



## SPIS TREŚCI

NUMERU 3(111)

Narodziny teorii kwantów (II) <i>prof. dr Iwo Białynicki-Birula</i>	str. 1
Zadania	str. 5
Patrz w niebo	str. 6
Kwantowa planeta <i>Ernest Paszycki</i>	str. 7
Sto lat dla ludolfiny <i>doc. dr Maciej Skwarczyński</i>	str. 10
O pewnym problemie z elementarnej teorii liczb <i>Mariusz Skalba</i>	str. 16
Klub 44	str. 17

**W następnym numerze:**  
Wiek XIX

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:  
dr Bogdan Cichocki  
dr hab. Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
prof. dr Kazimierz Goebel  
doc. dr Tomasz Hofmökł  
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
doc. dr Tadeusz Iwiński  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
prof. dr Leon Jeśmanowicz  
prof. dr Marek Kuczma  
mgr Andrzej Mąkowski  
prof. dr Bogdan Paczyński  
dr Zbigniew Płochocki  
prof. dr Sławomir Ruciński  
prof. dr Konrad Rudnicki  
doc. dr Jerzy Sawicki  
prof. dr Zbigniew Semański  
prof. dr Grzegorz SitarSKI  
doc. dr Kazimierz Stępień

prof. dr Mieczysław Subotowicz  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Stefan Turnau  
doc. dr Aniela Wołska  
doc. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Zakowski —  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
mgr Tomasz Chlebowski  
mgr Maciej Jędrzejczak  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
dr inż. arch. Jacek Mazur  
dr Michał Szurek  
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
Nakład 50 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 3243/82 M-10

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—  
Termin przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:

— do dnia 25 listopada na I kwartał, I półrocze oraz cały rok 1983,  
— do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku 1983.

1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:

— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach,  
w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę  
w tych oddziałach,  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW  
„Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych  
i u doręczycieli.

2. dla osób fizycznych — indywidualnych:

— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW  
„Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”  
opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych przy użyciu „blankietu wpłaty” na rachunek  
bankowy: Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw w Warszawie, ul. Towarowa 28, nr konta  
NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11.

3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala  
Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział  
w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest  
droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnych i o 100% dla  
zlecających instytucji i zakładów pracy.

### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać  
„DELTA”:

— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwałe 6,

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie  
Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik  
Deutschland,

— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Comissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

nr indeksu 35723/35550

# Narodziny teorii kwantów (II)

Prof. dr Iwo BIAŁYNICKI-BIRULA, członek korespondent PAN

Za początek drugiego okresu w rozwoju teorii kwantów przyjęto uważać rok 1913, w którym ukazała się obszerna, złożona z trzech części praca Nielsa Bohra zawierająca nową, kwantową teorię budowy atomów i molekuł. Już wcześniej ukazało się było kilka prac, w których próbowano wprowadzić kwant działania Plancka do teorii atomu. Były to próby oparte na koncepcji drgań harmonicznym elektronów w atomie i wykorzystujące z reguły model atomu Thomsona. Według Thomsona atom przypomina płacek z rodzynekami; ciasto to dodatni ładunek, zaś rodzynekki obrazują ujemnie naładowane elektrony. Ponieważ siła działająca na ładunek ujemny zanurzony w jednorodnie naładowanej dodatnio kuli jest proporcjonalna do odległości elektronu od środka kuli, będzie on wykonywał drgania harmoniczne. Zgodnie z elektrodynamiką klasyczną tylko harmoniczny ruch ładunku może być źródłem monochromatycznego promieniowania, które obserwuje się w postaci linii widmowych.

Bohr przyjął za punkt wyjścia nowy *planetarny* model atomu, zaproponowany dwa lata wcześniej przez Rutherforda, i powiązał ten model z koncepcjami Plancka i Einsteina. W okresie, w którym powstawała praca Bohra, dane doświadczalne dotyczące liniowych widm pierwiastków były stosunkowo bogate i dokładność, z jaką wyznaczano długości fal linii widmowych, była duża. Błędy doświadczalne w niektórych przypadkach były równe zaledwie jednej stutysięcznej części. Wyniki doświadczeń nakładały więc silne ograniczenia na teorię. Pewnym ułatwieniem dla fizyka pragnącego odgadnąć prawa rządzące promieniowaniem światła przez atomy mogła być znana wówczas empiryczna zasada kombinacyjna Rydberga-Ritza, będąca czymś w rodzaju rozszerzenia wzoru Balmera, obowiązującego dla wodoru, na widma innych pierwiastków. Według tej zasady częstości linii widmowych dają się przedstawić jako różnice tak zwanych termów widmowych:

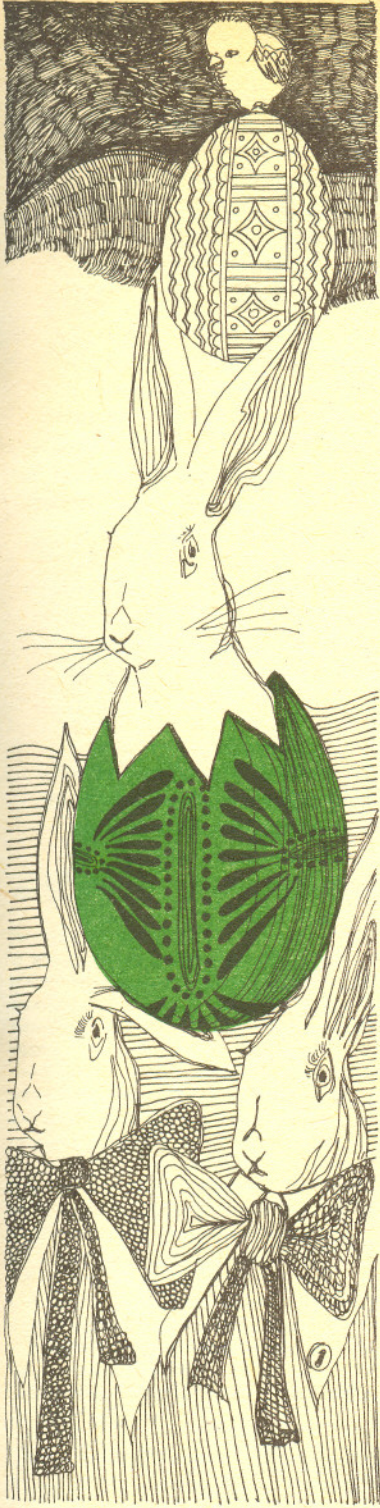
$$\nu = \frac{K}{(n + \alpha_r)^2} - \frac{K}{(m + \alpha_s)^2},$$

gdzie  $K$  jest stałą uniwersalną (stałą Rydberga),  $n$  i  $m$  są liczbami naturalnymi, zaś  $\alpha_r, \alpha_s$  — stałymi zależnymi tylko od pierwiastka. Wzór Balmera i zasada kombinacyjna odegrały pierwszoplanową rolę przy powstaniu teorii Bohra.

Planetarny model atomu, rozważany na gruncie klasycznej mechaniki i elektrodynamiki — jak na to wskazuje Bohr we wstępie do swojej pracy — nie wystarcza do opisu budowy rzeczywistych atomów. Nie ma bowiem w tym modelu żadnej wielkości, która mogłaby posłużyć do określenia rozmiarów atomu (z ładunków i mas nie można zbudować wielkości o wymiarze długości). Potrzebna jest do tego jeszcze jedna wielkość wymiarowa, za którą Bohr przyjął stałą Plancka. Podstawowe wyniki pracy Bohra opiszemy jego własnymi słowami przytaczając tłumaczenie fragmentu zakończenia historycznej pracy z *Philosophical Magazine*.

„W pracy tej wprowadzono następujące podstawowe założenia:

1. Energia promienista nie jest wysyłana (lub pochłaniana) w sposób ciągły, jak to przyjmuje się w zwykłej elektrodynamice, ale tylko podczas przechodzenia układu między różnymi „stacjonarnymi” stanami.
2. Dynamiczna równowaga układu w stanach stacjonarnych rządzona jest zwykłymi prawami mechaniki, podczas gdy prawa te nie obowiązują dla przejść układu między różnymi stanami stacjonarnymi.
3. Promieniowanie wysłane podczas przechodzenia układu między dwoma stanami stacjonarnymi jest jednorodne (monochromatyczne — przyp. I.B.B.) i związek między częstością  $\nu$  i całkowitą wypromieniowaną energią  $E$  jest dany wzorem  $E = h\nu$ , gdzie  $h$  jest stałą Plancka.
4. Różne stany stacjonarne prostego układu składającego się z elektronu krążącego wokół dodatniego jądra są wyznaczone przez warunek, że stosunek całkowitej energii wypromieniowanej przy tworzeniu się tej konfiguracji (energii wiązania — przyp. I.B.B.) do częstości obiegu elektronu jest całkowitą wielokrotnością  $h/2$ . Przy założeniu, że orbita elektronu jest kołowa, postulat ten jest równoważny warunkowi, iż moment pędu elektronu wokół jądra jest równy całkowitej wielokrotności  $h/2\pi$ .
5. „Trwały” stan (stan podstawowy — przyp. I.B.B.) każdego układu atomowego, to znaczy stan, dla którego energia wypromieniowana jest największa, jest wyznaczony przez warunek, iż moment pędu każdego elektronu wokół środka jego orbity jest równy  $h/2\pi$ .



**Rozwiązanie zadania M 327.**  
Oznaczmy przez  $a$  długość boku kwadratu. Wówczas suma pól całych półkoli wynosi  
 $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \pi a^2$ . Aby otrzymać pole „zielonej” figury, należy od tego odjąć pole koła bez pola kwadratu, czyli  $\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - a^2 =$   
 $= \frac{1}{2} \pi a^2 - a^2$ . Pole „zielone” jest zatem równe  
 $\frac{1}{2} \pi a^2 - \left(\frac{1}{2} \pi a^2 - a^2\right) = a^2$ .

Pokazano, że przy tych założeniach z pomocą modelu Rutherforda można wyjaśnić prawa Balmera i Rydberga wiążące częstości różnych linii w widmach liniowych”.

Założenie Bohra o istnieniu stanów stacjonarnych i o tym, że atom wysyła promieniowanie tylko przy przejściach między dwoma takimi stanami, jest bezpośrednim odzwierciedleniem zasady kombinacyjnej. Stanowi stacjonarnemu odpowiada określony term widmowy, zaś przejściu promienistemu — *dwa takie termy*. Mogłoby się wydawać nam obecnie, że zasada kombinacyjna wręcz narzuca taką interpretację, ale właśnie to genialnie proste spostrzeżenie Bohra stanowi o istotnej różnicy między jego teorią a teoriami wcześniejszymi, w których starano się łączyć promieniowanie i jego częstość z *jednym* tylko, drgającym i jednocześnie promieniującym stanem atomu.

Podstawowe założenia teorii Bohra, jak już podkreślaliśmy poprzednio, były niewątpliwie dopasowane do wzoru Balmera, ale za duży sukces tej teorii uznano wynikającą z niej wartość stałej Rydberga, bardzo bliską wartości otrzymywanej z pomiarów długości fal linii widmowych. Drugim, chyba jeszcze większym sukcesem było wyjaśnienie przez Bohra na gruncie swej teorii pochodzenia serii widmowej odkrytej pod koniec XIX wieku przez amerykańskiego astronoma Pickeringa w promieniowaniu gwiazdy  $\zeta$  Puppis. Długości fal tej serii można było opisać wzorem zbliżonym bardzo do wzoru Balmera i dlatego przypisywano linie Pickeringa wodorowi znajdującemu się w wysokiej temperaturze. Według Bohra źródłem tego promieniowania były zjonizowane atomy helu. Przeprowadzone w roku 1914 doświadczenia laboratoryjne nad widmem helu otrzymanym metodą iskrowych wyładowań w gazie potwierdziły tę tezę. Dodatkowym pięknym argumentem za nową teorią było wykazanie przez Bohra, że drobne różnice między danymi doświadczalnymi a teorią znikają, gdy uwzględnimy ruch jądra wokół środka masy, to znaczy użyć we wzorach tzw. zredukowanej masy elektronu.

Dzięki swoim niewątpliwym sukcesom teoria Bohra szybko zyskała szerokie uznanie, choć wielu fizyków uważało — jak wiemy dziś zupełnie słusznie — że jest to teoria nazbyt fragmentaryczna i zawierająca zbyt wiele wzajemnie niepowiązanych założeń na to, iżby mogła stanowić pełną teorię wszystkich zjawisk atomowych. Z braku jednak nowych idei następne dziesięciolecie upłynęło pod znakiem starszej teorii kwantów, jak dziś nazywamy rozbudowaną i ulepszoną nieco teorię, która powstała na gruncie postulatów Bohra.

Rozbudowa teorii Bohra polegała przede wszystkim na podaniu ogólnej postaci warunków kwantowych, słusznej dla szerokiej klasy układów atomowych, a nie tylko dla atomu wodoru.

Warunki takie podał Arnold Sommerfeld, a także niezależnie od niego W. Wilson i J. Ishiwara. Warunki te, zwane obecnie warunkami Bohra-Sommerfelda, można nałożyć na ruch dowolnego układu zachowawczego (tzn. układu, dla którego obowiązuje zasada zachowania energii), odbywający się w ograniczonym obszarze przestrzeni, tylko wtedy, gdy równanie Hamiltona-Jacobiego daje się rozwiązać metodą rozdzielania zmiennych. Z grubsza mówiąc warunek ten oznacza, że ruch układu można uważać za złożenie niezależnych ruchów, z których każdy scharakteryzowany jest współrzędną  $q_k$  i pędem  $p_k$ .

Warunki Sommerfelda mają postać:

$$\oint p_k dq_k = n_k h,$$

gdzie całkowanie rozciąga się na taki obszar zmiennej  $q_k$ , któremu odpowiada pełny cykl ruchu w danej zmiennej.

Warunki Sommerfelda były uogólnieniem zarówno warunków Bohra, jak i wcześniejszych jeszcze rozważań Plancka na temat kwantowej teorii jednowymiarowego oscylatora harmonicznego.

Planck zauważył był bowiem, że prawidłowy wzór na kwantowe poziomy energii oscylatora harmonicznego można otrzymać żądając, by pole elipsy będącej obrazem ruchu oscylatora w przestrzeni fazowej było wielokrotnością stałej  $h$

$$\oint_W p dq = nh, \text{ gdzie } W \text{ — w\u0142o\u015bnie pole elipsy ruchu.}$$

Ca\u0142ka ta, po podstawieniu do niej wyrażenia na p\u0119d oscylatora harmonicznego przedstawia w\u0142o\u015bnie pole elipsy ruchu

$$2 \int_{-q_{\max}}^{q_{\max}} p dq = 4 \int_0^{q_{\max}} dq \sqrt{2m \left( E - \frac{m\omega^2 q^2}{2} \right)} = \frac{2\pi E}{\omega}.$$

Przyr\u00f3wnuj\u0105c t\u0119 wielko\u015b\u0107 do  $nh$  otrzymujemy wz\u00f3r Plancka:

$$E = nh\nu.$$



### Rozwi\u0105zanie zadania F 131.

Wykre\u015blaj\u0105c krzywe dyspersji (po\u0142o\u017cenie linii widmowej w zale\u017cnosci od d\u0142ugo\u015bci fali) na podstawie obu widm lub cho\u010by pobie\u017anie analizuj\u0105c rozmieszczenie linii mo\u017cna przekona\u0107 si\u0119, \u017ce dla widma I linie roz\u0142o\u017cone s\u0105 r\u00f3wnomiernie, natomiast dla II wyst\u0119puje zag\u0119szczenie w obszarze d\u0142ugofalowym. Pierwsze z widm pochodzi wi\u0119c ze spektrografu siatkowego, a drugie z przyr\u0105dka pryzmatycznego. Dla siatki dyfrakcyjnej po\u0142o\u017cenia kolejnych maksimum wyra\u017ca wz\u00f3r

$$d \sin \theta = m \lambda,$$

gdzie  $d$  — sta\u0142a siatki,  
 $\lambda$  — d\u0142ugo\u015b\u0107 fali,  
 $m$  — rz\u0105d widma,  
 $\theta$  — k\u0105t odpowiadaj\u0105cy maksimum.

Ograniczaj\u0105c si\u0119 do ma\u0142ych k\u0105t\u00f3w ugi\u0119cia i maj\u0105c na uwadze, \u017ce  $x = h \operatorname{tg} \theta \approx h \theta$  ( $h$  — odlego\u015b\u0107 siatki od ekranu) otrzymuje si\u0119

$$x = m \frac{\lambda h}{d}.$$

Wynika st\u0105d, \u017ce  $\Delta x$  jest proporcjonalne do  $\Delta \lambda$ .

Dla pryzmatu, przy biegu promieni zbli\u017conym do symetrycznego, obowi\u0105zuje zale\u017cn\u00f3\u015b\u0107

$$(*) \quad n = \frac{\sin \frac{\varepsilon + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

gdzie  $\varepsilon$  — k\u0105t najmniejszego odchylenia,  
 $n$  — w\u015p\u00f3\u0142czynnik za\u0142amania materia\u0142u, z kt\u00f3rego wykonany jest pryzmat,  
 $\varphi$  — k\u0105t \u0142ami\u0105cy pryzmatu.

