskretną zmienną losową, a  $X$  zmienną ciągłą. Wobec tego  $Z_n$  jest ciągłą zmienną losową. Zakładamy również, że zmienne losowe  $L$  oraz  $X$  są niezależne. Oznaczmy przez  $\beta$  prawdopodobieństwo, że wystarczy nam maszyn.

Niech  $N_\beta$  oznacza poszukiwaną liczbę kombajnów potrzebnych do wykonania zadania  $Y$ . Wielkość  $N_\beta$  określamy w następujący sposób

$$(2) \quad N_\beta = \min \{n \in N: P(nLDX > Y) \geq \beta\}.$$

Zgodnie z wzorem (2) wielkość  $N_\beta$  jest równa najmniejszej wartości spośród wszystkich wartości  $n$ , dla których prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że ilość pracy wykonanej przez  $n$  kombajnów jest większa od planowanego zadania  $Y$ , równa się co najmniej prawdopodobieństwu  $\beta$ .

Stosowanie wzoru (2) w praktyce wymaga przekształcenia go do innej równoważnej postaci.

Mamy więc

$$P(nLDX > Y) = P\left(LX > \frac{Y}{nD}\right).$$

Tabela 1. Funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $L$

$lj$	17	18	19	20
$pj$	0,10	0,40	0,40	0,10

Niech rozkład zmiennej losowej  $L$  ma postać

$$P(L = l_j) = p_j \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Niech  $F_X(x)$  będzie dystrybucją zmiennej losowej  $X$ :  $F_X(x) = P(X < x)$ .

Dystrybucją zmiennej losowej  $U = LX$  wyznaczamy na mocy twierdzenia o prawdopodobieństwie zupełnym:

Jeżeli zdarzenia losowe  $A_1, A_2, \dots, A_r$  wyłączają się parami i wyczerpują zbiór  $E$  zdarzeń elementarnych, przy czym  $P(A_j) > 0$  dla  $j = 1, 2, \dots, r$ , to dla dowolnego zdarzenia losowego  $B$  zachodzi równość

$$P(B) = \sum_{j=1}^r P(A_j)P(B | A_j).$$

Wobec tego  $F_U(u) = P(U < u) = P(LX < u) =$

$$= \sum_{j=1}^r P(L = l_j)P(LX < u | L = l_j),$$

z kolei  $P(LX < u | L = l_j) = P(l_j X < u) = P\left(X < \frac{u}{l_j}\right) = F_X\left(\frac{u}{l_j}\right)$ ,

ostatecznie więc

$$(3) \quad F_U(u) = \sum_{j=1}^r p_j F_X\left(\frac{u}{l_j}\right).$$

A więc wzór (2) możemy zapisać w następującej postaci równoważnej

$$(4) \quad N_\beta = \min \left\{ n \in N: \sum_{j=1}^r p_j F_X\left(\frac{Y}{nl_j D}\right) \leq 1 - \beta \right\}.$$

Formułę (4) zaprogramowano w języku FORTRAN na komputerze ODRA 1305. Obliczenia przeprowadzono dla następującego przykładu:

Na podstawie wyników eksploatacyjnych badań kombajnów zbożowych KZS-5 wykazano metodami statystyki-matematycznej, że wydajność efektywna  $X$  w ha/h ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0,72 i odchyleniu standardowym 0,17. Dla długości okresu agrotechnicznego  $L$  przyjęto funkcję prawdopodobieństwa podaną w tabeli 1. Ponadto przyjęto  $D = 8$  h.

