

Od styczniowego numeru przez cały 1985 rok będziemy drukować w "Delcie" pięciobarwną mapę nieba w trzynastu częściach. "Parasol" o średnicy 60 cm, który powstanie po sklejeniu części, umożliwi nawet początkującemu obserwatorowi nieba gwieździstego szybkie i łatwe odnalezienie dowolnego gwiazdozbioru, zidentyfikowanie wielu gwiazd oraz wyznaczenie aktualnego położenia czterech planet i komety Halley'a.

Do stycznia jeszcze daleko, ale już dziś warto zapewnić sobie wszystkie trzynaście części mapy prenumerując "Deltę" na 1985 rok.

SPIS TREŚCI

NUMERU 9 (129)

Solitary w domu <i>dr Jerzy Zagrodiński</i>	str. 1
Baterie słoneczne <i>dr Małgorzata Górską</i>	str. 4
Zadania	str. 5
Stulecie Płaszczaków <i>doc. dr Lesław W. Szczerba</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Patrz w niebo	str. 10
Perypetie z MZK <i>mgr Piotr Chrzastowski</i>	str. 11
Aktywność magnetyczna gwiazd <i>doc. dr Kazimierz Stępień</i>	str. 12
Dopplerowskie obrazy plam gwiazdowych <i>mgr Krzysztof Jahń</i>	str. 14
Klub 44	str. 16

W następnym numerze:

Dowód twierdzenia mocniejszego może być łatwiejszy

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny

dr Jerzy Brojan
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichoński
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący
dr Jan Rempala
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz Sitarski
prof. dr Józef I. Smak
doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wolska

doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Zakowski —
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Tomasz Chlebowski
mgr Joanna Filipowicz
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos — sek. red.
dr Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
mgr Andrzej Majhofer
dr inż. arch. Jacek Mazur
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
Nakład 35 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 6548/12/84. T-68

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnie i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

- w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
- w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
- w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
- w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
— Licosa Commisionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

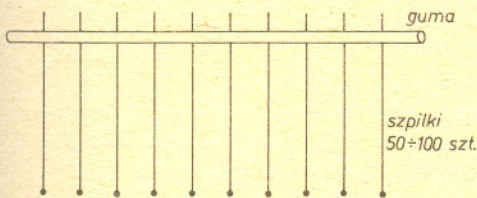
Cena 1 egzemplarza zł 20,—

Dr Jerzy ZAGRODZIŃSKI

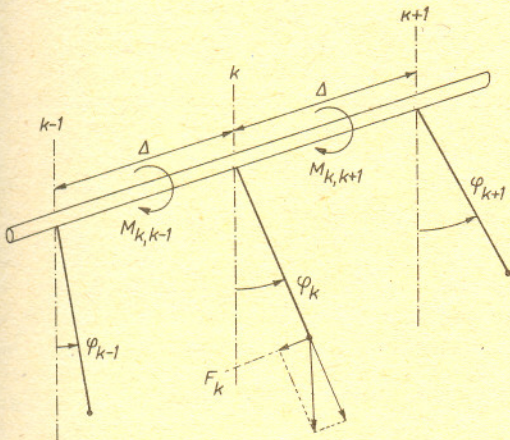
Własności wahadła matematycznego zna każdy Czytelnik *Delty*, a niektórzy potrafią z pewnością opisać zjawiska zachodzące w układzie dwóch wahadeł sprzężonych. Nie jest to trudne w przypadku małych wychyleń ze stanu równowagi. Opis dużych drgań nastęrcza już znacznie większe kłopoty.

W tym artykule chcemy przedstawić zjawiska zachodzące w układzie kilkudziesięciu, kilkuset, a także nieskończenie wielu oddziaływających ze sobą identycznych wahadeł matematycznych. Na początek polecamy Czytelnikowi wykonanie modelu.

Bierzemy dość grubą elastyczną gumę — najlepiej służącą do napędu modeli latających o przekroju $1 \div 2 \text{ mm}^2$ i pudełko szpilek krawieckich z dużymi szklanymi łepkami. Naciągamy nieco gumę mocując ją prowizorycznie np. na stole i co $5 \div 10 \text{ mm}$ wbijamy szpilki, jak na rys. 1. Ważne, by wszystkie były wbite w jednej płaszczyźnie i były jednakowej długości. Następnie delikatnie zwalniamy naciąg i ... model gotowy.



