

SPIS TREŚCI

NUMERU 2 (110)

Narodziny teorii kwantów <i>Prof. dr Iwo Białynicki-Birula</i>	str. 1
Klub 44	str. 5
Co sądzić o szkolnej matematyce?	str. 6
O liniowych równaniach różnicowych <i>Dr inż. Kazimierz Pawłowski</i>	str. 8
O tym jak można układać kule czyli o strukturze najgęstszego upakowania <i>Dr Andrzej Hennel</i>	str. 13
Metamorfozy <i>Dr Marek Kordos, doc. dr Michał Świącki</i>	str. 14
Zadania	str. 16
Patrz w niebo	str. 17

**W następnym numerze:
Liczba π**

„Delta”
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
 dr Bogdan Cichocki
 dr hab. Jan A. Gaj
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 prof. dr Kazimierz Goebel
 doc. dr Tomasz Hofmokr
 doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
 doc. dr Tadeusz Iwiński
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski
 prof. dr Leon Jeśmanowicz
 prof. dr Marek Kuczma
 mgr Andrzej Mąkowski
 prof. dr Bogdan Paczyński
 dr Zbigniew Płochocki
 prof. dr Sławomir Ruciński
 prof. dr Konrad Rudnicki
 doc. dr Jerzy Sawicki
 prof. dr Zbigniew Semadeni
 prof. dr Grzegorz Sitarski
 doc. dr Kazimierz Stępień

prof. dr Mieczysław Subotowicz
 doc. dr Andrzej Szymacha
 doc. dr Stefan Turnau
 doc. dr Aniela Wolska
 doc. dr Andrzej Woszczyk
 prof. dr Wojciech Żakowski –
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
 mgr inż. Krzysztof Biesaga – red. tech. graf.
 mgr Tomasz Chlebowski
 mgr Maciej Jędrzejczak
 mgr Krystyna Kordos – sekr. red.
 dr Marek Kordos – red. nac.
 dr Tomasz Kwast – z-ca red. nac.
 dr inż. arch. Jacek Mazur
 dr Michał Szurek
 doc. dr Michał Świącki – z-ca red. nac.

Adres Redakcji
 ul. Koszykowa 6a
 00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
 RSW „Prasa – Książka – Ruch”
 ul. Noakowskiego 14
 00-666 Warszawa
 Nakład 50 000 egz. Objętość 2 ark wyd;
 2,50 ark. druk;
 papier offsetowy V kl. 70 g.
 Wydrukowano w drukarni
 im. Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65.
 Nr zam. 3152/12/82 M-10

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240, – cena prenumeraty półrocznej zł 120, –

Termin przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:

- do dnia 25 listopada na I kwartał, I półrocze oraz cały rok 1983,
- do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku 1983.

1. dla osób prawnych – instytucji i zakładów pracy:

- instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa – Książka – Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
- instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa – Książka – Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

2. dla osób fizycznych – indywidualnych:

- osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa – Książka – Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
- osoby fizyczne zamieszkałe w miastach – siedzibach oddziałów RSW „Prasa – Książka – Ruch” opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych przy użyciu „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy: Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw w Warszawie, ul. Towarowa 28, nr konta NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11.

3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa – Książka – Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

- w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa – Pałac Kultury,
- w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa – ul. Krakowskie Przedmieście 7,
- w Księgarni Ossolineum, Wrocław – Rynek 8,
- w Księgarni Naukowej, Kraków – Podwale 6,

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with

- Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
- Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
- Licosa Commisionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Narodziny teorii kwantów (I)

Prof. dr Iwo BIAŁYNICKI-BIRULA,
członek korespondent PAN

Gdybyśmy zechcieli dziś wymienić tylko z nazwy wszystkie te zjawiska, których opis za pomocą teorii klasycznej prowadzi do wniosków sprzecznych z doświadczeniem, musielibyśmy poświęcić na to całą książkę. Na początku XX wieku jednak, gdy odkrywano zarysy teorii kwantów, sytuacja wyglądała zgoła odmiennie. Wyniki zaledwie paru doświadczeń nie mieściły się w ramach fizyki klasycznej. Zanim omówimy te doświadczenia, określimy, co oznaczają terminy teoria klasyczna lub fizyka klasyczna, których tu użyliśmy.

Przymiotnikiem *klasyczny* przyjęto w fizyce obdarzać całą teorię przedkwantową. Nawet teoria względności jest obecnie zaliczana do fizyki klasycznej. Fizykę klasyczną tworzą zatem mechanika klasyczna wraz z mechaniką ośrodków ciągłych, elektrodynamika klasyczna, klasyczna mechanika statystyczna z termodynamiką i teoria grawitacji.

Odkrytą przez Einsteina teorię względności zaliczamy też do fizyki klasycznej, ponieważ wszystkie wymienione powyżej działy fizyki można przeformułować tak, aby były zgodne z zasadami szczególnej i ogólnej teorii względności.

Pierwszym krokiem na drodze do sformułowania teorii kwantów było odkrycie przez Maxa Plancka w 1900 roku kwantu działania. Wielkość kwantu działania określona jest przez stałą Plancka h . Stała Plancka jest uniwersalną stałą przyrody nie mniej podstawową niż prędkość światła w próżni, czy też stała grawitacyjna.

Ma ona wymiar działania, to znaczy wymiar iloczynu energii przez czas lub iloczynu pędu przez długość, zaś jej wartość wynosi:

$$h = 6,626176 (\pm 0,000036) \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sek.}$$

Jak się później okazało, stała Plancka jest wielkością charakterystyczną dla całej teorii kwantowej. Jej występowanie we wzorach świadczy zawsze o tym, że opisywane zjawiska rozważane są w ramach fizyki kwantowej, podobnie jak występowanie we wzorach prędkości światła jest przejawem stosowania teorii względności.

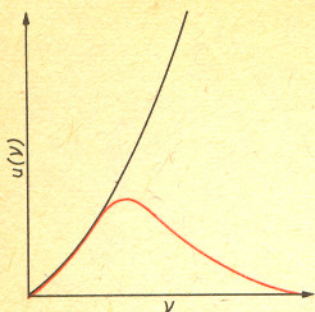
Planck odkrył kwant działania próbując teoretycznie uzasadnić obserwowany rozkład widmowy promieniowania wysyłanego przez rozgrzane ciało. Wcześniejsze próby rozwiązania tego problemu w ramach elektrodynamiki klasycznej i klasycznej mechaniki statystycznej prowadziły do wyników stojących w jawnej sprzeczności z doświadczeniem.

Zagadnienie rozkładu widmowego promieniowania (zależności gęstości energii promieniowania na jednostkę częstości i na jednostkę objętości od częstości) w teoretycznie wyidealizowanej formie otrzymało nazwę zagadnienia promieniowania ciała doskonale czarnego. Promieniowanie ciała doskonale czarnego jest to z definicji promieniowanie elektromagnetyczne pozostające w równowadze termodynamicznej z ogrzanym ciałem. Oczywiście, aby utrzymać promieniowanie elektromagnetyczne w skończonej objętości, należy je zamknąć ze wszystkich stron nieprzepuszczalnymi ściankami z ogrzanej substancji tworząc zamkniętą wnękę. Na to, by móc promieniowanie to analizować, robi się w jednej ściance maleńki otwór. Słusznie sądzono (potwierdzały to zresztą wyniki doświadczeń), że stan pola elektromagnetycznego znajdującego się w kontakcie cieplnym z wnęką ogrzaną do temperatury T jest wyznaczony przez własności samego pola i będzie zależał tylko od temperatury, a nie od materiału i kształtu wnęki. Funkcja $u(\nu)$ opisująca zależności gęstości energii ciała doskonale czarnego od częstości byłaby więc uniwersalną funkcją fizyczną zawierającą jedynie częstość, temperaturę i stałe uniwersalne. Ten właśnie uniwersalny, absolutny charakter praw opisujących promieniowanie ciała doskonale czarnego był dla wielu fizyków, a w szczególności dla Plancka, źródłem szczególnej fascynacji. W swojej autobiografii naukowej Planck napisze później: „... poszukiwanie praw absolutnych zawsze uważałem za najbardziej wzniosły cel działalności naukowej”.

Kilka miesięcy przed odkryciem Plancka Lord Rayleigh opublikował pracę, w której wykazywał, że na mocy teorii Maxwella oraz zasady ekwipartycji energii w mechanice statystycznej gęstość energii promieniowania $u(\nu)$ dana jest wzorem

$$u(\nu) = \frac{8\pi^2 \nu^2 k T}{c^3}.$$

Wzór ten podałem tu w poprawnej formie. Lord Rayleigh bowiem pomylił się w swoich obliczeniach otrzymując 8 razy większy współczynnik. Poprawny wynik podał pięć lat później J. H. Jeans i dlatego wzór ten nosi obecnie nazwę wzoru Rayleigha-Jeansa. Wzór ten był nie tylko



Porównanie wzoru Plancka z obserwowaną gęstością energii promieniowania będącego w równowadze termicznej z materią. Czarna krzywa przebiega zgodnie ze wzorem Rayleigha-Jeansa.

wyraźnie sprzeczny z doświadczeniem (porównaj wykres), ale tak dalece paradoksalny, iż ochrzczono go później mianem katastrofy w ultrafiolecie. Według wzoru Rayleigha-Jeansa bowiem gęstość energii promieniowania rośnie ze wzrostem częstotliwości i w rezultacie pełna energia promieniowania na jednostkę objętości, określona całką względem częstotliwości, jest nieskończona:

$$U = \int_0^{\infty} u(\nu) d\nu = \infty.$$

Nieskończoną wartość energii, jaką otrzymujemy ze wzoru Rayleigha-Jeansa, można zrozumieć, jak to zauważył w 1910 roku Lorentz, jeżeli zdać sobie sprawę z tego, że pole elektromagnetyczne (nawet zamknięte w objętości o skończonych rozmiarach) jest układem fizycznym o nieskończonej liczbie stopni swobody. Dla każdej skończonej wartości energii przypadającej na jeden stopień swobody, w wyniku zasady ekwipartycji energii, otrzymamy nieskończoną pełną energię. Zasada ekwipartycji energii, odkryta przez Maxwella, głosi bowiem, że w stanie równowagi termodynamicznej średnia energia kinetyczna przypadająca na każdy stopień swobody równa się $1/2 kT$, gdzie k jest stałą Boltzmana, a T temperaturą absolutną.

Wzór Rayleigha-Jeansa nie był jedynym wzorem na rozkład energii ciała doskonale czarnego, wyprowadzonym w teorii klasycznej. W roku 1884 Wien wykazał, że z zasad termodynamiki wynika, iż zależność gęstości energii $u(\nu)$ od temperatury i częstotliwości można wyrazić przez funkcję tylko jednej zmiennej

$$u(\nu) = F(\nu/T).$$

W dwa lata po otrzymaniu wzoru Wien próbował wyznaczyć teoretycznie postać funkcji F otrzymując w wyniku rozumowania zawierającego wątpliwe argumenty zależność wykładniczą:

$$u(\nu) = a\nu^3 \exp\left(-\frac{b\nu}{T}\right).$$

Ponieważ zgodność wykładniczego wzoru Wiena z doświadczeniem była dobra, Planck podjął początkowo próbę uzasadnienia tego wzoru w lepszy sposób niż uczynił to Wien, ale nowe wyniki doświadczalne uzyskane jesienią 1900 roku radykalnie zmieniły sytuację. Pomiary przeprowadzone przez H. Rubensa i F. Kurlbauma wykazały, że dla małych częstotliwości i wysokich temperatur wzór Rayleigha-Jeansa, a nie wzór Wiena, jest poprawny. Ponieważ wzór Wiena obowiązywał jednak nadal dla większych częstotliwości i niskich temperatur, Planck uświadomił sobie, że poprawny wzór winien mieć postać podaną przez Wiena z funkcją rosnącą jak T/ν dla małych wartości argumentu i malejącą wykładniczo dla dużych wartości. Dokonując prostej interpolacji we wzorach na pochodne entropii, którymi posługiwał się w swoich rozważaniach termodynamicznych, prawie natychmiast po zapoznaniu się z nowymi danymi doświadczalnymi Planck podał następujący wzór na gęstość energii promieniowania:

$$u(\nu) = \frac{A\nu^3}{\exp\left(\frac{B\nu}{T}\right) - 1}$$

Zgodność wzoru Plancka z doświadczeniami była uderzająca. Był to początkowo wzór czysto empiryczny, nie oparty na żadnych trwałych podstawach teoretycznych. Odkrycie wzoru Plancka było wynikiem prostej interpolacji, jakiej Planck dokonał we wzorach opisujących własności promieniowania ciała czarnego przy małych i przy dużych częstotliwościach. Gdyby Planck dysponował jedynie wzorami Rayleigha-Jeansa i Wiena na gęstość energii promieniowania w tych dwóch obszarach częstotliwości, to odgadnięcie poprawnego wzoru interpolującego byłoby chyba niemożliwe. Planck jednak chętnie prowadził swoje rozważania na gruncie termodynamiki, której był wybitnym znawcą, i tam właśnie dostrzegł możliwość bardzo prostej interpolacji. Zauważył on bowiem, że druga pochodna entropii S względem energii U dla wzorów Rayleigha-Jeansa i Wiena ma odpowiednio postać:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\text{const}}{U^2} \quad \text{Rayleigh-Jeans,}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\text{const}}{U} \quad \text{Wien.}$$

Ponieważ małe częstotliwości (wysokie temperatury) odpowiadają dużym wartościom U , zaś duże częstotliwości (niskie temperatury) odpowiadają małym wartościom U , Planck zastąpił oba wzory na pochodne entropii jednym wzorem interpolującym

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{a}{U(U+b)},$$

który po scałkowaniu doprowadził do wzoru na gęstość energii promieniowania.

Ze względów dydaktycznych dokonałem pewnych uproszczeń w opisie rozumowania, które doprowadziło Plancka do jego wzoru. Bardziej szczegółową i dogłębną analizę historii i odkrycia teorii kwantów można znaleźć w monografii Krzysztofa Szymborskiego „Relacje teorii i eksperymentu w genezie fizyki kwantowej”, Ossolineum 1980.

