

SPIS TREŚCI

NUMERU 10(94)

O iteracji przejść granicznych <i>dr Zbigniew Sawoń</i>	str. 1
Najlżejszy metal — wodór <i>dr hab. Andrzej Holas</i>	str. 4
O Teorii Katastrof <i>dr Jakub Tatarkiewicz</i>	str. 8
Patrz w rękę <i>doc. dr Antoni Kuszell</i>	str. 11
Fale uderzeniowe <i>doc. dr Antoni Kuszell</i>	str. 12
Klub 44	str. 15
Zadania	str. 15
Powstanie metody naukowej fizyki <i>prof. dr Józef Werle</i>	str. 16

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
doc. dr Jerzy Bartke
doc. dr Andrzej Bączynski
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
prof. dr Kazimierz Goebel
doc. dr Bolesław Grabowski
dr Jan Hanasz
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
doc. dr Tadeusz Iwiński
doc. dr Andrzej Januszajtis
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
prof. dr Leon Jeśmanowicz
dr Henryk Kaczorek
prof. dr Marek Kuczma
mgr Andrzej Mąkowski
prof. dr Bohdan Paczyński
prof. dr Zdzisław Pawlak
prof. dr Arkadiusz Piekara
doc. dr Sławomir Ruciński
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Zbigniew Semadeni
doc. dr Grzegorz Sitarski

prof. dr Józef Smak
prof. dr Jan Stankowski
doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Stefan Turnau
prof. dr Jerzy Wdowczyk
doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Janusz Zakrzewski —
wiceprzewodniczący
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
mgr Tomasz Chlebowski
mgr Maciej Jędrzejczak
dr Marek Kordos — red. nac.
dr inż. arch. Jacek Mazur — ilustracje
dr Krzysztof Prazmowski — red. techn. graf.
dr Michał Szurek
mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa
Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 626/12/81 L-15

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej zł 30—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następnego
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XVOI W-wa 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912
w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-100 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

O iteracji przejść granicznych

Dr Zbigniew SAWOŃ

Wprowadzenie

W Analizie Matematycznej wiele pojęć wprowadza się przy użyciu przejść granicznych. Tak postępujemy określając np. ciągłość funkcji w punkcie, różniczkowalność funkcji w punkcie, całkowalność w sensie Riemanna itd. Nieraz przy praktycznych zastosowaniach lub w trakcie przeprowadzania dowodów twierdzeń pojawia się konieczność zastosowania przejścia granicznego do ciągu elementów, przy określeniu których zastosowano już w sposób mniej lub bardziej zakamuflowany przejście graniczne. W ten sposób mamy do czynienia z iteracyjnym procesem granicznym, w którym kolejność wykonywania tych przejść granicznych jest z góry określona. Wykonanie ich w innej kolejności może dać po prostu inny wynik.

Zachodzi więc konieczność zbadania, kiedy wynik takiego iteracyjnego procesu granicznego zależy istotnie od kolejności wykonywania tych przejść i jeżeli zależy, to rzeczą niezwykle ważną jest znalezienie warunków koniecznych, dostatecznych lub najlepiej jednocześnie koniecznych i dostatecznych, gwarantujących niezależność wyniku od kolejności wykonania przejść granicznych. W ten sposób powstały znane z Analizy twierdzenia, np. *twierdzenie o różniczkowaniu wyraz za wyrazem ciągu funkcyjnego*, lub *twierdzenie o przejściu z granicą pod znak całki*.

Rozpatrzmy dwa przykłady.

Przykład 1. Na przedziale domkniętym $[0, 1]$ określamy funkcje f_1, f_2, f_3, \dots następująco

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & \text{gdy } 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 & \text{gdy } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Typowy wykres funkcji f_n widzimy na rysunku obok. Dla każdego $x \in [0, 1]$ ciąg liczb $(f_n(x))$ jest zbieżny do liczby $f_0(x)$, gdzie

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ 0 & \text{dla } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Niech teraz ciąg liczb x_k z przedziału $(0, 1]$ będzie zbieżny do zera. Mamy wówczas

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x_k) = 0, \quad \text{natomiast}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f_n(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 1.$$

i widzimy, że istotnie wynik zależy od kolejności wykonywania przejść granicznych. Analizując dokładniej powyższy przykład stwierdzimy z łatwością, że w zasadzie wykazaliśmy tylko nieciągłość funkcji f_0 w punkcie $x = 0$.

Przykład 2. Problem, jaki sobie stawiamy, to wyliczenie granicy

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+k}.$$

Oczywiście najprościej byłoby napisać

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+k} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0,$$

ale czy wolno nam było zamienić kolejność przejść granicznych? W tym przypadku tak, gdyż dla każdego naturalnego k mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+k} = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n+k},$$

a szereg po prawej stronie tej równości jest k -tą resztą zbieżnego szeregu naprzemiennego

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; a więc granica tych sum, przy $k \rightarrow \infty$, jest równa zeru.

Twierdzenie o różniczkowaniu „wyraz za wyrazem” szeregu potęgowego: Jeżeli funkcje f_n są różniczkowalne w pewnym przedziale

(a, b) a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest w tym przedziale

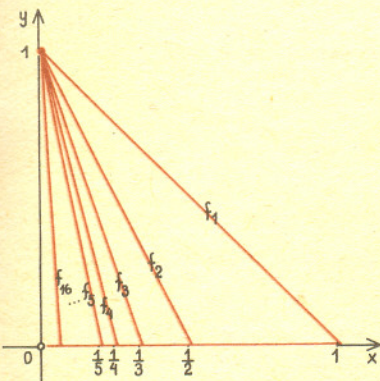
zbieżny jednostajnie, to jego suma $f_0(x)$ jest także funkcją różniczkowalną w tym przedziale i

$$f_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Twierdzenie o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki: Jeżeli funkcje f_n są całkowne na pewnym przedziale (a, b) i ciąg

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie, to funkcja graniczna f_0 jest też całkowna i

$$\int_a^b f_0(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$



I. Problem poruszony w przykładzie 1, dotyczący możliwości zamiany kolejności przejść granicznych jest szczególnym przypadkiem szerszego zagadnienia, które można opisać następująco:

Niech S będzie przestrzenią metryczną i niech $s_0 \in S$. Dany jest ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji ciągłych określonych na S taki, że dla każdego $s \in S$ ciąg liczb $f_n(s)$ jest zbieżny do pewnej liczby $f_0(s)$. Czy i kiedy funkcja f_0 jest ciągła w punkcie s_0 ? Z ewentualnej pozytywnej odpowiedzi na to pytanie wynika, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x_k)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f_n(x_k),$$

bo obydwie „podwójne granice” są równe $f_0(s_0)$.

W Analizie matematycznej często łatwiejsze do zbadania niż „lokalne” są problemy globalne, mówiące coś o własnościach funkcji na całym zbiorze określoności. Tak samo i my podamy pewne warunki ciągłości funkcji f_0 w każdym punkcie zbioru przestrzeni metrycznej S . Jak widzieliśmy w przykładzie 1 „punktowa” zbieżność ciągu funkcji ciągłych wcale nie gwarantuje, że funkcja graniczna jest ciągła. Proponujemy Czytelnikowi rozważyć także przypadek ciągu funkcji $f_n(x)$ na przedziale $[0, 1]$ określonych wzorem $f_n(x) = x^n$.

Zbieżność punktowa ciągu funkcyjnego. Jeżeli dla każdego punktu x obszaru określoności funkcji $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$ mamy

$$f_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

to mówimy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest punktowo zbieżny do swojej granicy f_0 . Symbolicznie

$$f_n \rightarrow f \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{x \in S} \bigvee_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n > N} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Podaną w tekście definicję jednostajnej zbieżności można zaś symbolicznie zapisać tak

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{x \in S} \bigwedge_{n > N} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(zwróćmy uwagę na kolejność kwantyfikatorów).

Przestrzeń metryczną nazywamy *zwartą*, jeżeli każdy ciąg punktów tej przestrzeni zawiera podciąg zbieżny. Podprzestrzeń zwarte przestrzeni euklidesowej to zbiory domknięte i ograniczone. W szczególności jest tak dla podzbiorów prostej liczbowej. Przestrzeń *lokalnie zwarta* to przestrzenie metryczne, w których każdy punkt ma otoczenie, którego domknięcie jest zwarte. Przestrzenie euklidesowe i wszystkie ich podprzestrzenie (w szczególności prosta liczbowo i wszystkie jej podzbiory) są lokalnie zwarte.



Przypuśćmy teraz, że ciąg f_n funkcji na S jest „punktowo” zbieżny do funkcji f_0 i że dla każdego naturalnego n liczba

$$\delta_n = \sup_{s \in S} |f_n(s) - f_0(s)|$$

jest skończona; ma to miejsce np. w przypadku, gdy funkcja f_0 jest ciągła. Może się zdarzyć, że

$$\delta_n \rightarrow 0.$$

Mówimy wówczas, że ciąg funkcji f_n jest *jednostajnie zbieżny* na S do f_0 i zapisujemy to symbolicznie tak:

$$f_n \rightrightarrows f_0 \text{ na } S.$$

Z naszych definicji wynika, że

Jeżeli f_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) są funkcjami na zwartej przestrzeni S i $f_n \rightrightarrows f_0$ na S , to f_0 jest funkcją ciągłą. Krócej: *granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła*. Wracając do przykładu 1 z łatwością obliczymy, że tam $\delta_n = 1$.

Przykład 3. Rozważmy ciąg funkcyjny

$$f_n(x) = x^n(1-x^n), \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Oczywiście jest on zbieżny punktowo do funkcji zerowej, a więc ciągłej. Ale $\delta_n = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n(1-x^n)| = 1/\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$, tj. ciąg nasz *nie jest* do swojej granicy zbieżny *jednostajnie*.

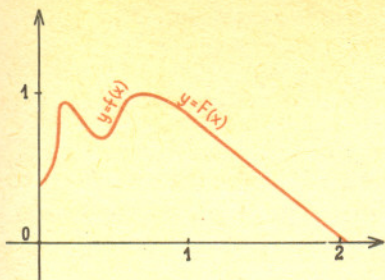
Widzimy zatem, że zbieżność jednostajna jest warunkiem *dostatecznym* ciągłości funkcji granicznej, ale nie warunkiem *konicznym*. Pewne warunki konieczne i dostateczne sformułował Arzelà i są związane z tzw. zbieżnością quasijednostajną:

Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji ciągłych określonych na S jest *quasijednostajnie zbieżny* do swojej granicy punktowej f_0 na S , jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego naturalnego n_0 istnieje skończona liczba wskaźników $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ większych od n_0 i takich, że dla każdego $s \in S$ zachodzi

$$\min_{1 \leq i \leq k} |f_{n_i}(s) - f_0(s)| < \varepsilon.$$

Zapisujemy to symbolicznie tak: $f_n \rightrightarrows_q f$ na S . Oczywiście ciąg zbieżny jednostajnie jest zbieżny quasijednostajnie (dlaczego?) Twierdzenie Arzelà mówi, że jeżeli $f_n(s) \rightarrow f_0(s)$ dla każdego punktu s zwartej przestrzeni metrycznej S i jeżeli f_n są funkcjami ciągłymi, to f_0 jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy $f_n \rightrightarrows_q f_0$ na S . Istotną rzeczą w twierdzeniu tym jest założenie zwartości przestrzeni S . Twierdzenia tego typu dla przestrzeni metrycznych innych niż zwarte i lokalnie zwarte nie są autorowi znane.

II. Granica punktowa ciągu funkcji ciągłych określonych na S , jak już wiemy, nie musi być funkcją ciągłą. Powstaje w związku z tym pytanie: Jaką funkcję określoną na S można przedstawić jako granicę punktową ciągu punktowo zbieżnego funkcji ciągłych? Inaczej: jak scharakteryzować „punktowe” granice ciągów funkcji ciągłych? Dokładne zbadanie tego zagadnienia wymaga wprowadzenia pewnej klasyfikacji funkcji określonych na przestrzeni metrycznej S .



Dzielimy mianowicie funkcje do klasy Baire'a w następujący sposób:

- i) do zerowej klasy Baire'a zaliczamy funkcje ciągłe,
- ii) do k -tej klasy Baire'a ($k \geq 1$) na S zaliczamy granice punktowo zbieżnego ciągu funkcji klasy $k-1$ (nie należące do l -tej klasy dla $l < k$).