Rys. 1



Rys. 2

Nasza okładka

Rysunki komputerowe na okładce przedstawiają ewolucję według równania sinus—Gordona (kolejno od prawego górnego rogu):

— zaburzenia w postaci dwóch załamów poruszających się na tle nieruchomego solitonu liniowego,

— breathera o kształcie eliptycznym,

— solitonu kołowego bez prędkości początkowej (po wstępnym kurczeniu się obiekt zaczyna się rozszerzać interferując z odbiciami od brzegu),

— solitonu kołowego zderzającego się z kołowym antysolitonem (proces jest symetryczny względem osi x i y , dlatego na rysunkach przedstawiono tylko jedną ćwiartkę),

— dwóch zderzających się solitonów.

Rysunki pochodzą z pracy: P. Christiansen, P. Lomdahl — *Physica* 2D, 482, 1981.

Rysunki zderzeń solitonów w artykule pochodzą z książki: G. Eilenberg, *Solitony*, Springer-Verlag (1981).

Trzymając gumę palcami za końce wywołujemy gwałtowny obrót jednego z nich o 360° . Wywołane w ten sposób zaburzenie rozchodzi się wzdłuż łańcucha wahadeł. Nasz model stanowi jedynie przybliżenie układu sprzężonych wahadeł matematycznych, ale wystarczająco dobre, aby ujawnić niektóre istotne cechy fal rozchodzących się w takiej strukturze. Zanim to zademonstrujemy, rozwiążmy problem teoretycznie.

Przy oznaczeniach jak na rys. 2, gdzie Δ oznacza odległość między wahadłami, m zaś jest gęstością liniową (g/cm), na k -te wahadło działa: składowa siły ciężkości $F_k = \Delta mg \sin \varphi_k$, gdzie Δm jest masą punktu materialnego na końcu wahadła, oraz momenty sił wynikające z oddziaływania wahadeł $k+1$ i $k-1$ na wahadło k -te. Oznaczmy je $M_{k,k+1}$ i $M_{k,k-1}$. Załóżmy, że to oddziaływanie jest proporcjonalne jedynie do różnicy ich wychyleń kątowych, tj. że $M_{k,k\pm 1} = \alpha(\varphi_{k\pm 1} - \varphi_k)/\Delta$, a współczynnik α charakteryzuje własności sprężyste gumy (dla drgań skrętnych).

Równanie ruchu k -tego wahadła

$$(1) \quad I(\Delta m l a_k) = -IF_k + M_{k,k+1} + M_{k,k-1},$$

w którym a_k jest przyspieszeniem kątowym k -tego wahadła, a l jego długością, przyjmie postać

$$(2) \quad \Delta m l^2 a_k = -\Delta m g l \sin \varphi_k + \alpha(\varphi_{k+1} + \varphi_{k-1} - 2\varphi_k)/\Delta,$$

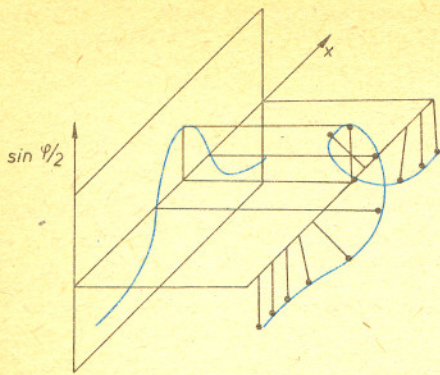
dla $k = 1, 2, \dots$

Ponieważ przyspieszenie kątowe jest drugą pochodną wychyleń względem czasu, ten układ równań można zapisać jeszcze inaczej:

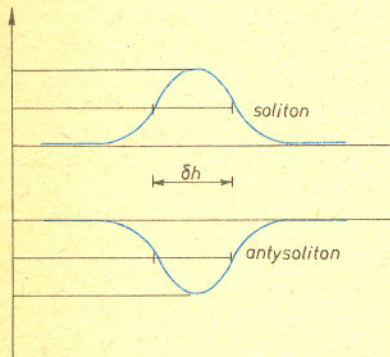
$$(3) \quad \frac{l}{g} \frac{d^2 \varphi_k(t)}{dt^2} = -\sin \varphi_k(t) + \frac{\alpha}{mgl} \frac{\varphi_{k+1}(t) + \varphi_{k-1}(t) - 2\varphi_k(t)}{\Delta^2}.$$

Jest to układ równań różniczkowo-różnicowych opisujący własności ciągu wahadeł matematycznych oddziaływających ze sobą według najprostszej recepty: oddziaływanie dotyczy jedynie sąsiednich wahadeł i jest liniowe względem różnicy wychyleń.

