

SPIS TREŚCI

NUMERU 7 (115)

Uniwersalny Domowy Integrator Bez tranzystorowy	str. 1
O geometrii wewnętrznej <i>prof. dr Karol Borsuk</i>	str. 2
Ponad 50 rzędów wielkości, czyli przewodnictwo ciał stałych <i>dr Andrzej Hennel</i>	str. 3
Ramiona spiralne <i>doc. dr Jerzy Stodółkiewicz</i>	str. 6
Zadania	str. 7
Mała Delta	str. 8
O polu prostokąta <i>prof. dr Marek Kuczma</i>	str. 10
Jak odkryliśmy hiperjądra atomowe <i>prof. dr Jerzy Pniewski</i>	str. 13
Wielościanny z minimalną liczbą powtórzeń <i>Małgorzata Zalewska</i>	str. 14
Laboratorium w lesie	str. 16
Mizar <i>dr Andrzej Trybulec</i>	str. 17

„Delta”
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:

dr Bogdan Cichocki
 dr hab. Jan A. Gaj
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 prof. dr Kazimierz Goebel
 doc. dr Tomasz Hofmokr
 doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
 doc. dr Tadeusz Iwiński
 doc. dr Tadeusz Jarzembowski
 prof. dr Leon Jeśmanowicz
 prof. dr Marek Kuczma
 mgr Andrzej Mąkowski
 prof. dr Bogdan Paczyński
 dr Zbigniew Plochocki
 prof. dr Sławomir Ruciński
 prof. dr Konrad Rudnicki
 doc. dr Jerzy Sawicki
 prof. dr Zbigniew Semadeni
 prof. dr Grzegorz SitarSKI
 doc. dr Kazimierz Stępień

prof. dr Mieczysław Subotowicz
 doc. dr Andrzej Szymacha
 doc. dr Stefan Turnau
 doc. dr Aniela Wolska
 doc. dr Andrzej Woszczyk
 prof. dr Wojciech Zakowski —
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr Tomasz Chlebowski
 mgr Maciej Jędrzejczak
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
 dr Marek Kordos — red. nac.
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
 dr inż. arch. Jacek Mazur
 dr Jerzy Ryll
 dr Michał Szurek
 doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji
 ul. Koszykowa 6a
 00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”
 ul. Noakowskiego 14
 00-666 Warszawa
 Nakład 50 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
 2,50 ark. druk;
 papier offsetowy V kl. 70 g.
 Wydrukowano w drukarni
 im. Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65.
 Nr zam. 4228/83 M-10

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:

— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach,
 w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę
 w tych oddziałach,

— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW
 „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych
 i u doręczycieli.

2. dla osób fizycznych — indywidualnych:

— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW

„Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,

— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”
 opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych przy użyciu „blankietu wpłaty” na rachunek
 bankowy: Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw w Warszawie, ul. Towarowa 28, nr konta
 NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11.

3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala
 Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział
 w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest
 droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnie i o 100% dla
 zlecających instytucji i zakładów pracy.

Termin przyjmowania prenumeraty:

— od prenumeratorów indywidualnych zamieszkałych w miastach siedzibach oddziałów RSW
 „Prasa — Książka — Ruch” — do dnia

28 lutego 1983 r. — na II kwartał i dalsze okresy roku bieżącego,

31 maja 1983 r. — na III kwartał i II półrocze roku bieżącego,

31 sierpnia 1983 r. — na IV kwartał roku bieżącego,

— od instytucji, zakładów pracy i prenumeratorów indywidualnych zamieszkałych na wsi
 i w małych miasteczkach do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać
 „DELTE”:

— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,

— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,

— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,

— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie

Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik

Deutschland,

— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Uniwersalny domowy integrator bez tranzystorowy produkcji ZTS

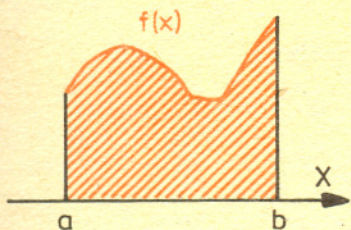


Planimetr model UDBT1

Instrukcja obsługi

Informacje ogólne. Skonstruowany przez inżynierów ZTS Uniwersalny Domowy Integrator Beztranzystorowy inaczej zwany Planimetrem UDBT 1 jest prostą w obsłudze maszyną analogową służącą do pomiaru pól figur płaskich ograniczonych krzywymi zamkniętymi.

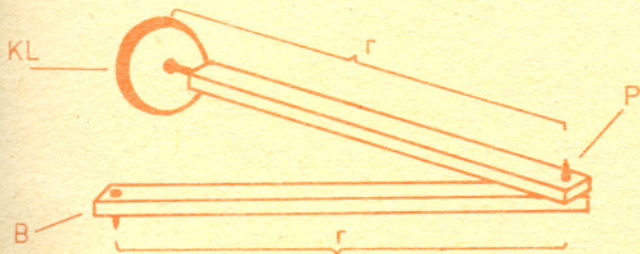
Pamiętając o tym, że $\int_a^b f(x)dx$ jest polem figury zawartej między osią x -ów a wykresem funkcji $f(x)$ (por. rys. 1) możemy używać planimetru do numerycznego obliczania całek (tzn. do całkowania). Ze względu na swoją wyjątkowo przystępną cenę Planimetr UDBT 1 jest w zasadzie dostępny dla każdego.



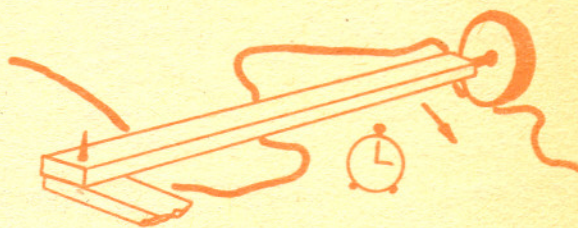
Rys. 1

Budowa Planimetru UDBT 1. Planimetr UDBT 1 składa się z dwóch ramion o długości r połączonych przegubem P oraz bieguna B i kółka liczącego KL umocowanego prostopadle do ramienia (rys. 2). Kółko liczące może obracać się swobodnie dokoła swojej osi.

Posługiwanie się Planimetrem UDBT 1. Aby zmierzyć pole figury \mathcal{F} ograniczonej krzywą \mathcal{L} , wbijamy biegun B w dowolnym miejscu, tak jednak, by cała figura \mathcal{F} znalazła się w zasięgu ramion planimetru, oraz umieszczamy kółko liczące w dowolnym punkcie krzywej \mathcal{L} (rys. 3). Następnie nie zmieniając położenia bieguna B , suwamy kółkiem wzdłuż krzywej \mathcal{L} w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, tak by po przejściu całej krzywej \mathcal{L} wrócić do punktu wyjścia.



Rys. 2: Planimetr UDBT 1; r — ramiona, P — przegub, B — biegun, KL — kółko liczące



Rys. 3

Odczytywanie wskazań kółka liczącego. W trakcie suwania kółka liczącego wzdłuż krzywej, obraca się ono raz w jedną raz w drugą stronę. Obroty kółka w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara należy liczyć ze znakiem plus, a obroty w stronę przeciwną — ze znakiem minus (rys. 4). Odczytanie wskazań kółka liczącego polega na obliczeniu wielkości

$$W = \theta_+ - \theta_-$$

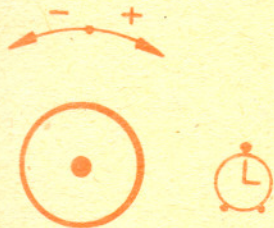
gdzie θ_+ jest ilością obrotów kółka w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, tzn. dodatnim, a θ_- jest ilością obrotów w kierunku przeciwnym, tzn. ujemnym. W praktyce najłatwiej jest liczyć o ile więcej było obrotów w kierunku dodatnim niż w kierunku ujemnym.

Uwaga. Wielkość W jest zawsze dodatnia!

Dokonywanie pomiarów pól. Pole figury \mathcal{F} obliczamy ze Wzoru Planimetru:

$$\text{Pole } \mathcal{F} = W \cdot r \cdot d,$$

gdzie r jest długością ramienia planimetru, a d jest obwodem kółka liczącego.



Rys. 4

Przykład. Podczas pomiaru pola pewnej figury \mathcal{F} planimetrem o ramieniu 15 cm i obwodzie kółka liczącego 3 cm kółko liczące obróciło się najpierw w kierunku ujemnym o $2 \frac{2}{3}$ obrotu, następnie o $4 \frac{1}{2}$ w kierunku dodatnim, a na końcu o $\frac{1}{4}$ w kierunku ujemnym.

Zatem $W = -2 \frac{2}{3} + 4 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 \frac{7}{12}$. Ze Wzoru Planimetru:

$$\text{Pole } \mathcal{F} = 1 \frac{7}{12} \cdot 15 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 71 \frac{1}{4} \text{ cm}^2.$$

Piotr MANKIEWICZ



O geometrii wewnętrznej

Prof. dr Karol BORSUK, członek rzeczywisty PAN

Przestrzeń metryczną A (z metryką ϱ) nazywamy *geometrycznie dopuszczalną* (symbolicznie $A \in GA$), jeśli spełnia warunki: dowolne dwa punkty $x, y \in A$ można połączyć łukiem L o skończonej długości zawartym w A oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$ każdy punkt $x \in A$ ma otoczenie U takie, że każde $y \in U$ można połączyć z x łukiem $L \subset A$ o długości $|L| < \varepsilon$.

Położmy

$$\varrho_A(x, y) = \text{kres dolny długości } L, \text{ gdzie } L \text{ jest łukiem zawartym w } A \text{ zawierającym } x \text{ i } y.$$

Otrzymamy tak metrykę zwaną *metryką wewnętrzną* w A . Zauważmy, że $\varrho(x, y) \leq \varrho_A(x, y)$ i że takie pojęcie metryki wewnętrznej jest zgodne z potocznym znaczeniem terminu odległość.

Przekształcenie f przestrzeni A z GA na drugą przestrzeń $B \in GA$ nazywamy *izometrią wewnętrzną*, jeśli

$$\varrho_A(x, y) = \varrho_B(fx, fy) \text{ dla dowolnych } x, y \in A.$$

Teorię niezmienników izometrii wewnętrznych (to znaczy tych własności przestrzeni GA , które są zachowywane przy izometriach wewnętrznych) nazywamy *geometrią wewnętrzną*. Należy podkreślić, że w klasycznej geometrii różniczkowej znaczenie tego pojęcia jest inne z uwagi na warunki regularności nakładane w niej na rozpatrywane przekształcenia i przestrzenie.

W szczególności krzywizna Gaussa, która jest jednym z najważniejszych niezmienników geometrii wewnętrznej rozumianej klasycznie, nie jest niezmiennikiem wewnętrznym w znaczeniu zdefiniowanym powyżej. Celem pracy jest podanie szkicu dowodu następującego

Twierdzenia: *Istnieje izometria wewnętrzna f przekształcająca całą n -wymiarową przestrzeń euklidesową E^n na podzbiór $f(E^n)$ przestrzeni E^{2n} o dowolnie małej średnicy.*

Niech η będzie liczbą dodatnią. Oznaczmy przez D kwadrat leżący w E^2 o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, \eta)$, $(\eta, 0)$ i (η, η) — jego średnica jest równa $\eta\sqrt{2}$. Każdej liczbie całkowitej k przyporządkujemy punkt

$$a_k = \left(\frac{1}{2} \eta \left(1 + \frac{k}{|k|+1} \right), 0 \right) \in E^2.$$

Mamy $a_k \in D \subset E^2$ i $\varrho((0, 0), a_k) < \varrho((0, 0), a_{k+1})$. Niech b_k będzie takim punktem D , że $\varrho(a_k, b_k) = \varrho(b_k, a_{k+1}) = \eta$ i przez I_k oznaczmy odcinek $\langle k \cdot \eta, (k+1)\eta \rangle \subset E^1$. Wówczas $E^1 = \bigcup_k I_k$

i oznaczając dla każdego k $J_{2k} = \overline{a_k b_k}$, $J_{2k+1} = \overline{b_k a_{k+1}}$ z łatwością stwierdzamy istnienie takiej izometrii wewnętrznej φ ,

$$\varphi: E^1 \rightarrow \bigcup_k J_k,$$

że $\varphi(2k \cdot \eta) = a_k$, $\varphi((2k+1)\eta) = b_k$ dla każdej liczby całkowitej k .