Przykład 4. Funkcja f_0 z przykładu 1 jest funkcją pierwszej klasy Baire'a na $[0, 1]$.

Przykład 5. Wykażemy, że pochodna różniczkowalnej funkcji $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją co najwyżej pierwszej klasy Baire'a na tym przedziale. Rozszerzmy najpierw funkcję f do funkcji F różniczkowalnej na przedziale $[0, 2]$ np. wzorem

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in [0, 1] \\ f(1) + (x-1)f'(x) & \text{dla } x \in [1, 2] \end{cases}$$

(p. rysunek obok). Oczywiście

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ f(1) & \text{dla } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Jeżeli przyjmiemy teraz dla $x \in [0, 1]$ i $n = 1, 2, 3, \dots$

$$f_n(x) = n(F(x+1/n) - F(x))$$

to łatwo wykażemy, że funkcje f_n są ciągłe i $f_n(x) \rightarrow f'(x)$ dla każdego $x \in [0, 1]$, tzn. ciąg funkcji f_n jest punktowo zbieżny do granicy f' .

Przykład 6. Funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych zawartych między 0 a 1

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in [0, 1] \text{ jest liczbą wymierną} \\ 0 & \text{gdy } x \in [0, 1] \text{ jest liczbą niewymierną} \end{cases}$$

jest — jak łatwo sprawdzić — granicą następującego punktowo zbieżnego ciągu:

$$f_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\cos 2\pi n! x)^{2k}$$

i jest wobec tego funkcją co najwyżej drugiej klasy Baire'a.

Ważną własność funkcji pierwszej klasy Baire'a opisuje następujące twierdzenie:

Każda funkcja pierwszej klasy Baire'a określona na zwartej przestrzeni metrycznej S ma przynajmniej jeden punkt ciągłości. Z twierdzenia tego wynika natychmiast, że funkcja z poprzedniego przykładu nie jest pierwszej klasy.

Są twierdzenia podające warunki konieczne i dostateczne przynależności danej funkcji do określonej klasy Baire'a. W sformułowaniach tych twierdzeń występują pojęcia związane ze strukturą topologiczną przestrzeni S . Przytoczenie tych twierdzeń wykraczałoby poza ramy tego artykułu.

Na zakończenie autor chciałby podać kilka uwag o „bogactwie” klas Baire'a. I one są w pewnym sensie związane ze strukturą topologiczną przestrzeni zwartej S .

1) Jeżeli S składa się ze skończonej liczby punktów, to oczywiście każda funkcja na S jest ciągła i odwrotnie: jeżeli S jest taką zwartą przestrzenią metryczną, że każda funkcja określona na S jest na S ciągła, to przestrzeń S ma tylko skończoną liczbę punktów. Na takiej przestrzeni wszystkie funkcje są zerowej klasy Baire'a.

2) Niech S składa się z liczby 0 i liczb postaci $1/n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Funkcja określona wzorem $f(1/n) = a_n, f(0) = a_0$ jest ciągła na S wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Jeżeli wybierzemy $a_0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, to otrzymamy funkcję nieciągłą. Ale gdy

$$f_k(1/n) = \begin{cases} a_n & \text{dla } n = 1, 2, \dots, k \\ a_0 & \text{dla } n > k \end{cases}$$

oraz $f_k(0) = a_0$

to f_k są już ciągłe na S oraz zbieżne punktowo do f_0 . Widzimy zatem, że na takiej przestrzeni S każda funkcja jest co najwyżej pierwszej klasy Baire'a. Można wykazać, że podobnie jest dla dowolnych przeliczalnych zwartych przestrzeni metrycznych. Autorowi nie wiadomo, czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne: Jeżeli S jest taką przestrzenią metryczną zwartą, że każda funkcja o wartościach rzeczywistych na S jest albo ciągła albo pierwszej klasy Baire'a, to S jest zbiorem przeliczalnym.

3) Gdy S jest odcinkiem $[0, 1]$, to istnieją funkcje dowolnie wysokich klas Baire'a na S a także funkcje, które nie są żadnej klasy Baire'a.

Najlżejszy metal — wodór

Dr hab. Andrzej HOLAS

Fakt, że wodór jest najlżejszym gazem, znany jest powszechnie co najmniej od czasu sukcesów wielkich sterowców. Lecz nazwanie wodoru najlżejszym metalem z pewnością zaskoczy wielu, chociaż nie zdziwi systematycznych czytelników „Deltę” (patrz Delta 4/1981, B. Baranowski „Metaliczny wodór?”). Ten intrygujący temat z pewnością zasługuje na kontynuację i rozszerzenie.

Czy najlżejszy?

Aby odpowiedzieć na powyższe pytanie, a mówiąc precyzyjniej, aby wyznaczyć masę właściwą, jaką miałby wodór w fazie metalicznej, musimy znać masę m_H jednego atomu tego pierwiastka, oraz wiedzieć, jak gęsto są te atomy upakowane — jaka objętość Ω_0 przypada na atom. Odpowiedź na pierwsze pytanie znajdziemy bez trudu w szkolnych tablicach. Szukając odpowiedzi na drugie, skorzystamy z metody, którą stosują fizycy — teoretycy w odniesieniu do powszechnie znanych metali, a zwłaszcza do metali alkalicznych, na czele których w układzie okresowym pierwiastków stoi wodór. Wyobraźmy sobie, że potrafimy obliczyć energię wewnętrzną, jaką ma bryła metalu o konkretnej, dowolnie wybranej gęstości, rozumiejąc ją jako równą pracy potrzebnej do tego, aby rozzerwać bryłę na elementarne składniki — jony i elektrony — i odciągnąć je nieskończenie daleko od siebie. W ten sposób określiliśmy funkcję $E(\Omega)$ — energię, przypadającą na jeden atom, w zależności od objętości (też na jeden atom). Interesująca nas objętość Ω_0 musi odpowiadać minimum funkcji E : stabilny metal przeciwstawia się (jego energia rośnie, $E(\Omega) > E(\Omega_0)$) zarówno przy próbach ściskania ($\Omega < \Omega_0$) jak i rozciągania ($\Omega > \Omega_0$). Dla metali alkalicznych funkcja $E(\Omega)$ jest sumą trzech składników:

- (1) $E = E_J + E_e + E_{ej}$
- (2) $E_J = C_{JJ}\Omega^{-1/3}$
 $C_{JJ} = -3,35 \cdot 10^{-19} \text{ erg cm}$
- (3) $E_e = C_{ek}\Omega^{-2/3} + C_{ew}\Omega^{-1/3} + \dots$
 $C_{ek} = +3,50 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \times \text{cm}^2$
 $C_{ew} = -1,70 \cdot 10^{-19} \text{ erg} \times \text{cm}$
- (4) $E_{ej} = C_{ej}\Omega^{-1}$

E_J — energii związanej z oddziaływaniem między jonami,

E_e — energii jednorodnego „gazu” elektronowego (przy czym pierwszy człon związany jest z energią kinetyczną elektronów, a drugi, ujemny — z tzw. energią wymienną — głównym wkładem pochodzącym od oddziaływania między elektronami), oraz

E_{ej} — energii odpowiadającej oddziaływaniu elektronów z jonami.

Wypisane zostały tylko najważniejsze wkłady, a wielokropkami zaznaczono nieistotne dla naszego celu poprawki. Podana postać E_J i E_e jest uniwersalna, tzn. taka sama dla różnych metali. Natomiast specyficzne własności konkretnych metali przejawiają się w E_{ej} . Jony, o których mowa powyżej, to atomy metali alkalicznych bez jednego elektronu, a więc obiekty składające się z jądra atomowego i „kadłuba” elektronowego, którego orbity są całkowicie zapełnione, podobnie jak w atomie gazu szlachetnego. Wymieniona stała C_{ej} związana jest właśnie z obecnością owego kadłuba, a przykładowe wartości liczbowe podane są obok. Nietrudno zauważyć, że jonowi wodoru brak kadłuba elektronowego, a więc jego stała C_{ej} jest zerowa.

Na: $C_{ej} = 1,33 \cdot 10^{-34} \text{ erg} \times \text{cm}^3$
K: $C_{ej} = 2,20 \cdot 10^{-34} \text{ erg} \times \text{cm}^3$
H: $C_{ej} = 0$

Teraz możemy przystąpić do wyznaczenia Ω_0 — objętości w stanie równowagi.

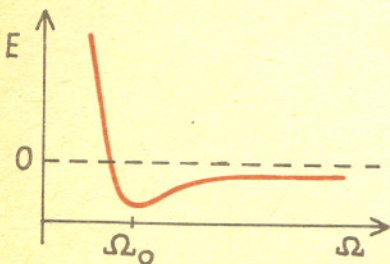
Warunek konieczny na to, aby $E(\Omega)$ osiągała minimum, można sformułować w postaci żądania, aby ciśnienie wewnątrz metalu było zerowe. Taka możliwość wynika z ogólnego faktu, że ciśnienie w bryle wyraża się przez pochodną względem objętości z wewnętrznej energii tej bryły.

Wykonując różniczkowanie (6) energii (1) otrzymujemy równanie stanu — tj. zależność między objętością Ω a ciśnieniem p .

- (5) $p(\Omega) = 0$ dla $\Omega = \Omega_0$
- (6) $p(\Omega) = -\frac{dE(\Omega)}{d\Omega}$
- (7) $p = C_{ej}\Omega^{-6/3} + \frac{2}{3} C_{ek}\Omega^{-5/3} + \frac{1}{3} (C_{JJ} + C_{ew})\Omega^{-4/3} + \dots$
- (8) H: $\Omega_0 = \left(\frac{2C_{ek}}{-C_{JJ} - C_{ew}} \right)^3 = 2,7 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$

Rozwiązanie równania (5) w przypadku metalicznego wodoru jest szczególnie proste. Czytelnikowi proponujemy, aby samodzielnie rozwiązał równanie w ogólnym przypadku, natomiast tutaj ograniczymy się do przytoczenia rezultatów liczbowych: $\Omega_0 = 46 \cdot (10^{-8} \text{ cm})^3$ dla Na oraz $\Omega_0 = 84 \cdot (10^{-8} \text{ cm})^3$ dla K. Rezultaty pomiarów eksperymentalnych dają odpowiednio wartości 37,7 i 71,9, co pozwala ocenić stopień dokładności naszych obliczeń.

O tym, że znalezione rozwiązania odpowiadają minimum energii, łatwo się przekonać wykreślając schematycznie przebieg energii.



substancja	ρ [g/cm ³]
H-metal	0,6
Na	1,01
K	0,90
Al	2,7
drewno	0,5 – 1,1
woda	1,0
H ₂ -stały	0,081

Porównując rezultaty dotyczące Ω_0 zauważamy, że w metalicznym wodorze jony są dużo gęściej upakowane niż w pozostałych metalach alkalicznych, co jest związane z brakiem wkładu E_{ej} w energię wodoru. Jednakże, ze względu na wyjątkową „lekkość” atomów wodoru, obliczona gęstość masy $\rho = m/\Omega_0$ kwalifikuje wodór do tytułu najlżejszego metalu.

Przejście fazowe wodór molekularny — wodór metaliczny

Przez ochładzanie gazowego wodoru, składającego się z cząsteczek H₂, do temperatur bliskich absolutnemu zeru, można go skroplić i zestalić. Tak powstałe ciało stałe będziemy nazywać fazą molekularną wodoru. O fazie metalicznej mówiliśmy w poprzednim fragmencie, traktując ją na razie jako obiekt hipotetyczny. Czytelnik ma prawo w tym momencie zapytać, czy w ogóle jest sens uważać, że w pewnym zakresie temperatur i ciśnień mogą współistnieć dwie różne fazy stałe tego samego pierwiastka (z codziennego doświadczenia wiemy, że w temperaturze topnienia może współistnieć faza stała i ciekła, a w temperaturze wrzenia — faza ciekła i gazowa). Przyroda dostarcza nam pozytywnej odpowiedzi na to pytanie dając liczne przykłady alotropowych odmian pierwiastków: C — grafit i diament, As — metaliczny i żółty, Sn — biała i szara, Se — metaliczny i czerwony, P — czarny i żółty. W każdym z wymienionych przypadków obie fazy są wysoce stabilne tj. nie obserwuje się samorzutnego (bez katalizatorów lub specjalnych warunków zewnętrznych) przekształcania się jednej fazy w drugą. Wymienione przykłady będą więc nadzieję, że metaliczny wodór może również okazać się trwałym.