W wyniku obliczeń na komputerze otrzymano następujące wyniki (Tabela 2)

Tabela 2. Liczba potrzebnych kombajnów  $N_\beta$

$\beta \backslash \gamma$	0,60	0,70	0,80	0,90
500	5	6	6	7
1000	10	11	12	14
1500	15	17	18	21
2000	20	22	24	28
2500	25	27	30	34
3000	30	33	36	41



Pierwszym uczonym, który dostrzegał potrzebę ujednoczenia jednostek miar oraz korzyści z tego płynące, był Polak, profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego, Stanisław Pudłowski (1597—1645). Porównywał on mianowicie krakowskie miary wzorcowe ze stopą rzymską; ponieważ krakowski wzorec miary długości był w pewnych miejscach uszkodzony, nasunęła się naszemu uczonemu myśl znalezienia takiej miary, która nie ulegałaby odkształceniom i była powszechną w użyciu.

O fakcie tym dowiadujemy się z książki „*Misura universale*” wydanej w Wilnie w 1675 roku po włosku. Drugie wydanie, jak też i polski przekład ukazały się w Krakowie w 1897 r. staraniem Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Akademii Umiejętności. Pełny jej tytuł brzmi: „*Miara powszechna czyli traktat w którym się wykazuje jako na każdym miejscu ziemi daje się znaleźć jedna miara i jeden ciężar powszechny, nie wymagające odnoszenia się do żadnej innej miary lub ciężaru, które wszędzie będą te same, nie podlegające zmianom i wiekuiście tak długo jak świat istnieć będzie. Przez Tytusa Liwiusa Burattiniego. Miarę tę można wynaleźć w przeciągu jednej godziny. Wskazuje nam ona jak wielkim powinien być ciężar. Z tej miary wyprowadzają się jeszcze miary objętości do mierzenia rzeczy sypkich i płynów*”.

Autor, Tytus Liwius Burattini (ok. 1615—1682 lub nast.) był z pochodzenia Włochem. Przybył do Polski w 1641 roku. W Polsce drugiej połowy XVII w. była to osoba wielce znana. Dzięki dużej zaradności i obrotowości objął w kilkanaście lat po przyjeździe mennice koronne i litewskie w dzierzawę, wybijał szelągi miedziane zwane boratynkami, na których dorobił się takiej fortuny, że wspierał skarb królewski Jana Sobieskiego. Tak w Polsce mu się spodobało, że przyjął indygenat, ożenił się z Polką, dobrze władał językiem polskim, dotrzymał swego zapewnienia „tu żyć y umierać pragnę”.

Wśród rozlicznych zainteresowań zajmował się fizyką, zwłaszcza mechaniką, hydrostatyką i optyką.

We wstępie swej książki pisze: „W r. 1641 wyjechałem z Egiptu i przybyłem do Polski. W Krakowie poznałem Księdza Stanisława Pudłowskiego, Proboszcza u Św. Mikołaja, Profesora Akademii krakowskiej, znakomitego matematyka, z którym zawarłem najściślejszą przyjaźń, a ponieważ był on najpoufalszym przyjacielem pana Galileusza (wówczas jeszcze żyjącego), przeto posiadał wszystkie dzieła tegoż, bądź drukowane, bądź rękopiśmienne, a pomiędzy temi traktat o Wadze wynalezioną przez rzeczzonego pana Galileusza, przeze mnie nadzwyczaj podziwianej, z którego dał mi opis. Gdym dobrze rozstrząsnął to dziełko, postanowiłem zbudować inną podobną, której zastosowanie byłoby skuteczniejsze. (...) Zbudowawszy wspomnianą wagę, napisałem następnie komentarz do traktatu p. Galileusza i pokazałem rzeczonemu Księdzu Pudłowskiemu, który go w swej uprzejmości bardzo chwalił, a kiedy doszedł do czytania, jak za pomocą wody znajduje się stosunek pomiędzy kulą a sześcianem, zastanowił się chwilę, i rzekł mi te wyraźne słowa: „Doszedłeś Pan bardzo blisko do wynalezienia rzeczy tak poszukiwanej przez cały świat, mianowicie do Powszechnej Miary i Ciężaru” i dodał, że bardzo, bardzo wiele razy nad tem przemyślał, lecz, że nigdy nie sądził, aby można ważyć we wodzie ciało dające się w niej zanurzyć bez przywiązywania go do jakiegoś sznurka lub drutu metalowego, jak to ja dopiero co pokazałem, iż uczynić można. Rzekł mi nadto i zaklinał mnie usilnie, że skoro już zrobiłem to odkrycie, abym temuż nadal poświęcił swój umysł i za pomocą cudownego wynalazku