W ciągu niespełna dwóch miesięcy po odgadnięciu poprawnego wzoru na promieniowanie udało się Planckowi znaleźć jego uzasadnienie teoretyczne. W uzasadnieniu tym wykorzystał on wzór Boltzmanna wyrażający zależność między entropią a liczbą dopuszczalnych stanów, w których może znajdować się układ. Do tego klasycznego rozumowania wprowadził Planck zupełnie nowy element nie dający się żadną miarą pogodzić z fizyką klasyczną. Przyjął on mianowicie, że energię przypadającą na atomy wnętrza drgające z częstością ν (atomy takie w modelu Plancka pochłaniały i wysyłały promieniowanie o częstości ν) można dzielić pomiędzy poszczególne atomy tylko w ten sposób, by każdy atom otrzymał wielokrotność energii $h\nu$, nazwaną przez Plancka kwantem energii. Posługując się dostosowanym do nowej sytuacji wzorem Boltzmanna obliczył Planck entropię, a następnie średnią energię przypadającą na jeden atom.

Wykorzystując na zakończenie wyprowadzony przez siebie wcześniej związek między średnią energią atomu drgającego z częstością ν i gęstością energii promieniowania $u(\nu)$ otrzymał Planck swój sławny wzór na promieniowanie ciała czarnego w postaci

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

Z porównania swego wzoru z danymi doświadczalnymi otrzymał Planck dla stałej h wartość $6,55 \times 10^{-27}$ erg · sek, mniejszą zaledwie o 1 procent od wartości znanej obecnie.

Dzień 14 grudnia 1900 roku, w którym Planck wygłosił sławny odczyt w Towarzystwie Fizycznym w Berlinie podając swój wzór na gęstość promieniowania, uznany został za dzień narodzin teorii kwantów. Symbolem tej teorii stała się wielkość h nosząca imię swego odkrywcy. Wraz z prędkością światła w próżni c , ładunkiem elementarnym e i stałą grawitacyjną G , stała Plancka tworzy czwórkę podstawowych uniwersalnych stałych przyrody. Początkowo odkrycie Plancka nie spotkało się z ogólnym uznaniem. Można wymienić kilka źródeł sceptycyzmu, z jakim ówczesni fizycy powitali teorię Plancka. Przede wszystkim teoria ta tłumaczyła, i to za cenę drastycznych zmian w istniejącym klasycznym obrazie świata, tylko jedną krzywą doświadczalną. W dodatku zmiany, które Planck wprowadzał, dotyczyły ogólnie uznanych i sprawdzonych teorii: mechaniki statystycznej i teorii Maxwella. Pewne znaczenie miał również fakt, iż stała Plancka ma wymiar działania, które nie podlega, w przeciwieństwie do energii, prawom zachowania. Ze względu na wyróżnioną rolę, jaką odgrywa energia w mechanice statystycznej (zasada ekwipartycji energii), hipoteza Plancka wydawałaby się ówczesnym fizykom bardziej naturalna, gdyby to właśnie energia była przekazywana w stałych (niezależnych od częstości) porcjach. Dopiero rozszerzenie hipotezy kwantów na inne zjawiska i wytłumaczenie za jej pomocą wielu zagadkowych, z punktu widzenia fizyki klasycznej, prawidłowości, doprowadziło do powszechnej akceptacji teorii kwantowej.

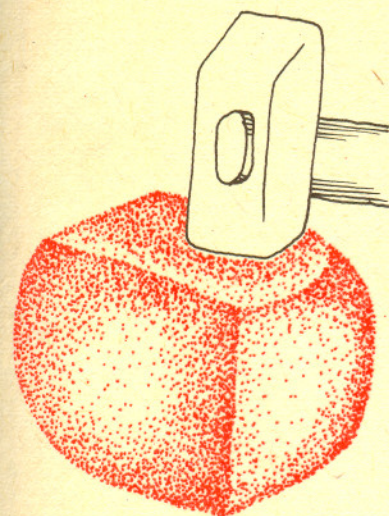
Ogromnie doniosłą rolę w rozwoju teorii kwantów we wczesnym okresie jej istnienia odegrał Albert Einstein. W tym samym roku, w którym ukazała się jego praca o szczególnej teorii względności, Einstein ogłosił artykuł zatytułowany „O pewnym heurystycznym punkcie widzenia dotyczącym wytwarzania i przemiany światła”. W pracy tej Einstein wprowadził następujące założenie, które dziś nazwalibyśmy hipotezą o istnieniu fotonów: „... energia promieniowania świetlnego... nie rozprzestrzenia się w sposób ciągły na cały powiększający się obszar, lecz składa się ze skończonej liczby zlokalizowanych w przestrzeni niepodzielnych kwantów energii, pochłanianych i wysyłanych zawsze tylko w całości”.

Nazwę foton wprowadził dopiero w roku 1926 G. N. Lewis, toteż w pracy Einsteina termin ten nie pojawia się.

W swojej pracy Einstein zwraca uwagę na to, że entropię tej części promieniowania elektromagnetycznego, dla której obowiązuje prawo Wiena ($h\nu/kT \gg 1$), można wyrazić takim samym wzorem jak entropię gazu doskonałego złożonego z punktowych molekuł o energii $h\nu$. Na podstawie tej zbieżności wzorów na entropię Einstein przypisał promieniowaniu elektromagnetycznemu, traktowanemu zawsze do tego czasu jak ośrodek ciągły, pewną strukturę ziarnistą.

W dalszym ciągu swojej pracy Einstein zajął się odpowiedzią na pytanie: Jaką postać miałyby niektóre znane podówczas prawa rządzące powstawaniem i przekształcaniem się światła, gdyby składało się ono z takich właśnie kwantów promieniowania?

Przy pomocy kwantów promieniowania Einstein wyjaśnił trzy zjawiska z dziedziny promieniowania, których wytłumaczenie na gruncie fizyki klasycznej nie było znane. Były to: reguła Stokesa, zjawisko fotoelektryczne oraz zjawisko jonizacji gazów światłem ultrafioletowym. Reguła Stokesa głosi, że linie widmowe światła wysyłanego przez ośrodek w procesie luminescencji są przesunięte w kierunku dłuższych fal w porównaniu ze światłem pobudzającym ośrodek do luminescencji. W zjawisku fotoelektrycznym światło (najczęściej fioletowe) pada na powierzchnię metalu wybijając z niej elektrony. Podobny charakter ma zjawisko jonizacji gazów polegające na odrywaniu elektronów od atomów lub molekuł przez światło ultrafioletowe. W obu zjawiskach zaobserwowano występowanie częstości granicznych, zależnych od materiału. Światło o częstości mniejszej niż częstość graniczna nie wywołuje fotoefektu i jonizacji. Ogólne własności tych zjawisk wyjaśnił Einsteinu bardzo prosto na gruncie teorii kwantów promieniowania, wykorzystując w rozumowaniu właściwie tylko zasadę zachowania energii w elementarnych procesach oddziaływania promieniowania z materią.



Narzekania z początków stulecia

W jednej ze szkół angielskich ok. 1910 roku pojawiło się na jakimś (nie wiemy bliżej jakim) egzaminie następujące zadanie:

Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby:

$$7 + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{9\sqrt{3}} - 15$$

Zostało ono tak oto skomentowane na łamach *The Mathematical Gazette* (1912 r.).

Czy Towarzystwo Matematyczne nie powołałoby misjonarzy mogących nawrócić egzaminatorów w Komisji Edukacji na bardziej nowoczesne idee? Jestem pewny, że sztuczny charakter prac matematycznych członków Komisji jest znaczną przyczyną niesmaku, z jakim przedmiot ten jest traktowany przez naszych wieczorowych studentów.

Przyp. redakcji *Delt*y (1983).
Rozwiązać powyższe zadanie.
Odpowiedź w numerze.

We wszystkich trzech przypadkach energią, którą możemy wykorzystać w każdym akcie oddziaływania, jest energia fotonu $h\nu$. Ponieważ część tej energii zostaje na ogół rozproszona zamieniając się na energię kinetyczną ruchu termicznego, energia obserwowana na końcu w formie energii fotonów światła luminescencyjnego będzie mniejsza od energii fotonów padających (reguła Stokesa). W zjawisku fotoelektrycznym i w procesie jonizacji pewna stała (zależna oczywiście od rodzaju substancji) część energii fotonów musi zostać dodatkowo zużyta na zerwanie wiązania elektronu w metalu lub w atomie. Oprócz wyprowadzenia nierówności wynikających z zasady zachowania energii Einstein przewidział, że omawiane trzy zjawiska przebiegają w zasadzie jednakowo dla różnych natężeń padającego promieniowania, gdyż energia pojedynczych fotonów nie zależy od natężenia promieniowania. Ze zmianą natężenia zmienia się jedynie liczba wysyłanych fotonów luminescencji czy też elektronów.

Rola Einsteina w budowie teorii kwantów nie ograniczyła się do sformułowania i zastosowania hipotezy fotonów. W dwa lata później ogłosił on następny artykuł nieco rzadziej obecnie wspomniany, ale nie mniej ważny dla rozwoju teorii kwantów. W pracy tej Einstein pomyślnie rozszerzył hipotezę kwantów energii na zjawiska wchodzące w zakres kinetycznej teorii budowy materii. Była to pierwsza praca, w której udowodniono, że pojęcie kwantów energii można stosować do opisu zjawisk innych niż promieniowanie elektromagnetyczne. Einstein objaśnił w niej zaobserwowane w doświadczeniach zmniejszanie się ciepła właściwego ciał stałych wraz z obniżaniem temperatury. Klasyczna fizyka statystyczna prowadzi do prawa Dulonga-Petita dla ciepła właściwego:

$$c_v = \text{const} = 6 \text{ cal} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Prawo to wynika z prostego modelu, w którym do harmonicznych drgań sieci krystalicznej stosuje się zasadę ekwipartycji energii. Prawo Dulonga-Petita zgadza się dobrze z doświadczeniem, dla temperatur pokojowych i wyższych, dla ogromnej większości ciał stałych.

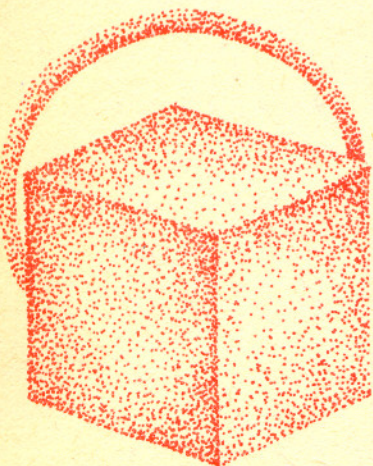
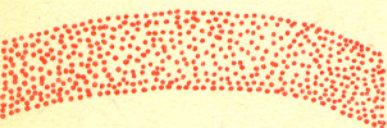
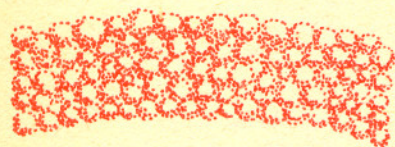
Einstein założył, że energia drgań sieci krystalicznej podlega takim samym prawom kwantowania jak energia drgań pola elektromagnetycznego i uzyskał wzór

$$c_v = \frac{3R(h\nu/kT)^2 \exp(h\nu/kT)}{[\exp(h\nu/kT) - 1]^2},$$

przechodzący w prawo Dulonga-Petita dla dużych T i opisujący spadek ciepła właściwego do zera, gdy $T \rightarrow 0$. Ze współczesnego punktu widzenia można powiedzieć, że w 1907 roku Einstein odkrył fonony – elementarne wzbudzenia drgań sieci krystalicznej.

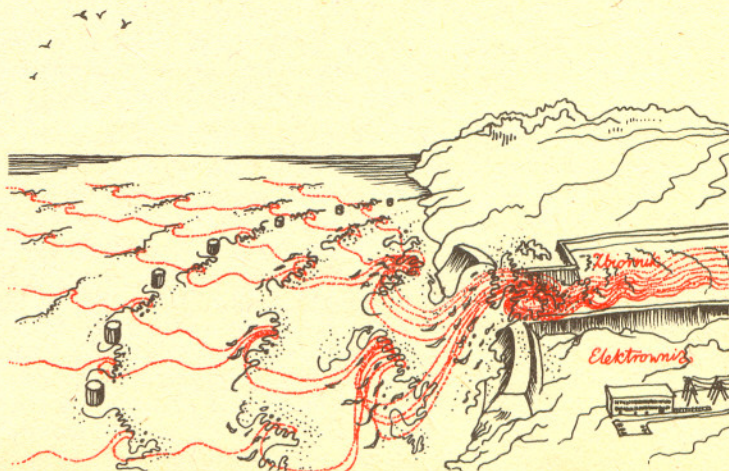
W roku 1911 Walter Nernst, który początkowo odnosił się bardzo krytycznie do teorii kwantów, w pracy przedstawionej w Akademii Berlińskiej oświadczył: „Mimo iż teoria kwantowa obecnie jest w istocie tylko przepisem rachunkowym o dziwnym, można by powiedzieć nawet groteskowym charakterze, to dzięki pracom Plancka dotyczącym promieniowania i pracom Einsteina dotyczącym mechaniki molekularnej okazała się ta teoria być tak owocna, że jest obowiązkiem nauki potraktować ją poważnie i poddać szczegółowej analizie”. Ciekawe natomiast, że sam Planck w rozbudowie swojej teorii nie brał udziału, a nawet wręcz przeciwnie, występował przeciw rozszerzaniu hipotezy kwantów na inne zjawiska. W przedmowie do drugiego wydania swej książki „Teoria promieniowania cieplnego” napisanej w roku 1912 Planck pisał na ten temat: „Nie ma prawdopodobnie nic gorszego dla pomyślnego rozwoju nowej hipotezy jak wykroczenie poza granice jej stosowalności”.

Jak widać z naszego opisu, pierwsze dziesięciolecie teorii kwantowej upłynęło pod znakiem zastosowań tej teorii do drgań harmonicznych: drgań pola elektromagnetycznego i drgań sieci krystalicznej. Drugi okres, którym zajmiemy się w drugiej części artykułu, można scharakteryzować jako okres zastosowań teorii kwantów do widm atomowych.



Siatka dyfrakcyjna dla morskich fal

Zespół inżynierów z Centralnego Instytutu Badań Przemysłowych w Norwegii zaproponował budowę gigantycznej siatki dyfrakcyjnej na morzu. Cel takiej budowy ilustruje rysunek. Siatka ogniskując fale w wybranym miejscu wybrzeża może, zwiększając ich amplitudę do 100 m (jak twierdzą autorzy) wpompować wodę do wyżej położonego zbiornika. Dalej konwencjonalna elektrownia wodna może dostarczać energii elektrycznej.