Wielko\u015bci  $\varepsilon$  i  $n$  zale\u017c\u0105 od d\u0142ugo\u015bci fali.

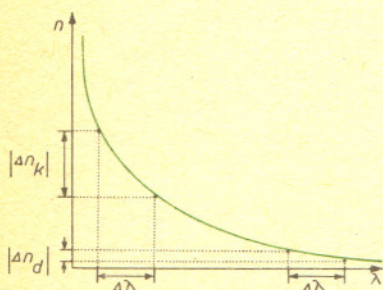
R\u00f3\u017cniczkuj\u0105c wzgl\u0119dem d\u0142ugo\u015bci fali otrzymujemy

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{\cos \frac{\varepsilon + \varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \frac{d\varepsilon}{d\lambda}.$$

Uwzgl\u0119dniaj\u0105c (\*) i rozwi\u0105zaj\u0105c sko\u0144czone r\u00f3\u017cnice mamy

$$\Delta x \sim \Delta \varepsilon \approx \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - \bar{n}^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \Delta n;$$

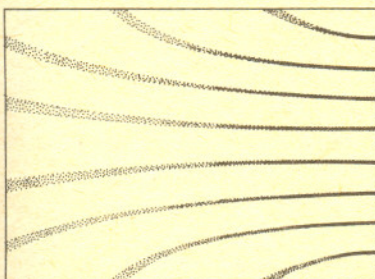
gdzie  $\bar{n}$  — \u015bredni w\u015p\u00f3\u0142czynnik za\u0142amania dla zakresu optycznego. Dla pryzmat\u00f3w u\u017cywanych w spektroskopii typowy wykres  $n = f(\lambda)$  przedstawia rysunek, z kt\u00f3rego wynika zag\u0119szczenie linii w zakresie d\u0142ugofalowym.





#### Rozwiązanie zadania F 132.

W płaszczyźnie ogniskowej lunetki spektroskopu powstają wielokrotne obrazy szczeliny (proste czy odwrócone ?); każdy odpowiada innej długości fali, a ich zbiór jest widmem analizowanego światła. Natężenie linii wzrasta ze wzrostem oświetlenia szczeliny odpowiednią długością fali. Gdyby podczas eksperymentu interferencyjnego użyto światła monochromatycznego, wtedy szczelina byłaby w pewnych miejscach mocno oświetlona (jasne prążki), w innych wcale (ciemne prążki). „Linia widmowa” będzie obrazem prążków i składać się będzie z leżących na przemian jasnych i ciemnych obszarów. Odległość ciemnych obszarów, jak wynika z warunków interferencji destruktywnej, musi wzrastać wraz z długością fali użytego światła. W przypadku światła białego obrazy szczelin zlewają się tworząc widmo ciągłe, na tle którego występują ciemne, zakrzywione linie (patrz rysunek).



czernień fiolet

Warto zastanowić się nad następującymi pytaniami:

- Jakie zmiany w obrazie zauważylibyśmy, gdyby soczewkę zastąpiono inną — o większej zdolności skupiającej?
- Co pojawiłoby się w polu widzenia po zamianie szczeliny na siatkę dyfrakcyjną?

Z kolei warunek Bohra otrzymujemy rozważając ruch elektronu po orbicie kołowej w atomie opisany przy pomocy zmiennej kątowej  $\varphi$ . Pędem stowarzyszonym z kątem  $\varphi$  jest moment pędu  $mrv$ . Z warunku kwantowego

$$\int_0^{2\pi} mrv d\varphi = nh,$$

po wyrażeniu  $r$  i  $v$  w ruchu jednostajnym po kole pod wpływem siły kulombowskiej otrzymujemy wzór Bohra na poziomy energetyczne atomu jednoelektronowego

$$E_n = \frac{2\pi^2 me^4}{h^2 n^2}.$$

Sommerfeld nie tylko podał ogólne warunki kwantowe, lecz także zastosował je do wyznaczenia poziomów energetycznych atomu wodoru z uwzględnieniem dynamiki relatywistycznej. Był to bodajże najbardziej efektywny wynik otrzymany w starszej teorii kwantów. Wzór na poziomy energetyczne wodoropodobnego atomu o jednym elektronie i ładunku jądra  $Ze$ , otrzymany przez Sommerfelda, zawierał tym razem dwie liczby kwantowe, gdyż ruchu w relatywistycznym problemie Keplera nie można opisać przy pomocy jednej tylko zmiennej. We wzorze tym pojawiła się też po raz pierwszy stała subtelnej struktury  $\alpha = 2\pi e^2/hc$ , która odtąd będzie zawsze symbolem relatywistycznej i kwantowej teorii zjawisk elektromagnetycznych. Ze względu na to, iż stała subtelnej struktury jest mała (równa około  $1/137$ ), wzór Sommerfelda

$$E_{nk} = mc^2 \{ [1 + \alpha^2 Z^2 (n - k + \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2})^{-2}]^{-1/2} - 1 \},$$

po rozwinięciu na szereg względem  $\alpha^2$ , dawał jedynie niewielkie poprawki do wzoru Bohra:

$$E_{nk} = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2 n^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} \left( \frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right],$$

a przez to tylko niewielkie poprawki do częstości linii widmowych. Opisywane tym wzorem niewielkie, proporcjonalne do  $\alpha^2$ , rozszczepienie linii widmowych wodoru zgadzało się doskonale z odkrytą jeszcze w 1891 roku przez A. A. Michelsona strukturą linii widmowych serii Balmera. Rozszczepienie to nazywano subtelnym i stąd nazwa: stała subtelnej struktury.

Mimo sukcesów w opisie widm atomów wodoropodobnych, starsza teoria kwantów ciągle pozostawiała wiele do życzenia pod względem zarówno ogólności sformułowania, jak i też możliwości opisu rozwoju układów w czasie. Warunki kwantowe można było stosować tylko do układów dających się opisać przez rozdzielone zmienne. Wiadomo jednak było, że rzeczywiste układy fizyczne nie spełniają tego warunku, gdyż wzajemne oddziaływanie (na przykład oddziaływanie międzycząsteczkowe w gazie) czyni ruch zbyt nieregularnym. Próbę obejścia tej trudności stanowiła zasada adiabaticzna sformułowana przez Bohra i Ehrenfesta, której zadaniem było otrzymywanie związków między poziomami energetycznymi układów bardziej skomplikowanych i układów prostych, pod warunkiem, że układy złożone można otrzymać z prostych przez powolne (adiabaticzne) odkształcenia (zmiany parametrów). Zastosowania zasady adiabaticznej okazały się jednak bardzo ograniczone.

Starsza teoria kwantów nie opisywała także w ogóle rozwoju układu w czasie, polegającego w myśl koncepcji Bohra na owych zagadkowych przeskokach między różnymi stanami dozwolonymi przez warunki kwantowe. Brak było jakichkolwiek informacji na temat mechanizmu tych przeskoków, a jedyne przewidywania co do rodzajów i częstotliwości tych przeskoków można było otrzymać przy pomocy tzw. zasady odpowiedniości sformułowanej przez Bohra.

Trudno jest dziś podać jednoznaczne sformułowanie tej zasady, gdyż sam Bohr zmieniał swoje poglądy na jej temat. W najbardziej ograniczonej postaci głosiła ona, że wszędzie tam, gdzie można pominąć stałą Plancka i związany z nią skokowy, ziarnisty charakter przemian atomowych (na przykład, gdy liczby kwantowe są tak duże, że ich zmiana o jeden jest niedostrzegalna), prawa kwantowe winny przechodzić w prawa fizyki klasycznej. Dzięki swojej genialnej intuicji Bohr potrafił jednak wykorzystać zasadę odpowiedniości w dużo większym zakresie, wyprowadzając z niej wnioski słuszne także dla niewielkich liczb kwantowych. W ślad za Bohrem poszli inni fizycy. Zasada odpowiedniości stała się dla nich drogowskazem pozwalającym wyjść z labiryntu starszej teorii kwantów na otwartą przestrzeń mechaniki kwantowej. Sommerfeld nazwał zasadę odpowiedniości magiczną różdżką, mając chyba na myśli zarówno jej trochę mglistą treść, jak i ogromną pomoc w dociekaniach na temat poprawnej teorii, jaką dawała wtajemniczonym.

Zasada odpowiedniości wydatnie ułatwiła odkrycie w latach 1925—1926 mechaniki macierzowej, która okazała się później być jedną z równoważnych form mechaniki kwantowej.

Odkrycie to było dziełem przede wszystkim Maxa Borna, Paula Diraca, Wernera Heisenberga i Pascuala Jordana.

Pierwsze zarysy mechaniki macierzowej odkrył Heisenberg latem 1925 roku. Jego artykuł na ten temat zawierał podstawowe dla mechaniki macierzowej przyporządkowanie wielkościom fizycznym układów liczb, numerowanych przez dwie liczby całkowite, podlegających pewnym dość dziwnym operacjom. W układach liczb Born i Jordan rozpoznali składowe macierzy, zaś dziwaczne operacje okazały się być po prostu mnożeniem macierzowym. W pracy Borna i Jordana, w niezależnej pracy Diraca oraz we wspólnej pracy Borna, Heisenberga i Jordana sformułowane zostały ogólne podstawy mechaniki macierzowej. W odróżnieniu od starszej teorii kwantów była to teoria wewnętrznie spójna, o wyraźnie sformułowanych logicznych podstawach. Udało się to osiągnąć przez całkowite wyeliminowanie takich klasycznych pojęć, jak orbity elektronów, okresy ich obiegu wokół jądra itp.

Pełna eliminacja wszelkich pojęć używanych dotąd w fizyce atomowej, których nie można powiązać bezpośrednio z danymi doświadczalnymi, stanowiła podstawę programu naukowego i filozoficznego Heisenberga. W liście do Wolfganga Pauliego z czerwca 1925 roku napisał on o nowej teorii: „Podstawowa zasada brzmi: Przy obliczaniu jakichkolwiek wielkości takich jak energie, częstotliwości itp. należy korzystać wyłącznie ze związków zawierających wielkości w zasadzie obserwowalne”.

Mechanika macierzowa była logicznie zwarta i prosta, ale rachunkowo bardzo skomplikowana. Wynikające z niej związki między nieskończonymi macierzami nie poddawały się łatwo dalszej obróbce. Co prawda Pauliemu i Diracowi udało się rozwiązać problem wodoru i otrzymać wzór Balmera-Bohra, ale trudności rachunkowe zwolniły wyraźnie rozwój zastosowań mechaniki macierzowej. Pomoc przyszła z nieoczekiwanej strony. Przyniosła ją odkryta w 1926 roku przez Erwina Schrödingera mechanika falowa.

Punktem wyjścia teorii Schrödingera była idea „fal materii”, której autorem był Louis-Victor de Broglie. W swojej pracy doktorskiej zakończonej w 1924 roku de Broglie przyjął jako podstawowe założenie istnienie pewnego periodycznego zjawiska związanego z ruchem każdej porcji energii. Było to jakby odwrócenie koncepcji fotonów, które są porcjami związanymi z rzeczywistymi falami elektromagnetycznymi. Nie wiedząc jaką interpretację fizyczną należy przypisać owym falom, de Broglie proponował, aby traktować je na razie jako pewną formalną konstrukcję matematyczną. Nawet nazwa „fale fazowe”, której de Broglie używał w swoich pierwszych pracach, świadczyła o braku fizycznego obrazu owego „periodycznego zjawiska”. Za najważniejszy wynik swojej teorii uznał de Broglie otrzymanie przez niego warunków kwantowych Sommerfelda jako warunków rezonansu fal fazowych. Streścimy poniżej rozumowanie de Broglie’a, które doprowadziło go do tego wyniku.

Powiązanie fal z ruchem cząstek było najłatwiejsze dla ruchu swobodnego. Ruch cząstki scharakteryzowany jest przez energię  $E$  i pęd  $p$ . Z kolei najprostsza fala — fala płaska — scharakteryzowana jest przez częstość  $\nu$  i wektor o kierunku rozchodzenia się fali i o długości równej odwrotności długości fali  $\lambda$ . De Broglie założył, że fala płaska jest związana z ruchem swobodnym cząstki i że charakterystyczne wielkości dla fali powiązane są z charakterystycznymi wielkościami dla cząstki związkami, które są rozszerzeniem związków Plancka

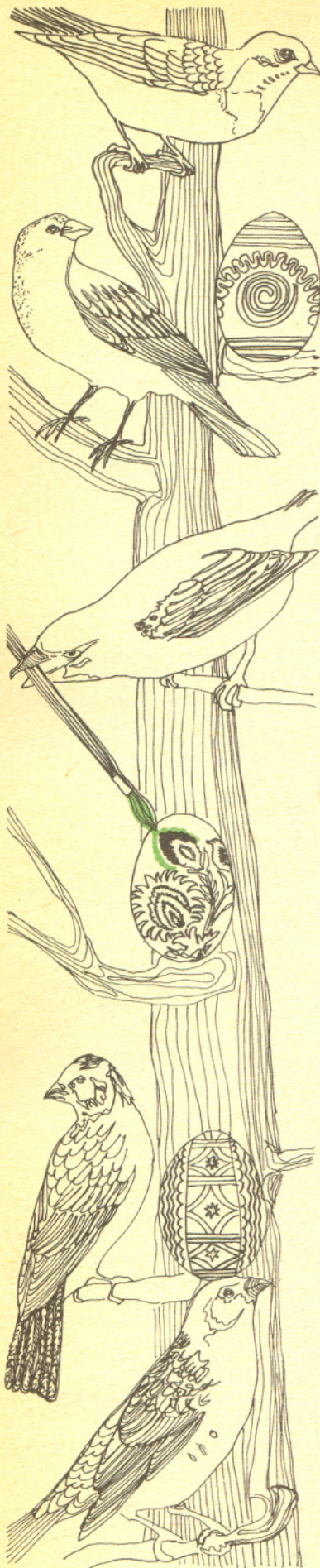
$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda} n,$$

gdzie  $n$  jest wektorem jednostkowym w kierunku rozchodzenia się fali. Dla cząstek poruszających się pod wpływem zewnętrznych sił de Broglie przyjął, że promienie „fal fazowych” pokrywają się z trajektoriami cząstek. Podstawiając zależność między pędem i długością fali do warunku kwantowania Bohra dla orbit kołowych otrzymał de Broglie warunek rezonansu

$$\oint p dq = \frac{h}{\lambda} \oint dq = \frac{2\pi R h}{\lambda} = nh.$$

Na zamkniętej orbicie kołowej winna się zmieścić całkowita liczba  $n$  długości fali.

Teoria de Broglie’a była pierwszą próbą ujednoczenia wszystkich znanych dotąd teorii kwantowych. Wszystko co kwantowe miało się charakteryzować dualnością własności korpuskularnych i własności falowych. Związki między tymi dwoma aspektami zjawisk kwantowych zawierały stałą Plancka — symbol teorii kwantowej. Teorii de Broglie’a brakowało jednakże dwóch istotnych elementów: równań określających propagację fal oraz, oczywiście, interpretacji fizycznej tych fal, bez których teoria ta była jedynie ciekawym dodatkiem matematycznym do istniejących teorii kwantowych. Obu tych elementów dostarczyła mechanika falowa.





Odkrywcą jej był Erwin Schrödinger. Równanie noszące jego imię stanowi podstawę mechaniki falowej i jest jednym z kilku najważniejszych równań fizyki współczesnej. Opisuje ono w całej ogólności zachowanie się w czasie i w przestrzeni „fal fazowych” de Broglie’a. W cyklu swoich epokowych prac, które ukazały się w 1926 roku, Schrödinger nie tylko wprowadził swoje równanie i pokazał, że z jego teorii wynikają warunki kwantowania Bohra-Sommerfelda, ale także udowodnił równoważność nowej teorii z mechaniką macierzową Heisenberga, Borna i Jordana.

Uderzające jest to, że Schrödinger odkrył poprawne równanie dla fal materii i zbudował formalizm matematyczny mechaniki falowej ciągle nie znając interpretacji fizycznej tych fal. Owo brakujące ogniwo odnalazł Born już w kilka miesięcy po ukazaniu się artykułów Schrödingera. Jest nim probabilistyczna interpretacja fal fazowych. Zgodnie z tą interpretacją fale de Broglie’a — Schrödingera wyznaczają tylko prawdopodobieństwo znalezienia elektronów i innych cząstek atomowych w przestrzeni i czasie. W ten sposób w 1926 roku powstała jednolita teoria zjawisk kwantowych, zwana obecnie mechaniką kwantową. Teoria ta przetrwała do dnia dzisiejszego w niezmięnionej postaci, choć została rozszerzona na wiele dziedzin fizyki. Obecnie przy pomocy mechaniki kwantowej opisujemy nie tylko widma atomowe, ale również inne własności atomów, a także własności fotonów, jąder atomowych, molekuł, gazów, cieczy, kryształów, plazmy... W ciągu pół wieku, które upłynęło od odkrycia mechaniki kwantowej, podjęto wiele prób wykrycia zjawisk, których opis w ramach mechaniki kwantowej byłby niezgodny z obserwacjami. Jak dotąd wszystkie te próby zakończyły się niepowodzeniem, ale w przyszłości załamanie się mechaniki kwantowej w dotychczasowej formie na pewno zostanie wykryte, bo nie ma teorii absolutnych.