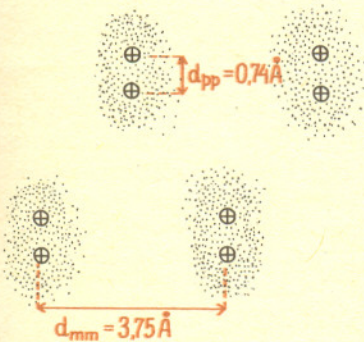
Zanim zajmiemy się problemem w jaki sposób można zmusić wodór do przekształcenia się z fazy molekularnej w metaliczną, zapoznajmy się nieco z mikroskopową budową obu faz. Jak wynika z danych zamieszczonych w tabeli gęstości w poprzedniej części, objętość przypadająca na jeden atom w fazie molekularnej jest ok. 7 razy większa niż w metalicznej. Przypatrzmy się bliżej charakterystycznym odległościom w obu fazach.

Fazę molekularną charakteryzują dwie odległości: d_{mm} — między środkami sąsiednich molekuł, oraz d_{pp} — między protonami wewnątrz molekuly. Informację o wartościach tych odległości można uzyskać z pomiarów rentgenowskich. Warto dodać, że d_{pp} gazowego wodoru jest dokładnie takie samo jak zestalonego. Odległość między dwoma sąsiednimi jonami w fazie metalicznej d_{jj} można oszacować, nie wdając się w szczegóły wewnętrznej budowy, jako podwojony promień r_0 kuli o objętości Ω_0 .

Obie fazy nie tylko różnią się zasadniczo konfiguracją protonów, jak to zilustrowaliśmy na schematycznych rysunkach, ale również charakterem rozkładu elektronów. W fazie molekularnej każda cząsteczka skupia swoje elektrony w postaci otaczającej ją „chmury” elektronowej (o promieniu rzędu d_{pp}). Mówimy, że elektrony znajdują się na bliskich, zamkniętych orbitach. Dzięki temu cząsteczka jest bardzo trwała, a siły działające między cząsteczkami są niewielkie. W fazie metalicznej wszystkie elektrony tworzą niemal jednorodny gaz, poruszając się swobodnie i chaotycznie po całej objętości metalu. Dzięki temu faza ta może dobrze przewodzić prąd elektryczny i ciepło, co uzasadnia nazwanie jej fazą metaliczną.

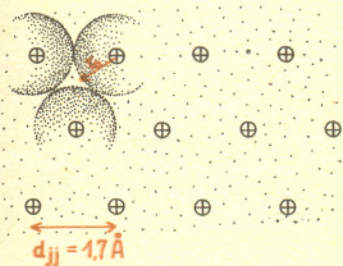
Gdy znamy już budowę obu faz, jesteśmy przygotowani do przeprowadzenia myślowego eksperymentu mającego na celu przekształcenie fazy molekularnej w metaliczną. Zamknijmy w cylindrze z tłokiem porcję zestalonego wodoru molekularnego. Wgniatając tłok zmniejszamy objętość naczynia. W obrazie mikroskopowym odpowiadać temu będzie zmniejszanie charakterystycznych odległości. Jak wspominaliśmy, cząsteczki wodoru są obiektami bardzo trwałymi, więc przede wszystkim będzie maleć d_{mm} , zaś d_{pp} zmieni się niewiele. Jednakże, kontynuując proces, dojdziemy do sytuacji, kiedy cząsteczki zblizną się na tyle ($d_{mm} \approx 2d_{pp}$), że chmury elektronowe sąsiednich cząsteczek zaczną silnie nakładać się na siebie. Wówczas elektrony przestaną być związane ze swoimi cząsteczkami, uzyskają możliwość niezależnego ruchu, a ich rozkład gęstości będzie coraz bardziej jednorodny. Protony, pozbawione dotychczasowych czynników grupujących je w pary, rozstawiają się równomiernie. A taki obraz, jak pamiętamy, odpowiada fazie metalicznej. Tak więc myślowy eksperyment doprowadził do pożądaných wyników.

$$1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$$



$$(9) d_{jj} \approx 2r_0$$

$$(10) \Omega_0 = \frac{4}{3} \pi r_0^3$$



Spróbujmy teraz opisać ten proces przy pomocy pojęć termodynamicznych, a następnie ocenić szanse jego realizacji w rzeczywistości. Wyznaczając poprzednio dla metalicznej fazy wodoru objętość Ω_0 w stanie równowagi, szukaliśmy minimum funkcji $E(\Omega)$ – energii wewnętrznej. Taką funkcję można zdefiniować również dla fazy molekularnej i dla każdej innej fazy, a następnie znaleźć jej minimum. W rezultacie uzyskujemy objętość, odpowiadającą stanowi równowagi odpowiedniej fazy. Godnymi uwagi są również wartości energii w miejscach minimów różnych faz. Ta faza, która ma najmniejszą energię w minimum, nosi nazwę fazy absolutnie stabilnej, pozostałe fazy – metastabilnych. Na przykład z odmian alotropowych węgla, grafit jest absolutnie stabilny, diament – metastabilny. Dla wodoru absolutnie stabilną jest faza molekularna.

Sens fizyczny wprowadzonych pojęć stabilności jest następujący: faza metastabilna, pod wpływem pewnych bodźców zewnętrznych (np. katalizatorów, wibracji) i po upływie dostatecznie długiego czasu, może się przekształcić w fazę absolutnie stabilną, przy czym wydzieli się ciepło. Natomiast odwrotny proces nie jest możliwy (bez zmiany warunków, np. ciśnienia).

Na załączonym obok rysunku przedstawiamy schematycznie przebieg energii jako funkcję objętości dla dwóch faz „A” i „B”, a poniżej przebieg ciśnienia jako funkcję objętości (tj. równanie stanu tych faz). Prześledźmy z pomocą tych rysunków nasz myślowy eksperyment. Startujemy z punktu równowagi fazy absolutnie stabilnej (Ω_{0A} , E_{0A}), gdzie panuje ciśnienie $p_A = 0$. W celu zmniejszania objętości musi być przykładane ciśnienie zewnętrzne – patrz (6). Zgodnie z tym wzorem, wartość ciśnienia przy określonej objętości Ω , może być przedstawiona przez tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu energii (ze znakiem „-”) przechodzącej przez punkt $(\Omega, E(\Omega))$. Kolorem zaznaczyliśmy taką szczególną linię, która jest jednocześnie styczna do wykresów energii obu faz. Po osiągnięciu ciśnienia p^* , odpowiadającego tej linii, dalsze zmniejszanie objętości układu może następować kosztem stopniowego przekształcania się fazy „A” w fazę „B”, która ma znacznie mniejszą objętość przy tym ciśnieniu. W trakcie tego procesu ciśnienie jest ustalone. Gdy przekształcanie dobiegnie końca, dalsze zmniejszanie objętości wymaga wzrostu ciśnienia, zgodnie z równaniem stanu $p_B(\Omega)$ fazy „B”. Ciśnienie p^* nosi nazwę ciśnienia przejścia fazowego, gdyż właśnie z chwilą jego osiągnięcia zachodzi przekształcanie się jednej fazy w drugą.

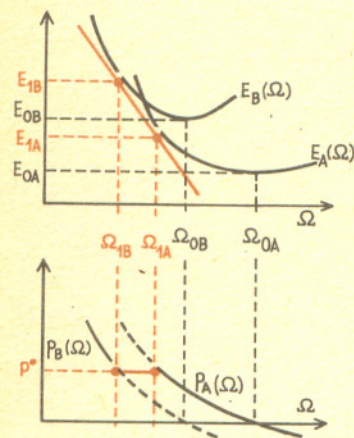
Niezwykle użytecznym narzędziem do opisu przejścia fazowego, jest pojęcie potencjału termodynamicznego. Ograniczając się dla prostoty, tak jak dotychczas, do rozważania procesów w temperaturze zera absolutnego, definiujemy potencjał termodynamiczny (funkcję Gibbsa) $\Phi(p)$ w terminach rozpatrywanej wcześniej energii wewnętrznej E oraz zależności funkcyjnej objętości Ω od ciśnienia p (co jest prostym odwróceniem znanej już zależności (6), $p(\Omega)$); Zgodnie z zasadami termodynamiki, w określonych warunkach ciśnienia (i temperatury), z kilku konkurencyjnych faz absolutnie stabilna jest ta faza, której potencjał Gibbsa jest najmniejszy. Oczywiście w warunkach zerowego ciśnienia powyższa zasada zgodna jest z podaną wcześniej zasadą najniższej energii wewnętrznej.

Potencjał termodynamiczny jest rosnącą funkcją ciśnienia, ale dla różnych faz narasta w różnym tempie. W efekcie, przy pewnym ciśnieniu p_1 wykresy potencjałów dwóch faz przecinają się. W zakresie ciśnień $0 \leq p < p_1$ faza „A” jest absolutnie stabilna, natomiast dla $p_1 < p$, rolę tę przejmują faza „B”.

Nietrudno sprawdzić, że ciśnienie przejścia fazowego p_1 , zdefiniowane obecnie przez punkt, gdzie zrównały się potencjały termodynamiczne, patrz (13), pokrywa się z wprowadzonym wcześniej ciśnieniem p^* . Natychmiast przekonujemy się o tym, porównując (11) i (15).

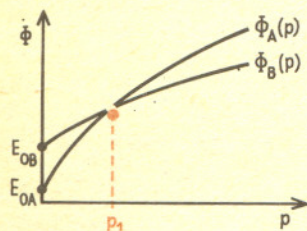
Po zapoznaniu się z ogólnym opisem przejść fazowych pora wrócić do zasadniczego tematu – wodoru. Potencjał termodynamiczny jego fazy metalicznej znany jest z dużą dokładnością. Nawet z danych, przytoczonych w pierwszej części (wzory (1) – (4), (6)) można by policzyć przybliżone Φ zgodnie z definicją (12). Co ciekawe, założenia teorii, używanej do opisu fazy metalicznej, gwarantują, że ze wzrostem ciśnienia (gęstości) dokładność rezultatów staje się coraz lepsza.

Odwrotnie rzecz ma się z opisem fazy molekularnej. Jej potencjał znamy bardzo dobrze tylko w zakresie do kilkudziesięciu kilobarów, a dalej stosuje się ekstrapolację wyników z obszaru niższych ciśnień w oparciu o mało ścisłe teorie.



$$(11) p^* = - \frac{E_{1A} - E_{1B}}{\Omega_{1A} - \Omega_{1B}}$$

$$(12) \Phi(p) = E(\Omega(p)) + p \cdot \Omega(p)$$



$$(13) \Phi_A(p_1) = \Phi_B(p_1)$$

$$(14) E_{1A} + p_1 \Omega_{1A} = E_{1B} + p_1 \Omega_{1B}$$

$$(15) p_1 = - \frac{E_{1A} - E_{1B}}{\Omega_{1A} - \Omega_{1B}}$$



1 Mbar = 10^6 bar; 1 kbar = 10^3 bar

1 bar = $10^6 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} = 1000 \text{ hPa} \approx 0,987 \text{ atm}$

(16) $p_H^* \approx 3 \text{ Mbar}$

(17) $\Omega_{1,H} = 1,4 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$

Z tego powodu wyliczenie ciśnienia przejścia $p_H^* = p_1$, patrz (16), z warunku (13), obarczone jest dość dużym błędem, być może nawet rzędu $\pm 1 \text{ Mbar}$. Objętość fazy metalicznej $\Omega_{1,H}$, patrz (17) przy tym ciśnieniu (16) jest prawie dwukrotnie mniejsza niż przy zerowym ciśnieniu (8), a w porównaniu z gęstością molekularnego wodoru przy zerowym ciśnieniu — 14 razy.

To, że trzeba kilkanaście razy zmniejszyć objętość próbki w celu osiągnięcia metalizacji wodoru, stanowi jedną z poważniejszych przeszkód napotykaną na drodze do realizacji eksperymentu. Postawmy jednak bardziej zasadnicze pytanie: czy ciśnienie kilku megabarów jest ciśnieniem niewyobrażalnie wielkim czy też osiągalnym? Jeśli postawić takie pytanie astronomowi, to potwierdzi drugą ewentualność. Wnętrza planet charakteryzują się właśnie taką skalą ciśnień, a wnętrza gwiazd przewyższają je o całe rzędy wielkości. Postawmy problem przed fizykiem eksperymentatorem. Jego odpowiedź będzie brzmieć — osiągalne, choć z trudem.