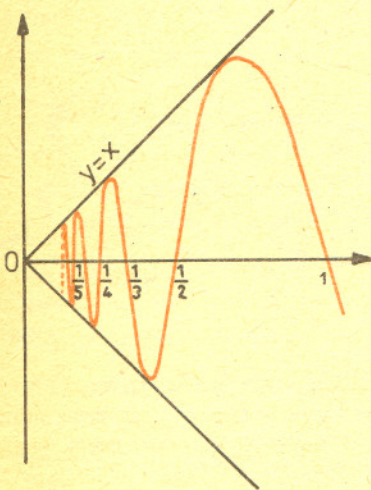
Zauważmy, że przestrzeń E^n można przedstawić jako sumę wszystkich n -wymiarowych kostek postaci

$$D_{\mu_1, \dots, \mu_n} = I_{\mu_1} \times \dots \times I_{\mu_n},$$

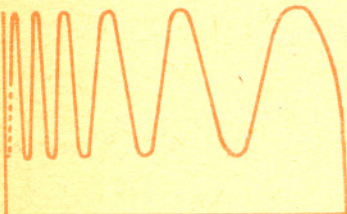
gdzie μ_1, \dots, μ_n przebiega zbiór wszystkich n -tek złożonych z liczb całkowitych. Kładąc dla każdego $x \in E^n$ $f(x_1, \dots, x_n) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ otrzymujemy homeomorfizm E^n na pewien otwarty podzbiór kostki $2n$ -wymiarowej przeprowadzający każdą kostkę D_{μ_1, \dots, μ_n} izometrycznie na $J_{\mu_1} \times \dots \times J_{\mu_n}$.

Ostatni zbiór jest podzbiorem C , produktu kartezjańskiego kwadratów o średnicy $\eta\sqrt{2}$. Nietrudno pokazać, że f jest izometrią wewnętrzną. Jeśli η jest dostatecznie małe, to i średnica C , a zatem i średnica obrazu $f(E^n)$ może być dowolnie mała, tak, jak żądaliśmy.

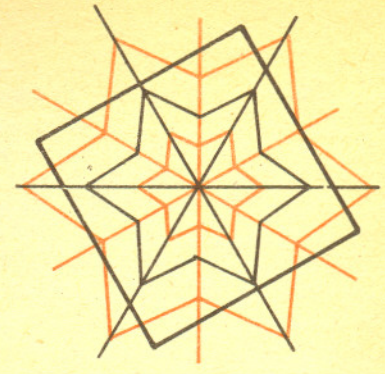
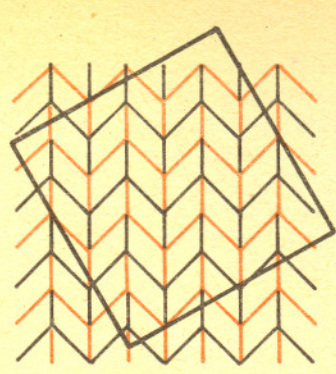
Uwaga 1. Zgodnie z naszym twierdzeniem przestrzeń E^3 , która w klasycznej mechanice jest traktowana jako matematyczny odpowiednik całego uniwersum kosmicznego, może być też rozpatrywana jako dowolnie mały podzbiór przestrzeni E^6 z niezmienioną metryką wewnętrzną.



Ta przestrzeń nie jest geometrycznie dopuszczalna. Długości kolejnych łuków „sinusoidy” pomiędzy dwoma kolejnymi grzbietami są większe od odpowiednich wyrazów rozbieżnego szeregu harmonicznego. Zatem długość widocznej na rysunku krzywej jest nieskończona.



Dla tej przestrzeni można wskazać $\varepsilon > 0$ i punkt x takie, że w każdym otoczeniu x istnieje y o własności $\varrho_A(x, y) \geq \varepsilon$. Nie jest ona zatem geometrycznie dopuszczalna.



Uwaga 2. J. Olędzki i S. Spież udowodnili ostatnio mocniejsze twierdzenie, które głosi, że E^n jest wewnętrznie izometryczna z podzbiorem E^{n+1} o dowolnie małej średnicy. Główna idea dowodu jest podobna do opisanej powyżej, ale dowód wymaga bardziej skomplikowanych uzasadnień.

Uwaga 3. Podana powyżej izometria wewnętrzna f , która przekształca E^n na podzbiór E^{2n} o dowolnie małej średnicy, składa się z przekształceń nie będących dyfeomorfizmami. Jednakże przez drobną modyfikację konstrukcji można otrzymać tu izometrię wewnętrzną używającą jedynie funkcji, które mają pochodne wszystkich rzędów.

Uwaga 4. W geometrii wewnętrznej jest jeszcze wiele otwartych problemów. W szczególności nie wiadomo, czy znane „Einbettungssatz” Mengersa i Nöbelinga można przenieść do geometrii wewnętrznej w postaci twierdzenia orzekającego, że każda n -wymiarowa GA -przestrzeń jest wewnętrznie izomorficzna z podzbiorem E^{2n+1} .



Ponad 50 rzędów wielkości, czyli przewodnictwo ciał stałych

Dr Andrzej HENNEL

Jaka wielkość fizyczna zmienia się w największym zakresie wielkości? Odpowiedź na to pytanie wydaje się być prosta. Jeżeli obliczymy bowiem stosunek przypuszczalnej masy Wszechświata (ok. 10^{50} kg) do masy elektronu (ok. 10^{-30} kg), otrzymamy 80 rzędów wielkości. Stosunek promienia Wszechświata (ok. 10^{26} m) do promienia nukleonu (ok. 10^{-15} m), czy też stosunek czasu życia Wszechświata (ok. 10^{18} s) do czasu życia niektórych cząstek elementarnych (ok. 10^{-23} s) dają nam po 41 rzędów wielkości. W obu przypadkach porównujemy jednak własności największego znanego obiektu fizycznego (Wszechświata) z własnościami najmniejszych znanych obiektów (cząstek elementarnych). Istnieje jednak makroskopowa wielkość, którą można mierzyć w laboratorium, zmieniająca się o ponad 50 rzędów wielkości. Jest nią przewodnictwo właściwe ciał stałych. Obecnie uważamy, że zakres zmian przewodnictwa właściwego rozciąga się co najmniej od $10^{24} (\Omega\text{cm})^{-1}$ do $10^{-20} (\Omega\text{cm})^{-1}$, jednakże w miarę rozwoju badań granice te mogą ulec dalszemu poszerzeniu.

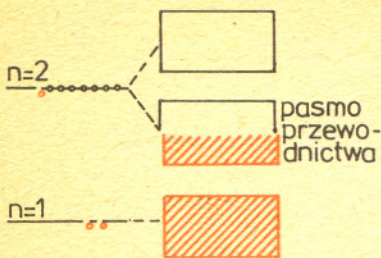
Definicja przewodnictwa właściwego

Przewodnictwo właściwe wprowadziła już fizyka XIX wieku ustalając, że opór przewodnika można wyrazić wzorem

$$R = \frac{l}{\sigma S},$$

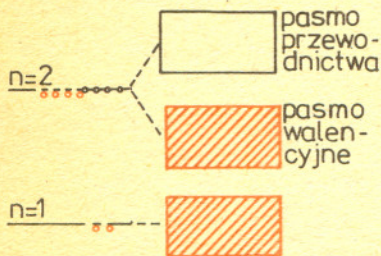
gdzie l jest długością, a S przekrojem poprzecznym przewodnika, natomiast σ — stałą materiałową nazywaną przewodnictwem właściwym i wyrażaną w $(\Omega\text{cm})^{-1}$.

ATOM LITU KRYSZTAŁ LITU



Rys. 1

ATOM WĘGLA DIAMENT



Rys. 2

Korzystając z mikroskopowego wzoru na natężenie prądu elektrycznego

$$I = nqvS,$$

gdzie n jest koncentracją nośników prądu, q ich ładunkiem, a v średnią prędkością ruchu wywołanego przez przyłożone pole elektryczne, możemy znaleźć

$$\sigma = nq\mu,$$

gdzie μ jest tzw. ruchliwością nośników, czyli średnią prędkością uzyskaną w jednostkowym polu elektrycznym. W wielu ciałach stałych ruchliwość μ jest wprost proporcjonalna do średniej drogi swobodnej, jaką przebywają nośniki między zderzeniami.

Struktura energetyczna ciał stałych

Istnieją dwa zasadniczo różne rodzaje ciał stałych. Są to substancje, które można dobrze charakteryzować tzw. modelem pasmowym, oraz substancje, które należy traktować jak zbiór izolowanych atomów, jonów czy cząsteczek. W pierwszym przypadku należy sobie wyobrazić, że elektrony walencyjne atomów wchodzących w skład kryształu należą do wszystkich atomów kryształu. Poziome energetyczne atomów zostają przy tym zastąpione przez pasma energetyczne złożone z takiej samej ilości poziomów, jaką jest ilość atomów w kryształach (około 10^{23} w 1 cm^3). Parzysta liczba elektronów na danej powłoce atomowej prowadzi na ogół do pasm całkowicie wypełnionych elektronami, natomiast nieparzysta liczba elektronów do pasm częściowo wypełnionych. Rozważmy dwa przykłady ciał stałych wykazujących istnienie pasm energetycznych: atom litu oraz atom węgla. Mają one zapełnioną pierwszą powłokę elektronową, natomiast na drugiej powłoce lit ma jeden, a węgiel cztery elektrony. Prowadzi to do struktury pasmowej przedstawionej na rysunkach 1 i 2. Elektrony z pasm całkowicie zapełnionych są to elektrony skupione wokół jąder atomowych lub tworzące wiązania w ciele stałym. Nie mogą one przewodzić prądu elektrycznego. Z kolei pasma częściowo zapełnione są utworzone przez elektrony, które mogą swobodnie poruszać się po kryształach, a więc mogą przewodzić prąd elektryczny. Średnia droga swobodna takich elektronów jest setki, a nawet i tysiące razy większa od odległości między dodatnimi jonami, wynoszącej ok. 10^{-1} nm ($2 \div 3 \text{ \AA}$). Pasma takie nazywamy w związku z tym pasmami przewodnictwa.

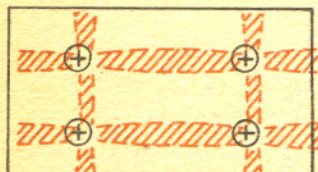
Metale



Rys. 3

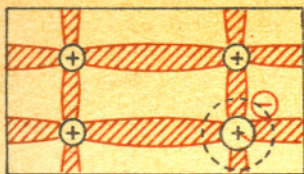
W metalu każdy atom dostarcza do pasma przewodnictwa co najmniej jeden elektron. W związku z tym koncentracja tych elektronów jest bardzo duża (ok. 10^{23} cm^{-3}) i można mówić o gazie elektronowym wypełniającym metal (rys. 3). Ruchliwość elektronów w metalu jest mniejsza od $100 \text{ cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ w temperaturze pokojowej, co w najlepszych przewodnikach, takich jak Cu, Ag czy Al, daje przewodnictwo rzędu $10^6 (\Omega \text{ cm})^{-1}$. Jak wiadomo opór metalu rośnie z temperaturą. Ponieważ koncentracja elektronów w pasmie przewodnictwa jest stała, efekt ten tłumaczymy zmniejszeniem ruchliwości. Należy wyobrazić sobie, że drgania dodatnich jonów utrudniają ruch elektronów. Drugim czynnikiem hamującym ruch elektronów są defekty struktury krystalicznej. Eliminacja tych efektów (możliwie najczystsze przewodniki i niskie temperatury) pozwala osiągnąć w przypadku miedzi rekordową wartość $\sigma = 10^{10} (\Omega \text{ cm})^{-1}$, co odpowiada drodze swobodnej elektronu $l = 1 \text{ mm}$.