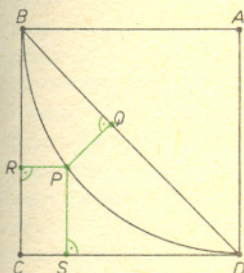


## Zadania

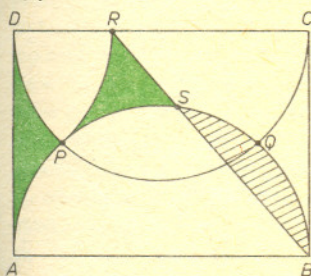
Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 325.** Z wierzchołka  $A$  kwadratu  $ABCD$  zakreślono cyrklem łuk  $BD$ . Wykazać, że dla dowolnego punktu  $P$  tego łuku, jeśli  $Q$  jest jego rzutem prostokątnym na  $BD$ ,  $R$  — na  $BC$  i  $S$  — na  $CD$  (rysunek 1), to  $PQ$  jest średnią geometryczną  $PR$  i  $PS$ .

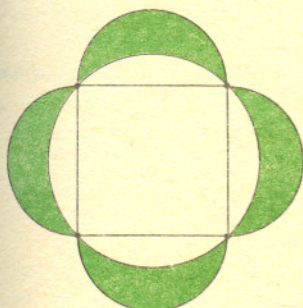
Rozwiązanie na str. 15



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

**M 326.** Na przeciwległych bokach prostokąta  $ABCD$  oparto dwa półokręgi przecinające się w punktach  $P$  i  $Q$  (rysunek 2). Niech  $R$  będzie takim punktem odcinka  $DC$ , że  $AB = BR$  i niech  $S$  będzie punktem przecięcia odcinka  $BR$  z półokręgiem opartym na  $AB$ . Wykazać, że jeśli łuk

$PR$  jest zakreślony promieniem  $\frac{1}{2} AB$ , to:

- poła figur zielonych są równe,
- figura zakreślona na czarno jest połową soczewki zawartej między półokręgami.

(nadesłał R. Bublewicz)

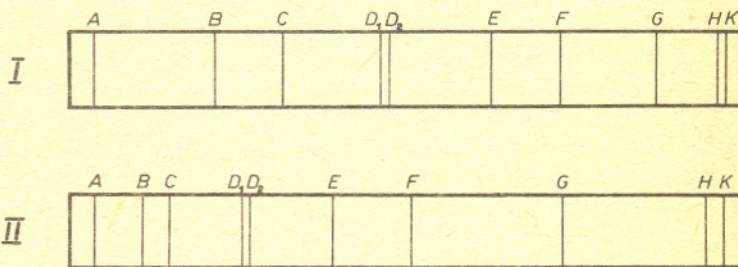
Rozwiązanie na str. 15

**M 327.** Na rysunku 3 mamy okrąg opisany na kwadracie i półokręgi oparte na bokach tego kwadratu. Wykazać, że pole „zielonej” figury jest równe polu kwadratu.

Rozwiązanie na str. 1

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 131.** Rysunek przedstawia widma optyczne pewnego obiektu. Rozstrzygnąć, które zostało otrzymane za pomocą pryzmatu, a które za pomocą siatki dyfrakcyjnej.



Rozwiązanie na str. 2

**F 132.** Obraz interferencyjny od dwóch, oświetlonych białym światłem, szczelin (doświadczenie Younga) zrzucono na szczelinę spektroskopu tak, że prążki są do niej prostopadłe. Co można zobaczyć w polu widzenia okularu?

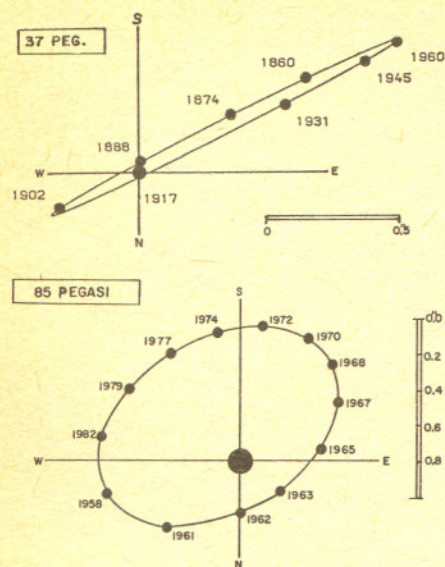
Rozwiązanie na str. 3

Kilka razy w tym miejscu opisywaliśmy różne ciekawe podwójne i wielokrotne układy gwiazd (np. w Patrz w niebo, *Delta* 7/1979, 11/1979, 3/1980, 7/1982). Pisaliśmy przy tym, że orbity składników tych układów są dobrze znane, rysując *widome* orbity jednego ze składników *względem* drugiego. Oczywiście znajomość orbity widomej nie jest jednoznaczna ze znajomością orbity w przestrzeni, bo pozostają nieznane takie elementy, jak m.in. nachylenie płaszczyzny prawdziwej orbity do „promienia widzenia”, stosunek mas decydujący o wielkości elips okrążających się gwiazd i położeniu środka ciężkości układu.

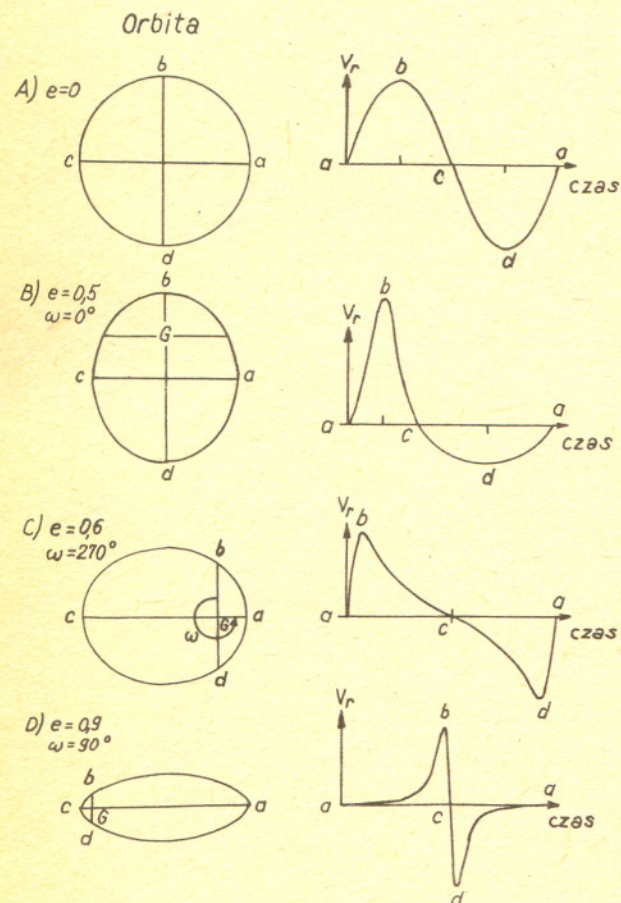
Typowe widome orbity pokazane są na rys. 1a i b. Na pierwszy rzut oka są to elipsy i trudno byłoby coś powiedzieć o nachyleniu płaszczyzn tych orbit. Tak, ale przyjrzyjmy się jednak im uważnie. Orbita z rys. 1a jest bardzo wydłużona, a więc jej ognisko powinno być bardzo blisko jednego z jej końców (znacznie mniej niż 1 mm!), a gwiazda, względem której rysowano tę orbitę, jest dużo bliżej środka. Jeszcze gorzej jest na rys. 1b — tu „ognisko” — gwiazda nie leży wcale na osi wielkiej elipsy. Jedywn wniosek, że jest to wynik rzutowania na „sferę niebieską”. Istnieje wiele metod uzyskiwania kąta nachylenia orbity do promienia widzenia tylko z wyglądu orbity widomej. W przypadku ciasnych i bliskich wizualnych układów podwójnych (Patrz w niebo, *Delta* 7/1982) z pomocą przychodzi spektroskopowe obserwacje składników. Korzystając z dopplerowskiego przesunięcia linii widmowych składników możemy wykreślić zależność zmian prędkości radialnych od czasu. Uzyskujemy w ten sposób (przez całkowanie) niejako rzut ruchu składników na „promień widzenia”. Kilka przykładowych krzywych prędkości radialnych ( $V_r$ ) dla różnych orbit pokazano na rys. 2. Spróbujcie prześledzić, że krzywe te muszą być właśnie takie (trzeba tu wykorzystać II prawo Keplera).

Korzystając z tych wszystkich pomocy możemy już podać wszystkie parametry orbit składników. Na rys. 3 pokazano orbitę układu  $\alpha$  Centaura. Oba składniki obiegają się po orbicie o mimośrodku  $e \approx 0,52$  (czyli o stosunku półosi  $b/a \approx 0,85$ ) w czasie 80,1 lat. Periastron i apoastron są to miejsca na orbicie, w których gwiazdy znajdują się odpowiednio najbliżej i najdalej od siebie. Znaki  $\Omega$  i  $\Upsilon$  oznaczają punkty, w których składnik mniej masywny „przebija” płaszczyznę styczną do sfery niebieskiej.

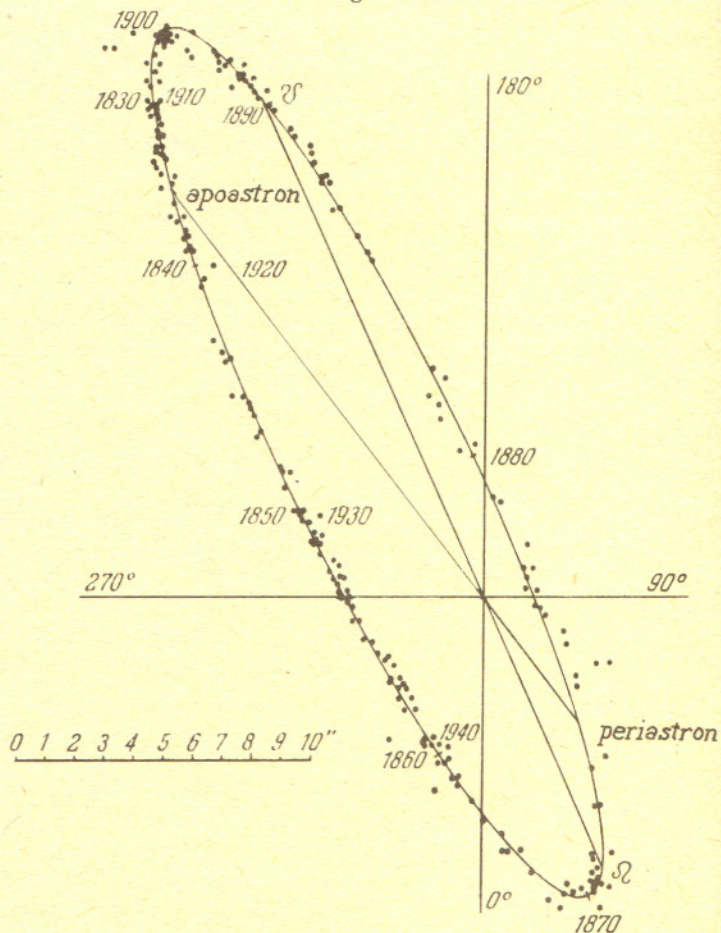
mgr Tomasz CHLEBOWSKI



Rys. 1 Widome orbity dwóch podwójnych układów wizualnych. Zaznaczone są orbity składnika słabszego względem jaśniejszego. Czarne kropki nie są indywidualnymi obserwacjami, a jedynie położeniami słabszego składnika w niektórych latach.



Rys. 2 Krzywe prędkości radialnych uzyskiwane przy obserwacjach układów podwójnych o różnych mimośrodkach ( $e$ ) i orientacjach osi wielkiej elipsy względem płaszczyzny stycznej do sfery niebieskiej ( $\omega$ ).



Rys. 3 Widoma orbita najbliższego układu podwójnego —  $\alpha$  Centaura. Składnik B o masie  $0,89M_{\odot}$  obiega składnik A ( $1,08M_{\odot}$ ) w ciągu 80,1 lat.

Niżej zamieszczamy opowiadanie, którego pojawienie się w redakcji wywołało wiele zamieszania. Ale nie uprzedzamy faktów. Bardzo jesteśmy ciekawi, co Czytelnicy będą o nim sądzić.



# Kwantowa planeta

ERNEST PASZYCKI (Technika  
Młodzież, 6/1981)

... Człowiek nie rozumiał, co się z nim dzieje. Leżał plackiem na gładkiej płaszczyźnie migoczącej odbiciem gwiazd i nie potrafił ruszyć się z miejsca. Brak mu było jakiegokolwiek punktu zaczepienia. Wszystko ślizgało się i uciekało, odpływając spod beładnie rozrzuconych rąk i nóg. Okrągły błyszczący kamień, o który chciał się oprzeć, wyslizgnął mu się i zniknął za niedalekim horyzontem. Był bezradny, zupełnie jakby wisiał w przestrzeni w stanie nieważkości. Ale jednocześnie czuł, że siła ciężkości przyciska jego ciało do powierzchni chwiejnego, śliskiego gruntu. Była to jakaś dziwna, jakby dwuwymiarowa nieważkość.

Starał się przypomnieć sobie wszystko, co się z nim działo po wyładowaniu na tej chłodnej, pozbawionej życia planecie, która nie wiadomo skąd znalazła się w przestrzeni międzygwiazdnej. Kiedy włożywszy skafander wy dostał się ze statku i wyszedł poza obręb ciemnego kręgu wypalonego i stopionego silnikami gruntu, stało się z nim coś niezrozumiałego. Poślizgnął się i stracił równowagę. Nie zdołał utrzymać się na nogach, upadł na plecy i zaczął coraz szybciej ześlizgiwać się w dół. Z początku było to nawet przyjemne. Zapierający dech coraz szybszy zjazd, który przypominał mu dzieciństwo; zjeżdżanie z lodowej górką na czym popadło... Ale potem poczuł się nieswojo: wciąż oddalał się od statku, a prędkość nieustannie rosła. Zaczęło nim obracać coraz szybciej i szybciej, i nie było końca tej zwariowanej jeździe i karuzeli. Statek już dawno zniknął mu z oczu, kiedy poczuł, że szybkość stopniowo maleje, a obroty ustają. Czuł się tak, jakby siłą rozpędu wjeżdżał na inną lodową górkę. Potem na moment zatrzymał się, jakby zamarał i znów zaczął ześlizgiwać się w dół, ale już do tyłu. Znów wzrastająca szatańska szybkość, znów doprowadzające do mdłości wirowanie, potem wjazd na górę, zwalnianie... Zdążył zauważyć statek, do którego niósł go bezwładność, ale niedaleko od miejsca, w którym upadł, znowu się zatrzymał. W chwilę później ponownie pojechał w dół, coraz dalej od statku. Nie można się było zatrzymać, nie było za co się chwycić. I znów górką, i znów karuzelą.

Nie pamiętał, ile czasu trwało to szaleństwo, ile razy przybliżał się do statku i oddalał. Prawdopodobnie na jakiś czas stracił przytomność i teraz leżał zmęczony i bezradny jak przewrócony na grzbiet zółw, na dnie łagodnej, ale głębokiej kotliny z absolutnie gładkimi i śliskimi zboczami. Statku nie było stąd widać i nie wiadomo nawet, w jakim kierunku go szukać. Sytuacja była głupia i zdawała się nie mieć wyjścia. Niestety, nie wziął ze sobą drugiego pilota na ten zwykły, nie zapowiadający żadnych niespodzianek patrol. Oczywiście naruszył instrukcję, kategorycznie zabraniającą opuszczania statku w przypadku, gdy pilot jest sam. Ale kto mógł przypuścić, że ta martwa, niczym nie wyróżniająca się planeta zgotuje mu tak chytrą pułapkę? Tak, w kosmosie zawsze trzeba mieć się na baczności.

Postanowił skoncentrować się i raz jeszcze ocenić sytuację. Co w istocie wiedział? Że powierzchnia planety jest śliska jak lód? Ale powiedzenie „śliska jak lód” nic w sumie nie znaczy. Wszak ona jest niesamowicie śliska. W tym zapomnianym przez Boga świecie tarcie w ogóle nie występuje. Po prostu go nie ma! Chwileczkę ... przecież zatrzymał się. Przecież skończyły się te nie do zniesienia, wytrząsające duszę i odbierające rozum wahnięcia o rozpiętości kilku kilometrów, zupełnie jak na gigantycznej huśtawce. Znaczy to, że tarcie, choć mizerne, jednak istnieje. Ależ tak, przecież planeta ma atmosferę. Przy dużej szybkości odczuwał nawet lekki napór. To właśnie ten słaby opór hamował go i w końcu zatrzymał. Ale powierzchnia gruntu jest absolutnie śliska i nie ma żadnych szans, żeby wstać lub próbować przepelznąć choć centymetr...

A to co znowu? Obok niego łagodnym łukiem przemknął jakiś podłużny przedmiot. Za ledwie zdążył rozpoznać swój laserowy promiennik, który ot tak, na wszelki wypadek, zabrał ze sobą wychodząc ze statku i który upadając wypuścił. Broń do tej pory ślizgała się w tej diabelskiej jamie. Zresztą na co mu ona teraz? Trzeba coś wymyślić, coś zrobić ... Nóż! Całkiem zapomniał o ostrym tytanowym nożu, przy pomocy którego można wyrąbać stopnie i wy dostać się z pułapki.