Skrót regulaminu

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Deltę”

Zadania nr 46, 47, 48

Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 7/1982

Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	43,22pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	30,00pkt
Jacek Uryga	- Bytom	29,76pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	26,83pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	19,27pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	17,73pkt
Mariusz Fiszler	- Duszynki Zd.	17,27pkt

Współczynniki trudności zadań 25, 26, 27 :
3,55 1,85 1,50

Redaguje dr Marcin E. Kuczma

Chochlik drukarski - i niestety nie tylko drukarski - wkraść się do tekstów Klubu 44 w numerach 9,10/1982.

Iloczyn w zadaniu 33 był w zamierzeniu liczbą ośmiocyfrową; zgubienie jednej gwiazdki odebrało zadaniu wdzięk i sens. Dla odmiany, banalne zadanie 32 zostało zamieszczone wskutek bardzo dziwnej omyłki w miejsce interesującego zadania geometrycznego, którego rozwiązanie znaleźli Czytelnicy ze zdumieniem w numerze 1/1983. Ponieważ wydrukowane zadania formalnie sens matematyczny mają, więc ich rozwiązania będą ocenione i włączone do punktacji; szkoda tylko, że zniekształcenia tekstów pozbawiły Czytelników przyjemności z rozwiązywania.

Dalej, w numerze 10/1982 błędnie podaliśmy współczynnik trudności zadania 17 - miało być: 2,80.

Za te pomyłki i niedopatrzenia redakcja gorąco przeprosza autora i uczestników konkursu ligowego oraz wszystkich Czytelników.

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązanie danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30.04.1983 r.

46. Ile pierwiastków ma równanie $a^x = \log_a x$?
(a jest ustaloną liczbą dodatnią różną od 1).

47. Dowieść, że każda liczba naturalna ma wielokrotność, której zapis dziesiętny składa się tylko z zer i jedynek.

48. Kostką 6-wymiarową I^6 nazywamy zbiór punktów (x_1, \dots, x_6) przestrzeni 6-wymiarowej R^6 , których współrzędne x_i spełniają nierówności $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, 6$. Spośród wierzchołków kostki I^6 wybrano losowo trzy. Co jest bardziej prawdopodobne: czy to, że utworzą one trójkąt ostrokątny, czy to, że utworzą trójkąt prostokątny?

(Zadanie 46 przysłał nasz Czytelnik, p. Andrzej Zieliński z Warszawy)

Rozwiązanie zadań z numeru 10/1982

34. Załóżmy wbrew tezie, że $s_n(x) = (x-a)^2 v(x)$. Wówczas wielomian $s_n(x+a) = x^2 v(x+a)$ ma współczynniki przy x^0 i x^1 równe zeru. Ale

$$s_n(x+a) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{1}{k!} \binom{k}{j} a^{k-j} x^j.$$

Grupując składniki według potęg x przekonujemy się, że wyraz wolny równa się $s_n(a)$, zaś współczynnik przy x równa się $s_n(a) - a^n/n!$. Obie te liczby mają być równe zeru, zatem $a = 0$, skąd $s_n(x) = x^2 v(x)$. Sprzeczność, bo $s_n(0) = 1$.

35. Rozwiązanie oprzemy na następujących spostrzeżeniach:

(1) Nie istnieje w zbiorze Z czwórka punktów, z których jeden leży wewnątrz trójkąta utworzonego przez pozostałe trzy. (Gdyby bowiem $A, B, C, D \in Z$, $D \in \text{int } ABC$, to punkty przecięcia prostych AD, BD, CD z bokami trójkąta ABC należałyby do Z i, kontynuując rozumowanie, otrzymalibyśmy nieskończony ciąg trójkątów o wierzchołkach w Z).

(2) Jeśli na pewnej prostej leżą co najmniej trzy punkty zbioru Z , to po każdej stronie tej prostej leży co najwyżej jeden punkt zbioru Z . (Gdyby po którejś stronie leżały dwa, musiałyby powstać konfiguracja, o jakiej mowa w uwadze (1)).

(3) Jeśli punkty $A, P, B \in Z$ leżą na jednej prostej, P między A i B , i jeśli po każdej stronie tej prostej leży punkt zbioru Z - oznaczmy te punkty przez K i L - to P jest punktem przecięcia prostych AB i KL , przy czym żadna z tych prostych nie zawiera już innych punktów zbioru Z . (W przeciwnym razie mielibyśmy po którejś stronie którejś z tych prostych więcej niż jeden punkt zbioru Z , wbrew uwadze (2)).

(4) W sytuacji opisanej w uwadze (3) punkty A, B, K, L muszą być wierzchołkami równoległoboku, P - jego środkiem symetrii, i punkty te wyczerpują cały zbiór Z . (Łatwy wniosek z (3) i z (2)).

Z poczynionych uwag wynika odpowiedź: Albo Z jest zbiorem n punktów, z których $n-1$ leży na jednej prostej (pozostały leży poza tą prostą), albo Z składa się z 5 punktów - wierzchołków równoległoboku i jego środka.

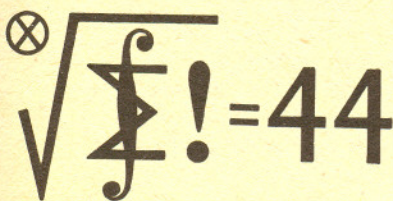
36. Zgodnie z założeniem,

$$N = \sum_{k=0}^{999} k \cdot 1000^{99-k}, \quad \text{gdzie } (n_0, n_1, \dots, n_{999})$$

jest pewną permutacją układu liczb $(0, 1, \dots, 999)$. Ponieważ $1000 \equiv 1 \pmod{999}$, więc

$$N \equiv \sum_{k=0}^{999} k = 999 \cdot 500 \equiv 0 \pmod{999},$$

co oznacza, że N dzieli się przez 999, a tym bardziej przez 37 (jako że $999 = 27 \cdot 37$).



Co sądzić o szkolnej matematyce?

(rozmowa z dr Jerzym Lisiewiczem)

– *Uczy Pan w szkole od 35 lat, jest Pan także pracownikiem naukowym Instytutu Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego. Czym różni się matematyka szkolna od ... tej innej? Czy w ogóle jest coś takiego, jak „matematyka szkolna”?*

– *Przecież i Pan uczy w szkole! Matematyka, której nauczamy w szkole jest – na mocy definicji, że się tak wyrażę – matematyką szkolną.*

– *No tak, ale czy my uczymy w szkole tej „prawdziwej” matematyki?*

– *Uczymy w liceum ogólnokształcącym. Jak wskazuje sama jego nazwa, ma ono dać wiedzę ogólną, w tym i z matematyki. Nie zmienia sytuacji to, że nasze liceum ma specjalny profil matematyczny. Na lekcjach matematyki ćwiczymy uczniów w „rozgryzaniu” problemów; jeśli potem nawet szczegółowe wiadomości wylecą z głowy, nie jest to najważniejsze. Uczymy ich logicznego myślenia, umiejętności dostrzegania problemów, ich analizowania i przekładania na własny język. To chyba więcej niż połowa drogi do rozwiązania.*

– *Wizja społeczeństwa, w którym każdego uczono by tylko tego, co mu się w życiu przyda, wygląda bardzo rozsądnie, ale w gruncie rzeczy jest przerażająca. Musiałby bowiem być ktoś, kto by decydował, co się komu przyda za rok, dwa lata, pięć, dwadzieścia ...*

– *Proszę Pana, kilka lat temu Akademia Medyczna w Białymstoku przysłała do XIV Liceum im. K. Gottwalda w Warszawie (prowadzącego klasy dla uczniów specjalnie uzdolnionych matematycznie) list z gratulacjami i podziękowaniem za świetne przygotowanie uczniów do studiów wyższych w ich uczelni. Inny absolwent eksperymentalnej klasy matematycznej został świetnym historykiem (pracuje na Wydziale Historii Uniwersytetu). Dla mnie to po pierwsze świadczy o tym, że ucząc młodzież matematyki uczymy ją w gruncie rzeczy czegoś znacznie więcej, choć bliżej nieokreślonego: rzetelności, umiejętności myślenia, odróżniania rzeczy ważnych od mniej ważnych, a nawet skromności i szacunku dla wysiłków poprzedników. Po drugie: nie ma oddzielnych uzdolnień do matematyki, oddzielnych do fizyki, chemii itd., tak jak nie ma osobnych uzdolnień do języka niemieckiego, angielskiego czy swahili. Są tylko uzdolnienia (czy predyspozycje) językowe, muzyczne, ruchowe i uzdolnienia do myślenia abstrakcyjnego. Ucząc młodzież matematyki rozwijamy jej wrodzone (w mniejszym lub większym stopniu) te zdolności umysłowe. Czym innym są natomiast zainteresowania. Można interesować się matematyką, fizyką, astronomią itd., tak jak można interesować się językiem swahili.*

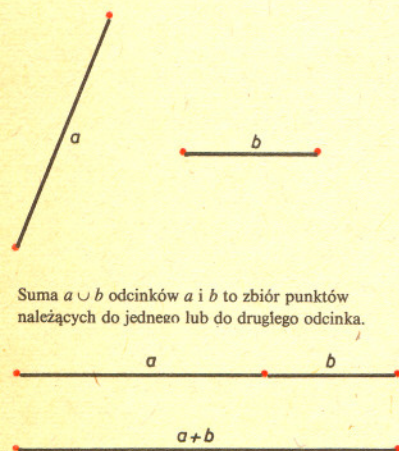
– *To może lepiej byłoby rozwijać te zdolności na czym innym? Na przykład na naukach przyrodniczych: fizyce, chemii, biologii lub, przeciwnie, na naprawdę nowoczesnej matematyce? Może na teorii liczb?*

– *Z gorszym skutkiem. Fizyka czy chemia są „zanadto eksperymentalne” – ćwiczenia umysłu są utrudnione przez konieczność poznania wielu faktów uzyskanych doświadczalnie. Z tego też powodu nie można nauczać w szkole rozwiniętych teorii współczesnej matematyki ani teorii liczb, bo ta szybko staje się bardzo trudna. Ponadto klasykę trzeba poznać przede wszystkim. Poza tym (co właściwie wiąże się z poprzednim) nowoczesne teorie matematyczne są często mocno sformalizowane i zaksjomatyzowane. Świadczy to o dojrzałości teorii, ale żeby ją zrozumieć, trzeba dobrze znać tę konkretną „rzeczywistość” matematyczną. Lecząc w chmurach należy zachować poczucie kierunku.*

– *Kiedyś uczono sztuki myślenia ucząc języków starożytnych ...*

– *Wie Pan, z tym jest ciekawa sprawa. Teraz rzeczywiście nowożytnych języków naucza się po to, by uczyć się mógł potem w obcym kraju porozumieć się na ulicy. Łaciny czy greki uczono po to, by dać uczniom dostęp do kultury, ale także by nauczyć ich analizy trudnych zdań. Analiza tekstów Cezara, Cycerona, nie mówiąc już o poezji np. Owidiusza nie gorzej ćwiczyła umysł niż zadania na dowodzenie w geometrii. A ciągnąc porównanie „językowe” to naukę matematyki w szkole podstawowej przyrównałbym do modnej obecnie praktycznej nauki języka obcego: umożliwić porozumienie się. Dopiero w szkole średniej jest miejsce na spokojną analizę, gramatykę i składnię. Właśnie od czasu, kiedy niektóre zagadnienia matematyki szkoły średniej przerzucono do podstawówki, nauczyciele szkół podstawowych stanęli bezradni. To nie była ich matematyka! Nie rozumieli potrzeby (i wobec tego nie potrafili przekonać uczniów) o konieczności dowodzenia twierdzeń typu „każdy widzi”. Nie rozumieli roli niektórych pojęć. W jednej ze szkół nauczycielka tępiła wypowiedzi uczniów w rodzaju „mam dwa jabłka”. Należało mówić „mam dwuelementowy zbiór jablek”. Inny nauczyciel zapytał mnie kiedyś, jak narysować sumę dwóch odcinków, o takich (rysunek obok). „Już jest narysowana”, odpowiedziałem. „Tak uczyć nie mogę”, odparł nauczyciel. „Dzieciom muszą to wytłumaczyć tak: ustawiamy te odcinki jeden za drugim i ścieramy oddzielając je kreską. Długi odcinek jest wtedy sumą tych dwóch krótszych”. Oto jak daje znać o sobie matematyka dotychczasowej szkoły podstawowej.*

– *Sądzę, że podobny błąd popełniono w 1973 roku, kiedy rozpoczęto masowe produkowanie magistrów z nauczycieli, głównie szkół podstawowych. Wtłaczano im do głowy tzw. matematykę wyższą, której pojąć nie byli w stanie nie tylko z powodu wieku, braku zdolności i przeciążenia obowiązkami domowymi i zawodowymi, ale w dużej części też i dlatego, że przywykli już do innego pojmowania matematyki.*



Suma $a \cup b$ odcinków a i b to zbiór punktów należących do jednego lub do drugiego odcinka.

Dodawanie odcinków w matematyce szkoły podstawowej.

Odpowiedź na zadanie ze strony 3:

$$2\sqrt{3} + \sqrt{3\sqrt{3}-5}$$

– Próbowaliśmy w klasach matematycznych XIV L. O. nauczać geometrii metodą aksjomatyczną, wyprowadzając wszystko ze starannie dobranych pewników. Brr, to było okropne! Jeszcze dziś pamiętam, że któregoś roku przyjęliśmy dość słaby układ aksjomatów i aby ze zdania „odcinek ma środek” wyprowadzić, że „odcinek ma dokładnie jeden środek” potrzebowaliśmy ... 2 lekcji. Aby móc aksjomatyzować rzeczywistość matematyczną, trzeba ją dobrze znać. Nawet jeśli nasze teorie mają być oderwane od rzeczywistości, trzeba znać tę rzeczywistość – choćby po to. Dopiero na studiach matematycznych – jeśli ktoś na nie trafi – jest miejsce na ścisłe i nienaganne teorie aksjomatyczne, choć i z tym przesadzać tam nie należy. Mówiłem już o metodologicznej różnicy, jaką widzę pomiędzy matematyką szkoły podstawowej i średniej; taki układ matematyki ma jednak jeszcze kilka pięter. W szkole średniej jesteśmy na ... średnim.