Istnieją dwie drogi uzyskiwania wysokich ciśnień: statyczna i dynamiczna. W pierwszej z nich, próbka utrzymywana jest pod ciśnieniem dowolnie długo dzięki umieszczeniu jej w odpowiedniej prasie. Jednakże ekstremalne, megabarowe ciśnienia udaje się uzyskać praktycznie w mikroskopijnych objętościach, mówiąc obrazowo w porcji, jaka się zmieści pod ostrzem diamentowej igły. W takich warunkach można tylko bardzo niedokładnie oszacować wartości ciśnienia czy gęstości próbki. Ale co ciekawe, udało się zaobserwować skok przewodnictwa elektrycznego o kilka rzędów wielkości, do wartości typowych dla metali, gdy próbkę wodorową poddano ciśnieniu rzędu megabarów. W tego typu eksperymentach zaobserwowano metalizację również takich substancji jak diament, SiO_2 , Al_2O_3 , S, a nawet niedawno Xe. Wodór wyróżnia się (co ma kluczowe znaczenie dla przyszłych zastosowań) tym, że powinien pozostać metalem po zdjęciu ciśnienia, utrzymując się w stanie metastabilnym.

W eksperymentach dynamicznych, cylindryczna próbka jest sprężana przez detonację ładunku wybuchowego, umieszczonego wokół niej. Nietrudno się domyśleć, że najwyższe ciśnienie w próbce trwa bardzo krótko, kilka milisekund. W pojedynczym eksperymencie można zmierzyć tylko jeden punkt równania stanu.

Mimo tych niedogodności, przeprowadzono serię eksperymentów z próbkami wodorowymi, uzyskując ciąg punktów równania stanu sięgający 8 Mbar. Co ciekawe, przy ok. 3 Mbar zaobserwowano skok objętości (kolorowa linia na wcześniejszym rysunku $p - \Omega$), który zinterpretowano jako przejście fazowe do fazy metalicznej. Tak więc zarówno eksperyment statyczny jak i dynamiczny sugerują możliwość zachodzenia przejścia fazowego, które przewidywaliśmy na podstawie rozważań teoretycznych. Niestety, niekorzystne warunki dotychczasowych eksperymentów (mikroskopijna i silnie niejednorodna próbka w doświadczeniu statycznym lub niszczenie próbki w dynamicznym) uniemożliwiają zaobserwowanie metastabilnego wodoru metalicznego po zdjęciu ciśnienia.

O metalicznym wodorze można napisać jeszcze wiele. Mamy nadzieję, że wybrane przez nas zagadnienia pozwoliły Czytelnikowi dostrzec niektóre cechy tej nowej „gałązki” fizyki i odczuć rolę wzajemnego przenikania się i stymulowania teorii i eksperymentu w jej „pączkowaniu”.



Rozwiązanie zadania:

$$\Omega_0 = \left[\frac{C_{ek} + \sqrt{C_{ek}^2 + 3C_{ej}(-C_{jj} - C_{ew})}}{-C_{jj} - C_{ew}} \right]^3$$

Rozwiązanie zadania M 274.

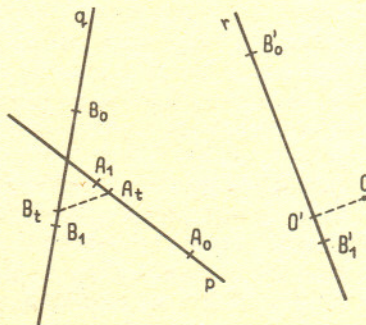
Załóżmy, że nasze równanie ma rozwiązania dla liczb pierwszych p_1, \dots, p_n ($p_i < p_{i+1}$). Zauważmy teraz, że gdy $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$, to $x^2 + x + 1$ daje przy dzieleniu przez p_1, p_2, \dots, p_n resztę 1 i wobec tego ma dzielnik pierwszy $p > p_n$. Otrzymaliśmy w ten sposób parę (x, y) , gdzie $y = (x^2 + x + 1)/p$ spełniająca nasze równanie dla $p > p_n$. Wynika stąd łatwo, że rozwiązania takie istnieją dla nieskończenie wielu pierwszych p .



Rozwiązanie zadania M 276.

Gdy przyjmimy układ współrzędnych poruszający się z punktem A , punkt B będzie się w nim poruszał po prostej. (Dlaczego?). Wynika stąd następująca konstrukcja punktów A_t, B_t :

Ustalmy punkt O i przez punkty B'_0 i B'_1 takie, że $OB'_0 = A_0B_0$ i $OB'_1 = A_1B_1$, prowadzimy prostą r . Znajdujemy rzut prostopadły O' punktu O na prostą r i budujemy punkty $A_t \neq B_t$ takie, że $A_0A_t : A_0A_1 = B_0B_t : B_0B_1 = B'_0O' : B'_1O'$ (patrz rysunek).



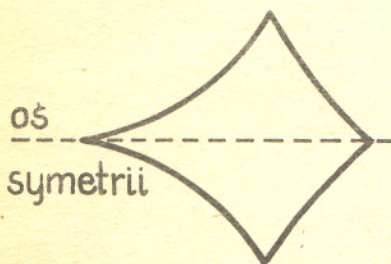
O Teorii Katastrof

Dr Jakub TATARKIEWICZ

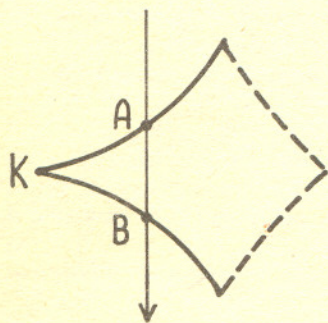


Zjawisko optyczne wywołane odbiciem światła od powierzchni wewnętrznej walca zostało opisane dawno — prawdopodobnie pierwszy uczynił to Wielebny Hamnet Holditch w roku 1857. Jednakże zadowalające wyjaśnienie efektu znajdujemy dopiero w pracach M. V. Berry'ego z połowy lat siedemdziesiątych naszego wieku. U podstaw rozważań Berry'ego leży Teoria Katastrof, sformułowana w roku 1965 przez wybitnego francuskiego matematyka René Thoma. Sama nazwa „Teoria Katastrof” jest nieco myląca. Teoria ta niewiele ma wspólnego z katastrofami w potocznym tego słowa rozumieniu. Chodzi raczej o zjawiska, w których stopniowym zmianom pewnych parametrów zwanych *parametrami kontrolnymi* towarzyszą nagle, ilościowe i jakościowe, zmiany zachowania się układu. Teoria Katastrof wywodzi się z topologii czyli działu matematyki zajmującego się niezmienniczymi ze względu na ciągłość własnościami zbiorów. W Teorii Katastrof zbiory te są nazywane *powierzchniami zachowania się*. Wszelkie załamania powierzchni zachowania się są dla układu „katastrofami”. Mówiąc inaczej — Teoria Katastrof zajmuje się kształtami powierzchni równowagi, przy czym „równowaga” może być rozumiana szeroko, przykładowo: stany równowagi układów fizycznych opisywane są przez powierzchnie stałej energii w przestrzeni fazowej. Thom pokazał, że dla procesów o co najwyżej czterech parametrach kontrolnych istnieje tylko siedem różnych katastrof elementarnych. Otrzymały one poetyczne nazwy, związane z charakterystycznymi kształtami powierzchni zachowania się: jaskółczy ogon, motyl, wigwam itp. Dowód twierdzenia Thoma jest skomplikowany, gdyż wymaga zastosowania analizy funkcjonalnej. Z drugiej strony, wnioski wynikające z Teorii Katastrof są stosunkowo łatwo zrozumiałe, a potencjalne zastosowania, szczególnie w biologii i socjologii — niezliczone. Tu postaramy się omówić jedno z zastosowań w odniesieniu do optyki.

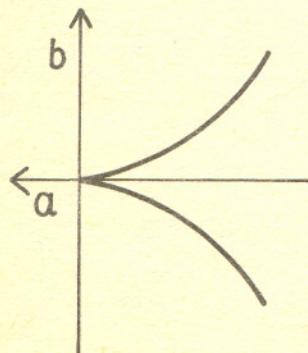
Fizyka, jakiej uczymy się w szkole, a nawet na studiach, fizyka Newtona, Maxwella, Schrödingera i Einsteina wykorzystuje jedną z podstawowych własności funkcji — ich różniczkowalność. Funkcje różniczkowalne są ciągłe. Postulowane równania różniczkowe opisują lepiej lub gorzej stany fizyczne układów. Tymczasem rzeczywistość, w której żyjemy, obfituje w zjawiska nieciągłe! Jako wygodny przykład opiszemy i przeanalizujemy urządzenie zwane od nazwiska uczonego, który je wymyślił, „maszyną” Zeemana.



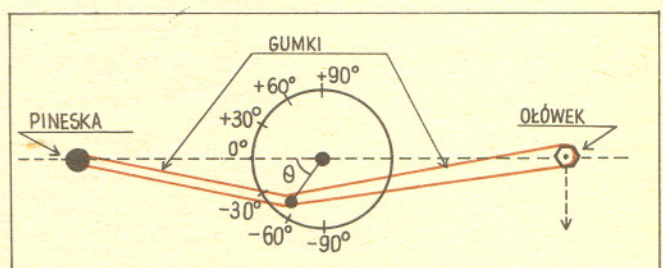
Rys. 2



Rys. 3

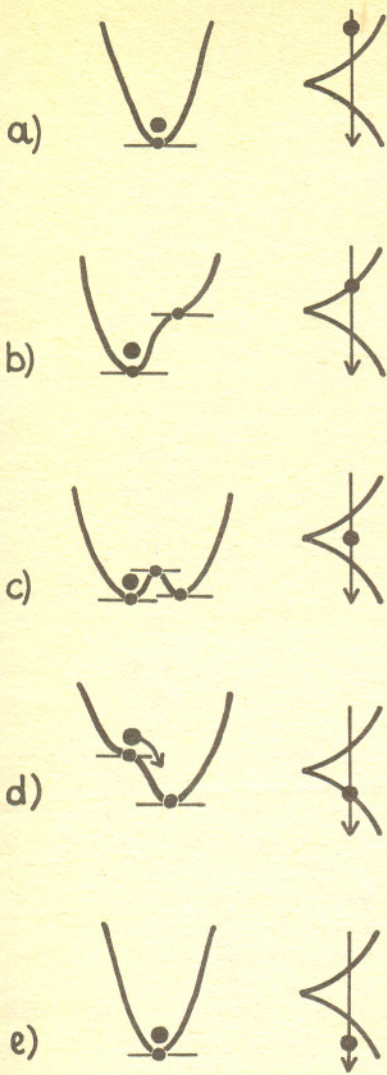


Rys. 4



Rys. 1

Składa się ona (rys. 1) z koła zamontowanego obrotowo na płaskiej podstawie i dwu gumek przyczepionych w jednym punkcie blisko brzegu koła. Długości gumek nierozciągniętych powinny być w przybliżeniu równe średnicy koła. Koniec jednej z gumek przymocowano na stałe do podstawy. Przez koniec drugiej przetknięto ołówek. Położenie ołówka na podstawie (para współrzędnych kartezjańskich) jest parametrem kontrolnym.



Rys. 5

Jeśli zbudujecie sobie własną „maszynę” Zeemana, to łatwiej Wam będzie śledzić dalszy ciąg artykułu. Niech parametrem zachowania się układu będzie wychylenie θ koła spowodowane ruszaniem ołówka po podstawie (rys. 1). Przy większości ruchów wychylenie będzie zmieniało się w sposób ciągły. Jednak przy odrobinie cierpliwości znajdziemy punkty, w których niewielkie przesunięcie ołówka wywołuje gwałtowny obrót koła. Zaznaczmy wszystkie takie punkty — otrzymamy krzywą jak na rysunku 2, przypominającą symbol koloru „karo” w kartach, leżącą w osi symetrii „maszyny”.