Nóż łatwo wchodził w grunt, ale jeszcze łatwiej wyslizgiwał się z otworów, które natychmiast wypełniały się, zaciągały i znikaly bez śladu. Nóż był zupełnie bezużyteczny. Co robić? Zrozumiał, że nie uda mu się stąd wy dostać, dopóki nie rozgryzie do końca zagadki tej lodowatej planety.

Zacznijmy wobec tego od początku. Nieznana planeta błąka się z dala od gwiazd, to znaczy, że jej powierzchnia nie jest ogrzewana ich promieniami. Planeta dawno ostygła i wchłonęła w siebie wieczny chłód wszechświata. Wobec tego temperatura na planecie nie jest wyższa niż 3 kelwiny. Panuje na niej straszliwy mróz ... STOP!

Niemal absolutne zero! A przy takich temperaturach własności substancji zmieniają się w sposób zdumiewający. W tych warunkach mogą wystąpić szczególne kwantowe ciecze. Na przykład ciekły hel w temperaturze poniżej dwóch kelwinów swobodnie, bez żadnego tarcia, przepływa przez najcięższe rurki-kapilary, przesącza się przez najmniejsze otwory i mikroskopijne szczeliny. Łatwo też wypływa po pionowych ściankach naczyń Dewara. Nie bez powodu nazywają go nadciekłym. Podobne własności mają też kwantowe kryształy, które łatwo topnieją przechodząc ze stanu stałego w nadciekły ... Przypomniał mu się film popularnonaukowy wykonany w kriostacie z ciekłym helem, w którym rosły kwantowe kryształy. Od najbliższego dotknięcia lub wstrząsu powierzchnia tych kryształów drżała i burzyła się jak żywa. Poruszały się po niej fale topnienia i krystalizacji, w których chaos cieczy i surowy porządek kryształu kolejno po sobie następowały. I w tym momencie zagadka wyjaśniła się: wierzchnia warstwa tajemniczej planety jest w istocie jednolitym ... kwantowym kryształem! To jest kwantowa planeta! Człowiek poczuł się teraz lekko, swobodnie i wesoło. Wszystko było już jasne i oczywiste.



Lód topi się pod łyżwą i cienka warstewka wody, odgrywając rolę smaru, stawarza znakomite warunki do ślizgania. Zupelnie tak samo, nawet przy najbliższym nacisku, topi się kwantowy kryształ. Tylko że teraz rolę smaru odgrywa nie woda, ale nadciekły, kwantowy płyn całkowicie pozbawiony lepkości. Oto dlaczego powierzchnia gruntu jest tak gładka i śliska.

A swoją drogą ciekawe, z czego składa się sam kryształ? Oczywiście nie jest to zestalony hel. Krystalizuje on tylko przy wysokim ciśnieniu, a atmosfera jest tu zbyt rozrzedzona. Może z atomowego wodoru? Taki wodór (w odróżnieniu od zwykłego, składającego się z cząstek dwuatomowych) w stanie skroplonym może być nadciekły. Zamarzając przy bardzo niskiej temperaturze staje się on kwantowym kryształem. Tylko że otrzymać ciekły, a tym bardziej zestalony atomowy wodór jest niezwykle trudno. Pojedyncze atomy wodoru w każdych warunkach dążą do związania się w molekuly. Przeszkodzić temu może jedynie niezwykle silne pole magnetyczne. Ale przy podchodzeniu do planety przyrządy zarejestrowały istnienie bardzo słabej magnetosfery. Skąd więc wziął się atomowy wodór? Czyżby pole magnetyczne planety było kiedyś znacznie silniejsze? Zresztą czas na zastanawianie się nad tym pytaniem przyjdzie później, gdy przyleci tu specjalna naukowa ekspedycja. A teraz najważniejsze — jak najszybciej się stąd wydostać.

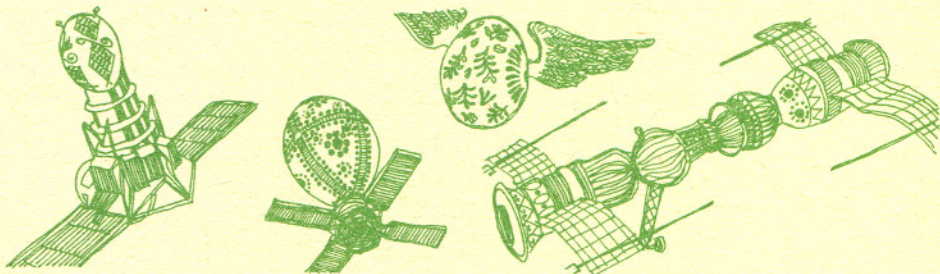
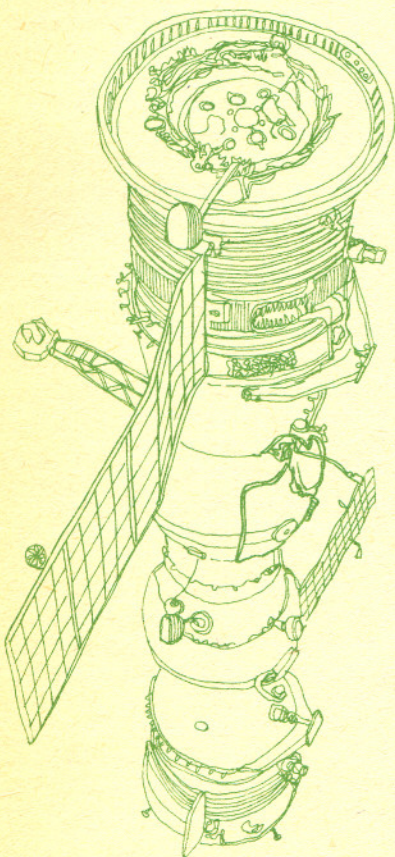
Po pierwsze, należy złapać promiennik laserowy, który już kilkakrotnie przelatywał obok, coraz bardziej zbliżając się do dna jamy. Po drugie, za jego pomocą spróbować roztopić i odparować wierzchnią warstwę kwantowego kryształu i dostać się do normalnego podłoża z tak niezbędnym tarcie. Żeby tylko ten przekłety pancierz tu, na dnie kotliny, nie był zbyt gruby. Aha, jest i promiennik! Znowu przybliży się coraz szybciej. Spróbujmy więc zgrabnie się ułożyć i schwytać go. Ech, zdobyć wymknęła mu się, zwinnie prześlizgnąwszy się pod lewą ręką. Zupelnie jak na meczu: błyskawiczny rzut krążka i opóźniona, zwolniona reakcja bramkarza. Gol! Wynik na naszą niekorzyść. Jest tylko drobna różnica. Tutaj krążek ma ze czterdzieści razy większą masę i jeszcze nie wiadomo co będzie, kiedy bramkarz

go złapie. Ale znowu jesteśmy gotowi do walki i oczekujemy na błyskawiczny atak. Krążek mknie teraz z przeciwnej strony, bliżej prawej ręki. Można się więc zawczasu przygotować, oczekiwać uderzenia.

Uderzenie było straszne i nawet skafander nie był w stanie go złagodzić. Od ostrego bólu w ramieniu wszystko pociemniało. Zawirowało w oczach ... Kiedy przyszedł do siebie, wszystko wokół — gwiazdzone niebo, lśniące i migoczące zbocza doliny — kręciło się dalej. Zrozumiał, że to on sam się obraca, rozkrecony ogromną energią kinetyczną promiennika. Spojrzał w bok i ze zdziwieniem zobaczył, że laser ślizga się w kółko razem z nim, zaczepiwszy rzemieniem o prawą rękę. Spróbował przyciągnąć go bliżej, ale tylko krzyknął i o mało co znowu nie zemdlął na skutek wściekłego bólu w nienaturalnie wykręconej ręce. Po chwili, oblewając się potem i tracąc niekiedy oddech z bólu i wysiłku, lewą ręką, centymetr za centymetrem zaczął przyciągać ku sobie prawą. Gdy w końcu dosięgnął rzemienia, siły miał prawie całkiem wyczerpane i musiał pozwolić sobie na krótki odpoczynek. Nawet zapadł w drzemkę, ale po chwili zbudziła go trwożna myśl o tym, że grunt pod statkiem może ostygnąć i zaciągnąć się warstwą kryształu. A wtedy, przy najmniejszym nawet nachyleniu, statek zacznie ześlizgiwać się po nadciekłym smarze. Potem wyróci się i — koniec.

Lewą ręką szybko chwycił kolbę promiennika, skierował go lufą w dół i nacisnął spust. Rubinowe, oślepiające błyskawice kolejno rozświetlały przezroczytą, zieloną ciemność, aż wreszcie zobaczył na jasnej powierzchni lodu ciemne, wytopione plamy kamienistego gruntu. Jeszcze kilka wyładowań i mógł przesunąć się na tak upragniony kawałek szorstkiego, twardego i budzącego nadzieję podłoża. Podniósł się na kolana, a później przewyciężając ból w zwichniętej ręce stanął i torując sobie drogę laserowym promieniem powlókł się wąską ścieżką wśród śliskiej kwantowej pustyni w stronę statku widocznego za brzegiem parowu ...

Tlum. Ewa i Dariusz MILERSCY



No właśnie. Nasze zdania (tj. redaktorów „Delty”) były właściwie zgodne: ale bzdury! Postanowiliśmy nawet, na przykładzie tego opowiadania, wyrazić nasz pogląd o mnożącej się ostatnio jak króliki (kosmiczne ma się rozumieć) rzeszy autorów i kibiców (nie pomijając trenerów) science-fiction. A pogląd ten jest wcale niepocholebny.

Podstawową sprawą był oczywiście sam pomysł czy też raczej projekt planety i sytuacji fizycznej, w jakiej znalazł się bohater opowiadania. Dla pewności zwróciliśmy się do kilku znanych specjalistów (nazwiska i adresy znane redakcji) z pytaniem, czy przypadkiem czegoś takiego być nie może. Odpowiedź była jasna i pewna: to są absolutnie nonsensowne sytuacje i sprzeczne z fizyką zjawiska.

No więc napisaliśmy błyskotliwy komentarz nie zostawiający suchej nitki na autorze: że w założeniu bzdura, a i szczegóły też nieszczerłone. Mimo wszystko jednak poszperaliśmy po publikacjach o „podchodzącej” tematyce. I wtedy okazało się, że nasz błyskotliwy, dowcipny, chtoszczący komentarz trzeba wyrzucić. Szczegóły opowiadania są, owszem, nieszczerłone, ale główne założenie się broni.

I tak redakcja „Delty” zapoznała się z pojęciem *kryształ kwantowy*.

Wyjaśnijmy na początek, czym różni się kryształ kwantowy od „klasycznego”.

Z punktu widzenia mechaniki klasycznej w stanie o najniższej energii (temperatura absolutnego zera) atomy czy cząsteczki, z których składa się kryształ, powinny być zlokalizowane dokładnie w węzłach sieci krystalicznej. Symetria tej sieci określona jest przez strukturę elektronową atomów. Kiedy kryształ ogrzewamy, atomy zaczynają wykonywać chaotyczne drgania wokół swoich położenia równowagi. Ze wzrostem temperatury amplituda tych drgań rośnie i gdy staje się porównywalna z odległościami międzyatomowymi, kryształ przechodzi w stan ciekły.

Klasyczny obraz stanu podstawowego kryształu (minimum energii), w którym każdy z atomów ma jednocześnie określony pęd ( $p = 0$ ) i położenie (w minimum potencjału), jest jednak sprzeczny z fundamentalną w mechanice kwantowej zasadą nieoznaczoności Heisenberga. Zgodnie z tą zasadą iloczyn nieokreśloności pędu i nieokreśloności położenia jest zawsze większy od stałej Plancka. Przy próbie dokładnej lokalizacji atomu jego energia szybko przekroczyłaby energię oddziaływań międzyatomowych (nie byłby już związany w węzle sieci krystalicznej), a zażądanie znikania pędu spowodowałoby „rozmycie” każdego z atomów w całym dostępnym obszarze. Ani w jednym, ani w drugim przypadku kryształ nie mógłby powstać. Istnienie może mu zapewnić jedynie kompromis — niewielki pęd i „rozmycie” położenia. Wynika stąd, że nawet w stanie podstawowym atomy kryształu muszą wykonywać drgania, tzw. drgania zerowe. Energia tych drgań, w przeciwieństwie do drgań cieplnych, nie może być nigdy przez kryształ oddana.

Kryształy, w których amplituda drgań zerowych jest porównywalna z odległościami między węzłami siatki krystalicznej, to właśnie kryształy kwantowe.

Okazuje się, że niewiele kryształów spełnia ten warunek. Zgodnie z zasadą Heisenberga silne oddziaływania międzycząsteczkowe (silne związanie atomu w kryształ) dopuszczają dużą energię drgań zerowych. Z kolei amplituda tych drgań jest mała, czyli atomy są dobrze zlokalizowane w węzłach. Słabsze oddziaływanie to oczywiście gorsza lokalizacja.

Biorąc pod uwagę zależność energii i pędu łatwo jest także pokazać, że dla mniejszych mas atomów amplituda drgań zerowych jest większa.

Dla kryształów helu (słabe oddziaływanie Van der Waalsa i niewielka masa atomów) stosunek amplitudy drgań zerowych ( $\approx 1 \text{ \AA}$ ) do odległości międzyatomowych ( $\approx 3,8 \text{ \AA}$ ) wynosi  $\lambda \approx 0,3$ . Dla kryształów wodoru ( $\text{H}_2$ ) natomiast silne wiązanie całkowicie kompensuje wpływ jego małej masy i drgania zerowe są w nich zaniedbywalnie małe. Kryształy cięższych gazów szlachetnych (dokładniej: pierwiastków grupy zerowej) są także kwantowe, ale dużo „słabiej” — np. dla kryptonu  $\lambda \approx 0,08$ . Kryształy innych pierwiastków możemy natomiast traktować jak „klasyczne” kryształy z atomami zlokalizowanymi w węzłach sieci krystalicznej ( $\lambda \ll 1$  dla  $T \ll T_{\text{topnienia}}$ ).

W kryształach kwantowych duża amplituda drgań zerowych powoduje, że klasyczny obraz małych drgań cieplnych atomów

wokół położenia równowagi traci sens. Kryształ helu-4 na przykład nie może powstać przy ciśnieniach mniejszych niż 30 atm (25 atm dla helu-3) nawet w temperaturze absolutnego zera. Silne korelacje między bliskimi atomami w kryształach helu powodują, że jest on „miękki”, łatwo ustępuje pod naciskiem, a nawet regeneruje odkształcenia sieci krystalicznej.

Wróćmy teraz do próby odpowiedzi na pytanie, czy możliwe jest istnienie kwantowego kryształu o własnościach opisanych w opowiadaniu. Oto nasze wnioski (w nawiasach podajemy źródło):

1. Hel jest jedynym obserwowanym w doświadczeniu kryształem kwantowym, jednak to nie helem pokryta jest kwantowa planeta, bo krystalizuje on dopiero przy wysokich ciśnieniach (np. S. Trickey, W. Kirk, E. Adams, *Rev. Mod. Phys.*, 44, 668 (1972)).

2. Duże drgania zerowe powodują, że w kryształach kwantowych defekty struktury nie są zlokalizowane, a mogą poruszać się z łatwością po całym kryształ (podobnie jak elektrony przewodnictwa w metalach). Poza tym teoretycznie możliwe jest powstanie idealnie periodycznej sieci krystalicznej z liczbą węzłów większą niż liczba atomów. Defekty w takim kryształ to „puste miejsca”. W kryształach np. helu-4 mogą się one w pewnym sensie zachowywać jak ciecz nadciekła. Kryształ z takimi defektami miałby własności pośrednie między cieczą i ciałem stałym, a więc własności opisane w „Kwantowej planecie” (A. F. Andreiev, I. M. Lifshitz, *ŽETF*, 56, 2057 (1969)).

3. Wprawdzie w czystych kryształach wodoru (tworzą je cząsteczki  $\text{H}_2$ ) drgania zerowe są niewielkie, ale mogą być istotne, gdy atomy wodoru są małymi domieszkami w kryształach gazów szlachetnych. Być może domieszki te, podobnie jak defekty w punkcie 2, spełniają warunki konieczne do przejścia w stan nadciekły (B. T. Geilikman, *Fizyka Twierdowo Tiela*, 15, 2293 (1973)).

4. Nie obserwujemy nadciekłego wodoru, bo wodór molekularny krystalizuje już w temperaturze 14 K, a przejście w stan nadciekły spodziewane jest dopiero w temperaturze około 6 K. Rozważana jest jednak możliwość obniżenia temperatury krystalizacji przez wprowadzenie domieszek, które powodowałyby zwiększenie drgań zerowych. Najlepszymi domieszkami z tego punktu widzenia byłyby atomy wodoru. Aby zwiększyć koncentrację atomów wodoru w wodorzach molekularnym, stosuje się silne pola magnetyczne ustawiające spiny w cząsteczce wodoru w tym samym kierunku, co prowadzi do rozerwania wiązania chemicznego. Taki zdomieszkowany wodór teoretycznie mógłby krystalizować w temperaturze niższej niż 6 K, a topiąc się mógłby przechodzić w ciecz nadciekłą (B. T. Geilikman).