Półprzewodniki samoistne



Rys. 4

Ciała stałe o strukturze analogicznej do struktury energetycznej diamentu nazywamy półprzewodnikami. W materiałach tych w niskich temperaturach brak elektronów swobodnych (rys. 4). Podwyższenie temperatury umożliwia przeskok elektronów z najwyższego pasma zapełnionego (walencyjnego) do pierwszego pasma pustego (przewodnictwa). Odległość między tymi pasmami nazywamy przerwą energetyczną. Wynosi ona dla typowych półprzewodników (Ge, Si) ok. 1 eV. Niezwykle interesującą własnością półprzewodników jest fakt, że po przejściu elektronów do pasma przewodnictwa w pasmie walencyjnym pozostają wolne miejsca, które również biorą udział w przewodnictwie. Nazywamy je dziurami. Dziurze przypisuje się dodatni ładunek i można ją sobie wyobrazić jako „pęcherzyk” w „cieczy” elektronowej poruszający się pod wpływem pola elektrycznego w kierunku przeciwnym niż elektrony. W czystym półprzewodniku mamy jednakową liczbę elektronów w pasmie przewodnictwa i dziur w pasmie walencyjnym. Energia termiczna drgań atomów w ciele stałym jest w temperaturze pokojowej bardzo mała (około 0,04 eV), więc liczba swobodnych elektronów i dziur jest również niewielka (około 10^{10} cm^{-3}). Nawet stosunkowo duże wartości ruchliwości $\mu = 1000 \text{ cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ prowadzą do przewodnictwa miliard razy mniejszego niż przewodnictwo metali, $\sigma = 10^{-6} (\Omega \text{ cm})^{-1}$. Przewodnictwo to bardzo szybko rośnie z temperaturą.



Rys. 5

Półprzewodniki domieszkowe

Przyczyną, dla której półprzewodniki zrobiły w ostatnim dwudziestolecu oszałamiającą karierę, jest przede wszystkim fakt, że można zmieniać ich własności za pomocą domieszek. Jeżeli do kryształu czterowartościowego germanu wprowadzimy domieszkę pięciowartościowego fosforu (rys. 5), wówczas piąty elektron walencyjny fosforu nie wchodzi do wiązań i pozostaje „bezzrobotny”. Okazuje się, że niezwykle mała energia (ok. 0,01 eV) wystarczy, aby oderwał się on od swojego atomu macierzystego i stał się elektronem przewodnictwa. Atom taki nazywamy donorem, a oderwanie elektronu — jonizacją donoru. W temperaturze pokojowej wszystkie donory są zjonizowane — oznacza to, że już wprowadzenie jednego atomu domieszki na miliard atomów kryształu macierzystego daje nam $10^{23}/10^9 = 10^{14}$ nośników w 1 cm^3 . Powoduje to wzrost przewodnictwa kryształu 10 000 razy (!) do wartości $\sigma = 10^{-2} (\Omega\text{cm})^{-1}$. Poza domieszkami donorowymi można jeszcze wprowadzić do kryształu tzw. domieszki akceptorowe. Są to np. w przypadku krzemu atomy trójwartościowe B, Al itd. Domieszki te wychwytyują elektrony z pasma walencyjnego wywołując pojawienie się swobodnych dziur. W chwili obecnej potrafimy zmieniać koncentracje domieszek, a więc i przewodnictwo półprzewodników, w zakresie około 10 rzędów wielkości zarówno w przypadku donorów, jak i akceptorów.

Nadprzewodnictwo

Szereg metali i związków poniżej pewnej temperatury, zwanej temperaturą krytyczną T_k , wykazuje gwałtowny spadek oporu elektrycznego. Co ciekawe, nadprzewodnictwo występuje w metalach, które są dosyć kiepskimi przewodnikami (ołów, cyna czy rteć). Temperatura krytyczna jest na ogół rzędu kilku kelwinów, najwyższą jak dotąd $T_k = 23 \text{ K}$ wykazuje związek Nb_3Ge . Przez wiele lat uważano, że opór nadprzewodnika jest równy zeru. W latach sześćdziesiątych przeprowadzono eksperymenty, w których przez ponad rok obserwowano prąd płynący w nadprzewodniku z odłączonym źródłem i oszacowano jego możliwe trwanie na kilkadziesiąt tysięcy lat. Pozwoliło to na oszacowanie przewodnictwa właściwego na $\sigma \approx 10^{24} (\Omega\text{cm})^{-1}$. Jednym z ciekawych wniosków wypływających z teorii nadprzewodnictwa jest fakt, że prąd nadprzewodzący wywołany jest nie przez elektrony, ale przez pary elektronowe. Energia wiązania tych par jest niezwykle mała i podwyższenie temperatury powyżej T_k powoduje ich rozerwanie. Okazuje się, że pary elektronowe mogą poruszać się w sieci krystalicznej nie napotykając praktycznie żadnego oporu.

Kryształy jonowe

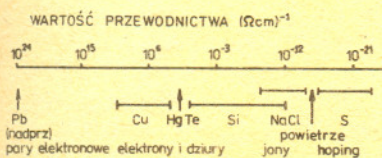
Jak już wspomniano poprzednio, istnieją ciała stałe, których własności nie mogą być scharakteryzowane modelem przewodnictwa pasmowego. Do takich kryształów zaliczamy kryształy jonowe (np. NaCl czy KJ). Kryształy te wykazują pewne przewodnictwo $\sigma = 10^{-7} \div 10^{-12} (\Omega\text{cm})^{-1}$ związane z ruchem jonów, czyli z transportem substancji w kryształach. Efekt ten jest identyczny ze zjawiskiem elektrolizy i może być opisywany ilościowo za pomocą znanych praw Faradaya. Przewodnictwo kryształów jonowych wzrasta wykładniczo z temperaturą, aż do punktu topnienia kryształu.

Przewodnictwo przeskokowe

W kryształach niejonowych (kowalencyjnych) nie wykazujących przewodnictwa pasmowego, takich jak siarka, fosfor biały, jod czy kryształy gazów szlachetnych, zaobserwowano istnienie bardzo niewielkiego przewodnictwa $\sigma = 10^{-10} \div 10^{-20} (\Omega\text{cm})^{-1}$ (dla porównania: powietrze w warunkach normalnych wykazuje przewodnictwo $\sigma \approx 10^{-15} (\Omega\text{cm})^{-1}$). Przewodnictwo w tych kryształach nazywamy przeskokowym. Wyobrażamy sobie, że elektrony lub dziury znajdujące się w kryształach mogą pod wpływem dodatkowej energii (drgań termicznych, oświetlenia) przeskakiwać pomiędzy sąsiednimi atomami, domieszkami lub defektami. Przypomina to dziecięcą zabawę w komórkę do wynajęcia — czas przebywania nośnika na centrum jest o wiele dłuższy niż czas przeskoku. Przewodnictwo to oczywiście silnie zależy od temperatury i koncentracji domieszek.

Zakończenie

Na koniec warto popatrzeć na schematyczne zestawienie wartości przewodnictwa σ w niektórych substancjach oraz rodzajach nośników prądu w ciałach stałych (rys. 6). Widać, że ogromna zmienność wartości przewodnictwa ciał stałych związana jest z czterema zasadniczo różnymi mechanizmami przewodnictwa — nadprzewodnictwem, przewodnictwem pasmowym elektronowo-dziurowym, przewodnictwem jonowym i przeskokowym.



Rys. 6

Doc. dr Jerzy STODÓŁKIEWICZ

Jest paradoksem, że łatwiej poznać wygląd odległych galaktyk niż tej, w której żyjemy. Uwięzieni w płaszczyźnie Drogi Mlecznej, otoczeni przez nieprzezroczystą materię międzygwiazdową, z trudem zdobywamy wiadomości o rozmieszczeniu w dysku galaktycznym różnych typów gwiazd. Bardziej szczegółowe informacje odnoszą się jedynie do położenia wodoru neutralnego. Wiemy, że skupia się on w potężnych ramionach spiralnych o szerokości rzędu kiloparseka, przebiegających przez cały dysk Galaktyki. Znacznie mniej wiemy o położeniach gwiazd, dostrzegamy tylko bliżej leżące, a pomiary ich odległości obciążone są znacznymi błędami. Dlatego nasza wiedza o ich przynależności do ramion spiralnych ograniczona jest jedynie do tych części, które przebiegają w pobliżu Słońca. Na podstawie obserwacji tej ograniczonej próbki gwiazd możemy wnioskować o tym, że ramiona spiralne naszej Galaktyki to nie tylko skupiska materii międzygwiazdowej, ale także siedlisko młodych gwiazd narodzonych nie dawniej niż kilkanaście milionów lat temu. Widziana z odległości około 10 kiloparseków Galaktyka rozpościerałaby się jak olbrzymia tarcza na niebie, rozjarzająca tysiącami błyszczących punktów i świecących obłoków zjonizowanego gazu większą część firmamentu. Na tle jasnego dysku dostrzeżelibyśmy wówczas rozciągające się od odległości około 3—4 kiloparseków od świecącego jak mglista, niewielka plamka gorącego gazu jądra Galaktyki, olbrzymie ramiona sięgające aż po brzeg układu. W obrębie ramion dominowałyby olbrzymie, świecące obłoki zjonizowanego wodoru i tysiące gorących jasnych gwiazd. Obszary między ramionami niknęłyby w świetle ramion, ich błada poświata pochodziłaby od miliardów chłodnych gwiazd niewidocznych już gołym okiem, gdzieś tam zaledwie błyszcząłyby pojedyncze jasne gwiazdy lub obłoki.

Struktura spiralna jest bardzo powszechna wśród galaktyk. Około 50% większych galaktyk posiada wyraźnie zarysowane ramiona spiralne. A więc tworzenie się ramion spiralnych nie jest cechą szczególną naszej Galaktyki, lecz musi być bardzo naturalną właściwością dysków. Wydaje się to tym bardziej dziwne, że dyski obracają się nie jak ciało sztywne, lecz z różną prędkością kątową w różnych odległościach od jądra ich macierzystej galaktyki: najszybciej w pobliżu jądra, coraz wolniej w obszarach zewnętrznych. Gdyby więc ramiona potraktować jako twory składające się stale z tej samej materii, to wskutek tego nierównomiernego obrotu dysku powinny się one stale nawijać, jak nić na szpulę w coraz większą liczbę zwojów, a po paru obrotach galaktyki (po kilkuset milionach lat) ich kontury powinny ulec zatarciu. Przeczyłoby to jednak możliwości obserwowania w przyrodzie tak dużej liczby galaktyk spiralnych.

Najlepiej tłumaczy zjawiska zachodzące w ramionach spiralnych teoria, która traktuje je jako zjawisko falowe: jako obszary w Galaktyce, przez które przepływa materia międzygwiazdowa i gwiazdy. Same ramiona obracają się jak ramiona wiatraka wokół centrum Galaktyki ze stałą prędkością kątową, około dwukrotnie mniejszą niż prędkość Słońca. Dokonują one pełnego obrotu w ciągu 400 milionów lat. Materia międzygwiazdowa i gwiazdy biegną szybciej. Doganiają więc ramię spiralne, przez pewien czas w nim przebywają i uchodzą znów z niego, by po 200 milionach lat dotrzeć do następnego.