Rozważmy dokładniej zachowanie się „maszyny” wokół punktu K zbiegu ramion jednego z „rozków” (rys. 3). Ruszajmy ołówkiem tak, by jego tor przecinał oba ramiona „rożka”. W punkcie A nie obserwujemy osobliwości w sposobie poruszania się koła, gdy tymczasem w punkcie B wykonywa ono nagły obrót. W środku między punktami A i B zauważamy dwa położenia równowagi maszyny, z których obsadzane jest zawsze bliższe punktu przekroczenia ramienia „rożka”. Przesunięcie ołówka od B do A daje ze względu na symetrię „maszyny” efekt symetryczny. Korzystając z prawa Hooke’a można wypisać wyrażenie na energię potencjalną „maszyny”. Zgodnie z zasadą Hamiltona wszystkie układy fizyczne mają tendencję do zajmowania stanu o ekstremalnej energii (zwykle minimalnej). Będziemy więc szukali ekstremów energii potencjalnej „maszyny”. W analizie matematycznej wykazuje się, że na ogół funkcje jednej zmiennej można przybliżyć przez nieskończony szereg potęgowej tej zmiennej, nazywany rozwinięciem Taylora. Niestety, bez wnikania w Teorię Katastrof nie możemy uzasadnić, dlaczego ograniczenie rozwinięcia taylorowskiego energii potencjalnej do rzędu czwartego jest poprawne. Pozostaje uwierzyć na słowo.

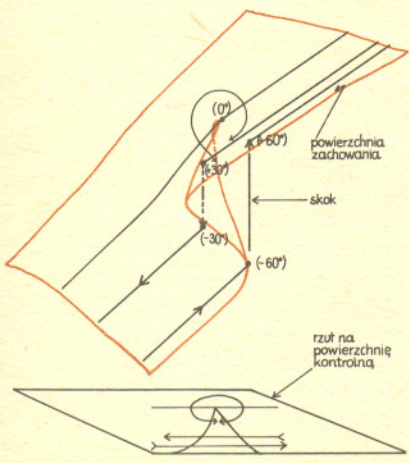
Należy jednak wiedzieć, że aparat matematyczny Teorii Katastrof określa dokładnie, od którego członu możemy rozwinięcie obciąć. Przyjmijmy dalej dla uproszczenia rachunków, że x jest pewną pomocniczą funkcją liniową kąta wychylenia θ koła, że układ współrzędnych kartezjańskich a i b położenia ołówka zaczepiamy w punkcie K (rys. 4) wreszcie, że jednostki długości dobraliśmy tak szczęśliwie, by współczynnik przy x^4 wynosił $\frac{1}{4}$. Otrzymujemy wtedy wyrażenie na energię potencjalną z dokładnością do wyrazów stopnia czwartego:

$$V = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} ax^2 + bx.$$

Szukajmy ekstremum potencjału ze względu na współzrędną x przyrównując pochodną do zera: $\frac{dV}{dx} = x^3 + ax + b = 0$. Wiadomo, że liczba pierwiastków rzeczywistych równania trzeciego stopnia zależy od znaku jego wyróżnika: $D = \frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}$. Nie będziemy analizowali wszystkich możliwości,

pozostawiając obliczenia jako zadanie dla Czytelników. Zwróćmy tylko uwagę, że „rożek” jest wykresem krzywej $4a^3 + 27b^2 = 0$. Kształty potencjału przy poruszaniu ołówkiem jak na rysunku 3 przedstawiają rysunki 5 a – f. Wymuszony ruch ołówka powoduje przechodzenie „maszyny” do coraz to nowych położeni o najniższej energii; nagły skok następuje od punktu przegięcia do minimum potencjału (rys. 5d). Przy ruchu od A do B odbywa się to w pobliżu punktu B .

Dwa różne stany równowagi w środku „rożka” są konsekwencją podwójnej jamki potencjału (rys. 5c), przy czym dla maszyny dostępny jest tylko jeden z dołków, wyznaczony przez kierunek ruchu ołówka.



Rys. 6

Na koniec zostawiliśmy wykonanie rysunku, który jest symbolem Teorii Katastrof. Załóżmy, że prostopadle do powierzchni wyznaczonej przez parametry kontrolne a i b (powierzchnia kontrolna) prowadzimy oś parametru zachowania się x (rys. 6). Powierzchnia złożona z wszystkich punktów, dla których pierwsza pochodna energii potencjalnej jest równa zero (powierzchnia o równaniu $x^3 + ax + b = 0$ w przestrzeni o współrzędnych (x, a, b)) jest pewnym odwzorowaniem przestrzeni kontrolnej w \mathbf{R}^1 . *Nota bene* w Teorii Katastrof zajmujemy się zwykle odwzorowaniem odwrotnym, gdyż interesujące są punkty krytyczne powierzchni kontrolnej. Dla „maszyny” Zeemana powierzchnia zachowania się utworzona jest z dwu słabo wygiętych płatów, odpowiadającym obszarom poza „rożkiem”. Natomiast w obszarze „rożka” powierzchnia jest zawinięta w kształt „zakładki”. Na rysunku 6 pokazano, że gdy zmieniamy położenie ołówka, czyli gdy zmieniamy parametry kontrolne, to istnieje jednak pewna niedostępna część płaszczyzny zachowania się. Reprezentuje ona lokalne maximum energii potencjalnej (rys. 5c).

Poza tym rozumiemy teraz dlaczego stan „maszyny” zależy od drogi, jaką posuwamy ołówek. Ze względu na kształt krzywej opisującej zbiór punktów krytycznych płaszczyzny kontrolnej ten typ katastrofy nazywamy „rożkową”. W „maszynie” Zeemana mamy do czynienia z poczworną katastrofą typu „rożka”, co obserwowaliśmy doświadczalnie. Pierwsze zastosowania Teorii Katastrof polegały na doszukiwaniu się „rożka” we wszystkich możliwych zjawiskach. Niespodziewanie okazało się, że „zakładka” opisuje efekty zdawałyby się pojęciowo bardzo odległe, jak stateczność pływających wież wiertniczych i ... cenzura obyczajowa czasopism w rodzaju „Playboy’a”. My też, oczywiście, będziemy dopatrywali się we wspomnianym na wstępie zjawisku optycznym katastrofy typu „rożka”; widać to przecież gołym okiem! Zaczniemy od zastanowienia się, dlaczego w ogóle cokolwiek tam widzimy? Obraz zawdzięczamy ukośnie padającym promieniom słonecznym, które odbite od wewnętrznej powierzchni naczyń tworzą na denku charakterystyczny obszar. Spróbujmy wyznaczyć równanie kierunku promieni odbitych w rzucie na płaszczyznę denka. Przy założeniu jednostkowego promienia walca otrzymujemy równanie: $(y - \sin\theta)\cos 2\theta = (x - \cos\theta)\sin 2\theta$, (rys. 7a). Jaśniejsza linia jest obwiednią czyli tzw. *powierzchnią kaustyczną* (definicja w Encyklopedii Fizyki). Intuicyjnie rozumiemy, dlaczego jest ona jaśniejsza — patrząc wzdłuż niej widzimy, że im bliżej środka tym więcej promieni pada na coraz mniejszą powierzchnię (rys. 7b). Równanie powierzchni kaustycznej (w tym przypadku jest to linia) znajdujemy różniczkując powyższy wzór względem θ i rozwiązując wynikające stąd równania na x i y :

$$x = \cos\theta - \frac{1}{2} \cos\theta \cos 2\theta, \quad y = \sin\theta - \frac{1}{2} \cos\theta \sin 2\theta.$$

Otrzymujemy parametryczne równanie krzywej znanej jako *nefroida*. Dalej optyka geometryczna zawodzi. Próba wyliczenia natężenia światła w rogu nefroidy prowadzi do nieskończonej wielkości. Ale kształt nefroidy przypomina „rożkę” ... Rozważmy zatem rodzinę dróg promieni świetlnych wychodzących z punktu D (rys. 8) i odbitych od punktu o współrzędnej pionowej y w kierunku punktu (X, Y) . Definiujemy rodzinę jednoparametrowych funkcji, sparametryzowanych wartością y . Oczywiście nie wszystkie drogi optyczne są możliwe, w szczególności nie jest możliwa droga przedstawiona na rysunku 8. Zasada Fermata, będąca optycznym odpowiednikiem wspomnianej już zasady Hamiltona, głosi, że „światło przebiegając między dwoma punktami wybiera drogę, do przejścia której potrzebny jest czas ekstremalny, zazwyczaj minimalny”.

Ponieważ $c = \text{const}$, więc zależność na długość dróg optycznych: $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, musi być spełniona. Przez P oznaczyliśmy długość drogi światła pomiędzy D a punktem (X, Y) z odbiciem od okręgu. Jeżeli położenie D jest odpowiednio dalekie, to oświetlenie można uważać za równoległe. Niech $-d$ będzie x -ową współrzędną

położenia D , wtedy $P = \left(d - \frac{1}{2} + \sqrt{1-y^2}\right) + \sqrt{\left(X + \frac{1}{2} - \sqrt{1-y^2}\right)^2 + (Y-y)^2}$.

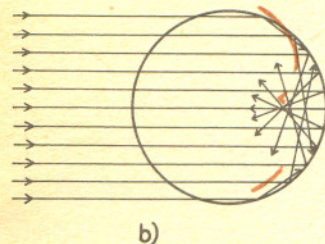
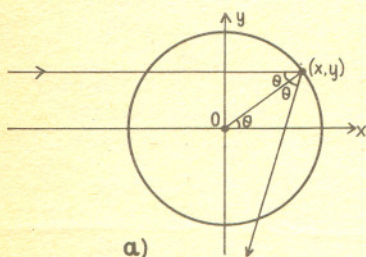
Można obliczyć rozwinięcie funkcji P do rzędu czwartego (skąd to znamy?) w punkcie y oraz pierwszego w (X, Y) otrzymując:

$$\tilde{P} = -\frac{1}{4} (1+5X)y^4 + \frac{1}{2} Yy^3 + Xy^2 - 2Yy + (d+1-X).$$

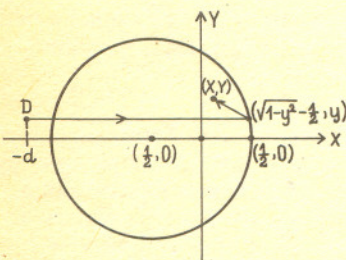
Funkcja \tilde{P} jest równoznaczna ze względu na y w pewnym otoczeniu punktu $(0, 0)$ z funkcją „rożka”, tutaj konkretnie z $-(x^4 + ax^2 + bx)$, gdzie a i b są pewnymi stałymi. Równoznaczność jest gwarantowana przez jeden z najważniejszych lematów Teorii Katastrof. „Rożek” kaustyczny skierowany jest zgodnie z kierunkiem wyznaczonym w optyce geometrycznej. Berry wykazał ponadto w swoich pracach, korzystając z „teorii-katastrofowej” zamiany całkowania po „rożku” na całkowanie po „zakładce”, że natężenie światła w obszarze końca „rożka” nawet w granicy fal krótkich jest skończone. W dowodzie korzysta się z tzw. całki dyfrakcyjnej Fraunhofera. Tak więc trzeba było z górą stu lat, by fizyka i matematyka (a może matematyka i fizyka?) zdołały wyjaśnić prosty, wydawałoby się, efekt optyczny. Świadczy to niewątpliwie o meandrach współczesnej nauki. Czy z chwilą otrzymania potężnego narzędzia, jakim jest Teoria Katastrof, nauka nie znajduje się jednak u progu „jednolitej teorii wszystkiego”???

Raczej nie (Red.)

Nazwa „powierzchnia kaustyczna” przypomina nazwę „soda kaustyczna” czyli żrąca. Promienie słoneczne zbierane przez soczewkę powierzchni kaustycznej (bez uwzględnienia aberracji jest to punkt) potrafią wypalić czyli „wyżreć” otwór w materiale, na którym są skupiane.



Rys. 7



Rys. 8

Patrz w niebo

Niewielu jest ludzi, którym obojętny jest widok spadającego meteoru. I jest to właściwie dziwne, bo przecież przeważnie jest to wydarzenie bez konsekwencji i większego znaczenia. Czy przyczyną podniecenia, jakie odczuwamy, są pozostałości starego przekonania, że „jeśli w czasie przelotu meteoru zdążyś pomyśleć jakieś życzenie — sprawdzi się ono niechybnie”. czy jest po prostu satysfakcją i zadowoleniem z własnej spostrzegawczości, czy może przywodzi na myśl UFO, czy wreszcie jest odczuciem spełnienia pewnej nadziei, że to czarne, obce i groźne niebo nie jest aż tak puste i martwe? W każdym razie lubimy obserwować meteory. I właśnie dzisiejsze „Patrz w niebo” chce Wam poradzić, kiedy opłaca się chodzić z zadartą głową w nadziei ich zaobserwowania. Druga połowa roku jest zdecydowanie do tego lepsza.