Z tego pobieżnego przeglądu wynika, że możliwość istnienia kryształu kwantowego przy ciśnieniu kilku atmosfer i temperaturze 3 K nie została dotychczas teoretycznie wykluczona. Nie potrafimy jednak odpowiedzieć na pytanie, czy możliwe jest topienie się wymienionych kryształów kwantowych pod ciśnieniem, tj. czy kwantowy kryształ może (podobnie jak lód w wodzie) pływać w swojej kwantowej cieczy.

W jednym z następnych numerów „Delt” postaramy się przekazać Czytelnikom więcej szczegółów na temat własności kwantowych cieczy i kryształów, o których tutaj tylko wspomnieliśmy.





Wszyscy wiemy, że kwadratura koła jest niewykonalna. Nawet w języku potocznym używamy tego terminu na oznaczenie czegoś, co już teoretycznie jest niemożliwe. Na pytanie: czemu kwadratura koła jest niewykonalna, pada przeważnie odpowiedź w rodzaju „a, bo matematycy udowodnili”. Tak odpowiadają nawet fachowcy — sądzimy, że ilość matematyków, którzy kiedykolwiek przeczytali dowód niealgebraiczności liczby  $\pi$  (a więc dowód niemożności kwadratury koła) waha się około 1 procenta.

Zamieszczony poniżej artykuł opowiada o tym dowodzie. Właściwie nawet podaje go zupełnie dokładnie. Dowód wykorzystuje kilka pojęć z matematyki tzw. wyższej (funkcje holomorficzne, trochę teorii Galois). Od razu każdy zapyta: czy nie można prościej? Odpowiedź nie jest jednoznaczna. Są, owszem, dowody „bardziej elementarne” — to znaczy nie wykorzystujące aż tylu nowych pojęć i twierdzeń. Czy są to dowody „prostsze”, to już rzecz gustu. Czy prościej jest wykopać rów łopatą, czy koparką? I jeszcze jedna myśl. Postęp w matematyce polega nie tylko na przekazywaniu do skarbcza wiedzy nowych twierdzeń. Równie ważne jest pokazywanie, jak nowe na ogół bardzo abstrakcyjne teorie stosują się do naszych starych spraw. Elektronika też powinna nam ułatwić życie, a nie tylko umożliwiać rozwój techniki telewizyjnej.



## Sto lat dla ludolfiny

*Doc. dr Maciej SKWARCZYŃSKI*

Niemal dokładnie sto lat temu, w dniu 26 listopada 1882 na uniwersytecie we Fryburgu odbył się wykład Ferdynanda Lindemanna przedstawiający dowód, że  $W(\pi) \neq 0$  dla każdego wielomianu

$$(1) \quad W(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0$$

o współczynnikach wymiernych. Tym samym rozstrzygnięty został ostatecznie aktualny od ponad dwóch tysięcy lat problem geometryczny. W jawnej postaci pojawił się on w starożytnej Grecji. Należało wykorzystując jedynie cyrkiel i linijkę skonstruować bok kwadratu, tak aby pole tego kwadratu było równe polu koła o danym promieniu. (W przypadku koła o promieniu 1 należy skonstruować odcinek o długości  $\sqrt{\pi}$ ). Poszukiwana konstrukcja (kwadratura koła) ma nadawać się do teoretycznego uzasadnienia, a więc nie bierzemy pod uwagę rozwiązań wystarczających do zastosowań praktycznych, ale obarczonych błędem. Przykładem takiego przybliżonego rozwiązania jest rezultat Ludolfa van Ceulena z 1610 r, zawierający 32 początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby  $\pi$  (na jego cześć liczba ta została nazwana ludolfiną). Matematykom starożytnym nie udało się znaleźć kwadratury koła. Dziś, dzięki Lindemannowi, wiemy, że znaleźć jej nie można. W artykule przedstawimy idee, na których opiera się współczesny dowód twierdzenia Lindemanna.

### § 1. Ciała liczbowe

Na początku szesnastego wieku Scipio del Ferro znalazł ogólny wzór wyrażający pierwiastki wielomianu stopnia trzeciego przez współczynniki tego wielomianu. Zwróciło to uwagę matematyków na liczby zespolone i ich arytmetykę. Podjęto również starania, aby znaleźć wzory wyrażające pierwiastki wielomianów wyższych stopni. Badania te doprowadziły do współczesnej teorii ciał (systemów algebraicznych, w których wykonalne są cztery podstawowe operacje arytmetyczne: dodawanie, mnożenie, odejmowanie i dzielenie przez element różny od zera). Bardzo ważnym przykładem jest ciało  $\mathbb{Q}$  wszystkich liczb wymiernych, oraz ciało  $\mathbb{C}$  wszystkich liczb zespolonych. Znaczenie ciała  $\mathbb{C}$  wiąże się z tzw. zasadniczym twierdzeniem algebry, które mówi, że każdy unormowany wielomian  $W(z)$  stopnia  $n$  o współczynnikach w ciele  $\mathbb{C}$  ma

przedstawienie

$$W(z) = (z - a_1)^{m_1}(z - a_2)^{m_2} \dots (z - a_k)^{m_k}, \quad m_1 + \dots + m_k = n,$$

gdzie  $a_j, j = 1, 2, \dots, k$ , są wszystkimi różnymi zespolonymi pierwiastkami rozpatrywanego wielomianu. Liczba  $m_j$  nazywa się krotnością pierwiastka  $a_j$ . Nietrudno zauważyć, że  $m_j \geq 2$  wtedy, gdy  $z - a_j$  występuje jako czynnik zarówno w wielomianie  $W(z)$ , jak też w pochodnej  $W'(z)$ . Wielomian, który ma wyłącznie pierwiastki jednokrotne, nazywa się wielomianem rozdzielczym.

Liczby zespolone można klasyfikować według własności wielomianów, dla których liczby te są pierwiastkami. Mówimy, że liczba  $a \in \mathbb{C}$  jest algebraiczna, jeśli istnieje wielomian o współczynnikach wymiernych, którego  $a$  jest pierwiastkiem (twierdzenie Lindemanna powiada, że  $\pi$  nie jest liczbą algebraiczną). Można wykazać, że pierwiastkami wielomianu o współczynnikach algebraicznych są wyłącznie liczby algebraiczne. Zbiór  $A$  wszystkich liczb algebraicznych

Ciało liczbowe nazywamy algebraicznie domkniętym, jeżeli każdy wielomian o współczynnikach w tym ciele i nie będący stałą ma w tym ciele pierwiastek. Na przykład ciało liczb rzeczywistych nie jest algebraicznie domknięte, bo wielomian  $x^2 + 1$  nie ma pierwiastków rzeczywistych. Twierdzenie orzekające, że ciało wszystkich liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte, bywa nazywane zasadniczym twierdzeniem algebry.

tworzy ciało, jest ono algebraicznie domknięte. W obecnym artykule będziemy rozpatrywać wyłącznie ciała, które, tak jak ciało  $A$ , zawierają ciało  $\mathbb{Q}$  liczb wymiernych i zawierają się w ciele  $\mathbb{C}$  liczb zespolonych. Będziemy mówić, że ciało  $E$  jest rozszerzeniem ciała  $F$ , jeśli  $F \subset E$ . Wówczas  $E$  można rozpatrywać jako przestrzeń wektorową (liniową) nad ciałem  $F$  (elementy przestrzeni  $E$  — wektory — można mnożyć przez liczby z ciała  $F$ ). Wymiar tej przestrzeni nazywa się stopniem rozpatrywanego rozszerzenia i jest oznaczany symbolem  $[E:F]$ . Mówimy, że rozszerzenie jest skończone, jeśli jego stopień jest skończony.

Ważnym przykładem jest rozszerzenie pojedyncze  $E = F(a)$ , gdzie  $a$  jest ustaloną liczbą algebraiczną. Jest to część wspólna wszystkich ciał zawartych w  $\mathbb{C}$  i zawierających zbiór  $F \cup \{a\}$ . Ciało to można opisać dokładniej. Ponieważ  $F \supset \mathbb{Q}$ , więc istnieją wielomiany unormowane (tzn. o współczynniku przy najwyższej potędze równym 1) o współczynnikach z  $F$ , dla których  $a$  jest pierwiastkiem. Można wykazać, że wśród tych wielomianów istnieje dokładnie jeden o najmniejszym stopniu. Nazywa się on wielomianem minimalnym liczby  $a$  (nad  $F$ ). Niech  $Q$  będzie tym wielomianem; założmy, że stopień  $Q$  wynosi  $m$ . Niech  $u_j \in F (j = 0, 1, \dots, m-1)$  będą współczynnikami tego

wielomianu. Stwierdzamy, że

$$Q(a) = a^m + u_{m-1}a^{m-1} + \dots + u_1a + u_0 = 0$$

a więc w przestrzeni  $E$  element  $a^m$  jest liniowo zależny od elementów  $1, a, \dots, a^{m-1}$ . Nietrudno stąd wywnioskować, że elementy  $1, a, \dots, a^{m-1}$  rozpinają przestrzeń  $E$ . Są one liniowo niezależne, bo z określenia  $Q$  wynika, że  $a$  nie jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu o współczynnikach w ciele  $F$  i stopniu mniejszym niż  $m$ . Tak więc  $[F(a): F] = m$  i  $F(a)$  jest rozszerzeniem skończonym.

Podamy przykład ilustrujący wprowadzane pojęcia. Niech  $a = \sqrt{3}$ . Wtedy ciało  $Q(\sqrt{3})$  składa się z liczb postaci  $p + q\sqrt{3}$ , gdzie  $p, q$  są liczbami wymiernymi. Ponieważ każdą taką liczbę możemy oczywiście przedstawić jako  $p \cdot 1 + q \cdot \sqrt{3}$ , więc wymiar  $[Q(\sqrt{3}): Q]$  wynosi 2, a bazę stanowią liczby  $1, \sqrt{3}$ . Podobnie można sprawdzić, że dla  $a = \sqrt[3]{2}$ , mamy  $Q(\sqrt[3]{2}) = \{x: x = p + q\sqrt[3]{2} + r\sqrt[3]{4}; p, q, r \in Q\}$ , tj.  $[Q(\sqrt[3]{2}): Q] = 3$ .

Zwróćmy uwagę na pewną własność wielomianu minimalnego liczby  $a$  (nad  $F$ ) (skorzystamy z niej później): wielomian ten nie jest rozkładalny nad  $F$  (tzn. nie jest iloczynem dwu wielomianów niższych stopni dodatnich), bo w przeciwnym przypadku liczba  $a$  byłaby pierwiastkiem wielomianu niższego stopnia. Z drugiej strony oba wielomiany  $Q(z)$  i  $Q'(z)$  mają współczynniki należące do ciała  $F$  i tę samą własność ma największy wspólny dzielnik tych wielomianów (obliczamy go algorytmem Euklidesa, a więc jego współczynniki należą do ciała zawierającego współczynniki obu wielomianów  $Q(z)$  i  $Q'(z)$ ).

Pojęcie pochodnej dla funkcji zmiennej zespolonej jednej zmiennej określamy formalnie takim samym wzorem jak funkcji rzeczywistych

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Dla wielomianów zmiennej zespolonej pochodna wyraża się więc podobnym wzorem, jak dla wielomianów rzeczywistych:  $(z^2)' = 2z$ ,  $(z^3)' = 3z^2$ , itd.

Ten dzielnik ma stopień nie większy niż stopień  $Q'(z)$ , a więc musi być wielomianem stałym, bo wielomian  $Q(z)$  nie jest rozkładalny. Zatem  $Q(z)$  i  $Q'(z)$  nie mają wspólnego czynnika liniowego. W konsekwencji wszystkie zespolone pierwiastki  $Q(z)$  są jednokrotne. Jest to zatem wielomian rozdzielnicy mający  $m$  różnych pierwiastków.

Można udowodnić, że jeśli  $F_1$  jest skończonym rozszerzeniem  $F_0$ , oraz  $F_2$  jest skończonym rozszerzeniem  $F_1$ , to  $F_2$  jest skończonym rozszerzeniem  $F_0$ . Co więcej

$$[F_2: F_0] = [F_2: F_1][F_1: F_0]$$

Wynika stąd, że rozszerzenie  $E = F(a_1, a_2, \dots, a_q)$  określone jako część wspólna ciał zawierających zbiór  $F \cup \{a_1, \dots, a_q\}$  jest skończone. W samej rzeczy, ciało to można otrzymać w wyniku  $q$  kolejnych rozszerzeń, z których każde ma stopień skończony.

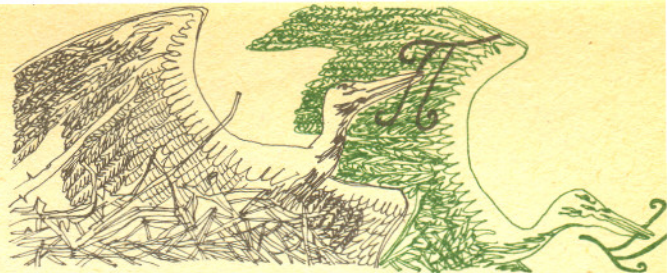
Mówiąc dokładniej  $E = F_q$ , gdzie

$$F_1 = F(a_1), F_2 = F_1(a_2), \dots, F_q = F_{q-1}(a_q)$$

## § 2. Metody algebraiczne w geometrii

To, że wychodząc z liczb algebraicznych można skonstruować tylko liczby algebraiczne, można zrozumieć: cyrklem rysujemy tylko okręgi, linijką — proste. Są to zbiory algebraiczne (stopnia 2 i stopnia 1). W przecięciu tych linii pojawiają się mogą więc tylko liczby algebraiczne (nie dowolne zesztą).

Istotne znaczenie dla problemu kwadratury koła miała pochodząca od René Descartesa metoda badań oparta o wzajemnie jednoznaczność odpowiedniość między punktami a ich współzrędnymi. Dzieło Descartesa „Géométrie” ogłoszone w 1637 r. jako dodatek do słynnej „Discours de la Méthode” wykazało, że algebra może być przydatnym narzędziem przy analizowaniu problemów geometrycznych. Dzisiaj przy pomocy geometrii analitycznej wykazuje się stosunkowo łatwo, że



wychodząc od punktów płaszczyzny, które mają współrzędne algebraiczne i wykorzystując jedynie cyrkiel i linijkę można w sposób systematyczny konstruować jedynie punkty, których współrzędne są liczbami algebraicznymi. Jeśli kwadratura koła byłaby możliwa, to  $\pi$  jako kwadrat liczby algebraicznej byłaby liczbą algebraiczną, wbrew twierdzeniu Lindemanna. Zatem kwadratura koła nie jest możliwa.

## § 3. Tożsamość Eulera

Długa droga wiodąca do wyjaśnienia natury liczby  $\pi$  zaczyna się od Leonarda Eulera. W książce z 1748 r. „Introductio in analysin infinitorum” wykazał on, że funkcja wykładnicza określona w ciele  $C$  liczb zespolonych związana jest z funkcjami trygonometrycznymi tożsamością

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad x + iy \in C$$

Dla  $x = 0$  i  $y = \pi$  otrzymujemy zdumiewająco prostą zależność między liczbą  $e$  (podstawa logarytmów naturalnych) a liczbą  $\pi$

$$(2) \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

(Warto wspomnieć, że współczesne oznaczenie ludolfiny przez grecką literę  $\pi$  pochodzi właśnie od Eulera).

Wzór Eulera bywa nazywany twierdzeniem o pięciu liczbach. Występuje w nim pięć najważniejszych liczb: zero, jeden,  $e$ ,  $\pi$  oraz  $i$ .

Liczby  $i$  oraz  $-1$  są algebraiczne. Z równości (2) wynika więc, że twierdzenie Lindemanna jest bezpośrednią konsekwencją nieco mocniejszego rezultatu, znanego jako

**Twierdzenie Hermite'a-Lindemanna.** Jeśli liczba zespolona  $a \neq 0$  jest algebraiczna, to liczba  $e^a$  nie jest algebraiczna.

Zobaczmy dalej, że twierdzenie Hermite'a-Lindemanna daje się wykazać przez sprowadzenie do sprzeczności. W tym celu należy zbadać konsekwencje założenia, że obie liczby  $a$  oraz  $e^a$  są algebraiczne. Jedną z konsekwencji tego założenia jest istnienie skończonego rozszerzenia  $Q(a, e^a)$  ciała  $Q$ . Należy więc zbadać to rozszerzenie. Przedtem jednak w dwu następnych punktach zajmiemy się ogólnymi własnościami rozszerzeń postaci  $F(a_1, a_2, \dots, a_q)$  ciała  $F$ .