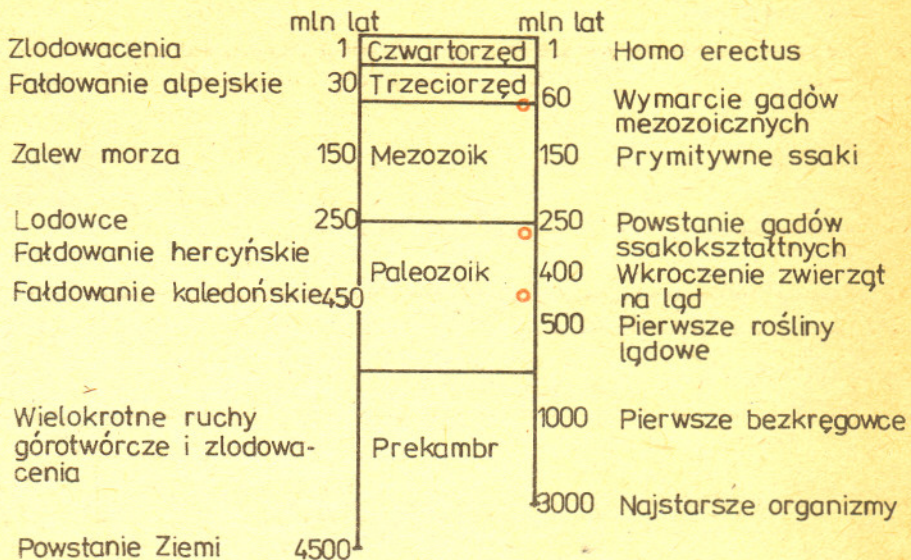
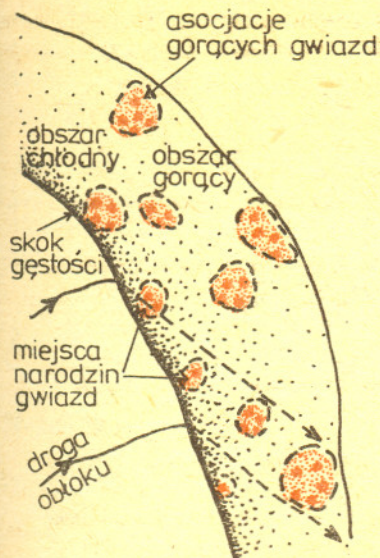
Ramiona spiralne są jak gdyby olbrzymimi falami płynącymi przez Galaktykę, w których następuje sprężanie się gazu międzygwiazdowego, aż do stanu, w którym mogą w nim powstawać gwiazdy. Jednocześnie te nowe gwiazdy, które początkowo mogą współdziałać w dalszym zagęszczaniu materii i tworzeniu się nowych gwiazd, przerywają ten proces: ogrzewają materię i powodują jej rozproszenie w przestrzeni. Ramiona spiralne są więc kliniką położniczą naszej Galaktyki: w nich następuje stałe, choć powolne przetwarzanie materii rozproszonej we wciąż rodzące się młode gwiazdy, rozsiewane następnie w obrębie dysku galaktycznego. Wzajemnie sprzężone procesy decydują o istnieniu ramion spiralnych w dysku galaktycznym.

W ramionach gęstość materii jest większa dlatego, że przepływający przez nie gaz zwalnia swój bieg i częściowo płynie wzdłuż nich. Ale tego rodzaju ruch materii w ramionach spiralnych spowodowany jest właśnie tym, że w ramionach gęstość jest nieco większa niż w obszarach między nimi. Teraz łatwo już określić, dlaczego w ramionach spiralnych nie skupiają się gwiazdy starsze. Oczywiście przy każdym obiegu wokół centrum Galaktyki trafiają i one do ramion. Ale ich prędkości są znacznie większe niż obłoków międzygwiazdowych. Dlatego nie poddają się tak łatwo jak materia międzygwiazdowa potencjałowi grawitacyjnemu ramion i prawie nie odczuwają go przebiegając w poprzek ramion.



I Słońce powstało niegdyś w jednym z ramion spiralnych naszej Galaktyki. Od tego czasu regularnie co 200 milionów lat przebiega ono przez ramiona spiralne. Powoduje to, że warunki w przestrzeni międzygwiazdowej wokół Słońca zmieniają się w tym długim okresie. Czasami biegnie ono w prawie kompletnej pustce, kiedy indziej, gdy wchodzi w ramię spiralne, dostaje się w obszary o znacznie większej gęstości gazu i pyłu. A może to mieć istotny wpływ na warunki klimatyczne panujące na Ziemi. Opadający na Słońce pył międzygwiazdowy powodować może jego ogrzanie. Ten sam pył docierający do atmosfery Ziemi może stać się przyczyną zmniejszenia jej przezroczystości, a opadający na powierzchnię Ziemi może zwiększyć jej zdolność odbijania promieni słonecznych. W ten sposób wynikiem przejścia Słońca przez ramiona spiralne Galaktyki mogą być cykliczne zmiany klimatu na naszej planecie. Pozwala nam to przypuścić, że istnieniu ramion spiralnych zawdzięczamy nie tylko powstanie naszego Układu Słonecznego, ale nawet wpływ na rozwój życia na Ziemi.

Przekrój przez ramię spiralne Galaktyki



○ Przejście Ziemi przez ramię spiralne Galaktyki



Zadania



Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 235. Pewne pola szachownicy zamalowano tak, że król nie może przejść od lewego do prawego jej brzegu po polach zamalowanych. Udowodnić, że po nie zamalowanych polach może od dolnego do górnego brzegu szachownicy przejść wieża.

Rozwiązanie na str. 12.

M 236. Z kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$ zrobiono szachownicę o n^2 polach. Niech F_1, F_2 będą dowolnymi przekształceniami tego kwadratu w odcinek $[0, 1]$. Oznaczamy $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$. Wykazać, że istnieją cztery punkty p, q, r, s ($p = (p_1, p_2)$ itd.) leżące w jednym polu szachownicy i takie, że $F_1(p) \leq p_1, F_1(q) \geq q_1, F_2(r) \leq r_2$ i $F_2(s) \geq s_2$. Wskazówka: patrz M 235.

Rozwiązanie na str. 12.

M 237. Udowodnić twierdzenie Brouwera: Jeżeli F jest przekształceniem ciągłym domkniętego kwadratu w siebie, to istnieje punkt x taki, że $F(x) = x$. Wskazówka: patrz M 236.

Rozwiązanie na str. 12.

Redaguje doc. dr Michał ŚWIECKI

F 77. Dwie równoległe płyty zanurzone pionowo do połowy

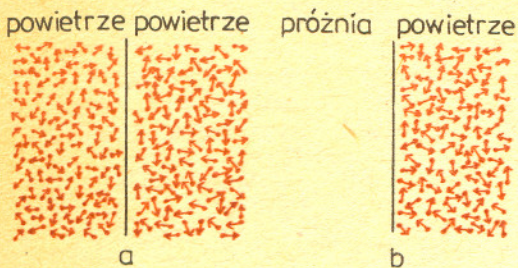
- (a) w cieczy zwilżającej materiał obu płyt,
- (b) w cieczy nie zwilżającej żadnej z płyt oraz
- (c) w cieczy zwilżającej jedną i nie zwilżającej drugiej płyty.

Jaki będzie kierunek sił działających między płytami w każdej z opisanych sytuacji?

Rozwiązanie na str. 11.



delta mała



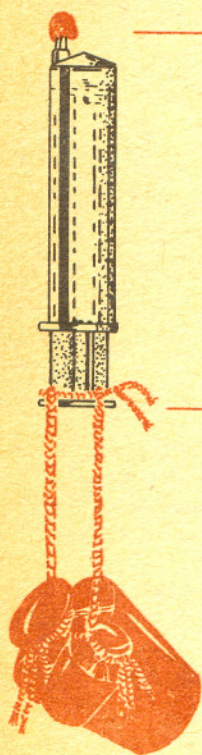
Rys. 1



a: zalepiamy plasteliną

b: przywiązujemy sznurki

c: zawieszamy odważniki



Rys. 2

Mierzmy ciśnienie atmosferyczne

Wiesz na pewno, że na każdy przedmiot w twoim otoczeniu działa ciśnienie atmosferyczne. Dzieje się tak dlatego, że szybko poruszające się cząsteczki powietrza bezustannie „bombardują” powierzchnię każdego ciała. A jednak ciśnienia tego prawie nie zauważamy. Jeżeli wyobraziliśmy sobie, że w powietrzu znajduje się na przykład blaszka metalowa, to cząsteczki uderzają w nią z obu stron, a więc średnia działająca siła równa jest zeru (rys. 1a). Gdybyśmy jednak potrafili z lewej strony blaszki usunąć cząsteczki, czyli wytworzyć próżnię (rys. 1b), wtedy bombardowanie zachodziłoby tylko z prawej strony i powinniśmy móc zaobserwować i zmierzyć działanie siły. Aby zrobić doświadczenie, które to wykaże, potrzebne są:

1. Strzykawka najlepiej zużyta plastikowa do jednorazowego użycia (inną łatwo słuc).
2. Sznurek.
3. Plastelina.
4. Odważniki (do kilku kg).

Doświadczenie najłatwiej wykonać w dwie osoby.

1. Zatkajcie szczelnie wlot strzykawki kawałkiem plasteliny (rys. 2a).
2. Do tłoczka strzykawki przywiążcie sznurek (rys. 2b).
3. Jedno z Was niech trzyma strzykawkę pionowo, wylotem ku górze (rys. 2c), a drugie niech przywiązuje kolejno do sznurka odważniki. Przy jakiej ich masie uda się tłok odciągnąć?

Konstrukcje z zapalek

Dla wykonania ciekawego doświadczenia, które chcieliśmy Wam zaproponować, zaopatrzenie się w dużą liczbę cienkich listewek o długości około 25 cm i przekroju np. 2×3 mm. Mogą to być duże zapalki „kominkowe”. Czy umielibyście teraz zbudować z nich szkielet dachu nad halą o wymiarach $1,5 \times 1,5$ m, nie klejąc, nie wiążąc ani nie łącząc listewek w inny sposób ze sobą?

A jest to możliwe. Aby dopiąć tego, zauważmy najpierw, że jeśli ułożymy na klockach cztery listewki jak na rys. 1, to listewki nie spadną.

Jeśli taki „węzeł” zapewnia utrzymanie w powietrzu jednego końca każdej dochodzącej do niego listewki, to dlaczego klocków, które podpierają pozostałe końce, nie zastąpić takimi samymi „węzłami”?

Nasuwa nam to pomysł ogólnego przepisu na budowę szkieletu dachu nad placem tak rozległym, jak tylko zechcemy. Widok z góry dwóch takich szkieletów przedstawia rysunek 2.

Budowa nie powinna sprawić Wam trudności, jeśli tylko przeprowadzicie ją stopniowo, dodając po jednym „węźle”.

Czy są możliwe inne samotrzymające się „węzły”? Tak, na rysunku 3 widzimy „węzeł” z 3 listewek i widok z góry szkieletu zrobionego z takich węzłów. Spróbujcie skonstruować jeszcze inne „węzły” i szkielety dachów. Nie wszystkie „węzły” w jednym szkielecie muszą być jednakowe; szkielet złożony z dowolnych „węzłów” utrzyma się w powietrzu, jeśli tylko wszystkie końce listewek nie leżące w węźle będą podparte.

Ci z Was, którzy bawią się czasem „budowaniem” z kart, natknęli się być może na problem pokrycia dachem Colosseum (rys. 4). Dach taki, nawet o bardzo dużej rozpiętości, nietrudno skonstruować tłumacząc na język kart szkielet z rysunku 2.

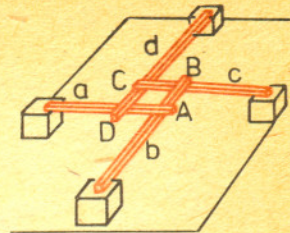
Podobnie jak szkielet z rysunku 2, tak i dach z kart z rysunku 4 nie musi być kwadratowy; można go dopasować do kształtu pokrywanej hali, a także więc do Colosseum.

Jeśli karty są nowe, to dach wychodzi lekko wypukły, wielospadowy i naprawdę ładny.

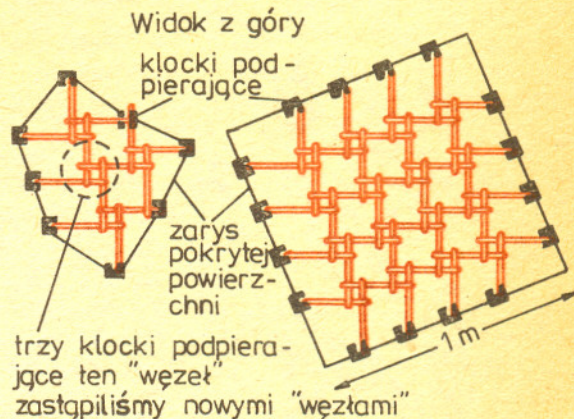
Na koniec proponuję Wam rozwiązanie jeszcze dwóch zadań:

— Przerzucić, naturalnie bez klejenia, szkielet mostu z listewek o długości 25 cm, ponad rzeką o szerokości 1 m;

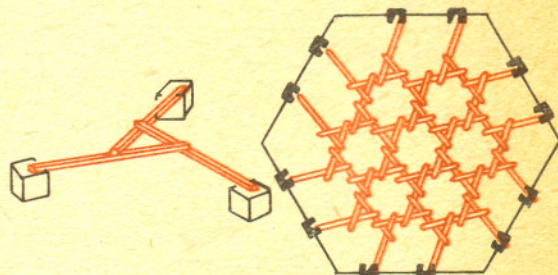
— Dla karciarzy: przetłumaczyć na język kart jakiś inny, wymyślony przez Was, typ szkieletu.