– *No tak, lubię porównywać uprawianie nauk ścisłych do eksploracji górskich. Mount Everest nie jest podobno zbyt trudny technicznie w tym sensie, że trzy czwarte trudności bierze się z jego wysokości, rozmiarów podejść, braku tlenu i panującego zimna. Nie możemy więc uczniów zabierać na nasze Mount Everesty. Nie powinniśmy jednak ich uczyć gór ćwicząc ich zdolności wspinaczkowe wyłącznie na betonowych ścianach starych bunkrów (choć z braku gór w pobliżu Warszawy jeździło się kiedyś „na dęby” na Bielany, a teraz do Czosnowa na ruiny carskich fortyfikacji). Czy nie możemy uczniów prowadzić po „Tatrach”, pokazując „przewieszki, nieprzebyte ściany, doliny i hale, cieniste regle, potoki szumiące i w dal wtopione Skalne Podhale”?*

– Uważam, że właśnie tak robimy, ucząc tej właśnie matematyki, którą nazywamy matematyką szkolną.

– *Dziękuję za rozmowę.*

Rozmawiał: Michał Szurek

Pochwała szkolnictwa z początków kapitalizmu

W 1981 r. Państwowy Instytut Wydawniczy wydał bardzo ciekawą książkę „Anglia i Szkocja. Przypomnienia z podróży roku 1820–1824 odbytej”. Autorem książki – i podróżnikiem – był Krystyn Lach-Szyrma. Wśród wielu ciekawych opisów i obserwacji autora można też znaleźć wiele dotyczących szkolnictwa. Oto dwa ciekawe fragmenty.

(s. 185) Przy każdym kościele w Szkocji jest szkółka parafialna. W takich szkółkach oprócz czytania, pisania i rachunków uczą cokolwiek łaciny, geometrii i początków fizyki. Ostatnie byłoby zbytkiem u nas, nie są jednak w Szkocji, nawet wieśniacy potrzebują tam wyższego stopnia oświecenia.

(s. 480 i dalsze) Zastanawiający się nad wychowaniem w Anglii zwykli dzielić je na fizyczne i moralne (...) Szkolne wychowanie (w Anglii) dzieli się na elementarne i uczone. Pierwsze odbiera się w szkołach Bella lub Lancastra, a później w tak nazwanych szkołach gramatycznych (grammar school), wyższe w uniwersytetach. Zastanówmy się wprzód nad szkołami niższymi. (...) Przez ciekawość odwiedziłem najstarszą taką szkołę w Londynie, która służyła na kształcanie nauczycieli w tej metodzie i była za wzorową uważana. Leżała na Borough Road. Zostawała pod zarządem i opieką towarzystwa szkół krajowych i zagranicznych (The British and Foreign School Society), którego wpływ rozciąga się i na obce kraje. Przyjmowano do tej szkoły chłopców i dziewczęta i uczono ich w oddzielnych na jeden wzór wybudowanych salach. Sale te były podłużne, wysokie, obszerne, tak że w każdej na tysiąc uczniów było miejsca; lecz wtedy było chłopców tylko siedmiuset, a dziewcząt nieco mniej. Ławki stały we środku, można było obchodzić je naokoło, a w jednym końcu sali stało wzniesienie z drzewa na kształt galerii dla nauczyciela, skąd za jednym rzutem oka mógł wszystkich uczniów przejrzeć. Żeby w tak obszernej i wysokich salach głos się nie odbijał, porozwieszano w pewnych odległościach u sufitu zielone sukno. Po ścianach wisiały tablice do rachunków z wypisami z Biblii do czytania. W każdej ławce siedało po siedemnaścioro dzieci, nad każdą przełożony był monitor pilnujący nauk i porządku (...) Uczniowie siedzą podług postępu w naukach, niżej lub wyżej, począynający siedzą najbliżej nauczyciela. Szkoła dziewcząt zostaje pod dozorem ochmistrzyni, która jest oraz ich nauczycielką. Jeden nauczyciel i jedna ochmistrzyni przy pomocy monitorów wystarczali na tę tak liczną szkołę.

Uprościć maturę!

Wiosną 1982 roku uczniowie i nauczyciele województwa nowosądeckiego zmagali się z następującym zadaniem, poleconym przez Centrum Doskonalenia Nauczycieli jako wzorcowe przedmaturalne zadanie przygotowawcze:

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{ax^3}{bx^2+c} \right|$ oraz zbadaj ilość

pierwiastków równania $f(x) = m$ w zależności od m , jeśli wiadomo, że

1. liczby $a, b, c+1$ tworzą ciąg arytmetyczny,
2. b/a jest prawdopodobieństwem wyrzucenia co najmniej raz jedyński w trzykrotnym rzucie kostką,
3. $|c|/a$ jest mimośrodem krzywej $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2} + \frac{x^2}{t^2} = 1$

przechodzącej przez punkty $(2, 0)$ i $(0, \sqrt{3})$.

Zadanie bardzo dobre, bo w nadzwyczaj naturalny sposób łączy kilka działów matematyki. Czemu jednak ograniczyć się do matematyki? Oto nasz projekt uniwersalnego zadania maturalnego:

Naszkicować wykres funkcji

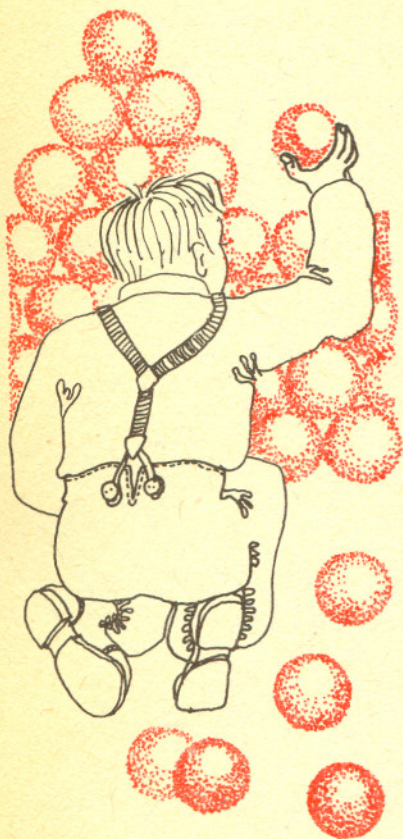
$y = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g + h \sin x$, jeżeli wiadomo, że

1. liczby a, g, h tworzą ciąg geometryczny,
2. b/d^2 jest prawdopodobieństwem wyrzucenia orła,
3. $c^2/1410$ jest datą bitwy pod Grunwaldem,
4. $a+e$ jest liczbą ksiąg największego poematu polskiego i jednocześnie liczbą miesięcy w roku,
5. $ac+g$ jest liczbą nóg karalucha,
6. $d-h$ to liczba symboli w prawie Ohma,
7. $2g+1$ to długość Wisły wyrażona w milach angielskich,
8. $a+b+c+d+e+f+g+h = 0$ jeżeli butter znaczy po angielsku szewc, a 1 w przeciwnym przypadku.

Łatwo, prosto, elegancko.

O liniowych równaniach różnicowych

Dr inż. Kazimierz PAWŁOWSKI



Zapewne nie każdy z młodych Czytelników potrafił od razu wyprowadzić wzory na sumy kwadratów, sześciątów, czwartych potęg itd. początkowych n liczb naturalnych. Pokażemy, że znalezienie wspomnianych wzorów jest bardzo proste. Pokażemy też, jak można dojść do wzoru na n -ty wyraz ciągu Fibonacciego i jak dzielić wielomian mniejszego stopnia przez wielomian większego stopnia. Rozwiązanie powyższych problemów sprowadza się bowiem do rozwiązania pewnych równań różnicowych.

Przejdźmy do omówienia niezbędnych pojęć.

Przez S oznaczmy zbiór wszystkich funkcji skokowych (ciągów), to znaczy funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych. Równanie, w którym niewiadomą jest taka funkcja $y \in S$, nazywamy równaniem różnicowym.

Definicja. Niejednorodnym równaniem różnicowym liniowym rzędu p o stałych współczynnikach nazywamy równanie funkcyjne postaci

$$(1) \quad y(n+p) + a_1 y(n+p-1) + \dots + a_p y(n) = f(n); \quad a_p \neq 0,$$

przy czym a_1, a_2, \dots, a_p są danymi liczbami rzeczywistymi, $f \in S$ znaną funkcją, natomiast $y \in S$ jest funkcją niewiadomą. Jeśli funkcja f jest tożsamościowo równa zero, to równanie (1) nazywamy jednorodnym.

Na ogół żądamy, by funkcja, która jest rozwiązaniem równania, spełniała jeszcze dodatkowe warunki postaci

$$(2) \quad y(n_0) = d_0, y(n_0 + 1) = d_1, \dots, y(n_0 + p - 1) = d_{p-1},$$

gdzie $n_0 \geq 0$, $d_0, d_1, \dots, d_{p-1} \in R$.

Warunki (2) nazywamy warunkami początkowymi, a rozwiązanie spełniające te warunki – rozwiązaniem szczególnym.

Można wykazać, że równanie (1) ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie spełniające warunki (2).

Metoda rozwiązywania równania niejednorodnego wiedzie poprzez rozwiązanie równania jednorodnego

$$(3) \quad y(n+p) + a_1 y(n+p-1) + \dots + a_p y(n) = 0.$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (3) nazywamy rodzinę funkcji postaci $y(n, C_1, C_2, \dots, C_p)$ zawierającą p stałych parametrów, która spełnia to równanie i która wyraża wszystkie rozwiązania szczególne określone przez (2). Zajmiemy się teraz wyznaczeniem rozwiązania ogólnego.

Definicja. Funkcję $y \in S$ nazywamy kombinacją liniową funkcji $y_1, y_2, \dots, y_m \in S$, jeśli można ją przedstawić w postaci $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m$, gdzie C_i są współczynnikami liczbowymi.

Definicja. Funkcje $y_1, y_2, \dots, y_m \in S$ nazywamy liniowo zależnymi, jeśli jedna z nich jest kombinacją liniową pozostałych. W wypadku przeciwnym, tzn. jeśli żadna z tych funkcji nie jest kombinacją liniową pozostałych, funkcje te nazywamy liniowo niezależnymi.

Własność (*): jeśli funkcje $y_1, y_2, \dots, y_m \in S$ są rozwiązaniami równania (3), to również ich kombinacja liniowa jest rozwiązaniem tego równania. Łatwy dowód tej własności pozostawiamy Czytelnikowi.

Twierdzenie. Jeśli funkcje y_1, y_2, \dots, y_p spełniają równanie (3) i są liniowo niezależne, to zbiór ich wszystkich kombinacji liniowych

$$(4) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_p y_p$$

jest rozwiązaniem ogólnym tego równania. Dowód pomijamy. Z powyższego twierdzenia wynika, że w celu znalezienia rozwiązania ogólnego równania (3) wystarczy znaleźć jakikolwiek zespół p funkcji liniowo niezależnych spełniających to równanie i skorzystać ze wzoru (4).

Podamy teraz sposób wyznaczania rozwiązań ogólnych równań I i II rzędu.

Rozważmy najpierw równanie I rzędu postaci

$$(5) \quad y(n+1) - \lambda y(n) = 0, \quad \lambda \neq 0.$$

Niech $y(0) = 1$. Podstawiając w miejsce n kolejno liczby 1, 2, ... otrzymamy

$$y(1) = \lambda y(0) = \lambda, \quad y(2) = \lambda y(1) = \lambda^2, \dots, \quad y(n) = \lambda y(n-1) = \lambda^n, \dots$$



Rozwiązanie zadania M 324.

Zauważmy, że

$$w = (\vec{OA}_1 - \vec{OA}_2) + \dots + (\vec{OA}_{2n-1} - \vec{OA}_{2n}) = \\ = (\vec{A}_1 \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_{2n-1} \vec{A}_{2n}).$$

Gdy teraz $|w| \neq 0$, oznaczmy przez B_k rzut A_k na średnicę okręgu równoległą do w , a przez v_k – wektor $B_{2k-1} B_{2k}$. Długość w jest nie większa od sumy długości tych wektorów v_k , których zwrot jest zgodny ze zwrotem w . Łatwo jednak zauważyć, że odcinki $B_{2k-1} B_{2k}$ odpowiadające tym wektorom są rozłączne i wobec tego suma ich długości, a więc i długość w nie może przekraczać średnicy okręgu równej 2, c.b.d.o.



Rozwiązanie zadania F 129.

Niestety, nie jest to *perpetuum mobile* drugiego, ani tym bardziej pierwszego rodzaju. Błąd w rozumowaniu polegał na pominięciu faktu, iż prężność pary nasyconej zależy od krzywizny powierzchni cieczy. Nad powierzchnią wklęsłą prężność pary nasyconej jest mniejsza niż nad płaską i to właśnie o tyle, że w naszym układzie nie mogą wystąpić przepływy. W pomieszczeniu panuje równowaga termodynamiczna. Fakt ten pozwala na bardzo proste wyprowadzenie ilościowej zależności prężności pary nasyconej od promienia krzywizny powierzchni cieczy. Ograniczmy się do przypadku, gdy wysokość kapilarnego wzniesienia jest na tyle mała, że gęstość pary nie zależy od wysokości. Niech: $P(r)$ – prężność pary nasyconej nad cieczą w rurce; P_{∞} – prężność pary nasyconej nad powierzchnią płaską. Z warunku równowagi cieczy w rurce włoskowatej otrzymujemy, że

$$(1) \quad P(r) + \Delta p + \rho_c g h = P_{\infty},$$

gdzie Δp – dodatkowe ciśnienie spowodowane krzywizną powierzchni; ρ_c – gęstość cieczy. Z drugiej strony

$$(2) \quad P(r) + \rho_p g h = P_{\infty}.$$

Rozwiązując układ równań (1) i (2) mamy

$$h = -\frac{\Delta p}{(\rho_c - \rho_p)g} \quad i$$

$$(3) \quad P(r) = P_{\infty} + \frac{\rho_p}{\rho_c - \rho_p} \Delta p.$$

W naszym przypadku

$$\Delta p = -\frac{2\sigma}{r}, \quad \text{więc}$$

$$P(r) - P_{\infty} = -\frac{\rho_p}{\rho_c - \rho_p} \frac{2\sigma}{r} < 0.$$

Wzór (3) jest słuszny dla dowolnego kształtu powierzchni cieczy. Dla kropki kulistej o promieniu R otrzymujemy:

$$P(r) - P_{\infty} = \frac{\rho_p}{\rho_c - \rho_p} \frac{2\sigma}{R} > 0.$$

Zmiany prężności pary nasyconej spowodowane krzywizną powierzchni cieczy zazwyczaj nie są zbyt wielkie, odgrywają jednak podstawową rolę w procesach wrzenia i skraplania. Dla kropki wody o promieniu rzędu 10^{-5} m (mgła),

$$\frac{P(r) - P_{\infty}}{P_{\infty}} \approx 1\%,$$

dla jeszcze mniejszych efekt wzrostu prężności jest już znaczny i wyprowadzony przez nas wzór przestaje obowiązywać (dlaczego?).