## § 4. Twierdzenie Abela o elemencie pierwotnym

Rozszerzenie  $F(a_1, a_2, \dots, a_q)$  można przedstawić jako rozszerzenie pojedyncze. Ma bowiem miejsce

**Twierdzenie Abela.** Jeżeli liczby  $a_1, a_2, \dots, a_q$  są algebraiczne, to istnieje liczba algebraiczna  $a$  taka, że

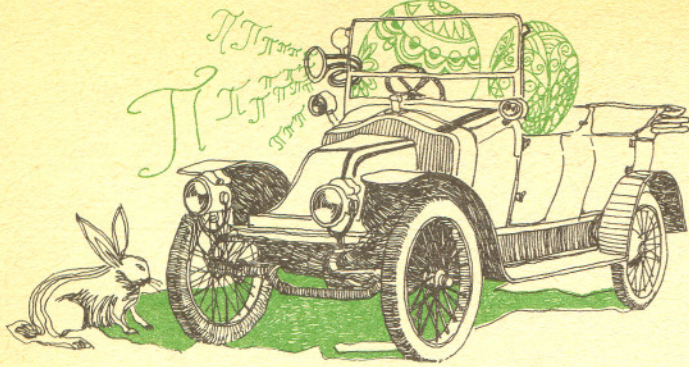
$$(3) \quad F(a_1, a_2, \dots, a_q) = F(a)$$

Liczba  $a$  o powyższej własności nazywa się elementem pierwotnym ciała  $F(a_1, a_2, \dots, a_q)$ .

Mamy na przykład  $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = Q(\sqrt{2+\sqrt{3}})$ . Istotnie, mamy  $Q(\sqrt{2+\sqrt{3}}) < Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ , bo

$$\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^3 - 9(\sqrt{2+\sqrt{3}})}{2}, \quad \sqrt{3} = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^3 - 11(\sqrt{2+\sqrt{3}})}{-2}$$

Zawieranie przeciwne jest oczywiste.



## § 5. Monomorfizmy i ich przedłużenia

Głębsze wniknięcie w strukturę rozszerzeń skończonych stało się możliwe po roku 1830, kiedy to genialny Ewaryst Galois odkrył, że system algebraiczny można badać analizując różnowartościowe odwzorowania systemu zachowujące działania. Postępowanie to jest analogiczne do badania figury geometrycznej poprzez analizę tych odwzorowań figury, które zachowują odległości między punktami. W naszych rozważaniach podstawową rolę będą odgrywać monomorfizmy ciała  $F$  w ciało  $C$ , to znaczy takie różnowartościowe odwzorowania  $\mathcal{S}: F \rightarrow C$ , że

$$\mathcal{S}(z_1 + z_2) = \mathcal{S}(z_1) + \mathcal{S}(z_2), \quad \mathcal{S}(z_1 z_2) = \mathcal{S}(z_1) \mathcal{S}(z_2).$$

Nietrudno zauważyć, że obraz  $\mathcal{S}(F)$  jest ciałem. Tak więc monomorfizm  $\mathcal{S}$  ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między ciałami  $F$  i  $\mathcal{S}(F)$ . Jeśli  $Q$  jest wielomianem o współczynnikach w ciele  $F$ , to  $Q^{\mathcal{S}}$  jest wielomianem, który ma odpowiadające im współczynniki w ciele  $\mathcal{S}(F)$ . Zauważmy, że  $(Q^{\mathcal{S}})^{\mathcal{S}} = (Q^{\mathcal{S}})'$ . Wynika stąd, że  $Q$  jest wielomianem rozdzielnym wtedy, gdy  $Q^{\mathcal{S}}$  jest wielomianem rozdzielnym.

Rozpatrzmy rozszerzenie  $E$  ciała  $F$  oraz monomorfizm  $\mathcal{S}: F \rightarrow C$ . Monomorfizm  $\mathcal{S}^*: E \rightarrow C$  nazywa się przedłużeniem monomorfizmu  $\mathcal{S}$ , jeśli  $\mathcal{S}^*(z) = \mathcal{S}(z)$  dla każdego  $z \in F$ . Omówimy przypadek, gdy  $E = F(a)$ .

**Lemat 1.** Liczba monomorfizmów  $\mathcal{S}^*: E = F(a) \rightarrow C$  przedłużających dany monomorfizm  $\mathcal{S}: F \rightarrow C$  jest równa

$$m = [E: F]$$

**Dowód.** Niech  $Q$  będzie wielomianem minimalnym liczby  $a$  (nad  $F$ ). Wielomian  $Q$  jest rozdzielnym, a więc również wielomian  $Q^{\mathcal{S}}$  jest rozdzielnym. Niech  $\mathcal{S}^*$  będzie przedłużeniem monomorfizmu  $\mathcal{S}$ .

Zauważmy, że przedłużenie to jest całkowicie określone przez wartość  $\mathcal{S}^*(a)$  na elemencie  $a$ . Z równości

$$\mathcal{S}^*(Q(a)) = Q^{\mathcal{S}}(\mathcal{S}^*(a))$$

i z założenia  $Q(a) = 0$  wynika, że  $\mathcal{S}^*(a)$  jest pierwiastkiem wielomianu  $Q^{\mathcal{S}}$ . Wielomian ten jest rozdzielnym, a więc ma  $m$  różnych pierwiastków. Istnieje więc co najwyżej  $m$  różnych przedłużeń monomorfizmu  $\mathcal{S}$ .

Z drugiej strony dla każdego pierwiastka  $a^*$  wielomianu  $Q^{\mathcal{S}}$  istnieje monomorfizm  $\mathcal{S}^*$  przedłużający monomorfizm  $\mathcal{S}$  i taki, że  $\mathcal{S}^*(a) = a^*$ .

Obraz elementu  $z = c_{m-1}a^{m-1} + \dots + c_1 a + c_0 \in F(a)$  jest dany wzorem

$$\mathcal{S}^*(z) = c_{m-1}^*(a^*)^{m-1} + \dots + c_1^*(a^*) + c_0^*,$$

gdzie  $c_j^* = \mathcal{S}(c_j)$  dla  $j = 0, 1, \dots, m-1$ .

Tym samym istnieje dokładnie  $m$  przedłużeń monomorfizmu  $\mathcal{S}$ .

Przyjmując w poprzednim lemacie za  $F$  ciało  $Q$  liczb wymiernych, a za  $\mathcal{S}$  odwzorowanie tożsamościowe otrzymujemy

**Wniosek 1.** Liczba różnych monomorfizmów  $\mathcal{S}^*: Q(a) \rightarrow C$  pozostawiających na miejscu każdą liczbę wymierną jest równa  $m = [Q(a): Q]$ .

Niech  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_m$  będą tymi monomorfizmami. Dla każdego  $u \in Q(a)$  obrazy

$$\mathcal{S}_1(u), \mathcal{S}_2(u), \dots, \mathcal{S}_m(u)$$

nazywają się liczbami sprzężonymi z  $u$ . Jeśli  $b \in Q(a)$  jest pierwiastkiem wielomianu nierozkładalnego nad  $Q$ , to każdy inny pierwiastek  $b^*$  tego wielomianu jest liczbą sprzężoną z  $b$ . Rzeczywiście, zgodnie z lematem 1 istnieje monomorfizm  $\mathcal{U}: Q(b) \rightarrow C$  pozostawiający na miejscu każdą liczbę wymierną i taki, że  $\mathcal{U}(b) = b^*$ . Lemat 1 dla  $F = Q(b)$ ,  $E = F(a_1, a_2, \dots, a_s) = Q(a)$  mówi, że monomorfizm  $\mathcal{U}$  można przedłużyć na przestrzeń  $Q(a)$  otrzymując monomorfizm  $\mathcal{S}_j$ , gdzie  $j$  jest jedną z liczb  $1, 2, \dots, m$ . Oczywiście  $\mathcal{S}_j(b) = \mathcal{U}(b) = b^*$ , a zatem  $b^*$  jest liczbą sprzężoną do  $b$ . (Rozpatrzmy dla przykładu cztery monomorfizmy ciała  $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ . Każdy z nich przeprowadza  $\sqrt{2}$  w  $\pm\sqrt{2}$  oraz  $\sqrt{3}$  w  $\pm\sqrt{3}$ . Mamy tu cztery możliwości wyboru znaków, po jednej dla każdego monomorfizmu. Wielomian nierozkładalny  $x^2 - 2$  ma dwa pierwiastki będące liczbami sprzężonymi. Zauważmy, że dwa pierwiastki wielomianu rozkładalnego nie muszą być sprzężone: liczby  $\sqrt{2}$  i  $\sqrt{3}$  są pierwiastkami wielomianu  $x^4 - 5x^2 + 6$ , ale nie są sprzężone.)

„Monomorfizm” bywa też nazywany zanurzeniem albo włożeniem. W § 5 wyjaśniony jest więc problem, na ile sposobów  $Q(a)$  wkłada się w  $C$  tak, by żadne liczby wymierne „nie ruszyły się”. Na przykład gdy  $a = \sqrt{2}$ , otrzymujemy  $[Q(\sqrt{2}): Q] = 2$ . Ciało  $Q(\sqrt{2})$  można włożyć w  $C$  na dwa sposoby

$$a + b\sqrt{2} \rightarrow a + b\sqrt{2}$$

oraz

$$a + b\sqrt{2} \rightarrow a - b\sqrt{2}.$$

## § 6. Ślad, norma i rozmiar

Dla każdej liczby  $b \in Q(a)$  definiuje się:

1. Ślad liczby  $b$ :  $\text{Tr}(b) = \sum_{j=1}^m \mathcal{S}_j(b)$ ,

2. Norma liczby  $b$ :  $\text{N}(b) = \prod_{j=1}^m \mathcal{S}_j(b)$ ,

3. Rozmiar liczby  $b$ :  $\text{Roz}(b) = \max_{1 \leq j \leq m} |\mathcal{S}_j(b)|$ ; znaczenie symboli

$\mathcal{S}_1(b), \dots, \mathcal{S}_m(b)$  jest wyjaśnione przy końcu poprzedniego paragrafu.

§ 6 poświęcony jest głównie dowodowi zdania „ślad i norma liczby  $b \in Q(a)$  są liczbami wymiernymi”.

Zauważmy, że  $\text{Tr}(b) \in Q$  oraz  $\text{N}(b) \in Q$ . Rzeczywiście, niech

$$Q(z) = z^k + d_{k-1}z^{k-1} + \dots + d_1z + d_0$$

będzie wielomianem minimalnym liczby  $b$  (nad  $Q$ ). Na mocy lematu 1 liczba monomorfizmów ciała  $Q(b)$  pozostawiających na miejscu liczby wymierne jest równa  $k = [Q(b): Q]$ . Oznaczmy te monomorfizmy przez  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_k$ .

Liczby  $\mathcal{U}_l(b)$ ,  $l = 1, \dots, k$ , są różnymi pierwiastkami wielomianu  $Q(z)$ .

Na mocy wzorów Viète'a

$$\sum_{l=1}^k \mathcal{U}_l(b) = -d_{k-1} \in Q, \quad \prod_{l=1}^k \mathcal{U}_l(b) = (-1)^k d_0 \in Q.$$

Każdy monomorfizm ciała  $Q(a)$  pozostawiający na miejscu liczby wymierne jest przedłużeniem jednego z monomorfizmów  $\mathcal{U}_j$ .

Na mocy lematu 1 liczba przedłużeń monomorfizmu  $\mathcal{U}_j$  do monomorfizmu ciała  $Q(a)$  jest równa  $m/k = [Q(a): Q(b)]$  i nie zależy od  $j$ .

Wynika stąd, że

$$\text{Tr}(b) = \sum_{j=1}^m \mathcal{S}_j(b) = (m/k) \sum_{l=1}^k \mathcal{Q}_l(b) \in \mathcal{Q},$$

$$\mathbf{N}(b) = \prod_{j=1}^m \mathcal{S}_j(b) = \left( \prod_{l=1}^k \mathcal{Q}_l(b) \right)^{m/k} \in \mathcal{Q}.$$

Tym samym wykazaliśmy, że ślad i norma liczby  $b \in \mathcal{Q}(a)$  są liczbami wymiernymi. Zauważmy, że odwzorowanie  $\mathbf{N}: \mathcal{Q}(a) \rightarrow \mathcal{Q}$  jest mnożliwe, oraz  $\mathbf{N}(b) = 0$  tylko wtedy, gdy  $b = 0$ .  
Odwzorowanie  $\text{Tr}: \mathcal{Q}(a) \rightarrow \mathcal{Q}$  jest addytywne i różnowartościowe, bo  $\text{Tr}(b) = mb$  dla każdego  $b \in \mathcal{Q}$ . Wniosujemy stąd, że w przestrzeni liniowej  $\mathcal{Q}(a)$  nad ciałem  $\mathcal{Q}$  odwzorowanie

$$(x, y) \rightarrow \text{Tr}(xy)$$

jest niezdegenerowaną (nie równą tożsamościowo zeru) formą dwuliniową. Łatwo teraz wykazać, że dla każdego liniowego odwzorowania  $\mathcal{S}: \mathcal{Q}(a) \rightarrow \mathcal{Q}$  istnieje dokładnie jeden element  $y \in \mathcal{Q}(a)$  taki, że  $\mathcal{S}(x) = \text{Tr}(xy)$  dla wszystkich  $x \in \mathcal{Q}(a)$ .

Odwzorowanie  $\mathcal{S}: \mathcal{Q}(a) \rightarrow \mathcal{C}^m$  dane wzorem

$$\mathcal{S}(b) = (\mathcal{S}_1(b), \mathcal{S}_2(b), \dots, \mathcal{S}_m(b))$$

jest addytywne, liniowe nad  $\mathcal{Q}$  i różnowartościowe.

(Liniowość wynika stąd, że  $\mathcal{S}_j(cb) = \mathcal{S}_j(c)\mathcal{S}_j(b) = c\mathcal{S}_j(b)$  dla każdego  $c \in \mathcal{Q}$ .)

Odwzorowanie  $\text{Roz}: \mathcal{Q}(a) \rightarrow [0, \infty]$  jest dodatnio jednorodne w tym sensie, że dla każdego  $c \in \mathcal{Q}$

$$\text{Roz}(cb) = |c|\text{Roz}(b).$$

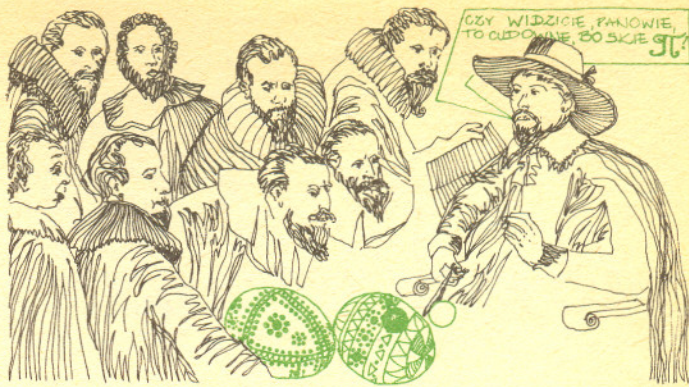
## § 7. Liczby algebraiczne całkowite

Liczby całkowite tworzą zbiór  $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ . Liczba wymierna należy do  $\mathbf{Z}$  wtedy, gdy jest pierwiastkiem jakiegoś unormowanego wielomianu stopnia 1 o współczynnikach w zbiorze  $\mathbf{Z}$ . Fakt ten wskazuje, że pojęcie liczby całkowitej może być uogólnione.

Mówimy, że liczba zespolona jest algebraiczna całkowita, jeśli jest pierwiastkiem jakiegoś unormowanego wielomianu o współczynnikach w zbiorze  $\mathbf{Z}$ . Można wykazać, że wielomian minimalny liczby algebraicznej całkowitej (nad  $\mathcal{Q}$ ) ma współczynniki w zbiorze  $\mathbf{Z}$ .

Suma (a także iloczyn) liczb algebraicznych całkowitych jest liczbą algebraiczną całkowitą. Dla każdej liczby algebraicznej  $b$  istnieją liczby dodatnie  $c \in \mathbf{Z}$  o tej własności, że  $cb$  jest liczbą algebraiczną całkowitą. Każda taka liczba  $c$  nazywa się mianownikiem liczby  $b$  i jest oznaczona symbolem  $\text{Mian}(b)$ . Zbiór wszystkich algebraicznych całkowitych liczb z ciała  $\mathcal{Q}(a)$  będziemy oznaczać symbolem  $J(a)$ . Rozpatrzmy dowolną liczbę  $b \in J(a)$ . Wielomian minimalny liczby  $b$  (nad  $\mathcal{Q}$ ) ma współczynniki w zbiorze  $\mathbf{Z}$ , a więc suma i iloczyn pierwiastków tego wielomianu należą do  $\mathbf{Z}$ . Powtarzając rozumowanie z poprzedniego paragrafu przekonujemy się, że  $\text{Tr}(b) \in \mathbf{Z}$  i  $\mathbf{N}(b) \in \mathbf{Z}$ .