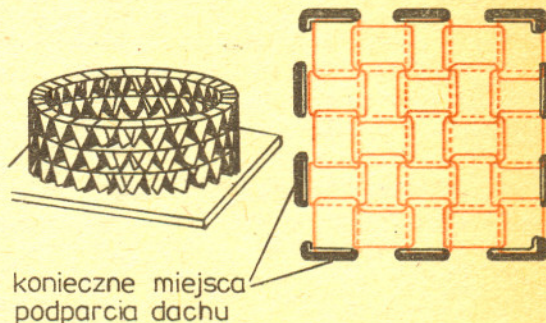
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

O polu prostokąta

Prof. dr Marek KUCZMA



Pole prostokąta o bokach a i b wyraża się wzorem: $P = a \cdot b$. Dlaczego? Czy wzór ten został nam narzucony przez autorów podręczników i zależy wyłącznie od ich wyboru? Czy też może jest on koniecznością i nie ma innej możliwości; innymi słowy może można go udowodnić?

Aby móc na te pytania odpowiedzieć, musimy wpięrow dobrze zdać sobie sprawę z tego, czym właściwie jest pole prostokąta. Możemy powiedzieć, że jest to miara wielkości prostokąta. Zauważmy jednak, że zdanie to nie jest bynajmniej definicją, gdyż zastępuje tylko jedno niesprecyzowane pojęcie (pole) przez inne (miara wielkości). Niemniej pozwala ono odwołać się do intuicji geometrycznej. Jakież zatem własności powinna mieć taka miara wielkości prostokąta? Intuicja geometryczna sugeruje nam, że powinna ona spełniać następujące trzy warunki:

- A. Każdy prostokąt ma jednoznacznie określone pole, które wyraża się liczbą rzeczywistą nieujemną.
- B. Przystające prostokąty mają równe pola.
- C. Jeżeli prostokąt podzielimy na dwie części odcinkiem równoległym do któregośkolwiek z boków, to suma pól powstałych w ten sposób prostokątów jest równa polu wyjściowego prostokąta.

Zanim posuniemy się dalej w naszych rozważaniach, trzeba jasno stwierdzić, że powyższe postulaty, aczkolwiek dyktowane intuicją geometryczną, nie są bynajmniej konieczne i w znacznym stopniu przyjęcie ich zależy od naszej woli.

Zgadamy się, że miara powinna być liczbą nieujemną, ale są przecież wielkości (np. temperatura, czas), których miarę wyrażamy w liczbach względnych.

Dwa przystające prostokątne poletka gruntu mogą mieć różną cenę (a cenę wszak też możemy uważać za pewną miarę) w zależności od położenia, gleby itp.

Wreszcie np. dwie pięciodekowe paczki kawy kosztują więcej niż jedna paczka dziesięciodekowa. Tak więc w pewnych okolicznościach miara nie musi spełniać żadnego ze sformułowanych powyżej postulatów A, B, C. W przypadku pola prostokąta wydają się nam one rozsądne i zgodne z naszą intuicją, zatem jesteśmy gotowi przyjąć je bez zastrzeżeń. Zależy to jednakże od naszej woli, od naszego wyboru.

Zgódźmy się zatem, że przyjmujemy postulaty A, B, C i postaramy się teraz przetłumaczyć je na język matematyczny. Ponieważ prostokąty o bokach odpowiednio równych są przystające, więc z postulatów A i B wynika, że pole prostokąta zależy wyłącznie od jego boków (czy też, dokładniej, od długości jego boków). Ścisłej mówiąc, pole to jest funkcją: $P = P(a, b)$, określoną w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i przyjmującą wartości w zbiorze $\langle 0, +\infty \rangle$:

$$(1) \quad P: \langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle.$$

Najistotniejsze informacje zawiera jednak postulat C. Dokonując opisanych podziałów (patrz rysunek) widzimy, że funkcja P musi spełniać następujące dwa związki:

$$(2) \quad P(a_1 + a_2, b) = P(a_1, b) + P(a_2, b),$$

$$(3) \quad P(a, b_1 + b_2) = P(a, b_1) + P(a, b_2).$$

Związki (2) i (3) muszą być prawdziwe dla wszystkich nieujemnych a, b, a_1, a_2, b_1, b_2 ; są zatem tożsamościami. Nasze zadanie można więc sformułować następująco:

znaleźć funkcję (1), dla której związki (2) i (3) są spełnione tożsamościowo względem wszystkich występujących tam zmiennych.

Tego typu zadania, w których problem polega na wyznaczeniu niewiadomej funkcji na podstawie zadanej tożsamości, którą funkcja ta ma spełniać, noszą nazwę *równań funkcyjnych*.

Związki (2) i (3) są właśnie przykładami równań funkcyjnych.

Zostawmy na chwilę problem wzoru na pole prostokąta i zajmijmy się równaniami funkcyjnymi. Jednym z najważniejszych równań funkcyjnych jest *równanie Cauchy'ego*

$$(4) \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Postaramy się wyznaczyć funkcję $f: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ (tj. funkcję o wartościach nieujemnych, określoną dla nieujemnych wartości zmiennej niezależnej) spełniającą związek (4) dla wszystkich nieujemnych x, y . W szczególności (4) ma zachodzić dla $x = y = 0$.

Zastępując w (4) x i y przez zero otrzymamy $f(0) = 2f(0)$, skąd wynika, że

$$(5) \quad f(0) = 0.$$

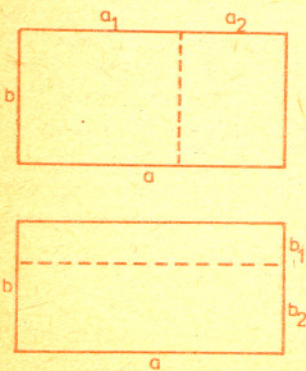
Przez indukcję łatwo udowodnić, że

$$(6) \quad f(nx) = nf(x)$$

dla wszelkich x nieujemnych i wszelkich n całkowitych nieujemnych. Istotnie, dla $n = 0$ prawdziwość związku (6) wynika z (5). Zakładając, że zachodzi dla pewnego całkowitego $n = k \geq 0$ i dla wszelkich $x \geq 0$, mamy dla $n = k + 1$ i dowolnego $x \geq 0$:

$$f((k+1)x) = f(x+kx) = f(x) + f(kx) = f(x) + kf(x) = (k+1)f(x),$$

gdzie, po drodze wykorzystaliśmy własność (4) dla $y = kx$. Tak więc związek (6) został udowodniony.





Pokażemy z kolei, że związek (6) pozostaje również słuszny dla n wymiernych nieujemnych. Weźmy dowolne liczby całkowite $p \geq 0$, $q > 0$ oraz dowolną liczbę rzeczywistą $x \geq 0$. Mamy na podstawie (6):

$$pf(x) = f(px) = f\left(q \frac{p}{q} x\right) = qf\left(\frac{p}{q} x\right), \quad \text{skąd} \quad f\left(\frac{p}{q} x\right) = \frac{p}{q} f(x).$$

Innymi słowy, funkcja f spełnia związek

$$(7) \quad f(rx) = rf(x)$$

dla wszystkich nieujemnych x rzeczywistych i r wymiernych. Kładąc w (7) w szczególności $x = 1$ i oznaczając $f(1) = c$, otrzymujemy

$$(8) \quad f(r) = cr$$

dla wszystkich nieujemnych r wymiernych.

Udowodnimy teraz, że związek (8) zachodzi nie tylko dla r wymiernych, ale dla dowolnych r rzeczywistych nieujemnych. W tym celu utwórzmy nową funkcję

$$(9) \quad g(x) = f(x) - cx,$$

gdzie, jak wyżej, $c = f(1)$.

Uwzględniając fakt, że funkcja f spełnia równanie (4) w szczególności dla $y = 1$, otrzymamy

$$g(x+1) = f(x+1) - c(x+1) = f(x) + f(1) - cx - c = f(x) - cx = g(x),$$

gdyż $f(1) = c$.

Oznacza to, że funkcja g jest okresowa, o okresie 1, czyli $g(x+1) = g(x)$. Ponieważ wartości funkcji f są nieujemne, a wartość wyrażenia cx dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$ nie przekracza c , więc z (9) widzimy, że funkcja g spełnia warunek

$$(10) \quad g(x) \geq -c \quad \text{dla} \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Z okresowości zaś wynika, że nierówność (10) jest słuszna dla wszystkich $x \geq 0$. Weźmy teraz dowolne $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Na podstawie wzoru (9) oraz równania (4), gdzie przyjmujemy $y = 1 - x$, mamy

$$g(x) + g(1-x) = f(x) - cx + f(1-x) - c(1-x) = f(1) - c = 0, \quad \text{tj.}$$

$$(11) \quad g(x) + g(1-x) = 0.$$

Chcemy pokazać, że funkcja g jest identycznie równa zero. Gdyby w jakimś punkcie $x \in \langle 0, 1 \rangle$ wartość funkcji g była różna od zera, to jak wynika ze związku (11) dokładnie jedna z wartości $g(x)$ i $g(1-x)$ byłaby ujemna. Niech x_0 będzie takim punktem przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, że $g(x_0) < 0$. Na podstawie (6) mamy dla dowolnych n naturalnych

$$g(nx_0) = f(nx_0) - cnx_0 = nf(x_0) - ncx_0 = n[f(x_0) - cx_0] = ng(x_0).$$

Zatem dla dostatecznie dużego n naturalnego będziemy mieli $g(nx_0) < -c$, co jest sprzeczne z (10). Funkcja g musi więc być tożsamościowo równa zero, w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$, a wobec okresowości musi być ona tożsamościowo równa zero w całym przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$. Oznacza to (por. (9)), że

$$(12) \quad f(x) = cx \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in \langle 0, \infty \rangle.$$

Tym samym wyznaczyliśmy funkcję f , a więc rozwiązaliśmy równanie (4).

Możemy obecnie rozwiązać równania (2) i (3). Ustalając na chwilę w (2) zmienną b i pisząc $f(x) = P(x, b)$ widzimy, że funkcja f spełnia równanie (4). Musi być zatem postaci (12), gdzie współczynnik c może jednak zależeć od ustalonej chwilowo wartości zmiennej b :

$$(13) \quad P(a, b) = c(b)a.$$

Jeżeli teraz podstawimy wzór (13) do równania (3) i przyjmijmy, że $a = 1$, to otrzymamy $c(b_1 + b_2) = c(b_1) + c(b_2)$, co oznacza, że funkcja c również spełnia równanie (4). (Nie jest istotne czy zmienne niezależne oznaczmy przez x, y , czy przez b_1, b_2). Musi być zatem $c(b) = cb$, gdzie współczynnik c jest już teraz stały. Podstawiając znaną postać funkcji c do wzoru (13) otrzymamy

$$(14) \quad P(a, b) = cab.$$

Co robi we wzorze (14) współczynnik c ? Jest on związany z jednostką pomiaru pola. Jeśli umówimy się, że kwadrat o boku 1 ma pole jednostkowe, to wówczas $c = 1$. Jeśli jednak np. boki prostokąta mierzyć będziemy w metrach, pole zaś w centymetrach kwadratowych, to $c = 10\,000$. Tak więc nasze rozumowanie dało nam na pole prostokąta wzór (14), ogólniejszy, niż klasyczny wzór $P = ab$, bo uwzględniający jednostki pomiaru. Zarazem otrzymaliśmy odpowiedź na pytania postawione na początku artykułu. O ile przyjmijmy postulaty A, B, C, to wzór (14) jest jedynym możliwym wzorem na pole prostokąta. Przyjęcie tych postulatów, aczkolwiek dobrze umotywowane intuicją geometryczną, zależy jednak od naszej woli.