Jako ćwiczenie warto zastanowić się nad:

1. rozkładem ciśnień w obrębie rurki włoskowatej rozważanej w niniejszym zadaniu. Szczególnie interesujący jest przypadek, gdy ciecz ma niską prężność pary nasyconej i duże napięcie powierzchniowe, a promień kapilary jest mały;

2. zachowaniem kropelek rtęci o różnych promieniach rozlanej w niewielkiej, zamkniętej przestrzeni.

Widzimy, że funkcja y dana wzorem $y(n) = \lambda^n$ jest rozwiązaniem szczególnym równania (5), a jego rozwiązanie ogólne jest postaci

$$(6) \quad y(n) = C\lambda^n, \quad C - \text{dowolna stała.}$$

Weźmy teraz pod uwagę równanie rzędu II

$$(7) \quad y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = 0, \quad a_2 \neq 0.$$

Fakt, że funkcja wykładnicza jest rozwiązaniem równania I rzędu, pozwala przypuszczać, że rozwiązaniami równania (7) też będą funkcje wykładnicze. Przewidujemy więc rozwiązanie równania rzędu II w postaci $y(n) = \lambda^n$. Podstawiając $y(n) = \lambda^n$, $y(n+1) = \lambda^{n+1}$, $y(n+2) = \lambda^{n+2}$ do (7), a następnie dzieląc je przez λ^n otrzymamy tzw. równanie charakterystyczne

$$(8) \quad \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

odpowiadające równaniu (7).

O postaci rozwiązań równania (7) decydują pierwiastki równania (8). Rozpatrzmy zatem znane trzy przypadki.

I. $\Delta > 0$. Równanie (8) ma dwa różne pierwiastki λ_1, λ_2 .

Wówczas mamy dwie funkcje $y_1(n) = \lambda_1^n, y_2(n) = \lambda_2^n$ liniowo niezależne (proszę uzasadnić) i spełniające równanie (7). Zatem rozwiązanie ogólne ma postać:

$$y(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n.$$

II. $\Delta = 0$. Równanie (8) ma jeden pierwiastek podwójny $\lambda_0 = -\frac{a_1}{2}$. Znamy więc dopiero jedno

rozwiązanie $y_1(n) = \lambda_0^n$. Okazuje się, że drugim rozwiązaniem (w tym przypadku) liniowo niezależnym od pierwszego jest funkcja $y_2(n) = n\lambda_0^n$. Przeto funkcje

$$y(n) = C_1 \lambda_0^n + C_2 n \lambda_0^n$$

tworzą rozwiązanie ogólne.

III. $\Delta < 0$. Teraz pierwiastkami równania (8) są dwie liczby zespolone sprzężone $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$. Zapisując te liczby w postaci trygonometrycznej i korzystając ze wzoru de Moivre'a otrzymamy dwa rozwiązania zespolone następującej postaci

$$y_1^*(n) = r^n \cos n\varphi + i r^n \sin n\varphi,$$

$$y_2^*(n) = r^n \cos n\varphi - i r^n \sin n\varphi,$$

gdzie $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \varphi = \text{Arg}(\alpha + i\beta)$.

Wykorzystując własność (*) weźmy takie kombinacje funkcji y_1^*, y_2^* , by otrzymać dwa rozwiązania rzeczywiste. Oto szukane kombinacje i funkcje:

$$y_1(n) = \frac{1}{2} y_1^*(n) + \frac{1}{2} y_2^*(n) = r^n \cos n\varphi,$$

$$y_2(n) = \frac{1}{2i} y_1^*(n) - \frac{1}{2i} y_2^*(n) = r^n \sin n\varphi.$$

Tak więc rozwiązanie ogólne w tym przypadku ma postać:

$$y(n) = C_1 r^n \cos n\varphi + C_2 r^n \sin n\varphi.$$

Rozwiązanie równania jednorodnego (3) rzędu wyższego niż II też poszukujemy w postaci skokowej funkcji wykładniczej, tj. ograniczenia zwykłej funkcji wykładniczej do argumentów naturalnych. Tok postępowania dla wyznaczenia rozwiązań szczególnych liniowo niezależnych jest analogiczny do tego dla równania rzędu II.

Nieco trudniej jest wyznaczyć rozwiązanie równania niejednorodnego. W wielu jednak przypadkach użyteczny jest

Lemat. Rozwiązanie ogólne y równania niejednorodnego (1) jest sumą rozwiązania ogólnego y_0 równania jednorodnego (3) oraz rozwiązania szczególnego y_s równania (1), co zapisujemy

$$(9) \quad y = y_0 + y_s.$$

Jeśli funkcja f w równaniu niejednorodnym jest wielomianem lub funkcją wykładniczą, ewentualnie sumą lub iloczynem tych funkcji, to y_s można odgadnąć, a ściślej – przewidzieć. W każdym z wymienionych przypadków y_s przewidujemy w tej samej postaci co f , a chwilowo nieokreślone stałe wyznaczamy z warunku, że y_s ma być rozwiązaniem równania niejednorodnego (1).

Uwaga. Jeśli liczba 1 jest k -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, a f jest wielomianem, to y_s przewidujemy w postaci: $y_s = n^k W(n)$, gdzie W jest wielomianem stopnia mniejszego niż stopień f .

Po tej części teoretycznej, siłą rzeczy lakonicznej, prześledźmy kilka przykładów.

A. Wyznaczyć wzór na sumę kwadratów n początkowych liczb naturalnych, tzn.

$$S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Ponieważ $S(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$, więc odejmując stronami te równości, otrzymamy równanie różnicowe I rzędu

$$(10) \quad \begin{cases} S(n+1) - S(n) = n^2 + 2n + 1, \\ S(1) = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest tu funkcją stałą; $S_0(n) = C$, natomiast rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego przewidujemy w postaci: $S_s(n) = n(A_1 n^2 + B_1 n + C_1)$. Wielomian $A_1 n^2 + B_1 n + C_1$ pomnożyliśmy przez n , ponieważ liczba 1 jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Podstawiając $S_s(n) = A_1 n^3 + B_1 n^2 + C_1 n$ i $S_s(n+1) = A_1 (n+1)^3 + B_1 (n+1)^2 + C_1 (n+1)$ do (10) i przyrównując współczynniki przy

odpowiednich potęgach zmiennej n otrzymamy $A_1 = \frac{1}{3}$, $B_1 = \frac{1}{2}$, $C_1 = \frac{1}{6}$. Zatem

$$S(n) = C + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Uwzględniając warunek początkowy dostajemy poszukiwany wzór.

$$S(n) = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}.$$

Analogicznie możemy wyprowadzić wzory na sumy wyższych potęg n początkowych liczb naturalnych.

B. Wyprowadzić wzór na n -ty wyraz ciągu Fibonacciego: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Ciąg Fibonacciego charakteryzuje się tym, że każdy wyraz oprócz pierwszego i drugiego jest sumą dwóch poprzedzających go wyrazów.

Przez $y(n)$ oznaczmy n -ty wyraz ciągu Fibonacciego. Z jego określenia wynika, że spełnia on równanie

$$(11) \quad \begin{cases} y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0, \\ y(1) = 1, \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

Równaniu (11) odpowiada równanie charakterystyczne postaci

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

mające pierwiastki

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Rozwiązanie ogólne wyraża funkcja

$$y(n) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Uwzględniając warunki początkowe dla wyznaczenia rozwiązania szczególnego, dostajemy układ równań

$$\begin{cases} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} C_2 = 1 \\ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 C_1 + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 C_2 = 1, \end{cases}$$

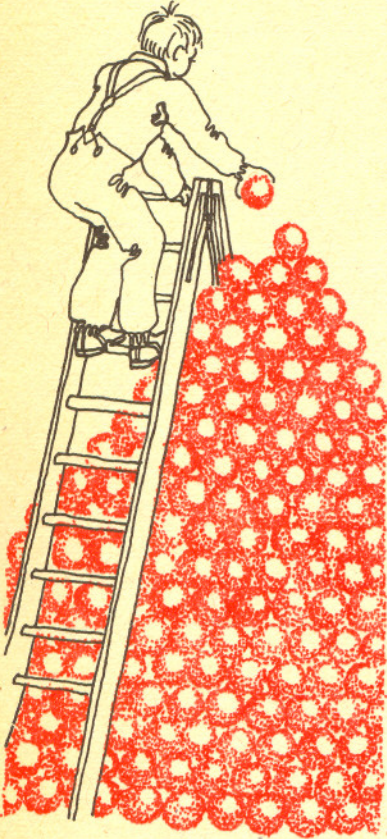
którego rozwiązaniem są

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Poszukiwany wzór na n -ty wyraz ciągu Fibonacciego jest zatem następujący

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Ciąg, który spełnia jednorodne liniowe równanie różnicowe o stałych współczynnikach, nazywamy ciągiem rekurencyjnym (albo ciągiem zadaniem rekurencyjnie). Łatwo wykazać, że dla ciągu rekurencyjnego można wyznaczyć wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu, nie wyznaczając wzoru na n -ty wyraz. Zilustrujemy tę uwagę przykładem.



Rozwiązanie zadania M 322.

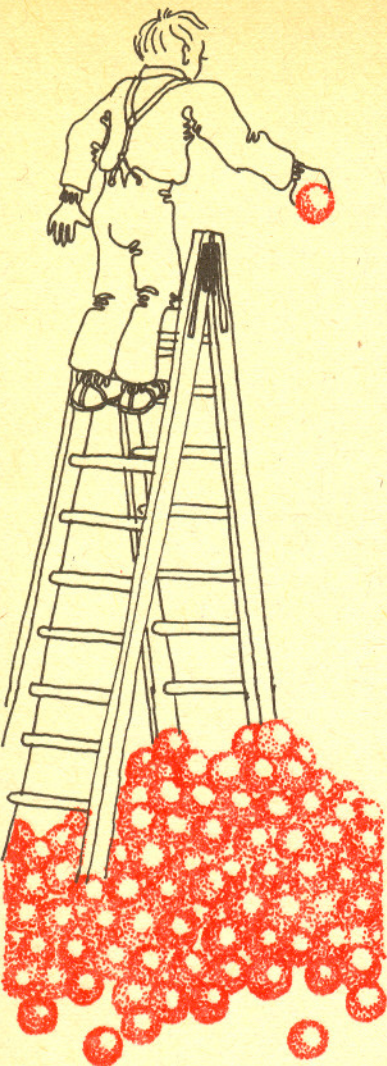
Niech dla liczby naturalnej M symbol M' oznacza liczbę powstałą z M przez przestawienie pierwszej cyfry na koniec. Oznaczając przez x_m pierwszą cyfrę m -cyfrowej liczby M mamy $10M - M' = x_m(10^{m+1} - 1) = 9x_m(10^m + 10^{m-1} + \dots + 10 + 1)$.

Bezpośrednim dzieleniem sprawdzamy że liczba złożona z 16 jedynek:

$1111111111111111 = 10^{15} + 10^{14} + \dots + 10^2 + 10 + 1$ dzieli się przez 17, a żadna mniejsza liczba z powtórzonych jedynek – nie.

Tak więc jeżeli $17|M$, to $17|M'$, gdy $16|m+1$, tj. gdy M jest liczbą 16 k -cyfrową, $k = 1, 2, \dots$

Najmniejszą 16 cyfrową wielokrotnością liczby 17 jest 1000000000000005, bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że ma ona opisaną własność.



C. Wyznaczyć wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu, którego wyrazy spełniają związek

$$y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2.$$

Niech $S(n) = y(1) + y(2) + \dots + y(n)$.

Wówczas $S(n+1) = S(n) + y(n+1)$, $S(n+2) = S(n+1) + y(n+2)$,

$$S(n+3) = S(n+2) + y(n+3), \quad y(n+3) - 2y(n+2) + y(n+1) = 0.$$

Po wykonaniu elementarnych przekształceń otrzymamy równanie

$$(12) \quad \begin{cases} S(n+3) - 3S(n+2) + 3S(n+1) - S(n) = 0, \\ S(1) = 1, \quad S(2) = 3, \quad S(3) = 8. \end{cases}$$

Odpowiada mu równanie charakterystyczne

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0,$$

którego potrójnym pierwiastkiem jest liczba -1 . A więc $S(n) = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2)(-1)^n$.

Po uwzględnieniu warunków początkowych dostajemy oczekiwany wzór

$$S(n) = (-1)^n \frac{-40 + 53n - 15n^2}{2}.$$

W szkole poznajemy algorytm dzielenia wielomianu P przez wielomian Q przy założeniu, że stopień P jest większy niż stopień Q . Teraz przedstawimy algorytm dzielenia tych wielomianów, gdy $\text{st } P < \text{st } Q$ i $Q(0) \neq 0$.

Wyznaczyć iloraz z dzielenia wielomianu $P(x) = 2 + x$ przez wielomian $Q(x) = 1 + x + x^2$.

Ów iloraz znajdujemy w następujący sposób:

$$\begin{array}{r} (2+x) : (1+x+x^2) = 2 - x - x^2 + 2x^3 - \dots \\ \underline{-2 - 2x - 2x^2} \\ -x - 2x^2 \\ \underline{+ x + x^2 + x^3} \\ -x^2 + x^3 \\ \underline{+ x^2 + x^3 + x^4} \\ 2x^3 + x^4 \\ \underline{-2x^3 - 2x^4 - 2x^5} \\ -x^4 - 2x^5 \dots \end{array}$$

Proces dzielenia musimy jednak przerwać, ponieważ iloraz zawiera nieskończenie wiele składników... Okazuje się, że można wyznaczyć wzór na współczynniki tego „nieskończonego” wielomianu, który poprawnie nazywa się szeregiem potęgowym. Weźmy dwa wielomiany: $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_l x^l$, $Q(x) = 1 + b_1 x + \dots + b_p x^p$, przy czym $\text{st } Q > \text{st } P$. Chcemy iloraz tych wielomianów wyrazić w postaci szeregu potęgowego, tzn. by w pewnym przedziale $(-\delta, \delta)$ zachodziła równość

$$(13) \quad \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_l x^l}{1 + b_1 x + \dots + b_p x^p} = d(0) + d(1)x + \dots + d(k)x^k + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n,$$

gdzie $d(k)$ jest współczynnikiem stojącym przed x^k .