Jak łatwo zauważyć zbiór  $J(a)$  jest grupą względem dodawania (mówimy krótko: grupą addytywną). Obrazy  $\mathcal{Q}(a)$  i  $J(a)$  przy odwzorowaniu  $\mathcal{S}: \mathcal{Q}(a) \rightarrow \mathcal{C}^m$  będziemy też oznaczać przez  $\mathcal{Q}(a)$  i  $J(a)$ . Stwierdzamy, że  $J(a)$  jest addytywną podgrupą w przestrzeni kartezjańskiej  $\mathcal{C}^m = \mathbf{R}^{2m}$ . Wykażemy, że każdy ograniczony podzbiór  $K$  w  $J(a)$  jest skończony. Zauważmy, że każdy element  $b \in J(a)$  taki, że  $\mathcal{S}(b) \in K$  jest pierwiastkiem wielomianu  $Q(z)$  unormowanego i minimalnego dla  $b$  (nad  $\mathcal{Q}$ ); wystarczy wykazać, że zbiór odpowiednich wielomianów  $Q(z)$  jest skończony. Współczynniki wielomianu  $Q(z)$  są elementarnymi wielomianami symetrycznymi od pierwiastków tego wielomianu.



Pierwiastki te występują wśród liczb  $\mathcal{S}_j(b)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , a więc pozostają wspólnie ograniczone, gdy  $\mathcal{S}(b)$  przebiega ograniczony zbiór  $K$ . Zatem każdy ze współczynników wielomianu  $Q(z)$  przebiega zbiór ograniczony. Ponieważ współczynniki te są liczbami całkowitymi, więc odpowiednich wielomianów  $Q(z)$  jest skończenie wiele. Ma miejsce następujący

**Lemat 2.** Jeśli  $G$  jest addytywną podgrupą przestrzeni  $\mathbf{R}^s$ , o tej własności, że każdy ograniczony podzbiór  $K \in G$  jest skończony, to istnieją elementy  $v_1, v_2, \dots, v_M \in G$  liniowo niezależne w  $\mathbf{R}^s$ , takie, że  $G$  jest zbiorem kombinacji liniowych postaci

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_M v_M, \quad \alpha_j \in \mathbf{Z}, j = 1, 2, \dots, M.$$

Przyjmując  $G = J(a)$  i wykorzystując okoliczności, że  $\mathcal{S}$  jest izomorfizmem przestrzeni liniowych  $\mathcal{Q}(a)$  i  $\mathcal{Q}(a)$  (nad ciałem  $\mathcal{Q}$ ) otrzymuje się następujący

**Wniosek 2.** Istnieją takie elementy  $v_1, v_2, \dots, v_M \in J(a)$  liniowo niezależne w przestrzeni  $\mathcal{Q}(a)$ , że  $J(a)$  jest zbiorem kombinacji liniowych postaci

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_M v_M \quad \alpha_j \in \mathbf{Z}, j = 1, 2, \dots, M.$$

Liczba  $M$  jest stopniem rozszerzenia  $\mathcal{Q}(a)$ .

**Dowód.** Elementy  $v_j$  są określone równością  $\mathcal{S}(v_j) = v_j$  dla  $j = 1, 2, \dots, M$ . Rozpinają one całą przestrzeń  $\mathcal{Q}(a)$ , bo dla każdej liczby  $b \in \mathcal{Q}(a)$

$$\text{Mian}(b) \cdot b \in J(a).$$

Stąd wynika, że jest to baza w  $\mathcal{Q}(a)$ , a więc  $M = [\mathcal{Q}(a): \mathcal{Q}]$ .

**Z § 7 najbardziej istotny jest „Wniosek 2”, opisujący budowę zbioru liczb algebraicznych całkowitych  $J(a)$ .**

## § 8. Lematy Siegela

Jeżeli przedmiotów w szufladach jest więcej niż szuflad, to istnieje szuflada zawierająca co najmniej dwa przedmioty. Na tej oczywistej zasadzie „szufladkowej” opiera się dowód lematu Carla Ludwiga Siegela o jednorodnym układzie równań liniowych o współczynnikach całkowitych.

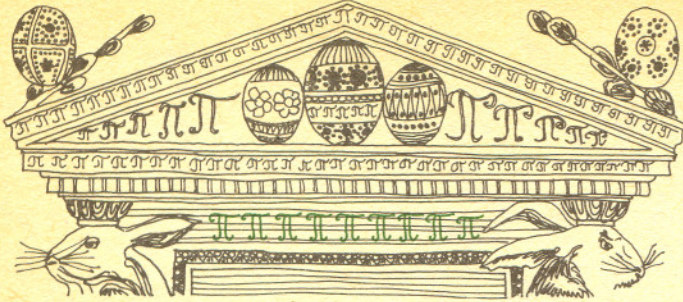
**Lemat 3.** Rozpatrzmy  $k$  jednorodnych równań liniowych o liczbie niewiadomych  $n > k$  i całkowitych współczynnikach  $b_{ij}$

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ b_{k1}x_1 + \dots + b_{kn}x_n = 0. \end{cases}$$

Załóżmy, że  $|b_{ij}| \leq B$  dla wszystkich  $i, j$ . Wówczas istnieje takie niezerowe rozwiązanie w liczbach całkowitych

$x_j \in \mathbf{Z}, j = 1, 2, \dots, n$ , że

$$\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq 2(nB)^{\frac{k}{n-k}}.$$



Funkcje te są algebraicznie niezależne, bo jeśli  $P \neq 0$ , to

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(z, e^z) = \infty, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Podstawową własnością funkcji wykładniczej jest równość  $D(e^z) = e^z$ . Operacja różniczkowania  $D$  odwzorowuje  $E(z, e^z)$  w siebie. Jeśli  $E = Q(a, e^a)$ , to istnieje nieskończenie wiele takich liczb  $w \in \mathbb{C}$ , że  $h(w) \in E$  dla wszystkich  $h \in E(z, e^z)$ . Liczbami tymi są np.  $a, 2a, 3a, \dots$

Wykorzystamy następujący

**Lemat 5.** Rozpatrzmy liczby algebraiczne  $a_1, a_2, \dots, a_q$  oraz rozszerzenie  $E = Q(a_1, \dots, a_q)$ . Niech  $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  będą takimi funkcjami holomorficznymi, że  $D$  odwzorowuje  $E(f, g)$  w siebie. Niech  $w \in \mathbb{C}$  będzie taką liczbą, że  $h(w) \in E$  dla każdego  $h \in E(f, g)$ . Wówczas, jeśli  $h = P(f, g)$ , gdzie  $P$  jest wielomianem stopnia  $r$ , to dla każdego  $p = 0, 1, \dots$  zachodzi nierówność

$$(6) \quad \text{Roz}(D^p h(w)) \leq \text{Roz}(P)p!r^p C^{p+r}$$

(Tu  $\text{Roz}(P)$  oznacza największy rozmiar współczynników wielomianu  $P$ ).

Ponadto liczby  $h(w), Dh(w), \dots, D^p h(w)$  mają wspólny mianownik taki, że

$$(7) \quad \text{Mian}(h(w), Dh(w), \dots, D^p h(w)) \leq \text{Mian}(P)C^{p+r}.$$

(Tu  $\text{Mian}(P)$  oznacza mianownik wspólny dla wszystkich współczynników wielomianu  $P$ ).

**Dowód.** Istnieją wielomiany  $P_j$  dwu zmiennych,  $j = 1, 2$ , takie że  $Df = P_1(f, g), Dg = P_2(f, g)$ . Rozpatrzmy odwzorowanie  $D_0$  algebry wielomianów w siebie określone wzorem

$$D_0 P = (D_1 P)P_1 + (D_2 P)P_2$$

(tu  $D_j P, j = 1, 2$ , oznaczają pochodne cząstkowe). Sprawdzamy łatwo, że dla każdego  $P$

$$D^p h(w) = D^p P(f(w), g(w)) = (D_0^p P)(f(w), g(w)).$$

Zauważmy, że wielomian  $P$  stopnia  $r$  spełnia warunek

$$P^{\mathcal{S}_j} < \text{Roz}(P)(1 + z_1 + z_2)^r$$

w tym sensie, że wartość bezwzględna każdego współczynnika wielomianu  $P^{\mathcal{S}_j}$  jest nie większa od odpowiedniego współczynnika wielomianu po prawej stronie.

Ta relacja majoryzowania zachowuje się przy dodawaniu i mnożeniu wielomianów oraz przy obliczaniu pochodnych cząstkowych, a więc zachowuje się przy odwzorowaniu  $D_0$ . Przez indukcję wykazuje się, że

$$D_0^p (P^{\mathcal{S}_j}) < \text{Roz}(P)p!r^p C^p (1 + z_1 + z_2)^{r+pt},$$

gdzie  $t$  oznacza większy ze stopni wielomianów  $P_1$  i  $P_2$ . Jeśli  $Q_1 < Q_2$ , to  $|Q_1(z_1, z_2)| \leq Q_2(|z_1|, |z_2|)$ . Stąd wynika, że dla każdego  $j$

$$|D_0^p (P^{\mathcal{S}_j})(\mathcal{S}_j(f(w)), \mathcal{S}_j(g(w)))| \leq \text{Roz}(P)p!r^p C^{p+r}.$$

Dla dowodu żądanej nierówności wystarczy teraz zauważyć, że

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_j(D^p h(w)) &= \mathcal{S}_j(D_0^p P(f(w), g(w))) = \\ &= (D_0^p P)^{\mathcal{S}_j}(\mathcal{S}_j(f(w)), \mathcal{S}_j(g(w))) = \\ &= D_0^p (P^{\mathcal{S}_j})(\mathcal{S}_j(f(w)), \mathcal{S}_j(g(w))). \end{aligned}$$

Oszacowanie mianownika liczby  $D^p h(w)$  opiera się na nierówności

$$\text{Mian}(D_0 P) \leq \mu \text{Mian}(P),$$

gdzie  $\mu$  jest wspólnym mianownikiem dla wielomianów  $P_1$  i  $P_2$ , oraz na prostym rozumowaniu indukcyjnym.

**Dowód.** Rozpatrzmy liniowe odwzorowanie  $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  o macierzy  $(b_{ij})$ .

Dla dodatniej liczby całkowitej  $R$  połóżmy

$$Z^n(R) = \{x \in \mathbb{Z}^n, |x_j| \leq R, j = 1, \dots, n\}.$$

Zauważmy, że  $\mathcal{L}$  odwzorowuje  $Z^n(R)$  w  $Z^k(nBR)$ . Liczba elementów w  $Z^n(R)$  jest równa  $(2R+1)^n$ , a liczba elementów w  $Z^k(nBR)$  jest równa  $(2nBR+1)^k$ . Nierówność  $(2R+1)^n > (2nBR+1)^k$  jest spełniona dla dostatecznie dużych  $R$ , w szczególności dla

$$R = (nB)^{\frac{k}{n-k}}.$$

Zgodnie z zasadą szufladkową w zbiorze  $Z^n(R)$  znajdują się dwa różne elementy mające ten sam obraz przy odwzorowaniu  $\mathcal{L}$ . Różnica tych elementów  $x \in Z^n(2R)$  jest poszukiwanym całkowitoliczbowym rozwiązaniem rozpatrywanego układu równań.

Oznaczmy przez  $J(a)$  zbiór liczb algebraicznych całkowitych należących do ciała  $\mathbb{Q}(a)$ . Nietrudno zauważyć, że zbiór ten jest zamknięty względem dodawania oraz mnożenia. Jak wykazał Siegel, rezultat analogiczny do lematu 3 ma miejsce dla układów równań liniowych o współczynnikach należących do  $J(a)$ .

**Lemat 4.** Rozpatrzmy  $k$  jednorodnych równań liniowych o liczbie niewiadomych  $n > k$  i współczynnikach  $b_{ij} \in J(a)$

$$\begin{cases} b_{11}z_1 + \dots + b_{1n}z_n = 0 \\ \dots \\ b_{k1}z_1 + \dots + b_{kn}z_n = 0 \end{cases}$$

Załóżmy, że  $\text{Roz}(b_{ij}) \leq B$  dla wszystkich  $i, j$ . Wówczas istnieje takie niezerowe rozwiązanie układu  $z_j \in J(a), j = 1, \dots, n$ , że

$$(4) \quad \max_{1 \leq j \leq n} \text{Roz}(z_j) \leq C(CnB)^{\frac{k}{n-k}}.$$

(Tu i w dalszym ciągu symbolem  $C$  będziemy oznaczać różne stałe zależne jedynie od ciała  $\mathbb{Q}(a)$ ).

## § 9. Algebra funkcji holomorficznyc $E(z, e^z)$

§ 9 poświęcony jest głównie dowodowi technicznego lematu 5.

Rozpatrzmy ciało  $E$  zawarte w  $\mathbb{C}$ , oraz holomorficzne funkcje  $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Założenie holomorficzności oznacza istnienie w każdym punkcie  $z_0 \in \mathbb{C}$  pochodnych zespolonych  $Df = f'$  i  $Dg = g'$ , gdzie

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad g'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}.$$

Symbolem  $E(f, g)$  będziemy oznaczać zbiór złożony z wszystkich funkcji postaci  $P(f, g)$ , gdzie  $P$  jest wielomianem dwóch zmiennych o współczynnikach w ciele  $E$ .

Mówimy, że funkcje  $f$  i  $g$  są algebraicznie niezależne, jeśli z równości  $P(f, g) \equiv 0$  wynika, że  $P \equiv 0$ .

Liczby  $a$  i  $e^a$  są wartościami w  $a$  funkcji holomorficznyc  $z$  i  $e^z$ .

## § 10. Szkic zasadniczej części dowodu

Jeśli obie liczby  $a$  i  $e^a$  są algebraiczne, to ciało  $E = \mathbb{Q}(a, e^a)$  oraz funkcje  $f(z) = z$  i  $g(z) = e^z$  spełniają założenia lematu 5.

Wykażemy, że wynika stąd sprzeczność. Zatem założenie, że  $\pi$  jest liczbą algebraiczną, okazuje się fałszywe.

Rozpatrzmy takie punkty  $w_1, w_2, \dots, w_T \in C$ , że  $h(w_l) \in E$  dla każdego  $h \in E(f, g)$  i każdego  $l = 1, 2, \dots, T$ , gdzie  $T$  wybierzemy tak, by  $T > 12 [E: Q] + 12$ . Wiemy, że punktów płaszczyzny o powyższej własności jest nieskończenie wiele. To, że za  $T$  można przyjąć dowolnie dużą liczbę, ma rozstrzygające znaczenie dla całego dowodu.

Niech  $r$  będzie wielokrotnością liczby  $2T$  (potem rozpatrzmy granicę przy  $r$  dążącym do nieskończoności). Funkcja

$$(8) \quad h = \sum_{i,j=1}^r b_{ij} f^i g^j, \quad b_{ij} \in E$$

należy do  $E(f, g)$ . Niech  $n = r^2/(2T)$ . Wybierzemy współczynniki  $b_{ij}$ , nie wszystkie równe zeru, w taki sposób, aby równość  $D^p h(w_l) = 0$  miała miejsce dla każdego  $l = 1, 2, \dots, T$  i każdego  $p = 0, 1, \dots, n-1$ . Problem ten sprowadza się do układu  $Tn$  jednorodnych równań liniowych o  $r^2 = 2Tn$  niewiadomych  $b_{ij}$ . Współczynniki tego układu mają postać  $D^p(f^i g^j)(w_l)$ . Zauważmy, że  $f^i g^j = P(f, g)$ , gdzie  $P$  jest jednomianem stopnia największego niż  $2r$ , oraz  $\text{Roz}(P) = 1$ . Wykorzystując lemat 5 (nierówności 6 i 7) stwierdzamy, że

$$(9) \quad \text{Roz}(D^p(f^i g^j)(w_l)) \leq p!(2r)^p C^{p+2r} \leq n!(2r)^n C^{n+2r}$$

jak również, że wspólny mianownik współczynników układu jest nie większy niż

$$(10) \quad (C^{n+2r})^T.$$

Mnożąc wszystkie równania układu przez wspólny mianownik współczynników, na mocy nierówności Siegela (4) stwierdzamy, że układ ma niezerowe rozwiązanie w liczbach algebraicznych całkowitych  $b_{ij}$  takie, że

$$\text{Roz}(b_{ij}) \leq C(Cr^2 n!(2r)^n C^{n+2r}) \frac{Tn}{2Tn - Tn}.$$

Ponieważ  $n = r \frac{r}{2T}$  jest większe od  $r$ , oraz  $n! \leq n^n$ , więc

$$(11) \quad \text{Roz}(b_{ij}) \leq Cn^2 n^n 2^n n^n (C^3)^n \leq Cn^{2n}.$$

Funkcje  $f$  i  $g$  są algebraicznie niezależne, więc  $h \neq 0$ . Zatem istnieje taka liczba  $s \geq n$ , że  $D^p h(w_l) = 0$  dla  $p < s$  i  $l = 1, 2, \dots, T$ , oraz taka, że  $D^s h(w_l) \neq 0$  dla pewnego  $l$ . Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że

$$v = D^s h(w_l) \neq 0.$$

Oszacujemy  $c = \text{Mian}(v)$ . Mamy  $h = P(f, g)$ , gdzie  $\text{Mian}(P) = 1$ , bo liczby  $b_{ij}$  są algebraiczne całkowite. Zatem, na mocy lematu 5 (nierówność (7)), dla dużych  $s$  jest

$$c \leq C^{2r+s} < s^s.$$

Ten sam lemat daje oszacowanie na rozmiar liczby  $v$ . Zauważmy, że  $P$  ma stopień  $2r$  oraz  $\text{Roz}(P) = \max \text{Roz}(b_{ij})$ , a więc, wobec

(11), nierówność (6) daje dla dużych  $s$

$$(12) \quad \text{Roz}(v) < Cn^{2n} \cdot s!(2r)^s C^{s+2r} < s^{5s}.$$

Niezerowa całkowita liczba  $N(cv)$  jest iloczynem  $[E: Q]$  liczb sprzężonych do  $cv$ ; jedną z nich jest  $cv$ . Z (12) wynika

$$(13) \quad 1 \leq |N(cv)| < |cv|(c \text{Roz}(v))[E: Q] - 1 < < |v|s^s[E: Q](s^s)[E: Q] - 1 < |v|s^{6s}[E: Q].$$

Oszacujemy teraz  $|v|$  z góry wykazując, że jest to liczba bardzo mała. Skorzystamy w tym celu z zasady maksimum, która mówi, że funkcja holomorphyzna w kole domkniętym osiąga największą wartość bezwzględną na brzegu tego koła. Funkcja

$$H(z) = \frac{h(z)}{\prod_{l=1}^T (z - w_l)^s}$$

jest holomorphyzna w płaszczyźnie  $C$ , bo zera mianownika odpowiadają zerom licznika. Jak łatwo zauważyć

$$(14) \quad |v| \leq |H(w_l)|s!C^s.$$

Oszacujemy wartość bezwzględną funkcji  $H$  na okręgu  $|z| = s^{1/2}$  (dla dużych  $s$ ). Licznik szacujemy z wzoru (8).