Meteory nie są rozrzucone w przestrzeni przypadkowo. Związane genetycznie z Układem Słonecznym dzielą z nim wiele własności. Ich orbity często pokrywają się z orbitami komet, co oznacza, że meteory powstają z ich rozpadu. W związku z tym największe prawdopodobieństwo zaobserwowania spektakularnego zjawiska „deszczu meteorów” występuje w momencie, kiedy Ziemia przecina tor jakiejś komety. I rzeczywiście z zamieszczonej obok tabelki wynika, że większość deszczów jest związana z kometami. Radiant jest to punkt na niebie, w którym przecinają się (z niego wychodzą) przedłużone tory wszystkich meteorów danego deszczu. Z tego punktu nadlatują wszystkie meteory.

Najbardziej stałym i bogatym deszczem jest deszcz Perseidów trwający ok. 2 do 3 tygodni, z największym nasileniem występującym ok. 12 sierpnia. Ale zaraz potem idą Orionidy i Geminidy, które, o ile będzie ładna pogoda, będziemy mogli obserwować jeszcze w tym roku.

Bogate są również deszcze Leonidów i Drakonidów, jednak nie każdego roku występują one z równą siłą.

Życzę wszystkim Czytelnikom „Patrz w niebo” wielu okazji do obserwacji deszczów meteorów, i szybkiego refleksu (żeby zdążyć z życzeniem).

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

DESZCZE METEORÓW I ZWIĄZANE Z NIMI KOMETY

deszcz	maximum	radiant	kometa
Kwadrantydy	3 stycznia	15 ^h 20 ^m +48°	
Lyridy	21 kwietnia	18 0 +33	1861 I
Eta Akwarydy	4 maja	22 24 0	Halley (?)
Delta Akwarydy	30 lipca	22 36 -11	
Alfa Kaprikornidy	1 sierpnia	20 36 -10	1948 n
Perseidy	12 sierpnia	3 4 +58	1862 III
Drakonidy	10 października	17 36 +54	Giacobini-Zinner
Orionidy	22 października	6 16 +16	Halley (?)
Taurydy	1 listopada	3 28 +17	Encke
Andromedydy	14 listopada	1 28 +27	Biela
Leonidy	17 listopada	10 8 +22	Temple
Geminidy	14 grudnia	7 32 +32	
Ursydy	22 grudnia	13 44 +80	Tuttle



Rozwiązanie zadania F 101

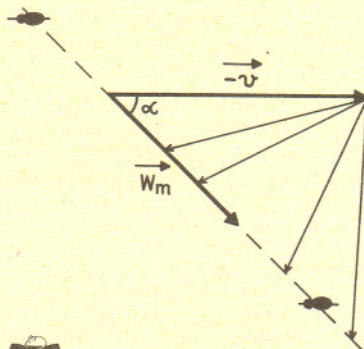
Tworzenie „wachlarzyka” jest efektem odruchowego szukania osłony przed nacierającym strumieniem powietrza. Dla kolarza osłonę taką stanowią jadący przed nim zawodnicy. Oznacza to, że w układzie odniesienia związanym z kolarzami, kierunek wektora prędkości powietrza pokrywa się z prostą przebiegającą przez „wachlarzyk”. Wektor ten skierowany jest od czoła ku tyłowi.

Jeżeli v i u oznaczają odpowiednio prędkości kolarza i wiatru, to prędkość strumienia powietrza omiatającego kolarza wynosi

$$w = (-v) + u.$$

Z rysunku widać, że spośród zbioru możliwych wektorów u spełniających postawione wyżej warunki, minimalną wartość ma wektor prostopadły do w . Odpowiada to wiatrowi wiejącemu z północnego wschodu z szybkością

$$u_{\min} = v \sin \alpha = 23 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$



Rozwiązanie zadania M 275.

Zauważmy, że dowolna symetria wielościanu W zamienia jedynie wierzchołki W miejscami i wobec tego nie porusza ich środka ciężkości S . Wynika stąd, że S musi należeć do każdej osi symetrii W .



Rozwiązanie zadania F 102

Pociski raketowe uzyskują swą maksymalną prędkość po upływie pewnego czasu od chwili odpalenia, a ponadto są one wyposażone w stabilizatory zapewniające w trakcie lotu takie ustawienie, by opór czołowy był minimalny.

Gdy pocisk raketowy odpalany jest ku tyłowi samolotu i opuszcza wyrzutnię z prędkością własną mniejszą niż prędkość samolotu, wtedy względem powietrza porusza się w ślad za wyrzutnią z malejącą prędkością. Stabilizatory zwrócone są ku samolotowi i pojawia się tendencja do obrócenia pocisku. Gdy odwrócenie nastąpi wcześniej niż prędkość spadnie do zera, to napędzana cały czas rakietą może, jak w opisanym próbie dogonić samolot. Skutecznym środkiem zapobiegawczym może być zwiększenie przyspieszenia rakiety w pierwszym etapie lotu. Można to zrealizować uruchamiając silniki na chwilę przed startem (dlaczego?).

Fale uderzeniowe i bałwany

Doc. dr Antoni KUSZELL

Ruch falowy to koncepcja fizyczna obejmująca niezwykle szeroki krąg zjawisk. Każdemu znane jest zachowanie się fal na wodzie, rozchodzenie się światła czy dźwięku. W artykule tym zajmiemy się pewnymi, mniej znanymi zjawiskami związanymi z ruchem falowym. Przykładem takiego zjawiska jest powstawanie i rozwój fali uderzeniowej.

Jedną z podstawowych cech ruchu falowego jest fakt rozchodzenia się fal w określonych kierunkach zwanych promieniami. Promień fali jest to krzywa prostopadła do czoła fali. Równania opisujące ruch falowy nazywamy równaniami typu hiperbolicznego, zaś promienie fal — charakterystykami tych równań.

Dla pełniejszego zrozumienia wprowadzonych pojęć, a także dla zilustrowania niektórych zagadnień związanych z ruchem falowym rozważmy najprostsze równanie hiperboliczne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

gdzie u jest amplitudą fali, zaś v jest prędkością rozchodzenia się sygnału. Dla prostoty ograniczyliśmy się do ruchu jednowymiarowego.

Przyjmijmy poza tym, że w chwili $t = 0$ profil fali ma postać

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

W ośrodku przestrzennie jednorodnym w warunkach stacjonarnych oraz dla fal o amplitudzie tak małej, że można zaniedbać ich wpływ na własności ośrodka, prędkość v jest stała w czasie i przestrzeni. Łatwo się wtedy przekonać przez podstawienie do równania (1), że funkcja

$$u(x, t) = u_0(x - vt)$$

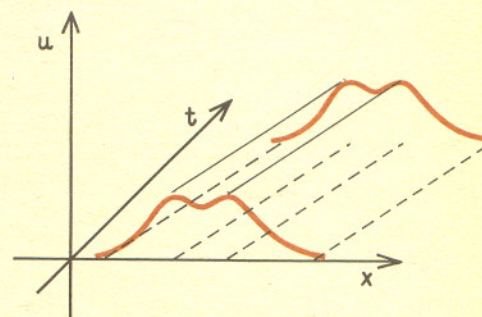
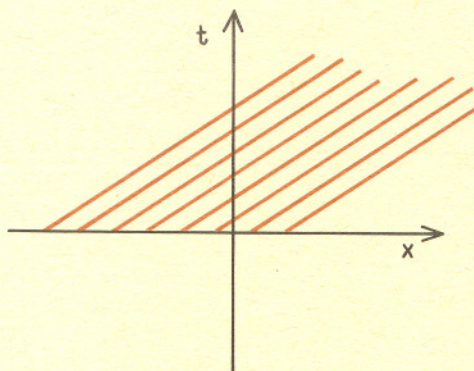
jest rozwiązaniem naszego problemu. Na prostych

$$x = x_0 + vt \quad (2)$$

rozwiązanie to przyjmuje stałą wartość. Mamy bowiem

$$u(x_0 + vt, t) = u_0(x_0 + vt - vt) = u_0(x_0) = \text{const.}$$

Tak więc proste (2) są charakterystykami równania (1), opisującego w tym przypadku jedynie równoległe przesunięcie profilu w prawo o odcinek $v \cdot t$ bez zmiany jego kształtu (rys. 2). Dzieje się tak dlatego, że wszystkie charakterystyki są prostymi równoległymi (rys. 1).



Rys. 1

Rys. 2

Na ogół jednak prędkość rozchodzenia się sygnału jest wielkością zależną od współrzędnych i czasu, co zmusza nas do odejścia od opisanej idealizacji. Zmienność tej prędkości może być powodowana przez wiele czynników. Zależność od współrzędnych jest na ogół spowodowana przestrzenną niejednorodnością ośrodka, zaś zależność od czasu niestacjonarnymi warunkami, w jakich się ten ośrodek znajduje; np. może być ogrzewany.

Szczególnie ważny jest przypadek, gdy fala niesie tak dużą energię, że może zmieniać własności ośrodka, w którym się rozchodzi. Mamy wtedy do czynienia z tzw. propagacją nieliniową, co oznacza, że odpowiedź ośrodka nie jest już proporcjonalna do wielkości zaburzenia. Dla fali dźwiękowej zależność prędkości od amplitudy pojawia się w następujący sposób. Ciało poruszające się w powietrzu musi usuwać powietrze ze swej drogi, co powoduje powstanie lokalnego zaburzenia ciśnienia. Ciśnienie z tyłu czoła fali jest większe niż w obszarze, do którego fala jeszcze nie dotarła. Przejście fali wywołuje więc adiabatyczne sprężenie powietrza i wzrost jego temperatury. Ponieważ prędkość dźwięku rośnie z temperaturą, w obszarze za skokiem ciśnienia jej wartość będzie większa. Okazuje się, że zmiana ciśnienia o 1 Atm. powoduje wzrost prędkości sygnału o około 20%.

Wiele procesów fizycznych opisuje równanie falowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

którego ogólne rozwiązanie ma postać

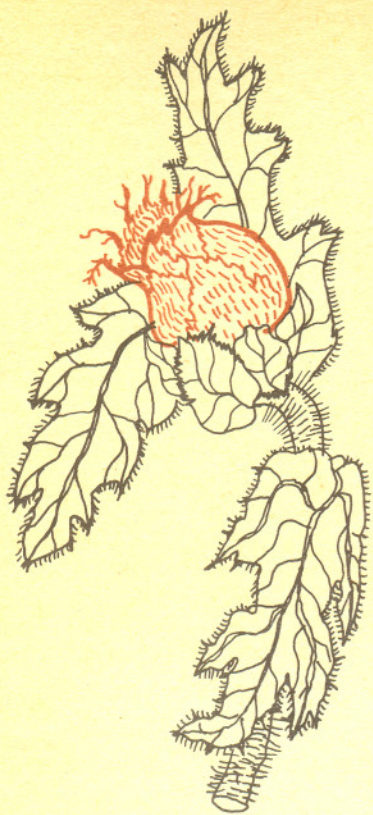
$$u(x, t) = u_0(x - vt) + u_1(x + vt).$$

Jest to suma dwóch fal, z których jedna przesuwa się w prawo, a druga w lewo. Dla uproszczenia w artykule rozważana jest tylko jedna z tych fal.

Przykładem fal rozchodzących się ze stałą prędkością są fale elektromagnetyczne w próżni. W czterowymiarowej czasoprzestrzeni fale takie emitowane przez źródło punktowe rozchodzą się na sferze opisanej równaniem

$$\vec{r}^2 - c^2 t^2 = (r + ct)(r - ct) = 0.$$





Więcej informacji o powierzchniach kaustycznych znajdzie Czytelnik w artykule Jakuba Tatarkiewicza „O Teorii Katastrof” w tym numerze „Delfy”.

W przypadku fali świetlnej zmiana własności optycznych ośrodka następuje dopiero wtedy, gdy natężenie jej pola elektrycznego jest porównywalne z wewnętrznym polem elektrycznym ośrodka. Pole wewnętrzne jest polem działającym na elektrony. W atomach jest ono rzędu 10^{11} V/m a w półprzewodnikach około 10^9 V/m. Obecnie konstruowane lasery pozwalają na otrzymanie fal świetlnych, w których natężenie pola jest rzędu $10^8 - 10^{10}$ V/m. Tak więc w najogólniejszym przypadku prędkość rozchodzenia się sygnału zależy od współrzędnych, czasu i amplitudy

$$v = v(x, t, u).$$

Okazuje się jednak, że nawet w tak ogólnej sytuacji możemy skonstruować rozwiązanie posługując się metodą charakterystyk.