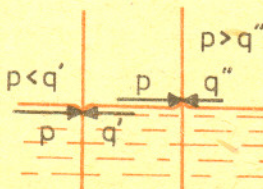
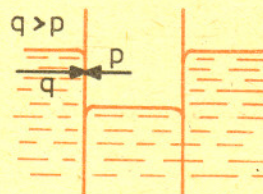
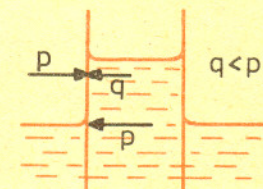
Wróćmy teraz do równania (4), ale załóżmy tym razem, że funkcja niewiadoma f jest typu $f: (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$. Możemy wówczas położyć w (4) $y = -x$ i biorąc pod uwagę związek (5) otrzymamy

$$(15) \quad f(-x) = -f(x),$$

co oznacza, że f jest funkcją nieparzystą. Ponieważ przy wyprowadzaniu związku (7) nie korzystaliśmy z nieujemności ani x , ani f , więc związek ten jest słuszny i w obecnym przypadku, a z (15) wynika, że (7) zachodzi dla wszystkich x rzeczywistych i r wymiernych. Dalszego rozumowania, prowadzącego do wzoru (12), nie da się jednak powtórzyć, gdyż korzystało ono w bardzo istotny sposób z założenia o nieujemności funkcji f . Jeżeli założymy dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą lub monotoniczną, to ze wzoru (8) (ważnego teraz dla dowolnych wymiernych r) wyniknie wzór (12) (ważny dla dowolnych rzeczywistych x). Jeśli jednak nie założymy o funkcji nic więcej ponadto, że spełnia ona równanie (4), to czy może mieć ona inną postać niż (12)?

Pytanie to nurtowało matematyków przez wiele lat, a odpowiedź okazała się zupełnie nieoczekiwana: zależy ona od tego, jaką matematykę przyjmiemy. Gdyż matematyka jest systemem dedukcyjnym i zależy od przyjętego układu aksjomatów. Tak, jak możemy mieć różne geometrie (geometria euklidesowa i różne geometrie nieeuklidesowe), tak też możemy mieć

Rozwiązanie zadania F 77
Ciśnienie w powietrzu oraz w cieczy na jej poziomej powierzchni jest równe ciśnieniu atmosferycznemu p . W związku z tym ciśnienie wywierane na zanurzoną część płyty przez ciecz tworzącą menisk wklęsły jest mniejsze od ciśnienia atmosferycznego, zaś przez ciecz tworzącą menisk wypukły musi być większe od ciśnienia atmosferycznego. Dzięki zjawisku włoskowatości nie ma równowagi ciśnień działających na zewnętrzne i wewnętrzne płaszczyzny płyt. Widać to łatwo na rysunku, którego analiza przekonuje, że płyty w przypadku (a) i (b) przyciągają się, podczas gdy w przypadku (c) odpychają.



różne matematyki. Jeżeli do układu aksjomatów, na których oprzemy naszą matematykę, włączymy tzw. pewnik wyboru, to — jak pokazał w 1905 roku matematyk niemiecki G. Hamel — równanie (4) ma również rozwiązanie nie wyrażające się wzorem (12). Istnieją jednak matematyki, w których funkcje (12) są jedynymi rozwiązaniami równania (4).

Rozwiązania równania (4), różne od funkcji (12), są bardzo nieregularne i mają bardzo osobliwe własności. Nie są one ograniczone ani z góry, ani z dołu na żadnym przedziale, ich wykresy są gęste na płaszczyźnie i nie dadzą się one zapisać efektywnym wzorem.

Oczywiście istnieje dużo innych równań funkcyjnych, postacią i własnościami nieraz bardzo różniących się od podanego tutaj przykładu. Niektóre typy równań funkcyjnych, jak np. równania różniczkowe czy całkowe, wyodrębniły się dziś w osobne dyscypliny matematyczne. Obecnie pod nazwą „równania funkcyjne” rozumie się takie równania funkcyjne, w których nie występują pochodne ani całki. Nawet po tym ograniczeniu bogactwo i różnorodność różnych rodzajów i typów równań funkcyjnych są ogromne. Jeśli dodamy ponadto, że równania funkcyjne pojawiają się w niemal wszystkich dziedzinach matematyki, stanie się jasne, że stanowią one fascynujący przedmiot badań naukowych. Wśród pionierów tych badań znajdują się również najwybitniejsi matematycy polscy, jak Wacław Sierpiński czy Stefan Banach. A dzisiaj w badaniach nad równaniami funkcyjnymi matematycy polscy odgrywają czołową rolę na świecie.



Rozwiązanie zadania M 235

Powiększmy szachownicę, dodając przy jej dolnym brzegu jeden rząd pól nie zamalowanych, i rozpatrzmy obszar A złożony ze wszystkich pól, do których może dotrzeć wieża wychodząc z danego rzędu i nie przechodząc przez pola zamalowane. Teza naszego zadania jest równoważna temu, że A zawiera pewne pole przy górnym brzegu szachownicy. Przypuśćmy, że tak nie jest. Dołączając do A wszystkie pola leżące całkowicie wewnątrz niego, otrzymamy nowy obszar B , również nie zawierający pól przy górnym brzegu szachownicy, którego brzegiem jest zamknięta łamana. Niech teraz a i b będą punktami tej łamanej leżącymi odpowiednio na lewym i prawym dołu szachownicy i najbliższymi górnemu jej brzegowi (gdyby na bocznych krawędziach szachownicy takich pól nie było, wieża mogłaby przejść z dołu do góry). Łamana ta zawiera drogę łączącą a i b przebiegającą powyżej dolnego brzegu szachownicy i rozdzielającą pola zamalowane od nie zamalowanych. Król może przejść od lewego do prawego brzegu szachownicy po zamalowanych polach przyległych do tej drogi — wbrew założeniu.

Rozwiązanie zadania M 236

Zamalujmy na czerwono te pola, dla których $F_1(x) < x_1$ dla wszystkich x leżących we wnętrzu lub na brzegu pola, a na zielono pola, dla których $F_1(x) > x_1$ dla wszystkich punktów pola domkniętego. Ponieważ na lewym brzegu nie mogą leżeć pola czerwone, na prawym — pola zielone i dwa pola różnych kolorów nie mogą się dotykać, król nie może przejść od lewego brzegu szachownicy do prawego nie wchodząc na pole nie zamalowane. Wobec tego (p. zad. M 235) wieża może przejść od górnego brzegu do dolnego po nie zamalowanych polach. Zamalujmy teraz na niebiesko te pola na jej drodze, których wszystkie punkty spełniają warunek $F_2(x) > x_2$ i na żółto te pola, że wszystkie ich punkty są przesuwane „w dół”: $F_2(x) < x_2$. Rozumując analogicznie, jak to pokazaliśmy powyżej, przekonamy się, że co najmniej jedno pole na drodze wieży i teraz pozostanie nie zamalowane. Znaczy to, że istnieją w tym polu punkty p, q, r, s spełniające warunki zadania.

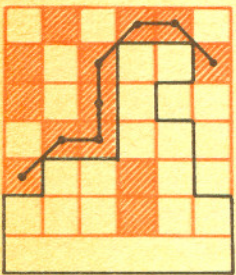


Rozwiązanie zadania M 237

Możemy założyć, że długość boku kwadratu wynosi 1. Przeprowadzając konstrukcję opisaną w zadaniu M 236 dla $n = 2, 4, 8, \dots, 2^k, \dots$ przekonamy się, że istnieją ciągi $(p_k), (q_k), (r_k), (s_k)$ takie, że p_k, q_k, r_k, s_k leżą w jednym kwadracie o boku 2^{-k} oraz $F_1(p_k) \leq p_{k,1}, F_1(q_k) \geq q_{k,1}, F_2(r_k) \leq r_{k,2}, F_2(s_k) \geq s_{k,2}$; dolne wskaźniki 1, 2 oznaczają numery współrzędnych. Z ciągu (p_k) można wybrać podciąg (p_{k_1}) zbieżny do pewnego punktu x kwadratu. Ale do tego samego punktu będą zbieżne ciągi $(q_{k_1}), (r_{k_1})$ i (s_{k_1}) . Ponieważ teraz F_1 i F_2 są funkcjami ciągłymi, więc

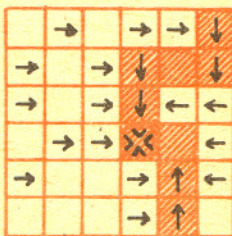
$$F_1(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} F_1(p_{k_1}) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} p_{k_1,1} = x_1$$

i analogicznie $F_1(x) \geq x_1, F_2(x) \leq x_2$ oraz $F_2(x) \geq x_2$, skąd wynika, że $F_1(x) = x_1$ i $F_2(x) = x_2$, czyli $F(x) = x$, c.b.d.o.



pole zamalowane

obszar B
droga króla



→ pola zielone
← pola czerwone
droga wieży
↓ pola żółte
↑ pola niebieskie
pole znalezione

Jak odkryliśmy hiperjądra atomowe

Prof. dr Jerzy PNIIEWSKI, członek rzeczywisty PAN

Artykuł ten oparty jest na wspomnieniach przedstawionych przeze mnie w jednej z audycji telewizyjnych w roku 1971. Materiały te udostępniłem również wydawnictwu Towarzystwa Naukowego Płockiego, pt. Notatki płockie (3 — 1973).

W wieku atomu nie wypada nie wiedzieć, że jądra atomowe są zbudowane z protonów i neutronów; tłumaczenie tego faktu mam więc z głowy. Ponieważ w ciągu ostatnich dwudziestu paru lat fizycy odkryli wielką liczbę nowych cząstek uznanych za elementarne, chciałoby się zadać pytanie, czy któraś z tych cząstek na równi z protonem i neutronem nie mogłaby również stać się cegiełką materii jądrowej. Jak się okazuje, może nią być jeszcze tylko jedna cząstka, zwana hiperonem lambda. Tak więc mamy 3 podstawowe cegiełki tworzące jądra atomowe, z tym że jądra zawierające ów hiperon nazywane są hiperjądrami. Te ostatnie są nietrwałe, żyjące krótko. W roku 1952 liczba podówczas znanych cząstek elementarnych nie była jeszcze duża, w istocie było ich zaledwie kilkanaście, znany już był jednak hiperon lambda. Możliwość istnienia materii hiperjądrowej i pierwszy przypadek hiperjądra wykryliśmy wspólnie z Marianem Danyszem w tymże roku 1952. Marian Danysz wracając w roku 1952 z Bristolu przywiózł blok emulsji fotograficznej naświetlonej promieniami kosmicznymi w locie balonowym do stratosfery, zorganizowanym przez ośrodek bristolski. We wrześniu tego roku przeglądaliśmy wieczorem pod mikroskopem przywiezione przezeń klisze, powiedziałbym niezbyt systematycznie, raczej orientując się, jaki materiał jest do dyspozycji i co ciekawego da się zauważyć.

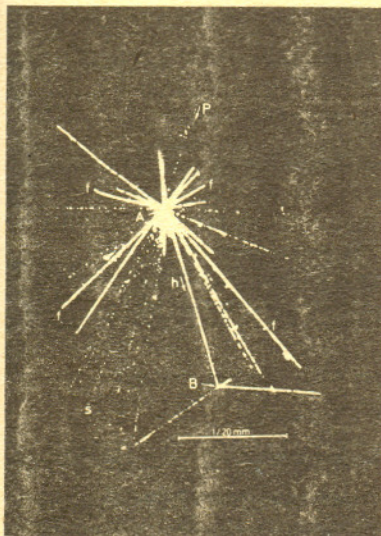
Chyba był to piątek, a zatem 19 września, kiedy pod mikroskopem ujrzeliśmy przypadek reprodukowany na załączonej fotografii. Wysokoenergetyczna cząstka promieniowania kosmicznego, znacząca tu swój ślad nikłymi plamkami, rozbija jądro bromu lub może srebra, jakich jest wiele w każdej emulsji fotograficznej. Widoczny jest cały pęk jakichś cząstek, również szybkich, oraz wiele czarnych torów cząsteczek powolnych, na ogół drobnych fragmentów uderzonego jądra. Jednak jeden z torów, bardziej czarny, swym wyglądem wskazywał, że jest to ślad fragmentu cięższego, fragmentu, który po przebiegnięciu drogi 90 mikronów (tzn. około 1/10 mm; na fotografii mikroskopowej droga ta jest wielokrotnie powiększona) zatrzymał się i rozpadł z wydzielaniem bardzo znacznej energii. Fakt ten wydał nam się niezwykle. Każdy fragment rozbitego jądra jest również jądrem, tylko mniejszym; jeśli ten przebiegł drogę 90 mikronów, to musiał „żyć” co najmniej tyle czasu, ile potrzeba na przebycie tej drogi, a że się prawdopodobnie zatrzymał, to mógł „żyć” nawet znacznie dłużej, o czym nie mieliśmy już żadnej informacji. Wszystkie znane podówczas fakty fizyki jądrowej wskazywały, że wysokowzbudzone jądra żyją co najmniej miliard razy krócej.