Wahadeł zrobionego przez pana Galileusza, darował światu dwie rzeczy tak potrzebne do użytku ludzkości i życia cywilnego jak ustanowienie powszechnej Miary i Ciężaru”.

W swej pracy postuluje Burattini przyjęcie długości wahadła, które w ciągu sekundy wykonuje jedno wachnięcie, za powszechną miarę długości i określa ją terminem „metr”. (Zechce Czytelnik znaleźć długość „metra” Burattiniego). Po uwagach, jak taką jednostkę miary wykonać, wyprowadza z niej jednostkę powierzchni, objętości oraz powszechną jednostkę ciężaru.

Podkreślmy, że słowo „metr” zostało użyte tu po raz pierwszy. A tak ono powstało (pisze o tym Burattini). „Miara powszechna”, „misura universale” tłumaczy się na język grecki jako „μετρον καθολικον”. Przekształcając ostatnie wyrażenie odpowiednio do zasad języka włoskiego otrzymuje się termin „Il Metro Cattolico”, a więc „metr powszechny”.

Oczywiście opracowana jednostka długości nie stała się powszechną. Nie mogła nią być, bo okres wahań zależy od siły przyciągania, a ta jest różna w różnych szerokościach geograficznych. Poszła w zapomnienie razem z jej twórcą. Jest natomiast Burattini jeszcze w jednej kwestii pierwszym. Jest mianowicie pierwszym, który nie tylko projektował, ale praktycznie przeprowadził swój projekt, wyprzedzając w ten sposób twórców systemu metrycznego we Francji o przeszło sto lat.

Książka Burattiniego ukazała się trzydzieści lat po śmierci Stanisława Pudłowskiego. Więcej informacji o Burattinim można uzyskać z książki A. Hniłko „*Włosi w Polsce Tytus Liwiusz Burattini*” (Kraków 1923).

Pierwsza wiadomość o posługiwaniu się wahadłem, jako jednostką długości nosi datę 1660 i dotyczy doświadczeń Krzysztofa Wrena, członka Royal Society w Londynie. W 1673 r. ukazała się książka Christiana Huyghensa „*Horologium oscillatorium*” (o zegarach wahadłowych), w której omówione zostały zasady zależności długości wahadła sekundowego od szerokości geograficznej. Zatem Burattini nie tylko nie był odosobniony ze swoim pomysłem wykorzystania wahadła, ale nawet wyprzedzony, o tyle, że projekt swój na późno ogłosił. We wstępie wymienianej książki pisze, że podróżując w 1645 r. do Włoch został, przejeżdżając przez Węgry, napadnięty i obrabowany przez opryszków tracąc pewne materiały. Mogło to być przyczyną tak znacznego opóźnienia w wydaniu „*Misura universale*”. Zapewne nie znał wymienionych prac innych uczonych, skoro pisze:

„Nie wiem czy uzyskam zgodę ogółu; w każdym razie sądzę, że nikt (jeśli się nie mylę) do tej pory do czegoś innego nie doszedł, gdyż odkąd pracuję nad niniejszym dziełkiem, nie omieszkalem zasięgać rady pierwszych ludzi bieżącego stulecia, nie powiadając im na jakiej opieram się zasadzie i wszyscy jednogłośnie chwalili mój zamiar, z powątpiewaniem jednak o powodzeniu, nie bez racji przez wzgląd na trudność przedsięwzięcia. Skoro do tej pory nie mamy pisma żadnego autora w tej materii, zatem jeśli to moje dziełko będzie przyjęte i uznane przez ogół, będę miał z tego wielką pociechę; jeśli zaś ku memu zmartwieniu, nie będzie przyjęte, pocieszę się przynajmniej tem, że szkoda będzie jedynie po mojej stronie: nikogo bowiem nie oskarżę, a raczej wykażę, iż miałem myśl przysłużenia się wszystkim”.