Twierdzenie. Współczynniki $d(n)$ w równości (13) spełniają następujące równanie różnicowe

$$(14) \quad d(n+p) + b_1 d(n+p-1) + \dots + b_p d(n) = 0.$$

Powyższe twierdzenie wyraża jedno z ciekawszych zastosowań równań różnicowych z uwagi na częstą potrzebę przedstawiania funkcji wymiernych w postaci sum szeregów potęgowych. Warunki początkowe, czyli wartości początkowych współczynników $d(0), d(1), \dots, d(p-1)$ znajdujemy albo poprzez wykonanie p kroków w dzieleniu wg podanego algorytmu, albo mnożąc równość (13) przez $(1 + b_1 x + \dots + b_p x^p)$ i przyrównując współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x . Rozwiązanie równania (14) (z uwzględnieniem warunków początkowych) daje nam wzór na $d(n)$.

D. Przedstawić w postaci szeregu potęgowego funkcję wymierną $\frac{2+x}{1+x+x^2}$

$$\text{tzn.} \quad \frac{2+x}{1+x+x^2} = d(0) + d(1)x + d(2)x^2 + \dots$$

Z wcześniej wykonanych obliczeń wynika, że $d(0) = 2$, $d(1) = -1$. Na mocy zaś przytoczonego twierdzenia poszukiwane współczynniki $d(n)$ spełniają równanie:

$$(15) \quad \begin{cases} d(n+2) + d(n+1) + d(n) = 0, \\ d(0) = 2, \\ d(1) = -1. \end{cases}$$

Rozwiązując równanie (15) otrzymamy, że

$$d(n) = 2 \cos \frac{2}{3} \pi n, \quad \text{zatem} \quad \frac{2+x}{1+x+x^2} = 2 - x - x^2 + 2x^3 - \dots = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{2}{3} \pi n \cdot x^n \quad \text{dla } |x| < 1.$$



Rozwiązanie zadania M 323.

Oznaczając $a_n = x_1^n + x_2^n$ mamy

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) a_n &= (x_1 + x_2) (x_1^n + x_2^n) = \\ &= x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_1^n x_2 + x_1 x_2^n = \\ &= a_{n+1} + x_1 x_2 (x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) = \\ &= a_{n+1} + x_1 x_2 a_{n-1}, \end{aligned}$$

skąd i ze wzorów Viete'a ($x_1 + x_2 = 6$, $x_1 x_2 = 1$) otrzymujemy wzór rekurencyjny:

$$a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 6.$$

Oznaczając teraz przez r_n resztę z dzielenia a_n przez 5 otrzymamy, że

$$r_{n+1} = r_n - r_{n-1} \pmod{5} \quad \text{i ponieważ } r_{n+1} \text{ zależy tylko od } r_n \text{ i } r_{n-1}, \text{ ciąg } r_n \text{ musi być okresowy z okresem } \leq 25.$$

$$\begin{aligned} \text{Sprawdzamy: } r_0 &= 2, r_1 = 1, r_2 = 4, \\ r_3 &= 3, r_4 = 4, r_5 = 1, \\ r_6 &= 2, r_7 = 1, \dots, \text{ a więc} \\ r_{k+6} &= r_k \end{aligned}$$

i w okresie (2, 1, 4, 3, 4, 1) nie występuje 0, a więc żadna z liczb a_n nie jest podzielna przez 5, c.b.d.o.

Uwaga: Teza naszego zadania pozostaje prawdziwa również dla wykładników ujemnych. Jest bowiem

$$\begin{aligned} a_{-n} &= \frac{1}{x_1^n} + \frac{1}{x_2^n} = \\ &= \frac{x_1^n + x_2^n}{x_1^n x_2^n} = \frac{a_n}{1} = a_n. \end{aligned}$$

E. Ile jest przekątnych w wieloboku wypukłym o $n \geq 3$ wierzchołkach? Przez dołączenie jednego wierzchołka liczba przekątnych wzrośnie o $n-1$. Więc dla tego zadania możemy napisać równanie

$$\begin{cases} y(n+1) - y(n) = n-1, \\ y(3) = 0, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest funkcja $y(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ wyrażająca liczbę przekątnych.

Innego rodzaju zastosowania otrzymuje się, gdy rozważa się równania różnicowe liniowe o zmiennych współczynnikach. Na przykład obliczenie całki

$$J(n) = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

sprowadza się do rozwiązania równania

$$J(n+2) - \frac{n+1}{n+2} J(n) = 0, \quad J(0) = \frac{\pi}{2}, \quad J(1) = 1.$$

Na zakończenie wspomnijmy, że równania różnicowe, oprócz zastosowań w różnych działach matematyki, służą do opisu modeli pewnych układów dynamicznych, zjawisk ekonomicznych i innych.

Magister Pirożyński opowiada...

Piszę do Was, drodzy Czytelnicy *Delty*, jeszcze jako magister, ale już wkrótce będę się podpisywać krócej, ale jakże przyjemniej: Dr Pirożyński. Robię bowiem doktorat. Z zastosowań matematyki, czy jak to się teraz mówi, z matematyki stosowanej. Dokładniej: z optymalizacji zagadnień transportu. W latach kryzysu paliwowego jest to zagadnienie o wiodącym znaczeniu. Nikt nie chciał docenić wagi moich badań. Na szczęście przed półtora rokiem sytuacja się zmieniła. Ale zacznijmy, jak mówi stare rosyjskie przysłowie, ab ovo.

Kształt kulisty nie jest „ekonomiczny” – najciaśniej upakowane kule zajmują ok. 3/4 miejsca w przestrzeni. Pozostałe 25 procent marnuje się bezproduktywnie. Lepszy jest oczywiście kształt prostopadłościenny – ciasno upakowane klocki każdy widział. Warto zauważyć, że i czworościanami można wypełnić przestrzeń całkowicie. W niektórych krajach mleko sprzedaje się w czworościennych pojemniczkach, upchniętych w dużym, też oczywiście czworościennym kartonie.

Prasa doniosła kiedyś, że pomysłowi Amerykanie wyhodowali „kwadratowe” pomidory i że próbują zmusić kury do znoszenia takich jajek (biedne kury...). Wszystko po to, by łatwiej było je (pomidory i jajka, nie kury!) transportować i przechowywać. Bardziej naukowo podszedł do zagadnienia pewien hodowca z Ohio, nazwiskiem Stanley Blecker. Postanowił on rozstrzygnąć eksperymentalnie, jaki kształt byłby najlepszy dla jego brzoskwiń: czworościenny, sześcienny, a może zupełnie inny.

W tym celu sypał owoce do plastikowego worka, który następnie ścisnął (nie bardzo mocno) w prasie hydraulicznej. Patrząc na zmasakrowane zwłoki pięknych przed momentem brzoskwiń próbował Blecker odgadnąć optymalny kształt, do jakiego powinien je namawiać. Po długich badaniach doszedł do wniosku, że najlepszym takim kształtem będzie... graniastosłup prosty o podstawie ośmiokątnej...

Wyniki Bleckera wydały mi się podejrzane i zamierzam je obalić. Już dawno temu próbowałem w najrozmaitszych uczelniach uzyskać pieniądze na zakup kilkudziesięciu ton brzoskwiń (prasę mam), ale wszyscy odpowiadali mi, że równie dobre będą piłeczki pingpongowe. Teraz już nie – celuloid sprowadzamy z II obszaru płatniczego, a brzoskwinie mamy w kraju. A jeśli nawet nie, to niech będą i morele. Powidła morelowe – pycha!

Wasz zapracowany mgr Π - q – żyński



Rozwiązanie zadania F 128.

Po ustaleniu się równowagi menisk cieczy w węższej rurce znajdzie się na identycznej jak poprzednio wysokości H . Przeniesienie rurki nie zmienia kształtu menisku, nie ulega więc zmianie dodatkowe ciśnienie, spowodowane krzywizną powierzchni cieczy, od którego zależy wysokość kapilarnego wzniesienia. Zgodnie ze wzorem Laplace'a ciśnienie to wynosi

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

gdzie σ – napięcie powierzchniowe cieczy,

r_1, r_2 – tzw. główne promienie krzywizny powierzchni w danym punkcie.

Dla doskonałej zwilżalności ścianek rurki przez ciecz $r_1 = r_2 = -r$ (r jest promieniem wewnętrznym węższej kapilary),

$$a \quad p_1 = -\frac{2\sigma}{r} \quad (p_2 = -\frac{2\sigma}{R} \text{ dla rurki szerszej}).$$

Z warunku równowagi cieczy w rurce wynika, że

$$p_{at} + \Delta p_1 + \rho_c g H = p_{at},$$

gdzie p_{at} – ciśnienie atmosferyczne, ρ_c – gęstość cieczy.

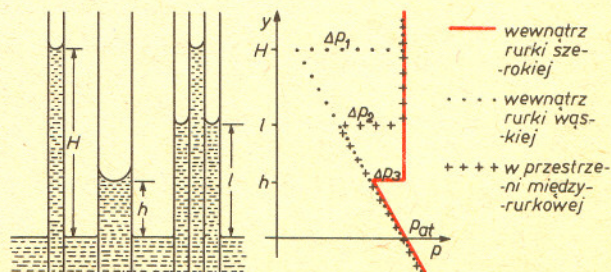
Po podstawieniu otrzymujemy, że wysokość, na którą wzniesie się ciecz wynosi

$$H = \frac{2\sigma}{\rho_c g r}.$$

Wstawienie rurki węższej może znacznie zmienić poziom cieczy w rurce szerszej. Gdy średnica zewnętrzna rurki wkładanej jest bliska średnicy wewnętrznej rurki szerszej, wtedy ciecz w przestrzeni między kapilarami może unieść się bardzo wysoko. Zakładając doskonałą zwilżalność wszystkich powierzchni i współosiowość ustawienia rurek stwierdzamy, że skok ciśnienia wynosi

$$\Delta p_3 = -\frac{2\sigma}{R-r}; \quad \left(r_1 \rightarrow \infty; \quad r_2 = -\frac{R-r}{2} \right).$$

Przytoczone rysunki przedstawiają rozkłady ciśnień jako funkcje wysokości dla poszczególnych przypadków. A jaka sytuacja miałaby miejsce, gdyby ciecz nie zwilżała zewnętrznej powierzchni rurki cieńszej?



O tym jak można układać kule czyli o strukturze najgęstszej upakowania

Dr Andrzej HENNEL

Wyobraźmy sobie, że polecono nam napelnąć pudło jednakowymi kulkami w taki sposób, aby zmieściło się ich jak najwięcej. Będziemy oczywiście starannie układali kolejne warstwy. Po położeniu pierwszej warstwy nie ma żadnych wątpliwości jak układać drugą, natomiast uważny obserwator stwierdzi, że przy układaniu trzeciej warstwy musi dokonać wyboru. Można kłaść kule trzeciej warstwy dokładnie nad kulami pierwszej, a następnie czwartą warstwę nad drugą itd. Takie ułożenie kul nazwiemy *ABAB...* Istnieje jednak druga możliwość – można ułożyć trzecią warstwę w ten sposób, że dopiero kule czwartej warstwy leżą dokładnie nad kulami pierwszej warstwy. Dalej trzeba kłaść piątą warstwę nad drugą, szóstą nad trzecią itd. Powstała w ten sposób strukturę nazwiemy *ABCABC...*

Można oczywiście mieszać obydwie metody układając np. *ABABCABABC...*, jednakże dysponując pudełkiem i kulkami Czytelnik może sam się przekonać, że żadnych innych istotnie różnych sposobów układania kul już nie ma.

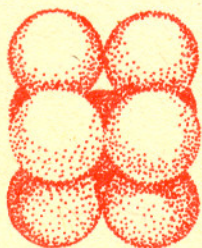
Otrzymane z naszych rozważań dwie struktury przestrzenne (*ABAB...* i *ABCABC...*) nazywane są w krystalografii *strukturami najgęstszej upakowania* i, jak nietrudno się domyślić, zostały wykorzystane przez Naturę w budowie kryształów.

Spróbujmy teraz znaleźć tzw. komórki elementarne tych dwóch sieci krystalicznych, tzn. elementarne cegiełki kilkuatomowe, z których można zbudować daną sieć.

Rozważmy najpierw strukturę *ABCABC...* i wybierzmy:

- 1) dowolną kulę z warstwy *A*;
- 2) sześć kul tworzących trójkąt równoboczny z następnej warstwy (*B*), przy czym środek ciężkości trójkąta znajduje się nad kulą z poprzedniej warstwy;
- 3) sześć kul tworzących taki sam jak poprzednio trójkąt z kolejnej warstwy (*C*), obrócony o 180° wokół osi prostopadłej do płaszczyzny trójkąta przechodzącej przez jego środek ciężkości;
- 4) jedną kulę z czwartej warstwy (*A*) ponad środkiem ciężkości trójkąta.

Otrzymana w ten sposób komórka elementarna przedstawiona jest na rys. 1. Jest to po prostu sześciąt, który o wiele łatwiej można sobie wyobrazić jako trzy warstwy – pięć kul ułożonych w kształcie krzyża, na nich cztery i na nich znów pięć (rys. 2). Sieć krystaliczna zbudowana z takich komórek elementarnych nazywa się siecią regularną powierzchniowo centrowaną, w strukturze tej krystalizują metale szlachetne: miedź, srebro i złoto.