Wykorzystując (11) i uwzględniając, że  $r < (2Ts)^{1/2}$  otrzymujemy dla dużych  $s$

$$|h(z)| \leq \text{Roz}(P) \cdot (s^{1/2})^r \cdot (e^{s^{1/2}})^r < C s^{2s} s^{s/2} s^{s/2} < s^{4s}.$$

Szacując z dołu mianownik otrzymujemy

$$\begin{aligned} \prod_{l=1}^T |z - w_l|^s &\geq \prod_{l=1}^T (s^{1/2} - |w_l|)^s = \\ &= s^{Ts/2} \prod_{l=1}^T \left[ \left( 1 - \frac{|w_l|}{s^{1/2}} \right)^{s^{1/2}} \right]^{s^{1/2}} > s^{Ts/2} C^{Ts/2}. \end{aligned}$$

Nierówność (14) i zasada maksimum daje dla dużych  $s$  oszacowanie

$$|v| < s!C^s |H(w_l)| < s!C^s \frac{s^{4s}}{s^{Ts/2} C^{Ts/2}} < \frac{s^{6s}}{s^{Ts/2} C^{Ts/2}}.$$

Wobec nierówności (13) wynika stąd, że dla dużych  $s$

$$1 < |v|s^{6s}[E: Q] < \frac{s^{6s}([E: Q] + 1)}{s^{Ts/2} C^{Ts/2}} = e^{\left( 6[E: Q] + 6 - \frac{T}{2} \right) s \log s - \frac{T}{2} s \log C}$$

W granicy przy  $r$  dążącym do nieskończoności  $s$  dąży do nieskończoności i prawa strona dąży do zera. Otrzymaliśmy sprzeczność. Tym samym dowód twierdzenia Lindemanna został zakończony.

## Literatura

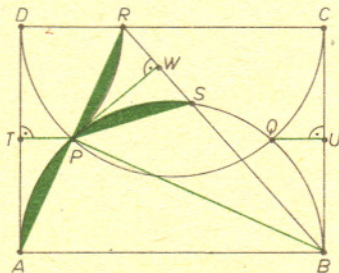
1. S. Lang, *Algebra*, PWN, Warszawa 1975,
2. G. Birkhoff, S. Mac Lane, *Przegląd algebry współczesnej*, PWN, Warszawa 1960,
3. A. Mostowski, M. Stark, *Algebra wyższa*, t. 3, PWN, Warszawa 1954,
4. F. Leja, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa 1973,
5. D. J. Struik, *Krótki zarys historii matematyki*, PWN, Warszawa 1960,
6. F. Cimpân, *Istoria numarului  $\pi$* , Bucuresti 1965 (jest tłumaczenie rosyjskie).



### Rozwiązanie zadania M 326.

Kąt  $APB$ , jako oparty na średnicy, jest prosty. Ponieważ  $AB = BR$ , więc punkty  $APR$  leżą na jednej prostej i  $AP = PR$  oraz  $BP$  jest dwusieczną kąta  $ABR$ . Wobec tego  $AP = PR = PS$ .

Niech  $T$  będzie rzutem prostokątnym  $P$  na  $AD$ ,  $U$  — rzutem  $Q$  na  $BC$ ,  $W$  — rzutem  $P$  na  $RS$ . Z przystawiania trójkątów  $APT$ ,  $RPW$  i  $SPW$  oraz z równości pól „zielonych” mamy a). Wobec  $QU = TP = RW = WS$  oraz  $TU = TP + PQ + QU = AB = BR = RW + WS + SB$  mamy  $PQ = SB$ , co daje b).

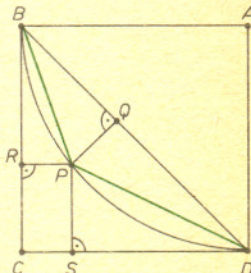


### Rozwiązanie zadania M 325.

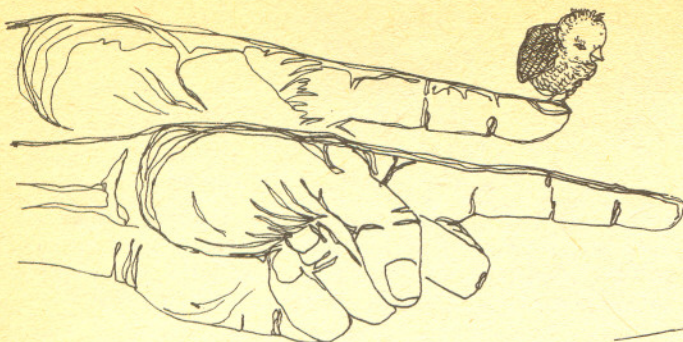
Ponieważ kąt wpisany jest równy kątowi dopisanemu opartemu na tym samym łuku (czyli między cięciwą i styczną w jej końcu), gdyż oba są równe połowie kąta środkowego opartego na tymże łuku, więc trójkąty  $BPQ$  i  $DPS$ , jak też  $BPR$  i  $DPQ$  są podobne. Stąd mamy, odpowiednio,

$$\frac{BP}{DP} = \frac{PQ}{PS} \quad \text{i} \quad \frac{BP}{DP} = \frac{PR}{PQ},$$

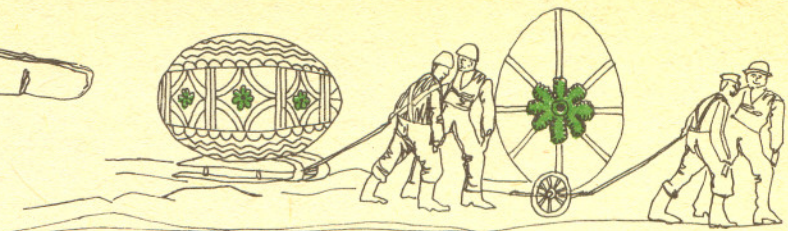
czyli  $PQ^2 = PR \cdot PS$ .







Zamieszczony artykuł jest skrótem pracy maturalnej autora, wówczas ucznia IV Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Krośnie. Opiekunką pracy była mgr Lucyna Rędziaś. Praca ta została wyróżniona złotym medalem na Konkursie Uczniowskich Prac Matematycznych w 1982 r., organizowanym przez Polskie Towarzystwo Matematyczne i redakcję *Delty*.



## O pewnym problemie z elementarnej teorii liczb

Mariusz SKAŁBA

Do napisania niniejszej pracy zainspirowała mnie lektura książki W. Sierpińskiego „Teoria liczb” cz. II. Znajduje się w niej dowód Andrzeja Schinzla, że 7 jest jedyną liczbą pierwszą spełniającą przy naturalnych  $x, y$  równanie

$$(1) \quad p = \frac{2x^2 - 1}{7} = 2y^2 - 1.$$

Znalazłem inny dowód tego twierdzenia. Oto jego szkic.

Z (1) wynika, że

$$\begin{cases} 7p + 1 = 2x^2 \\ p + 1 = 2y^2, \end{cases}$$

skąd po wymnożeniu stronami i oznaczeniu  $2xy = k$  otrzymujemy:

$$(2) \quad p(7p + 8) = (k + 1)(k - 1).$$

Ponieważ  $p$  jest liczbą pierwszą, więc  $p|k + 1$  lub  $p|k - 1$ . Rozpatrzmy zatem dwa przypadki.

Niech  $p|k + 1$ . Wtedy  $k + 1 = lp$ ,  $k - 1 = lp - 2$ , gdzie  $l \in \mathbb{N}$ .

Jeżeli podstawimy te wartości do równania (2) i rozwiążemy je względem  $p$ , to dostaniemy

$$p = \frac{8 + 2l}{l^2 - 7}.$$

Nie może być  $l = 1$  ani  $l = 2$ , gdyż byłoby wtedy  $p < 0$ .

Dla  $l = 3$  wzór powyższy daje  $p = 7$ . Sprawdzamy natychmiast, że trójka liczb  $p = 7, x = 5, y = 2$  spełnia (1).

Nie może być wreszcie  $l \geq 4$ , gdyż wtedy:

$$l(l - 1) > 11 \Leftrightarrow \frac{8 + 2l}{l^2 - 7} < 2,$$

gdy tymczasem dla każdej liczby pierwszej  $p$  jest  $p \geq 2$ .

Rozważając analogicznie przypadek  $p|k - 1$  stwierdzamy, że nie ma innych liczb pierwszych spełniających (1).

Z analizy tego dowodu wynika możliwość uogólnienia powyższego wyniku.

**Twierdzenie 1**

Niech dla  $i = 1, 2, f_i(x)$  będzie trójmianem kwadratowym o współczynnikach wymiernych.  $\Delta_i$  — jego wyróżnikiem, a  $A_i$  współczynnikiem przy  $x^2$ . Jeżeli  $\Delta_1 \Delta_2$  jest kwadratem liczby wymiernej oraz  $A_1 \Delta_2 - A_2 \Delta_1 \neq 0$ , to istnieje co najwyżej skończenie wiele takich liczb pierwszych  $p$ , że:

$$p = f_1(x) = f_2(y), \text{ gdzie } x, y \text{ są całkowite.}$$

Z dowodu twierdzenia 1 wynika ponadto efektywna metoda znajdowania wszystkich takich liczb pierwszych w konkretnych przypadkach.

**Przykład**

Niech  $m$  będzie liczbą naturalną oraz:

$$f_1(x) = \frac{x^2 + m^2}{m^2 + 1}, \quad f_2(y) = y^2 + 1.$$

Ponieważ spełnione są założenia twierdzenia 1, więc istnieje co najwyżej skończenie wiele takich liczb pierwszych  $p$ , że:

$$(3) \quad p = \frac{x^2 + m^2}{m^2 + 1} = y^2 + 1, \text{ gdzie } x, y \in \mathbb{N}.$$

Równanie (3) ma natomiast nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych  $p, x, y$ , gdyż sprowadza się do równania Pella:

$$x^2 - (m^2 + 1)y^2 = 1.$$

Korzystając ze wspomnianej efektywnej metody można w tym konkretnym przypadku udowodnić twierdzenie o wiele bardziej precyzyjne, a mianowicie:

jeżeli liczby naturalne  $p, x, y$  spełniają (3) oraz  $p$  jest liczbą pierwszą, to:

$$p = 4m^2 + 1, \quad x = 2m^2 + 1, \quad y = 2m.$$

**Twierdzenie 2 (uzupełniające)**

Jeżeli wyróżnik trójmianu kwadratowego  $f(x)$  o współczynnikach wymiernych jest kwadratem liczby wymiernej, to istnieje co najwyżej skończenie wiele takich liczb pierwszych  $p$ , że:

$$p = f(x), \text{ gdzie } x \text{ jest całkowita.}$$

Analiza założeń twierdzenia 1 i intuicja skłoniły mnie do wysunięcia następujących przypuszczeń.

**Przypuszczenie 1**

Jeżeli żadna z liczb  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1 \Delta_2$  nie jest kwadratem liczby wymiernej oraz spełnione są następujące warunki:

- 1) równanie  $n = f_1(x) = f_2(y)$  ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych  $n, x, y$ ,
- 2) nie ma takiej liczby naturalnej  $m > 1$ , że dla każdej trójki liczb całkowitych  $n, x, y$  spełniającej równanie  $n = f_1(x) = f_2(y)$  jest  $m|n$ ,

to istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych  $p$  takich, że:

$$p = |f_1(x)| = |f_2(y)|, \text{ gdzie } x, y \text{ całkowite.}$$

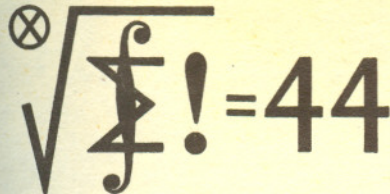
**Przypuszczenie 2**

Jeżeli żadna z liczb  $\Delta_1, \Delta_2$  nie jest kwadratem liczby wymiernej,  $\Delta_1 \Delta_2$  jest takim kwadratem, oraz  $A_1 \Delta_2 - A_2 \Delta_1 = 0$  i spełnione są warunki 1) i 2), to zachodzi teza przypuszczenia 1.

Już gdy napisałem pracę maturalną, profesor Andrzej Schinzel podał mi kontrprzykład obalający przypuszczenie 1. Natomiast przypuszczenie 2 jest prawdopodobnie prawdziwe, gdyż wynika z następującej znanej hipotezy:

jeżeli  $f(x)$  jest nierozkładalnym trójmianem kwadratowym o współczynnikach całkowitych i nie ma stałego czynnika większego od 1, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych  $p$ , że

$$p = |f(x)|, \text{ gdzie } x \text{ jest całkowite.}$$



# Klub 44

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkie rozwiązań zamieszczamy w nr  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Deltę”

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Klub 44 jest już zbiorem niepustym !

Pan Jerzy Janowicz z Bolesławca, będący od wielu miesięcy nieprzerwanie liderem ligi, przekroczył wymagany limit 44 punktów w dziesiątej kolejce startów i znalazł się w ten sposób w Klubie 44.

Serdecznie gratulujemy !

Nazwisko pana Janowicza zniknie teraz z czołówki tabeli ligowej. Mamy nadzieję, że nie na długo. Nadwyżka  $49,88 - 44 = 5,88$  punktów to godna zaliczka na poczet ponownego startu.

Rzut oka na tabelę ligową pozwala przypuszczać, że już wkrótce pan Janowicz przestanie być w Klubie 44 osamotniony.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 8/1982

Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	49,88pkt
Jacek Uryga	- Bytom	36,66pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	32,98pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	31,17pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	24,87pkt
Dariusz Sowidzraś	- Szczecin	20,22pkt

Współczynniki trudności zadań 28, 29, 30:  
2,65    2,37    2,35

## Zadania nr 49, 50, 51

Termin nadsyłania rozwiązań: 31.05.1983 r.

49. W  $n$ -tym wierszu trójkąta Pascala, tj. wśród liczb  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ , jest  $P_n$  liczb parzystych i  $N_n$  liczb nieparzystych. Znaleźć wszystkie wartości  $n$ , dla których  
a)  $P_n = N_n$ ,    b)  $P_n = N_n + 1$ ,    c)  $P_n = N_n - 1$ .

50. W czworokącie  $ABCD$  wpisanym w koło boki  $BC$  i  $CD$  są równej długości. Dowieść, że przekątna  $AC$  jest dłuższa od średniej arytmetycznej długości boków  $AB$  i  $AD$ .

51. Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!)$ .

## Rozwiązania zadań z numeru 11/1982

37. Oznaczmy przez  $Q$  dany czworokąt, a przez  $R$  — czworokąt o wierzchołkach w środkach kół określonych w zadaniu. Każdy wierzchołek czworokąta  $Q$  leży na pewnym boku czworokąta  $R$ , a wychodzące z tego wierzchołka boki  $Q$  tworzą z bokiem  $R$  równe kąty. Stąd już łatwo wynika równość sum przeciwległych kątów czworokąta  $R$  i możliwość opisania na nim okręgu.

38. Niech  $j_k$  oznacza liczbę naturalną, której zapis dziesiętny składa się z  $2k$  jedynek, zaś  $l_k$  — liczbę  $2k$  — cyfrową mającą na początku i na końcu jedynek, a poza tym zera.

Wszystkie te liczby są podzielne przez 11, co łatwo wynika z równości  $j_k = \sum_{i=0}^{k-1} 11 \cdot 10^{2i}$ ,

$l_k = j_k - 10 \cdot j_{k-1}$ . Jeśli teraz  $x$  jest dowolną  $2n$  cyfrową liczbą palindromiczną, a kolejnych cyfrach  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ , to dzieli się ona przez 11, bowiem wówczas  $x = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot l_{n-k} \cdot 10^k$ . Zatem wśród takich liczb jedynie  $x = 11$  jest liczbą pierwszą.

39. Najkrótszy znany nam rozkład jedynki na sumę odwrotności różnych liczb nieparzystych to

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{231}.$$