Opracował mgr Walerian PIOTROWSKI



Gminne wróżebne  
przypowieści  
[Kalendarz Naukowy  
Karola Langiego, 1865]

Motto:  
Ty nie szydź z przypowiedni,  
bo niesie przysłowie  
Czego mędrzec niezgadnie,  
to głupi przepowie

Styczeń	Nowy rok pogodny Zbiór będzie dorodny
Luty	Gdy święty Maciej lodu nie stopi Długo jeszcze w ręce chuchać będą chłopci
Marzec	Na świętego Grzegorza Idą rzeki do morza Albo do gospodarza
Kwiecień	Jeśli na ś. Wojciech wrony z żyta niewidać, To możesz resztę suchej paszy Już bydełku wydać Kiedy grzmi w święto Wojciecha Rośnie rolnikom pociecha
Maj	Urbanów owieś, Gawłowe żytko Kata warte wszystko
Czerwiec	Na święty Wit Słowik cyt
Lipiec	Kiedy człowiek łąkę kosi Lada baba deszcz uprosi
Sierpień	W sierpniu mgły na górach: pewne wody A mgły na dolinach — pewne pogody
Wrzesień	Po świętym Mateuszu Každy kiep w kapeluszu
Październik	Miesiąc październik — Marca obraz wierny
Listopad	W listopadzie grzmi — Rolnik wiosnę śni
Grudzień	Święta Łucya — Dnia przykrócyca

Posłowie: *Gdym przed 30 laty w Wietrznie (w Sanockim) pytał sędziwego kmiecia Szymona o wróżebne gminne przypowieści — odrzekł: „Od Świętej Łucyi uważam ja sobie te dni 12, które mamy do Bożego Narodzenia; uważam każdy z osobna i mam prognostyk na przyszłe 12 miesięcy: Jaka chwila na Ś. Łucyę, taki będzie do końca Grudzień; jaka chwila nazajutrz, t.j. 14<sup>go</sup>, taki wypadnie Styczeń; jaki 15<sup>ty</sup>, taki Luty, i tak dalej, aż do Bożego Narodzenia. To sobie notuję do pory roku stosując, i tego się trzymam; a choć mi się co niezgodzi, to sobie mówię, że taka wola Opatrzności, która lepiej wie, jak z nami sobie ma poczynać — kiedy dać deszcz — a kiedy pogodę. To ludzie starsi ode mnie z dawien dawna praktykowali, i każdemu łatwo zmiarkować. Jak jest, tak jest: zawsze to pewniejsze, niż przepowiednie, co panowie po kalendarzach piszą”.*



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 262. Na płaszczyźnie dane są parami rozłączne i niewspółliniowe odcinki. Czy zawsze można, łącząc odcinkami końce danych odcinków, uzyskać łamaną zwyczajną (bez samoprzecięć)?

Rozwiązanie na str. 9

M 263. Niech  $f(x) = x^3 - x + 1$ . Wykazać, że dla każdego naturalnego  $m > 1$  liczby  $m, f(m), f(f(m)), \dots$  są parami względnie pierwsze.

Rozwiązanie na str. 10

M 264. Wykazać, że jeżeli  $p$  jest liczbą pierwszą, to liczba  $\binom{n}{p} - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$  jest podzielna przez  $p$ .

$\binom{n}{p}$  oznacza współczynnik Newtona,  $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$  — największą liczbę całkowitą nie większą od  $n/p$ .