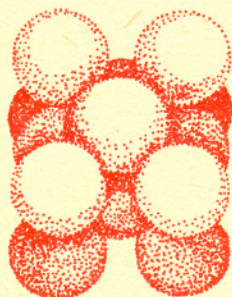


Rys. 5

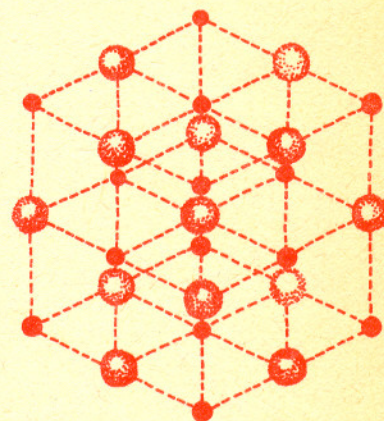
Zjawisko to można obserwować przy stygnięciu np. drutu żelaznego. W temperaturze krytycznej stygnący drut nagle nieco się wydłuża (Czytelnikowi proponujemy oszacowanie tego wydłużenia). Interesujące jest to, że zmianę upakowania atomów żelaza towarzyszy wyzwolenie pewnej ilości energii, co powoduje ponowne rozżarzenie drutu.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Z kolei ogólnie znane kryształy soli kuchennej (NaCl) zbudowane są z dwóch identycznych sieci regularnych powierzchniowo centrowanych przesuniętych względem siebie o $1/2$ głównej przekątnej sześcianu tworzącego komórkę elementarną (rys. 3).

Przejdźmy teraz do struktury *ABAB...* Jej komórką elementarną jest graniastosłup sześciokątny zbudowany z siedmiu kul tworzących sześciokąt foremny z warstwy *A*, trzech kul z następnej warstwy (*B*) i siedmiu kul z trzeciej warstwy (*A*), co przedstawia rys. 4.

Jest to tzw. sieć heksagonalna gęsto upakowana. W strukturze tej krystalizują metale dwuwartościowe, takie jak beryl, magnez, cynk.

Na zakończenie proponujemy Czytelnikowi zadanie z geometrii, należy mianowicie obliczyć, jaką część przestrzeni wypełniają stykające się jednakowe kule ułożone według schematów *ABAB...* i *ABCABC...*



Rys. 4

Metamorfozy

Dr Marek KORDOS, doc. dr Michał ŚWIĘCKI

Jest oczywiste, że nauka badając otaczającą nas rzeczywistość w istocie nie zajmuje się jej (tj. rzeczywistości) fragmentami, a raczej tylko wybranymi aspektami owych fragmentów. I tak geometria mówi o prostych, kątach itp. wyabstrahowując je z realnie istniejących obiektów, biolog np. o gatunkach (choć przecież niczego takiego realnie nie ma), historyk o formacjach ustrojowych itd.

A fizyk?

Niżej pragniemy przedstawić pewną zmianę zainteresowań fizyków, jaka zaszła w ciągu ostatnich czterech stuleci. Dla zwrócenia uwagi zajmiemy się jednym tylko z dwóch głównych dla fizyki problemów ontologicznych – obiektami fizycznymi, pozostawiając na boku zagadnienie oddziaływań między obiektami.

Ciało fizyczne

Za ciało fizyczne uważa się konkretny przedmiot całkowicie scharakteryzowany przez tzw. wielkości fizyczne jak masa, ładunek elektryczny, pęd, temperatura, kształt. Warto zwrócić uwagę, że jest to obiekt abstrakcyjny, choć długo żądano, by istniał obiekt realny, nośnik owego obiektu abstrakcyjnego. Ciało fizyczne ma własność identyfikacji, co może właściwie dziwić, gdyż wszystkie dotyczące go wielkości mogą w trakcie rozumowania (nośnik-eksperyment) ulegać zmianie. Ciało może więc tracić masę, powiększać ładunek, zmieniać pęd, temperaturę, kształt itd. nie stając się przez to innym ciałem.

Własność identyfikacji doprowadziła szybko do stworzenia wyidealizowanych ciał fizycznych, mianowicie punktów materialnych. Znikła konieczność szukania nośników, a powstał nowy problem: jak „klasyczne” ciała fizyczne zastępować punktami materialnymi bądź ich (skończonymi) układami.

Pojawiły się rozmaite spostrzeżenia wskazujące, że tylko pewne wybrane punkty „klasycznych” ciał fizycznych są istotne dla przebiegu ustalonego zjawiska. I tak np. dla rozstrzygnięcia pytania o ruch planety wokół Słońca istotny jest tylko środek masy planety (i Słońca zresztą też). Warto przy tym zwrócić uwagę, że tu idealizacja jest dość naturalna „na oko”, bo, biorąc pod uwagę rozmiary rozpatrywanych obiektów, planeta i Słońce są lepszymi w tym przypadku przybliżeniami punktu, niż kropka kończąca to zdanie. W przypadku innych zjawisk mechanizm zastępowania może być bardziej złożony, choć idea pozostaje ta sama.

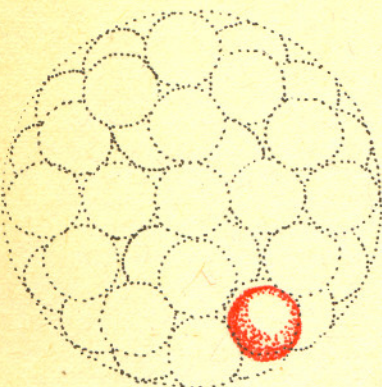
Za kryterium poprawności takiego postępowania uznano bardzo naturalny warunek: jeżeli zastąpimy ciało układem punktów materialnych, rozwiążemy postawiony problem dla owych punktów, następnie złożymy z powrotem wyjściowe ciało, to powinniśmy otrzymać prawidłowe rozwiązanie. Ustalone sposoby zastępowania, sprawdzone na dostatecznie wielu znanych obiektach, uznano za ogólnie poprawne, co jest zwykłym sposobem formułowania praw przyrody.

Uprawianie teorii zachowania się ciał fizycznych (mechaniki) doprowadziło do uznania początkowo niewinnych, a w konsekwencji (dla niektórych) wręcz oburzających własności świata. Zauważono mianowicie, że dysponujemy (w myśl naszych założeń) możliwością jednoznacznego przewidywania wyników eksperymentu (stąd popularne zadania z fizyki w szkole). Fakt ten doprecyzowano ustalając, że warunki początkowe jakiegoś procesu fizycznego wyznaczają go jednoznacznie. No, a wobec tego nasz Wszechświat okazał się kompletnie zdeterminowany, przynajmniej w swej części materialnej, co szczególnie materialistów musiało przyprawić o „gęsią skórę”, bo jeśli oni i ich poglądy to też owo jednoznaczne rozwiązanie.... I tylko zakochani nie uważali się za zdeterminowanych, bo o fizyce nie myśleli.

A ci, co o fizyce myśleli, nie przejmując się faktem zdeterminowania ustalali owego zdeterminowania szczegóły. I tak powstały podstawy mechaniki Galileusza, słynne 3 zasady i prawo grawitacji Newtona, tzw. fenomenologiczna termodynamika Carnota, teoria względności Einsteina i wiele innych.

Teoria kinetyczno-molekularna

Dopóki zastępowano wielkie obiekty niewielką ilością punktów materialnych, wyżej opisana metodologia działała (i działa po dziś dzień) bez zarzutu. Gdy jednak zaczęto stosować rozkład na punkty materialne, zamiast redukcji do punktu materialnego, pojawiły się kłopoty. Prędko bowiem zaczęto (dla uzyskania dokładniejszych rezultatów) zastępować punktami materialnymi „nieskończenie małe” fragmenty ciał fizycznych, do czego zresztą zachęcał jakby (a może właśnie) w tym celu stworzony aparat analizy matematycznej. A wiadano już, że ciała fizyczne składają

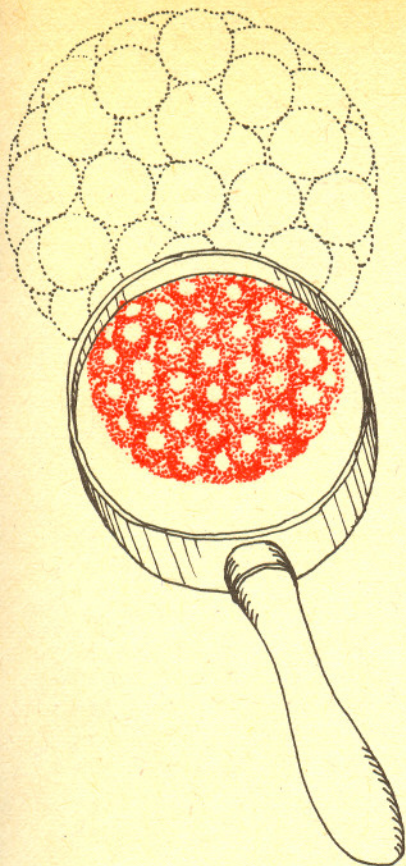


Kącik Czytelniczy

– To te ciągłe zmiany tak nam utrudniają pracę – rzekł Mouson gryząc spinacz do papieru. Przed nim na stole leżały rysunki nowych motylków do tylnej śruby. Wrzuciwszy popsuty spinacz do kosza począł bębnić palcami po stole. – Ach, te zmiany! Czy matematycy zmyślają kiedykolwiek na tyle, by zaoszczędzić nam tego klecenia i eksperymentowania?

Pięć lat metodą liczenia na palcach, kiedy można było to wszystko wyliczyć z góry! A co to kosztowało! Za tę cenę mógłbym wynająć na całe życie trzech zwycięzców konkursu matematycznego z Cambridge... Ale ci znowu potrafiliby tylko rozwijać jakieś piękne i bezużyteczne teoryjki.

Zdobywcy przestworzy, H. G. Wells,
tłum. Iwona Sowińska



się powinny, tak jak ich realne nośniki, z pewnych części, których dzielenie nie jest możliwe z zachowaniem identyfikacji. Ugruntowała się opinia, że ciała mają budowę cząsteczkową i zaczęto myśleć o odpowiedniej do tej opinii fizyce.

Taki np. gaz można zastąpić układem punktów materialnych najnaturalniej przyjmując, że owe punkty to cząsteczki (w sensie chemii) tego gazu. Skroplenie czy zestalenie przenosi ten naturalny model na wszelkie znane wówczas stany skupienia. Spostrzega się przy tym ograniczoną stosowność wypracowanych poprzednio metod: tam my dzieliśmy czy redukowaliśmy do punktów (choćby takich bez nośników, jak środek masy układu Ziemia-Wenus), tutaj podział jest niezależny od nas. Musimy więc rozważyć nie wygodną sytuację, jaką sobie sami stworzyliśmy, a zawiłą, jaką nam stworzyła Przyroda.

W tym miejscu spostrzeżono też, że nasze umiejętności poradzenia sobie z wielką ilością odrębnych obiektów, na jakie rozpadło się ciało fizyczne, są ograniczone. Opisanie wody w kubku byłoby najlepsze, gdyby opisać „po prostu” stan każdej z jej cząsteczek. Byłoby, gdyby było możliwe. I czy na pewno najlepsze? Przecież nie obchodzi nas to co „robią” cząsteczki, a to co „robi” woda.

Powstała nowa koncepcja idealizacji – przestano interesować się „szczegółami”, obiektem zainteresowania stały się wielkości średnie. I właśnie ciśnienie, temperatura zyskały taką interpretację – stały się średnimi wielkościami, wynikiem uśrednienia pewnych stanów czy oddziaływań cząsteczek. Same zaś cząsteczki pozbawiono tym samym szeregu cech właściwych ciałom z nich złożonym. Idealizacja ta okazała się zresztą niesłychanie trafna. Zaobserwowanie chaotycznego ruchu małych cząstek zawieszonych w gazie lub cieczy (ruchy Browna) stało się głównym argumentem za jej przyjęciem. Centralny dla uśredniania rozkład Maxwella-Boltzmannowa wyjaśnia tzw. wszystko i daje w efekcie znane prawa termodynamiki.

Teoria kinetyczno-molekularna zastąpiła jednoznaczne rozwiązania, właściwe dla teorii ciał (czy lepiej punktów) fizycznych, determinizmem statystycznym. Nie wiemy, w myśl jej zasad, jednoznacznie co się wydarzy w jednostkowym doświadczeniu, choć wiemy, co się najprawdopodobniej zdarzy. Margines swobody dla zjawisk został utworzony, choć swoboda to ciasna, bo odpowiednie rozkłady są bardzo strome. Ewentualne wyniki eksperymentu podzieliły się teraz na możliwe i niemożliwe z określonym prawdopodobieństwem. Zniknęły rzeczy pewne, mające realne nośniki – pewne są tylko średnie, a więc przez nas samych „wyprodukowane” teoretycznie wielkości.

Warto przy tym zauważyć, że teoria ta jest bardziej „przyrodnicza” od klasycznej teorii ciał. Struktura ciała nie jest już wytworem badacza, jest mu narzucona. Badacz może tylko „od siebie” dodać taki czy inny sposób uśredniania. W ten sposób pojawiło się podejrzenie, że być może newtonowski determinizm nie jest cechą rzeczywistości, a tylko tendencją wieku XVII do dysponowania jednoznaczными rozwiązaniami.

Prasa donosi

Nie tylko w Polsce i innych krajach Europy Wschodniej mamy specjalne szkoły dla wybitnie uzdolnionych uczniów.

W czasopiśmie *Focus*, wydawanym przez Amerykańskie Towarzystwo Matematyczne (czerwiec 1981) czytamy na początku artykułu wstępnego:

W czasie, gdy raporty o radzieckiej ekspansji w zakresie matematyki szkolnej i badań naukowych zbiegają się z wiadomościami o znaczących cięciach w budżecie federalnym na wydatki na naukę, jeden stan czyni gigantyczne wysiłki, aby odzyskać pole i znów dążyć do doskonałości w kształceniu. Mieszkańcy Północnej Karoliny założyli North Carolina School of Science and Mathematics. Szkoła została założona w 1978 roku na mocy uchwały Senatu Północnej Karoliny, na wniosek gubernatora Jamesa B. Hunta, Jr. Usytuowana jest w Durham i jest szkołą ogólnostanową, stacjonarną, koedukacyjną, dającą znakomite wykształcenie uczniom ostatnich dwóch klas.

Mechanika kwantowa

Metodologia teorii kinetyczno-molekularnej okazała swą siłę nie tylko w termodynamice (łączyąc się zresztą na jej gruncie w całość z mechaniką), lecz także dała się zastosować do elektrodynamiki i w ogóle połączyła w metodologiczną całość wszelkie gałęzie fizyki. Nic przeto dziwnego, że odkryte pod koniec XIX wieku nowe zjawiska (np. rozpad promieniotwórczy) bez wahania zaczęto opisywać zgodnie ze strukturą tej teorii. Odkrycie doświadczalne cząstek w zjawiskach rozpadu atomowego, oraz skwantowania w zjawiskach emisji światła (Balmer i widmo wodoru) kazało i nowej fizyce założyć, że to, co obserwujemy, to statystyczne efekty pochodzące od „ziarnistej” w najdrobniejszych nawet szczegółach rzeczywistości.