Rozpoczęliśmy długie dyskusje prowadzone przez wiele dni w każdej wolnej chwili. Przede wszystkim zaczęliśmy zastanawiać się, czy to nie jest złośliwy przypadek nałożenia się dwóch niezależnych zdarzeń mający nas swą niezwykłością. Szybko jednak oszacowaliśmy, że taka przypadkowa koincydencja w warunkach owego naświetlania bloku jest niezwykle mało prawdopodobna.

Dyskusje trwały i jednocześnie wykonywaliśmy pomiary, które podówczas nie miały tej precyzji, co obecnie. W każdym razie ustaliliśmy, że nawet przy niekorzystnym założeniu wydzielona energia jest co najmniej 10 razy większa niż najwyższe energie wzbudzenia spotykane w procesach jądrowych analizowanych powszechnie.

W tej nie wyjaśnionej sytuacji dwa razy dziennie chodziliśmy na kawę do nowo otwartej w Warszawie kawiarni. I właśnie tam, przy którejś z rzędu kawie, nagle zaświtała nam myśl, że ta energia niewiele się różni od energii odpowiadającej anihilacji masy spoczynkowej mezonu pi, cząstki elementarnej odkrytej parę lat wcześniej. Wtedy wzięliśmy pod uwagę nową hipotezę, że mezon pi związany siłami elektrycznymi jak elektron w atomie jest wyniesiony razem z fragmentem, a następnie unicestwia się wyzwalając właśnie tak dużą energię. Hipoteza była niezwykle atrakcyjna, ale szanse wyniesienia tak związanego mezonu wydały nam się znów zbyt małe, choć nie byliśmy w stanie tego wówczas dobrze obliczyć.

Od tej jednak hipotezy już tylko krok dzielił nas od założenia, że to hiperon lambda rozpadający się na mezon i proton jest niezależnym trzecim składnikiem jądrowym w zaobserwowanym fragmencie. I tu otwarcie trzeba przyznać, że założenie nasze było ryzykowne, bo według ówczesnych przewidywań sądzono, iż ów hiperon wyprodukowany w szybkim akcie zderzenia, powinien równie szybko rozpaść się po znalezieniu się w innym jądrze.



Pierwsze hiperjądro odkryte w roku 1952 w fotograficznej emulsji jądrowej
p — tor cząstki pierwotnej (wysokiej energii) promieniowania kosmicznego,
A — miejsce oddziaływania z jądrem bromu lub srebra napotykanym w emulsji fotograficznej,
s — pęk torów szybkich cząstek wtórnych,
— tory fragmentów rozbitego jądra,
h — tor fragmentu hiperjądrowego,
B — miejsce rozpadu hiperjądra i wychodzące z niego tory produktów rozpadu.
Powiększenie: 400 razy

Znów przyznam się, że trochę zlekceważyliśmy te obawy, może dlatego, że tak niewiele wiadomo wówczas o cząstkach elementarnych, a może dlatego, że wszystkie inne wyjaśnienia wydawały się nam znacznie mniej sensowne. Słuszność naszego zlekceważenia możliwości szybkiego rozpadu hiperonu znalazła wkrótce uzasadnienie w pięknych pracach Paisa i Gell-Manna, którzy zauważyli, iż hiperony mają pewną specjalną cechę chroniącą je od szybkiego rozpadu. To chyba zamyka historię.



Wielościany z minimalną liczbą powtórzeń

Małgorzata ZALEWSKA

W artykule tym będziemy zajmować się wielościanami wypukłymi. Ustalmy najpierw terminologię. Będziemy mówili, że ściany są tego samego rodzaju, gdy mają tę samą liczbę boków. Jeżeli oznaczymy liczbę ścian wielościanu \mathcal{W} przez $s(\mathcal{W})$, a liczbę rodzajów ścian przez $r(\mathcal{W})$, to $s(\mathcal{W}) - r(\mathcal{W})$ nazywać będziemy liczbą powtórzeń w tym wielościanie. Jak można wykazać, każdy wielościan ma dwie ściany tego samego rodzaju. My udowodnimy nawet więcej — a mianowicie: dla każdego wypukłego wielościanu \mathcal{W}

$$s(\mathcal{W}) - r(\mathcal{W}) \geq 3.$$

Dowód: Załóżmy, że w danym wielościanie \mathcal{W} ścianą o największej liczbie krawędzi jest $k(\mathcal{W})$ -kąt. Ścian w tym wielościanie musi być co najmniej $k(\mathcal{W}) + 1$, więc $s(\mathcal{W}) \geq k(\mathcal{W}) + 1$. Rodzajów ścian może być co najwyżej $k(\mathcal{W}) - 2$, gdyż i -kąt może być ścianą tego wielościanu tylko dla $i = 3, 4, \dots, k(\mathcal{W})$, więc

$$r(\mathcal{W}) \leq k(\mathcal{W}) - 2, \text{ stąd}$$

$$s(\mathcal{W}) - r(\mathcal{W}) \geq k(\mathcal{W}) + 1 - (k(\mathcal{W}) - 2) = 3,$$

a więc w każdym wielościanie są co najmniej trzy powtórzenia. Postaramy się znaleźć wszystkie (z dokładnością do homeomorfizmów, zachowujących własność „być wierzchołkiem” i „być krawędzią”) wielościany z trzema powtórzeniami. Ponieważ dalej będziemy zajmować się tylko wielościanami z trzema powtórzeniami, mówiąc „wielościan” będziemy mieli na myśli taki właśnie wielościan. Umówmy się, że wielościan, w którym ścianą o największej liczbie boków jest k -kąt, będziemy nazywać „wielościanem z k -kątem”. Z powyższych rozważań łatwo wynikają następujące własności:

1. Dla wszystkich $i = 3, 4, \dots, k$ wielościan z k -kątem zawiera ściany, będące i -kąciami.
2. W wielościanie z k -kątem każda ściana ma krawędź wspólną z k -kątem.
3. W wielościanie z k -kątem dokładnie jedna ściana nie ma krawędzi wspólnej z $(k-1)$ -kątem.

Następne własności są nieco mniej oczywiste, dlatego dla przykładu przytoczymy dowód jednej z nich:

4. W wielościanie z co najmniej dwoma k -kąciami (oznaczymy je $A_1 A_2 \dots A_k, B_1 B_2 \dots B_k$)

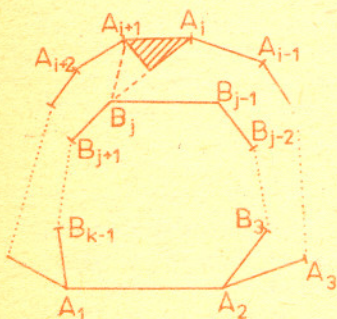
a) wielokąty te mają wspólną krawędź (np. $A_1 = B_1, A_2 = B_2$),
 b) ściana zawierająca krawędzie $A_1 A_k$ i $A_1 B_k$ jest trójkątem, podobnie jak ściana zawierająca krawędzie $A_2 A_3$ i $A_2 B_3$ (wł. 2).

5. Jeżeli $A_1 A_2 B_3 \dots B_{k-1}$ jest ścianą wielościanu z dokładnie jednym k -kątem $A_1 A_2 \dots A_k$, to ściana zawierająca krawędzie $A_2 A_3$ i $A_2 B_3$ lub $A_1 A_k$ i $A_1 B_{k-1}$ jest trójkątem (wł. 2 i 3).

6. W wielościanie z dokładnie jednym k -kątem $A_1 A_2 \dots A_k$ każda ściana, która nie ma krawędzi wspólnej z $(k-1)$ -kątem $A_1 A_2 B_3 \dots B_{k-1}$ jest trójkątem.

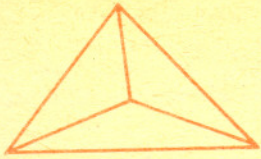
Dowód: Oznaczmy k -kąt i $(k-1)$ -kąt jak na rys. 1.

Ściana zawierająca krawędź $A_1 A_{i+1}$ nie ma krawędzi wspólnej z $(k-1)$ -kątem $A_1 A_2 B_3 \dots B_{k-1}$.

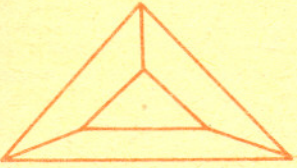


Rys. 1

Jest to jedyna ściana nie mająca krawędzi wspólnej z tą ścianą (wł. 3), więc ściany zawierające krawędzie $\overline{A_i A_{i-1}}$ oraz $\overline{A_{i+1} A_{i+2}}$ mają krawędzie wspólne z $(k-1)$ -kątem $A_1 A_2 B_3 \dots B_{k-1}$ (p. wł. 3) oraz z k -kątem (wł. 2) i wspólny wierzchołek B_j . Gdyby bowiem ściana o krawędzi $\overline{A_{i+1} A_{i+2}}$ zawierała np. krawędź $\overline{B_j B_{j+1}}$, a ściana o krawędzi $\overline{A_{i-1} A_i}$ krawędź $\overline{B_{j-2} B_{j-1}}$, to ściana o krawędzi $\overline{B_{j-1} B_j}$ nie miałaby wspólnej krawędzi z k -kątem i otrzymalibyśmy sprzeczność z wł. 2.



Rys. 2



Rys. 3

7. Jeżeli w wielościanie z dokładnie jednym k -kątem wierzchołek P nie należy do k -kąta ani do $(k-1)$ -kąta, to istnieje trójkąt o wierzchołku P i podstawie będącej równocześnie krawędzią k -kąta, a więc nie mający punktów wspólnych z $(k-1)$ -kątem. (W dowodzie korzysta się z wł. 2 i 3).

8. W wielościanie z dokładnie jednym k -kątem co najwyżej jeden wierzchołek nie należy do k -kąta ani do $(k-1)$ -kąta (wn. z wł. 3 i 7).

Korzystając z powyższych własności możemy podać, dla jakich k mogą istnieć wielościany z k -kątem:

9. Jeżeli w wielościanie \mathcal{W} , z dokładnie jednym k -kątem istnieje wierzchołek nie należący do k -kąta ani do $(k-1)$ -kąta (por. wł. 8), to $l(\mathcal{W})$ — liczba wierzchołków w tym wielościanie jest równa

$$l(\mathcal{W}) = k + (k-1) - 2 + 1 = 2k - 2$$

i ponadto $6 \leq k \leq 7$.

Jeżeli wierzchołek taki nie istnieje, to $l(\mathcal{W}) = 2k - 3$ i $4 \leq k \leq 6$ (wn. z wł. 2, 3 i 7).

10. W wielościanie \mathcal{W} z co najmniej dwoma k -kątami $l(\mathcal{W}) = 2k - 2$ i $3 \leq k \leq 5$ (wn. z wł. 2).

11. Jedynym wielościanem z dokładnie trzema k -kątami jest graniastosłup o podstawie trójkątnej (p. wł. 2 i 4).

12. Jedynym wielościanem z czterema k -kątami jest czworościan (p. wł. 4).

Skoro określiliśmy, dla jakich k mogą istnieć wielościany z k -kątem, postaramy się je zbudować.

1° Dla $k = 3$ otrzymujemy tylko jeden wielościan z trzema powtórzeniami — jest nim czworościan (rys. 2).

2° Dla $k = 4$ jedynym wielościanem z trzema k -kątami jest graniastosłup o podstawie trójkątnej. Oprócz tego istnieje wielościan z jednym k -kątem — jest nim ostrosłup o podstawie czworokąta (rys. 3).

3° Dla $k = 5$ wielościan z k -kątem może mieć dwa k -kąty lub tylko jeden (wł. 9, 10, 11, 12).