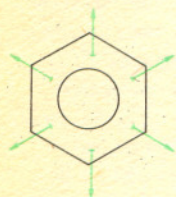
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

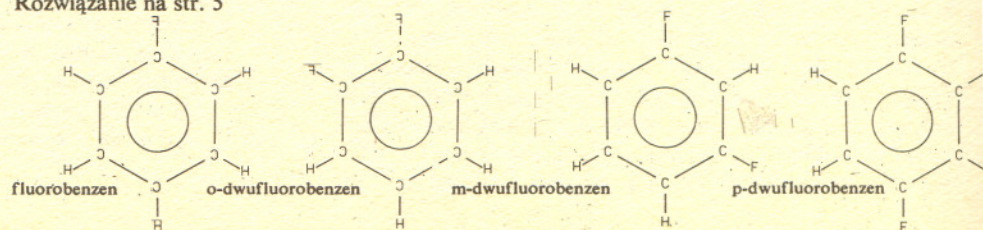
Zadanie F95

Rysunek przedstawia wzory strukturalne jedno- i dwulfuoropochodnych benzenu. Wiedząc, że elektryczny moment dipolowy fluorobenzenu  $\mu = 1,43\text{D}$ , oszacować momenty dipolowe dla pozostałych związków.

Rozwiązanie na str. 5



Wskazówka: Częsteczka benzenu ma zerowy moment dipolowy. Momenty dipolowe wiązań C—H znoszą się ponieważ częsteczka ta jest symetryczna.





Dr Allan J. THORPE (Wielka Brytania)

- Proście o nowego gubernatora? zdziwił się Tyberiusz.  
 - Po cóż wam to? Przywiezie ze sobą tylko nowych urzędników i będzie wam jeszcze gorzej niż dotychczas. Posłuchajcie lepiej, opowiem wam następującą historię: Pewnego razu ciężko ranny żołnierz leżał na pobojowisku i czekał, aż zjawi się cyrulik i opatrzy mu rany, na których roziło się od much. Lżej ranny towarzysz, zobaczywszy to, zaczął odpędzać owady. "Nie rób tego! - krzyknął pierwszy. - Muchy opiły się już moją krwią i nie są tak natrętne jak z początku. Jeżeli je odpędzisz, ich miejsce zajmą inne, wygłodzone, a wtedy będzie po mnie."

Robert Graves



NIE WIEM, KTO MNIE STWORZYŁ.  
 ALE ZNAM TAKICH, KTÓRYCH NA PEWNO STWORZYŁA EWOLUCJA

SKROMNE MENU  
 NA CAŁY DZIEŃ

- Śniadanie  
 Barszcz-bulion  
 Paszteciki  
 Auszpik z raków  
 Zraziki cielęce po parysku  
 Giquot baranie z brukselką  
 Bomba neapolitańska

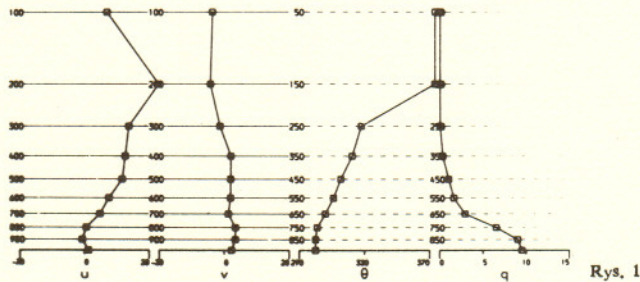
- Obiad  
 Zupa oxtail lub  
 Rosół myśliwski  
 Petruży z masłem  
 Homary, sos remoulade  
 Polędwica, sos truflowy  
 Perliczki, kuropatwy  
 Szparagi po polsku  
 Szarlotka z lodów  
 Ananasy

- Kolacja  
 Puiarda w potrawie z sosem rakowym  
 Udziec sarni  
 Sałata włoska  
 Vol au vent z groszkiem  
 Souflé z renglod  
 lody  
 /"Najnowsza Kuchnia" pióra Marty Nowakowskiej nakładem Gebethnera i Wolffa/  
 Widać wyraźnie, że naszym przodkom nie dostawało wyobraźni.