W płaszczyźnie (x, t) charakterystyka jest krzywą

$$x = X(t),$$

wzdłuż której amplituda ma stałą wartość czyli

$$\frac{du(X(t), t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \frac{dX}{dt} = 0.$$

Porównanie z (1) daje warunek, który muszą spełniać charakterystyki

$$\frac{dX}{dt} = v(X, t, u), \quad X(0) = x_0. \tag{3}$$

Oczywiście w tym przypadku charakterystyki nie będą już rodziną prostych równoległych, jak to miało miejsce przy stałej prędkości v . Dla przykładu rozważmy rozchodzenie się fal o małym natężeniu w niejednorodnym ośrodku stacjonarnym. Prędkość grupowa jest wtedy funkcją tylko współrzędnych i równanie (3) można rozwiązać rozdzielając zmienne

$$t = \int_{x_0}^X \frac{dx'}{v(x')}.$$

Rozwiązanie to jest rodziną krzywych na płaszczyźnie (x, t) . W przypadku jednowymiarowym krzywe te nigdy się nie przecinają. W wielu wymiarach punkty przecięcia mogą się jednak pojawić. Rozważmy taki punkt przecięcia (\vec{X}, T) charakterystyk wychodzących z punktów \vec{x}_0 i \vec{x}_1 . Rozwiązanie w punkcie (\vec{X}, T) jest więc funkcją wieloznaczną, bo amplituda fali powinna być w tym punkcie równa jednocześnie $u_0(\vec{x}_0)$ i $u_0(\vec{x}_1)$. Wszystkie punkty przecięcia charakterystyk są jednoznacznie określone przez niejednorodność ośrodka. W problemach stacjonarnych mają one prostą interpretację fizyczną. Punkty izolowane w przestrzeni to ogniska, a krzywe i powierzchnie nazywane są powierzchniami kaustycznymi.

Wracając do prostego przypadku jednowymiarowego ciekawe może być wyznaczenie rodziny charakterystyk dla dowolnej, przyjętej przez Czytelnika, zależności prędkości grupowej od położenia. Gorąco do takiego rachunku zachęcamy.

Drugim przykładem, który szczegółowo omówimy, jest przypadek fal o dużym natężeniu rozchodzących się w ośrodku jednorodnym i stacjonarnym. Prędkość rozchodzenia się fal zależy teraz od amplitudy fali w danym punkcie

$$v = v(u).$$

Ponieważ na krzywych charakterystycznych amplituda jest stała, rozwiązaniem równania

$$\frac{dX}{dt} = v(u)$$

jest rodzina prostych

$$X(t) = x_0 + v(u_0(x_0))t.$$

Kąt nachylenia charakterystyk jest wyznaczony przez wartość początkową amplitudy fali w punkcie x_0 . Tak więc charakterystyki mogą się przecinać. Jednak sytuacja jest teraz krańcowo różna od omawianej poprzednio. Teraz położenie punktów przecięcia charakterystyk zależy od stanu początkowego fali a nie od własności ośrodka. Przecinanie się charakterystyk odpowiada tzw. katastrofie gradientowej. Zjawisko to polega na tym, że gdy prędkość sygnału za czołem fali jest większa niż przed nim, to z upływem czasu jej profil robi się coraz bardziej stromy (gradient amplitudy rośnie). Jeśli zaniedba się lepkość i przewodnictwo cieplne, prowadzi to w końcu do powstania nieciągłego frontu fali.

Wszelkie zaburzenia powstające za frontem fali doganiają go po pewnym czasie i przyczyniają się do jego wzrostu. Zilustrujemy ten mechanizm na przykładzie najprostszej zależności prędkości od amplitudy $v(u) = u$.

Charakterystyki mają wtedy postać

$$x = x_0 + u_0(x_0)t,$$

a rozwiązanie równania (1)

$$u(x, t) = u_0(x - u_0(x_0)t).$$

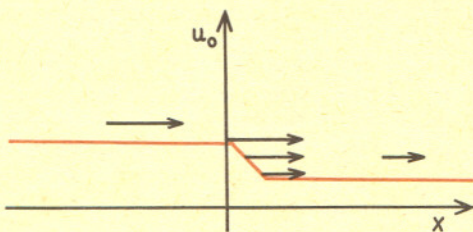
Wykorzystaliśmy tutaj fakt, że na charakterystyce wartość amplitudy jest stała, a więc w szczególności równa wartości początkowej.



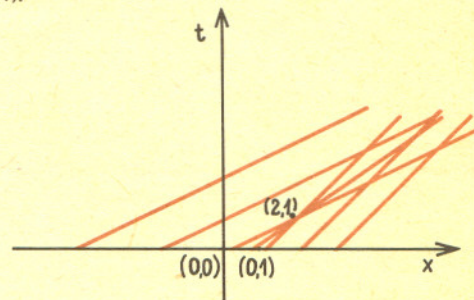
Rozważmy teraz zaburzenie początkowe w następującej postaci (rys. 3)

$$u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x < 0 \\ 2-x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

W trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$ oraz $(2, 1)$, gdzie pierwsza współrzędna oznacza zmienną przestrzenną a druga czas, nachylona część fali jest z upływem czasu coraz bardziej stroma, aż w punkcie $(2, 1)$ staje się pionowa (rys. 4).

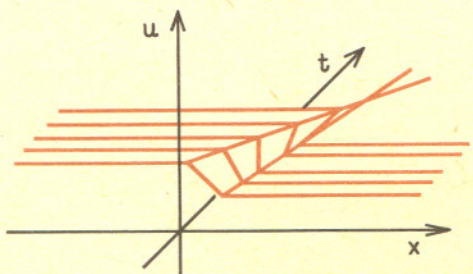


Rys. 3

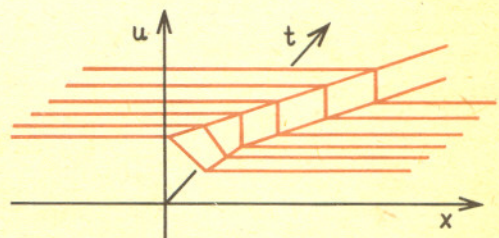


Rys. 4

Dalsza analiza wymaga określenia charakteru wielkości fizycznej opisywanej funkcją u . Jeśli u opisuje falę elektromagnetyczną, to przecięcie się promieni świetlnych nie prowadzi do żadnych trudności w interpretacji rozwiązania, bo sumują się wtedy energie fal. Równie prosty jest przypadek fal powierzchniowych na wodzie. Wielkość u może być wtedy interpretowana jako miara wzniesienia się powierzchni nad poziom średni, a proces „stromienia” opisuje znane zjawisko wyost్రzenia profilu biegnącej fali. Pojawienie się „podwójnej” wartości po przecięciu się charakterystyk opisuje natomiast załamywanie się fal czyli tworzenie się bałwanów (rys. 5).



Rys. 5



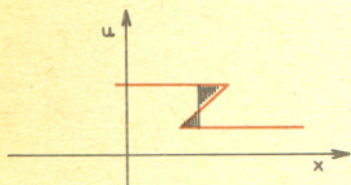
Rys. 6

Zupełnie inaczej przebiega interpretacja, gdy funkcja u jest np. gęstością ośrodka (fale dźwiękowe). Wtedy oczywiście niejednoznaczne rozwiązanie nie może mieć żadnej fizycznej interpretacji. W chwili, gdy fala zaczyna się załamywać, traci ono sens. Właściwie należałoby w tym przypadku wziąć pod uwagę lepkość i przewodnictwo cieplne — efekty, które stają się istotne, gdy fala jest bliska załamania. Okazuje się, że rozwiązania równań uwzględniających te efekty są już jednoznaczne. Znacznie łatwiejsze jest jednak nadanie sensu naszemu rozwiązaniu przez zastąpienie części wieloznacznej funkcją nieciągłą (rys. 6). Okazuje się, że nieciągłość należy umieścić w takim punkcie, żeby pola zakreskowane na rys. 7 obszarów były równe. Wtedy tylko dla nowego rozwiązania spełnione jest równanie ciągłości (ilość materii jest stała). Otrzymany w ten sposób skok wartości amplitudy fali nosi nazwę fali uderzeniowej, zaś powierzchnia nieciągłości — frontu fali uderzeniowej. Fale uderzeniowe odgrywają olbrzymią rolę w fizyce zjawisk zachodzących z prędkościami przekraczającymi prędkości charakterystyczne ośrodka (np. prędkość dźwięku). Na przykład samolot przekraczający barierę dźwięku wywołuje silną falę uderzeniową. Podobnie pocisk poruszający się z prędkością ponaddźwiękową wywołuje falę uderzeniową, której front ma kształt stożka.

W artykule tym ograniczyliśmy się do rozważań dotyczących rozchodzenia się fali i możliwości jej opisu przy pomocy charakterystyk. Istnieją jednak także inne zjawiska, które istotnie zmieniają własności fal. Należą do nich z jednej strony zjawiska dysypatywne (dyfuzja, tarcie lepkie itp.), z drugiej zaś zjawiska typu dyspersji. Oba prowadzą do rozmycia frontu fali uderzeniowej, co powoduje, że w rzeczywistości nieciągłości się nie pojawiają. W wąskim obszarze frontu występuje gwałtowna zmiana amplitudy dobrze przybliżona przez nieciągłość.

Warto tutaj wspomnieć, że po uwzględnieniu dyspersji i członu nieliniowego jak np. w równaniu Kortewega-de Vriesa (Delta 4/1976) rozwiązanie może przyjmować pewien specyficzny kształt zwany solitonem zachowywany bez zmian w trakcie ewolucji.

Tak więc propagacja fal kryje w sobie wiele ciekawych zjawisk, z których część została już wyjaśniona, ale z pewnością wiele czeka jeszcze na odkrycie.



Rys. 7

Dyspersja fal to zależność prędkości fazowej od długości fali.

Skrót regulaminu ligi zadaniowej

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania, (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr. 9/1981.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delfy“

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadania 4, 5, 6

Termin nadsyłania rozwiązań: do 31 XII 1982

4. Niech W będzie wielomianem takim, że $W(x) \geq 0$ dla wszystkich rzeczywistych wartości x . Udowodnić, że W jest sumą kwadratów dwóch wielomianów o współczynnikach rzeczywistych:

$$W(x) = P(x)^2 + Q(x)^2.$$

5. Rozważmy ciąg trójkątów prostokątnych o bokach $a_n, b_n, c_n, n = 1, 2, \dots$ (c_n jest przeciwprostokątną). Zakładamy, że $a_{n+1} = b_n, b_{n+1} = c_n$. Wykazać istnienie granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ i obliczyć jej wartość. Ustalić zależność od początkowych wartości a_1 i b_1 .

6. Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ stawiamy dwa hetmany. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie atakują się one wzajemnie?



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 274. Wykazać, że równanie $x^2 + x + 1 = py$ ma rozwiązanie całkowitoliczbowe (x, y) dla nieskończenie wielu liczb pierwszych p .

Rozwiązanie na str. 7

M 275. Wykazać, że wszystkie osie symetrii wielościanu mają punkt wspólny.

Rozwiązanie na str. 11

M 276. Punkty A i B poruszają się ruchem jednostajnym z jednakową prędkością po prostych p i q startując z punktów A_0 i B_0 . Znaleźć takie ich położenie A_t, B_t , w którym ich odległość jest najmniejsza.

Rozwiązanie na str. 7

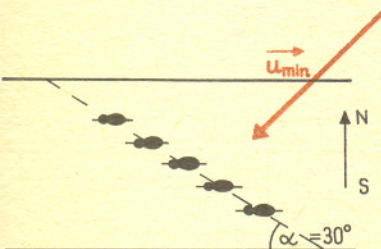
Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 101. Gdy w trakcie szosowych wyścigów kolarskich wieją boczne wiatry, kolarze chętnie jeżdżą „wachlarzykiem”. Dlaczego? Na podstawie rysunku określić minimalną prędkość wiatru, jeśli wiadomo, że kolarze jadą na zachód z prędkością 46 km/h.