Weźmy dwa k -kąty $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ i $A_1 A_2 A_6 A_7 A_8$. Ściany zawierające krawędzie $\overline{A_1 A_5}$ i $\overline{A_1 A_8}$ oraz $\overline{A_2 A_3}$ i $\overline{A_2 A_6}$ muszą być trójkątami (p. wł. 4) — wstawiamy trójkąty $\Delta A_1 A_5 A_8$ i $\Delta A_2 A_3 A_6$ (rys. 4). Możemy teraz wstawić dwie ściany. Jedna z nich zawiera krawędzie $\overline{A_3 A_4}$ i $\overline{A_6 A_7}$, a druga $\overline{A_4 A_5}$ i $\overline{A_7 A_8}$ (wł. 2) — ściany te muszą przecinać się wzdłuż krawędzi $\overline{A_4 A_7}$ — są więc czworokątami. Po „wstawieniu” tych ścian otrzymujemy wielościan przedstawiony na rys. 5.

Ze sposobu konstrukcji wynika, że nie można zbudować innego wielościanu z dwoma pięciokątami, natomiast posługując się podobną metodą konstrukcji wielościanu można zbudować wielościan z dokładnie jednym pięciokątem (rys. 6).

4° Dla $k = 6$ możemy zbudować tylko wielościan z jednym k -kątem (p. wł. 10, 11, 12).

Z własności 9 wynika, że wielościan z sześciokątem może mieć $2k - 3 = 9$ lub $2k - 2 = 10$ wierzchołków. Jeżeli założymy, że wielościan z sześciokątem ma 9 wierzchołków, to otrzymamy dwa wielościany, przedstawione na rys. 7. Jedyny wielościan z sześciokątem mający 10 wierzchołków przedstawiony jest na rys. 8.

5° Niech $k = 7$. Z własności 9, 10, 11, 12 wynika, że może istnieć jedynie wielościan z jednym siedmiokątem i może on mieć $2k - 2 = 12$ wierzchołków. Ze sposobu konstrukcji wynika, że istnieją dwa wielościany z siedmiokątem, przedstawione na rys. 9.

Z własności 9, 10, 11, 12 wynika, że nie istnieją inne wielościany z trzema powtórzeniami. Znaleźliśmy 10 klas wielościanów. Mają one pewną ciekawą własność: każdy wielościan z k -kątem można otrzymać przez „obcięcie” pewnego wielościanu z $(k-1)$ -kątem, a więc każdy wielościan z trzema powtórzeniami można otrzymać przez obcinanie czworościanu otrzymując po drodze wyłącznie wielościany z minimalną liczbą powtórzeń.



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Na tropie cząstek

Nie wszystkie zjawiska dają się zaobserwować naszym nieuzbrojonym okiem. Tak np., aby zaobserwować przepływ prądu, posługujemy się amperomierzem, aby zmierzyć długość danego obiektu, używamy przymiaru (niesłusznie nazywanego linijką).

Postaramy się zaobserwować

Cząstki wirtualne

W lesie czy zagajniku, w szczególności jeśli są to tereny podmiejskie, przesuwa się między drzewami chwiejne postacie. To nietrzeźwi. Pamiętając, że prawdziwy badacz nie cofa się przed niczym, przystępny do obserwacji (możemy i sami w warunkach domowych zrobić nietrzeźwego, przeznaczając około 0,5 litra 40% roztworu wodnego C_2H_5OH na 50 kg wagi trzeźwego i doliczając odpowiednią ilość na każde 10 kg jego wagi). Obserwując wnikliwie trasę, po której porusza się nietrzeźwy, spostrzegamy dwie ciekawe prawidłowości:

- 1 — Nietrzeźwy zmienia kierunek marszu napotykać przeszkodę (w naszym przypadku drzewo).
- 2 — Nietrzeźwy zmienia kierunek marszu również i bez widocznego powodu, tak jakby napotkana przeszkoda była dla naszego oka niewidzialna.

Jak wyjaśnić to zdumiewające zjawisko?

Otóż najwidoczniej nietrzeźwy w swej wędrówce po lesie zderza się z obiektami, których w żaden sposób nie można zaobserwować (rozpraszanie nietrzeźwych na cząsteczkach powietrza nie gra tu żadnej roli ze względu na bardzo małą masę tych cząsteczek). Obiekty te muszą mieć stosunkowo dużą masę (rzędu 1 kg lub więcej) na to, by w zauważalny sposób zmienić kierunek ruchu nietrzeźwego. Taką samą sytuację spotykamy w świecie cząstek elementarnych. Wystarczy, jeśli na miejsce nietrzeźwych podstawimy np. elektrony, zamieniając przy okazji drzewa na ciężkie jądra atomowe. Wtedy owe niewidoczne obiekty przejdą we wspomniane na początku cząstki wirtualne.

Przypomnijmy pokrótce podstawowe własności cząstek wirtualnych. Po pierwsze, nie mogą one, z definicji, zostać zaobserwowane w żaden bezpośredni sposób. Możemy jedynie badać skutki ich obecności poprzez obserwację zmiany kierunku lotu cząstek rzeczywistych — w naszym przypadku nietrzeźwych. Po drugie, masa cząstki wirtualnej może być zupełnie dowolna i wiąże się z czasem trwania oddziaływań poprzez znaną zasadę nieoznaczoności

$$c^2 \cdot \Delta m \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2} \hbar.$$

Przystępujemy do pomiarów. Z grupy nietrzeźwych wybieramy jednego łagodnego (w braku łagodnego możemy posłużyć się pomocą starszego brata) i obserwujemy jego ruch w określonym (dość dużym) czasie, licząc skrupulatnie liczbę zderzeń z drzewami (cząstkami!) wirtualnymi. Pomiary wykonujemy wielokrotnie dla różnych czasów, notując otrzymane wyniki w naszym dzienniku pomiarów. Następnie, dla każdego pomiaru obliczamy liczbę zderzeń na jednostkę czasu i wyciągamy średnią arytmetyczną. Otrzymamy w ten sposób średnią liczbę drzew (cząstek) wirtualnych zjawiających się w jednostce czasu. Pomiary możemy wykonać w lesie o różnym zagęszczeniu drzew, badając w ten sposób zależność liczby drzew wirtualnych od gęstości zadrzewienia. Odpowiada to oczywiście różnej gęstości jąder atomowych (np. protonów), przy czym maksymalna możliwa gęstość opisuje sytuację całkowicie zdegenerowanego gazu jądrowego, w którym cząstki wirtualne praktycznie wcale nie występują. Możemy to łatwo sprawdzić w lesie tak gęstym, że nasz nietrzeźwy z trudem przeciska się pomiędzy drzewami.

Wreszcie możemy wykonać nasze badania na otwartej przestrzeni (w próżni!). W ten sposób będziemy w stanie ocenić liczbę cząstek wirtualnych w próżni, czego nie udało się dotychczas osiągnąć żadnymi innymi metodami.

Na koniec propozycja dla eksperymentatorów bardziej zaawansowanych: Przy pomocy naszego nietrzeźwego (tu koniecznie łagodnego) możecie sprawdzić wyżej wypisaną zasadę nieoznaczoności. Wystarczy znać masę cząstki wirtualnej i czas trwania zderzenia z nią. Iloczyn tych wielkości powinien być większy od zamieszczonej w tablicach wartości stałej Plancka \hbar . Zastępując w tym iloczynie otrzymaną z pomiarów masę cząstki wirtualnej przez masę protonu, a czas trwania zderzenia przez typowy czas jądrowy ($10^{-24}s$) powinniście otrzymać liczbę niewiele różniącą się od wartości \hbar . Wynik ten jest jeszcze jednym argumentem na rzecz wirtualności obiektów, z którymi zderzają się nietrzeźwi.

A jak z obserwacji ruchu nietrzeźwego wyznaczyć masę owych cząstek i czas trwania zderzenia? Spróbujcie pogłowić się sami. Napiszcie do nas, jak sobie poradziliście. Najciekawsze wypowiedzi opublikujemy. Powodzenia!



Dr Andrzej TRYBULEC

System Mizar został stworzony w Sekcji Zastosowań Matematyki Towarzystwa Naukowego Płockiego. Jego autorem jest autor artykułu, a system opracowali: Piotr Rudnicki (IPI PAN), Czesław Byliński, Roman Matuszewski, Stanisław Żukowski (UW). Towarzystwo Naukowe Płockie jest najstarszym polskim stowarzyszeniem naukowym. Jest towarzyszem regionalnym, ale jak widać zajmuje się nie tylko historią, kulturą i geografją Mazowsza.

„for x, y , holds $[x, y]$ in R or $[y, x]$ in R ”
 „dla dowolnych x, y jest prawdą, że $\langle x, y \rangle$ lub $\langle y, x \rangle$ należy do R ”

Przeprowadzane są próby takiego zaprogramowania maszyny cyfrowej, by potrafiła ona dowodzić twierdzenia matematyczne. Działające już systemy nie zastąpiły (póki co) matematyków. Nasz zespół postawił sobie łatwiejsze zadanie: opracowanie systemu, który wykrywa błędy w dowodach napisanych przez człowieka.

Sprawdzając, czy nasz system sprawdza dowody, przepisaliśmy część pracy prof. Wandy Szmielew „Oriented and non-oriented linear orders”. Między innymi trzeba było pokazać, że relacja spójna zawarta w antysymetrycznej jest jej równa. A oto wydruk:

```

ENVIRON GIVEN U BEING NONEMPTYSET;
- TYPE RELATION DENOTES SUBSET OF CU,UJ;
- LET X,Y DENOTE ELEMENT OF U;
- BEGIN
  FOR R,S BEING RELATION PRED R <= S DENOTES
    FOR X,Y HOLDS [X,Y] IN R IMPLIES [X,Y] IN S;
  DEFINITION LET R BE RELATION;
  PRED R IS CONNECTED DENOTES
    FOR X,Y HOLDS [X,Y] IN R OR [Y,X] IN R;
  PRED R IS ANTISYMMETRIC DENOTES
    FOR X,Y ST [X,Y] IN R & [Y,X] IN R HOLDS X=Y
  END;
  FOR R,S BEING RELATION
    ST R IS CONNECTED & R <= S & S IS ANTISYMMETRIC
    HOLDS S <= R
  PROOF LET R,S BE RELATION SUCH THAT
    Z1: FOR X,Y HOLDS [X,Y] IN R OR [Y,X] IN R AND
    Z2: FOR X,Y ST [X,Y] IN R HOLDS [X,Y] IN S AND
    Z3: FOR X,Y ST [X,Y] IN S & [Y,X] IN S HOLDS X=Y;
  LET X,Y BE ELEMENT OF U SUCH THAT A: [X,Y] IN S;
  NOW ASSUME B: [Y,X] IN R; THEN [Y,X] IN S BY Z2;
  THEN X=Y BY A,Z3; HENCE [X,Y] IN R BY B END;
  HENCE [X,Y] IN R BY Z1 END END
  
```

THANKS,O.K

Nie było błędów — komputer podziękował za współpracę. A jeśli by były...

```

ENVIRON TYPE POINT; TYPE RELATION;
- BEGIN
  FOR R BEING RELATION ST R IS CONNECTED & ;
  **** FOR R,R1 BEING RELATION HOLDS R<R1; *59 *37,31
  **** *82
  END
  SORRY
  -----
  
```

Maszyna jest wtedy bardziej energiczna (*59 niezadeklarowana relacja, *37 brak zdania składowego po spójniku, *31 zdanie niepoprawne syntaktycznie, *82 to zdanie nie jest oczywiste). Aby przekazać maszynie tekst do sprawdzenia, potrzebny jest odpowiedni język. Tu użyty nazywa się Mizar. Tak samo jak system, który go używa.

System Mizar jedynie sprawdza dowody. Ale i to może się przydać. Studentom — nie tylko matematyki — chcącym sprawdzić czy poprawić swoją umiejętność dowodzenia. Informatykom — przy długich i żmudnych dowodach, że ich programy działają tak, jak działać powinny. A i matematyk woli mieć pewność, że drobne luki w dowodzie, na które sobie często pozwala, nie kryją poważnych błędów.

Nie sposób w krótkim tekście opisać język. Objasnić wszystkie skróty i angielską terminologię. Czytelnikom Deltę obiecujemy krótki kurs Mizara, już od września. Każdy, kto przyśle nam tekst w tym języku, otrzyma odpowiedź. Nie od nas, od komputera. Na ile będzie uprzejma, to już od niego zależy.