Z burzami związane są dobrze wszystkim znane zjawiska — ciężkie, przytłaczające chmury, gwałtowne opady, porywy wiatru, grzmoty i pioruny. Ze względu na olbrzymie szkody, jakie wyrządzają czasami burze, powstały teorie, modele matematyczne i wykonuje się dziesiątki pomiarów w celu zrozumienia ich powstawania, rozwoju i wewnętrznej struktury. W tym artykule przedstawię kilka ostatnich rezultatów uzyskanych na podstawie symulacji numerycznych.

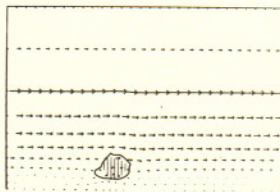
Atmosfera jest ośrodkiem ciągłym i jako taka opisywana jest układem nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych wiążących prędkość powietrza z podstawowymi wielkościami mierzonymi w atmosferze — ciśnieniem, gęstością i temperaturą. Uwzględnić musimy także obrót Ziemi. Rozwiązania analityczne tych równań nie są do tej pory znane, możemy je jednak znaleźć w sposób przybliżony, wykorzystując maszyny matematyczne. Jest to obecnie jeden z najbardziej złożonych problemów obliczeniowych fizyki atmosfery.

Aby zacząć rozwiązywanie równań, musimy dokładnie określić stan atmosfery przed burzą. Jest to związane z pomiarami zmiennych meteorologicznych na wielu poziomach nad powierzchnią Ziemi. Na rysunku 1 przedstawione są typowe rezultaty takich obserwacji —  $u$  i  $v$  są poziomymi składowymi prędkości wiatru,  $\theta$  — temperaturą potencjalną,  $q$  — wilgotnością. Wielkości te są zależne od ciśnienia, ale równie dobrze mogą być traktowane jako funkcje wysokości.

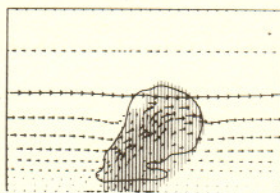


Rys. 1

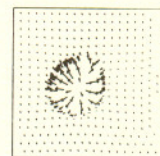
Rysunek 2 pokazuje początek życia chmury — strzałki przedstawiają prędkości wiatru (ich długość jest proporcjonalna do prędkości, a orientacja zależna od jego kierunku), ciągłe linie przedstawiają brzegi chmury, a pionowe kreski określają miejsca, w których pada deszcz. Chmura rozwija się, rośnie. Około pół godziny od chwili rozpoczęcia wzrostu chmura burzowa zaczyna być już bardzo wypiętrzona (rysunek 3). W centralnej części chmury powstaje silny prąd wstępujący powietrza, w którym rosną krople deszczowe. Krople te, gdy staną się dostatecznie ciężkie, zaczynają spadać ku powierzchni Ziemi. Spadając parują oziębiając otaczające je powietrze, powoduje to powstanie silnego prądu zstępującego. Strumień zimnego powietrza „rozpełza” się na boki na powierzchni Ziemi powodując silne porywy wiatru. Zjawisko to można dobrze zaobserwować na rysunkach 4(a) i (b), na których przedstawiono pole prędkości wiatru na powierzchni Ziemi. Obrazują one ten sam obszar w różnych chwilach. Obserwator stojący w punkcie  $x$  zaobserwuje słaby wiatr przed burzą, a kilka minut potem sytuacja zmieni się radykalnie — wiatr zmieni kierunek i gwałtownie stężeje, niosąc ze sobą silne podmuchy zimnego powietrza z deszczem.



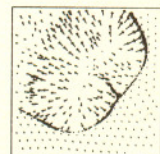
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4(a)



Rys. 4(b)