Rozwiązanie na str. 11

F 102. Celem ochrony przed atakami od tyłu, zaproponowano wyposażenie samolotów w odpowiednio usytuowane wyrzutnie raketowe. Podczas prób zaobserwowano, że rakiety wkrótce po starcie odwracały się w kierunku macierzystego samolotu i doganiały go. Wyjaśnić ten fakt i podać ewentualne środki zaradcze.

Rozwiązanie na str. 11



Powstanie metody naukowej fizyki

Prof. dr Józef WERLE, członek rzeczywisty PAN

Trudno jest jednoznacznie odpowiedzieć na pytanie, kiedy powstała fizyka. Odpowiedź zależy bowiem od tego, jak się rozumie termin fizyka. Jeśli pod tym słowem rozumieć tylko jako tako systematyczne i świadome obserwacje otaczającego nas świata przyrody martwej, to początków fizyki można się doszukiwać w czasach bardzo odległych. Z pewnością obserwacje takie prowadzono już w początkach wielkich kultur Mezopotamii i Egiptu. Obserwacje robione w tych czasach były jednak raczej bardzo powierzchowne, przypadkowe, a ponadto obciążone z jednej strony ciasnym praktycyzmem, z drugiej strony — zniekształcone przez różne wierzenia religijne i magiczne, tudzież przez twórczość mityczną. Jeśli pod słowem fizyka rozumieć niezależne od religii, magii i mitologii, otwarte dla wszystkich, czyste racjonalne rozważania na temat struktury świata materialnego oraz prapoczątków przyrody, jej rozwoju i przemian, to za początek fizyki można uznać dopiero VI wiek p.n.e., kiedy to Tales z Miletu zapoczątkował w starożytnej Grecji tego typu dociekania zwane później filozofią przyrody. Konstrukcje myślowe greckich filozofów przyrody miały jednak charakter czysto spekulatywny, raczej ogólnikowy i czysto jakościowy. Konstrukcje te były oparte na bardzo powierzchownych i wąskich obserwacjach, były przeważnie niesprawdzalne, a w każdym razie niesprawdzone, nakierowane na wyjaśnianie, a nie przewidywanie. Wprawdzie obok tego filozoficznego, teoretyzującego nurtu występował w bogatej kulturze greckiej, a potem także rzymsko-greckiej, również nurt empiryczny, ale czysto empiryczne podejście do przyrody okazało się na dalszą metę równie bezpłodne co podejście spekulatywno-racjonalne. Brak sprzężenia zwrotnego między hipotetycznymi konstrukcjami a weryfikującymi je ścisłymi testami empirycznymi uniemożliwił rozwój fizyki greckiej. Dopiero na przełomie XVI i XVII w. powstaje fizyka w jej współczesnym pełnym rozumieniu tego słowa; fizyka rozumiana jako proces systematycznego badania przyrody oparty na stosowaniu swoistej, niezwykle skutecznej metody naukowej. Metoda naukowa fizyki opiera się na sprzężeniu zwrotnym między teoretycznym myśleniem i sprawdzającymi je ścisłymi testami eksperymentalnymi. Wiąże ona w sposób bardzo charakterystyczny racjonalne, dedukcyjne myślenie z informacjami o obiektywnej rzeczywistości dostarczonymi nam przez nasze zmysły. Otrzymywane poprzez nasze zmysły informacje konfrontuje się z przewidywaniami rozważań teoretycznych opartych na określonych, pierwotnie nieraz słabo uzasadnionych przesłankach wyjściowych. Dopiero konfrontacja z doświadczeniem pozwala na potwierdzenie, korektę lub odrzucenie tych przesłanek i doskonalenie wiedzy teoretycznej.

Za inicjatora powstania nowej, płodnej metody naukowej fizyki, która umożliwiła jej świetny rozwój trwający nieprzerwanie już 400 lat, wszyscy uznają Galileusza. Istotnie, Galileusz nie tylko położył podwaliny nowej metody, ale sam zastosował ją do badania wielu zjawisk fizycznych i astronomicznych i wślawił się wieloma ważnymi odkryciami. Wprowadził on do fizyki zasadę czynnego eksperymentowania opartego na ścisłych pomiarach odpowiednich dla danego zjawiska wielkości fizycznych. Wyniki takich pomiarów można było zapisywać w komunikatywnej, zwężonej i łatwo porównywalnej postaci matematycznej. Galileusz nie tylko posługiwał się w sposób zupełnie nowatorski tak znanymi i prostymi przyrządami pomiarowymi jak zegar i miarka, ale skonstruował sam szereg nowych przyrządów obserwacyjno-pomiarowych jak termometr gazowy, waga hydrostatyczna czy luneta. Wprowadził do mechaniki pojęcie przyspieszenia, co umożliwiło odkrycie poprawnego związku między siłą a ruchem, sformułowanego w ostatecznej różniczkowej postaci przez Newtona. Dzięki niezwykłej bystrości umysłu, naukowej płodności i wszechstronności oraz umiejętności propagowania swoich idei i odkryć, przyczynił się Galileusz do ugruntowania i szybkiego upowszechnienia nowej metody naukowej i słusznie jest uważany za ojca nowożytnej fizyki a nawet całego przyrodoznawstwa. Wieki XVII cechuje zresztą poza Galileuszem cała plejada sławnych odkrywców takich jak Kepler, Descartes, Torricelli, Pascal, Guericke, Hooke, Huygens, Boyle, no i wreszcie sam Newton. Niestety autorzy większości podręczników i książek fascynują czytelników wylicznaniem konkretnych odkryć i nazwisk odkrywców natomiast nie zwracają należytej uwagi na powstanie w XVII w. skutecznej metody naukowej, która te odkrycia umożliwiła. Resztę tego artykułu poświęcę więc nieco dokładniejszemu omówieniu powstałej w XVII wieku metody naukowej fizyki.

Otóż w ciągu XVII w. przyjął się w środowisku ludzi zajmujących się fizyką pogląd, że celem fizyki — czy ogólniej nauk przyrodniczych — są systematyczne badania zjawisk przyrody przy pomocy ścisłych metod pomiarowych i matematycznych. Badania te powinny zmierzać do odkrycia ścisłych związków przyczynowych sformułowanych w postaci dających się wyrazić matematycznie praw.

Postęp fizyki wiąże się więc z następującymi podstawowymi pytaniami: Jakie wielkości fizyczne są istotne dla opisu rozpatrywanego zjawiska? Czym i jak mierzyć te wielkości? Czy między badanymi wielkościami występują jakieś nietrywialne (a więc nie wynikające np. z samej definicji) związki mające charakter praw przyrody?

Pierwsze z wymienionych pytań ma na pozór charakter czysto teoretyczny, koncepcyjny. Drugie pytanie ma na pozór charakter czysto praktyczny, gdyż dotyczy konstrukcji odpowiednich przyrządów pomiarowych. W rzeczywistości rozdzielenie strony koncepcyjnej od strony pomiarowej nie zawsze jest jasne i oczywiste. Obecnie wielu fizyków uważa, że właściwie dopiero podanie sposobu pomiaru jakiejś wielkości fizycznej pozwala na jej precyzyjne określenie, które nazywamy wtedy określeniem operacyjnym. W wieku XVII pytanie pierwsze uważano za dobrze oddzielone od drugiego. W odpowiedzi na pierwsze pytanie powstały w wieku XVII i następnych pojęcia układu odniesienia, położenia, prędkości, przyspieszenia, pędu, momentu pędu, ciśnienia, temperatury, napięć wewnętrznych, lepkości itd., itd. W odpowiedzi na drugie pytanie powstało wiele nowych przyrządów i urządzeń pomiarowych i detekcyjnych jak luneta, mikroskop, termometr, barometr, dynamometr, elektrometr, pryzmat, siatka dyfrakcyjna, waga skręceń i setki, tysiące innych urządzeń. Konstruowane od czasów Galileusza ciągle nowe przyrządy i aparaty fizyczne otworzyły przed ludzkością nowe horyzonty i nowe możliwości. Po pierwsze można było zastąpić niektóre z natury nieprecyzyjne zmysły (np. zmysł dotyku, zmysł temperatury, zmysł siły) przez bardzo precyzyjne przyrządy w rodzaju różnego typu czujników, termometrów, dynamometrów, wag itp. W ten sposób fizykom udało się w znacznym stopniu uniezależnienie od niedokładności, subiektywności i względności naszych odczuć zmysłowych. W wielu innych przypadkach odpowiednie przyrządy pozwalają na znaczne rozszerzenie zakresu postrzegania naszego wzroku czy słuchu. Np. mikroskop pozwala na obserwowanie obiektów bardzo małych, niedostrzegalnych gołym okiem. Z drugiej strony luneta czy teleskop pozwalają na obserwację obiektów niedostrzegalnych lub słabo dostrzegalnych z powodu zbyt wielkiego oddalenia.

Wreszcie — wiele przyrządów wręcz zwiększa liczbę posiadanych przez człowieka zmysłów pozwalając wykrywać i mierzyć wielkości fizyczne, na które nasze naturalne zmysły w ogóle nie reagują. Jako przykłady można podać tu np. pole elektryczne lub magnetyczne, którego organizm nasz nie odczuwa, a które można wykryć i zmierzyć za pomocą odpowiednich elektro- czy magnetometrów. Jest to sytuacja wręcz zdumiewająca, której niezwykłości bardzo często nie uświadamiamy sobie.

Zastosowanie ścisłych metod pomiarowych wymagało również odpowiednich metod matematycznych. Okazało się np. że bardzo wiele praw fizyki nie ma prostego charakteru związków algebraicznych między podstawowymi wielkościami lecz wymaga wprowadzenia pochodnych lub całek pewnych wielkości. Te pochodne lub całki mogą nie być bezpośrednio mierzalne, lecz dadzą się wyliczyć z wielkości łatwo mierzalnych przy pomocy odpowiednich operacji matematycznych. W ten sposób potrzeby nowej ilościowej metody przyrodoznawstwa zainicjowały powstanie zupełnie nowych gałęzi matematyki jak np. geometria analityczna, rachunek różniczkowy i całkowy, teoria równań różniczkowych, rachunek wariacyjny itd. Dopiero sformułowanie geometrii analitycznej i rachunku różniczkowego pozwoliło Newtonowi na ścisły a przy tym niezwykle zwięzły matematyczny zapis podstawowych zasad mechaniki i prawa powszechnego ciążenia, a więc na odpowiedź na trzecie z podanych wyżej pytań — przynajmniej w zakresie mechaniki.

Sprzężenie zwrotne między teorią i empirią jest jedną z najbardziej charakterystycznych cech metody naukowej fizyki. Metoda ta opiera się więc na stosowaniu kolejnych cykli badawczych, których punktem wyjścia jest zawsze zastana wiedza naukowa. Na gruncie tej wiedzy powstaje problem, którego rozwiązanie jednakże nie jest możliwe bez poszerzenia tej wiedzy. W celu rozwiązania tego problemu wysuwa się więc różne hipotezy. Następnie przeprowadza się doświadczenia, które testują wysunięte hipotezy. W zależności od wyników testów sprawdzających hipotezę odrzuca się jako ewidentnie błędną, koryguje się lub też pozostawia bez zmian. Możliwie wszechstronnie empirycznie potwierdzona hipoteza zostaje podniesiona do rangi teorii i włączona do zasobu sprawdzonej wiedzy naukowej.

Sprzężenie między teorią i empirią sprawia, że fizyka (a wraz z nią i inne nauki przyrodnicze) stanowi samoregulujący się, otwarty system, który potrafi w sposób stosunkowo szybki i bezbolesny korygować i usuwać nieuchronnie popełniane błędy i omyłki. Przed długim trwaniem w błędzie zabezpieczają fizykę liczne normy instrumentalne, psychologiczne i społeczne, które należą do metody naukowej fizyki. Ze względu na szczupłość rozmiarów tego artykułu muszę odesłać zainteresowanego Czytelnika do mojego artykułu ogłoszonego w „Problemach” (nr 7/1978), w którym przedstawione zostały przynajmniej niektóre ze wspomnianych norm stosowanych w metodzie naukowej fizyki.

Pozycz grzebień!
 Wybrano mnie
 kogutem!



GOSPODARKA

Póty dzban wodę nosi,
 póki jest woda.

Demokrata?
 Co znaczy to demo?



WYŻYWIENIE

Na karku głowę masz
 I nią się rządzić chcesz,
 A spróbuj, czy wyżywi się
 Z twej głowy choćby wesz
 /Brecht/



Znow
 GĘSIEGO?
 To wrógie
 wpływy