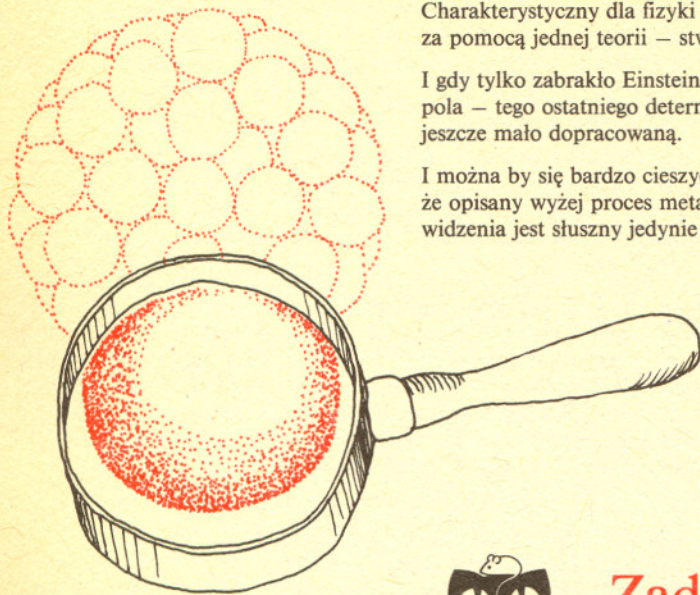
Tyle, że owe „ziarna” nie dawały się już zapożyczyć od żadnej innej dyscypliny. Były od swego zaistnienia wytworem fizyków i jako takie mogły być przez nich wyposażane w dowolne w gruncie rzeczy cechy. Musiały zatem zostać ukształtowane tak, by do całości teorii jak najlepiej przystawały. I wobec tego błyskawicznie odziedziczyły statystyczny charakter swojej nadstruktury. Bo istotnie, jeśli badamy jedynie statystyczne efekty, to czemu zabraniać statystycznego charakteru owym ziarnom efekty produkującym?

Model atomu Bohra nie zawiera zatem niczego, co mogłoby kazać elektronom skorzystać z tego, a nie innego przejścia między poziomami energetycznymi czyniąc z owych przejść losową grę.

W ten sposób uzyskano najbardziej jednorodną i konsekwentną teorię fizyki – mechanikę kwantową. Teorię statystycznych zachowań statystycznie określonych ziaren realnego świata – cząstek elementarnych.

Wyzbyto się zatem resztek determinizmu. I w mechanice kwantowej i w teorii kinetyczno-molekularnej nie ma efektów pewnych – są tylko mniej lub bardziej prawdopodobne. Są oczywiście i kategoryczne zakazy (zachowanie pędu, energii, ładunku choćby). Tyle że w mechanice kwantowej nie występuje już „podskórny” determinizm, jaki wykazywały „kinetyczno-molekularne” cząsteczki. Teraz wszelkie wielkości i na każdym poziomie są statystyczne. Pozorny determinizm zjawisk makroskopowych bierze się wyłącznie z ostrych strumieni rozkładów odnośnych prawdopodobieństw.

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,74.$$



No, a co z pominiętymi na wstępie oddziaływaniami? Już w XIX wieku uważano za konkurencyjną gałąź fizyki połową teorię oddziaływań. Zajmowano się więc przestrzenią mającą zdolność oddziaływania i dawało to niezłe efekty choćby w elektrodynamice klasycznej. W tym kierunku też szły prace nad ogólną teorią względności. Próbowano wreszcie (Einstein) stworzyć na gruncie teorii pola alternatywny opis tzw. nowej fizyki.

Charakterystyczny dla fizyki naszego stulecia uniwersalizm – dążność do opisu wszelkich zjawisk za pomocą jednej teorii – stworzył tu sytuację wręcz konfliktową: musiało się okazać kto ma rację.

I gdy tylko zabrakło Einsteina, szala została przeważona. Kwantowa teoria pola uczyniła i z pola – tego ostatniego deterministycznego obiektu – strukturę całkowicie statystyczną, choć jeszcze mało dopracowaną.

I można by się bardzo cieszyć z niezwyklej jednorodności fizycznego obrazu świata, gdyby nie lęk, że opisany wyżej proces metamorfoz metodologicznych zawężający opis zjawisk do jednego punktu widzenia jest słuszny jedynie przy założeniu, iż punkt ów został wybrany właściwie.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 322. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez 17 i taką, że wszystkie liczby powstające przez cykliczne przestawienie jej cyfr są podzielne przez 17.

Przez cykliczne przestawianie cyfr rozumiemy zamianę taką jak 12345-51234-45123 itd.

Rozwiązanie na str. 10.

M 323. Wykazać, że przy każdym naturalnym n liczba $(3-2\sqrt{2})^n + (3+2\sqrt{2})^n$ jest całkowita i niepodzielna przez 5.

Wskazówka. Zauważyć, że liczby $x_1 = 3-2\sqrt{2}$ i $x_2 = 3+2\sqrt{2}$ są pierwiastkami równania

$x^2 - 6x + 1$ i wyprowadzić wzór rekurencyjny na $a_n = x_1^n + x_2^n$.

Rozwiązanie na str. 11.

M 324. Wykazać, że jeżeli $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2n}$ jest $2n$ -kątem wypukłym wpisanym w okrąg o środku O i promieniu 1, to wektor $w = (\vec{OA}_1 + \vec{OA}_3 + \dots + \vec{OA}_{2n-1}) - (\vec{OA}_2 + \vec{OA}_4 + \dots + \vec{OA}_{2n})$ ma długość nie większą niż 2.

Rozwiązanie na str. 8.

Redaguje mgr Tomasz Tratkiewicz

F 128. Do wody wstawiono pionowo dwie rurki kapilarne.

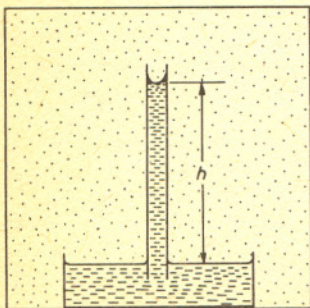
W jednej z nich ciecz wzniosła się na wysokość h , w drugiej na H ($H > h$).

Jaką wysokość osiągnie menisk w rurce węższej, po wetknięciu jej do wnętrza szerszej?

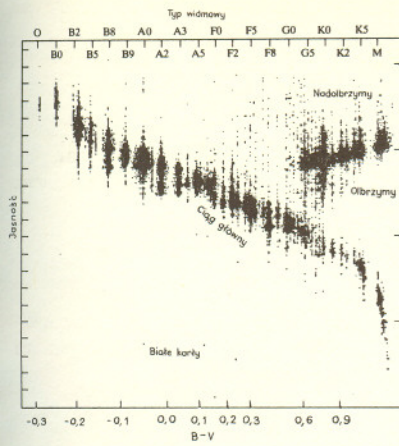
Rozwiązanie na str. 12.

F 129. W pomieszczeniu opróżnionym z powietrza znajduje się naczynie z cieczą i rurką kapilarną (patrz rysunek). Układ utrzymywany jest w stałej temperaturze. Nad powierzchniami cieczy w naczyniu i kapilarze znajduje się para nasycona, której prężność wyznaczona jest przez temperaturę układu. Jednakże ciśnienie panujące w pomieszczeniu na wysokości h jest mniejsze od prężności pary nad powierzchnią cieczy w naczyniu o $\rho_p gh$, gdzie ρ_p – średnia gęstość pary. Pod wpływem różnicy ciśnień odbywać się musi przepływ pary, czemu towarzyszy parowanie cieczy w rurce włoskowej i skraplanie pary w naczyniu (czyli występuje również ciągły przepływ cieczy). Przepływy te w idealnym przypadku mogą być źródłem pracy mechanicznej. Czyżby *perpetuum mobile*?

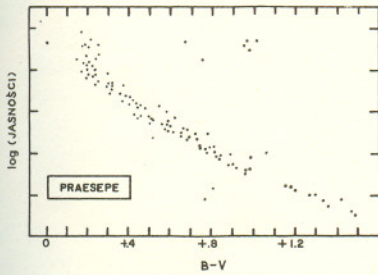
Rozwiązanie na str. 9.



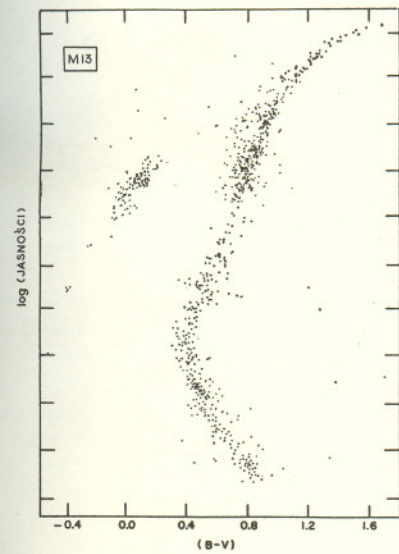
Patrz w niebo



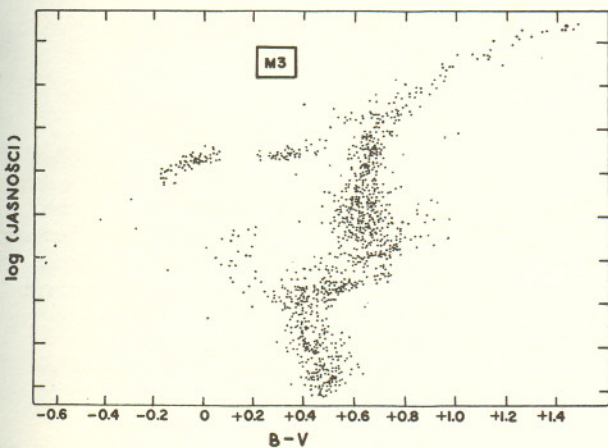
Rys. 1



Rys. 2



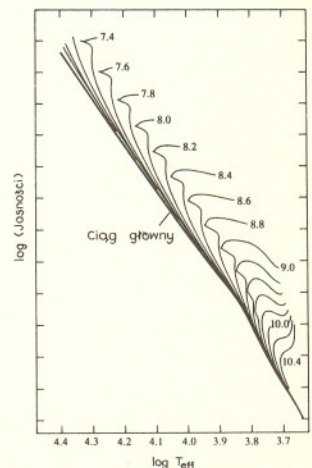
Rys. 3



Przybliżona zależność między kolorem i temperaturą gwiazd ciągu głównego:

B-V	log T (F)
-0,3	4,6
-0,2	4,4
-0,1	4,2
0,0	4,0
0,2	3,87
0,4	3,82
0,7	3,77
1,0	3,75

Rys. 4



Rys. 5

Trzy lata temu (stali Czytelnicy *Delty* będą mieli więcej satysfakcji czytając ten artykuł) Michał Czerny wspominał o pewnej prostej i ciekawej metodzie wyznaczania wieku gwiazd należących do gromad. Chciałbym dzisiaj rozszerzyć nieco ten temat wzbogacając go materiałem ilustracyjnym. Spójrzmy na rysunki obok. Wszystkie przedstawiają diagramy H–R. Pierwszy przedstawia wszystkie gwiazdy o znanych odległościach. Na osi poziomej podany jest kolor gwiazd, B–V, o którym pisaliśmy w poprzednim „Patrz w niebo”. Każdej gwiazdzie odpowiada jeden punkt. To, że gwiazdy układają się w kształty pionowych paszków spowodowane jest niedoskonałością obserwacji. Jeśli jednak rozbijemy rysunek pierwszy na wiele i na kolejnych umieścimy jedynie gwiazdy należące do poszczególnych gromad, to zauważymy istotne różnice. Przyjrzyjmy się rysunkom 2, 3 i 4. Rysunek 2 jest diagramem H–R dla gwiazd należących do czwartej gromady *Praesepe* (U1), ledwo widocznej gołym okiem w gwiazdozbiornie Raka. Rys. 3 przedstawia gromadę kulistą M 13 w Herkulesie, natomiast rys. 4 przedstawia podobną gromadę M 3 w konstelacji Psów Gończych.

Uważny Czytelnik zauważył zapewne, że rysunki ułożone są tak, że położenia gwiazd coraz bardziej odchylają się od ciągu głównego. Od czego może zależeć wielkość odchylenia gwiazd od ciągu głównego? Bardzo proste rozważania (patrz artykuł T. Kwasta w *Delcie* 12/1982) prowadzą do wniosku, że gwiazdy masywniejsze ewoluują w szybszym tempie, szybciej wykorzystując swoje zasoby energetyczne. Gwiazdy te układają się w lewej górnej części diagramu H–R, która ulega największym zmianom na kolejnych rysunkach. A więc mówiąc nieco nieprecyzyjnie: im bardziej masywna gwiazda odeszła od ciągu głównego, tym jest starsza. Ponieważ zakładamy, że wszystkie gwiazdy gromady są równie stare (młode), więc powyższy wniosek możemy formułować następująco: w miarę starzenia się gromady gwiazdy o coraz mniejszych masach zaczynają odchodzić od ciągu głównego. A więc wiek (M 3) > wiek (M 13) ≫ wiek (*Praesepe*). Aby wyskalować jakoś te rysunki, musimy odwołać się do dobrze ugruntowanej teorii ewolucji gwiazd. Rysunek 5 przedstawia teoretyczny diagram H–R (teoretycy wolą rysować na osi poziomej temperaturę powierzchniową gwiazdy niż jej kolor, który jest parametrem obserwacyjnym; przeliczenie koloru na temperaturę podane jest w tabelce). Na diagramie tym połączono liniami ciągłymi pozycje gwiazd o tym samym wieku. Wiek ten zapisano w skali logarytmicznej, a więc np. 8 odpowiada 100 milionom lat. Korzystając z tych danych łatwo można już wyznaczyć wiek gromad z rysunków 2, 3 i 4, a więc: wiek *Praesepe* ≈ 400 mln lat, M 13 ≈ 10 mld lat, M 3 ≈ 13 mld lat.

mgr Tomasz Chlebowski