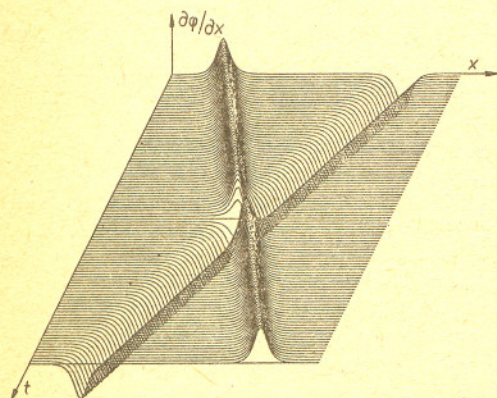
Gdy oddziaływanie sąsiednich wahadeł jest słabe, tj. gdy $\alpha \rightarrow 0$, układ ten zdąża do układu niezależnych równań opisujących drgania każdego z wahadeł osobno: $l/g \varphi_k''(t) = -\sin \varphi_k(t)$. Przy małych drganiach ($\varphi_k \ll 1$, φ_k mierzone w radianach) $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ i Czytelnik rozpozna wzór opisujący drgania oscylatora harmonicznego. Gdy „zageszczamy” wahadła,



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

zmnijszając równocześnie ich masę Δm tak, by gęstość m pozostawała stała, tzn. gdy przechodzimy do granicy $\Delta \rightarrow 0$, ostatni wyraz równania zdąży do $\partial^2 \varphi / \partial x^2$, a całe równanie przyjmuje postać

$$(4) \quad \frac{l}{g} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} = -\sin \varphi(x, t) + \frac{\alpha}{mgl} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2},$$

gdzie poszukiwana funkcja φ zamiast zależeć od numeru wahadła k , zależy teraz od współrzędnej x mierzonej wzdłuż łańcucha wahadeł i oczywiście także od czasu t . Dokonajmy jeszcze zabiegu kosmetycznego — wprowadźmy nowe skale czasu i odległości

$$(5) \quad \tau = \sqrt{\frac{g}{l}} t, \quad \xi = \sqrt{\frac{mgl}{\alpha}} x,$$

a równanie przyjmie sławną postać

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = \sin \varphi(\xi, \tau).$$

Jest to już równanie różniczkowe (cząstkowe) i nieliniowe, gdyż poszukiwana funkcja φ występuje w wyrazie $\sin \varphi$. Dlatego też nosi nieco dziwną nazwę: równanie sinus-Gordona (przez podobieństwo do innego sławnego równania Kleina-Gordona, identycznego niemal z (6), lecz bez operacji \sin). Równanie sinus-Gordona było znane już geometrom w XIX wieku, ale prawdziwe zainteresowanie wzbudziło dopiero, gdy okazało się, że ma rozwiązania solitonowe (por. artykuły A. Kusza *Delta* 10/1981, S. Wojciechowskiego *Delta* 1/1983) i występuje w niezliczonej liczbie problemów fizycznych, takich jak zagadnienie wymuszonej przezroczystości ośrodka przy przechodzeniu silnych fal elektromagnetycznych, rozchodzenie się dyslokacji w kryształach, mechanizmy ruchu domen ferromagnetycznych, drgania w długich łańcuchach struktur organicznych, ruch wirów pól magnetycznych w tzw. złączach Josephsona i niektóre zagadnienia w teorii cząstek elementarnych.

Przyjrzyjmy się bliżej niektórym rozwiązaniom równania (6). Rozwiązań tych jest nieskończenie wiele i, o dziwo, „połowa” daje się przedstawić przez funkcje elementarne.

Można sprawdzić przez różniczkowanie, że jeśli

$$(7) \quad \ln \operatorname{tg}(\varphi/4) = \pm (k\xi \pm \omega\tau),$$

przy warunku $k^2 - \omega^2 = 1$, który da się zapisać jeszcze inaczej

$$(8) \quad k = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \omega = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}},$$

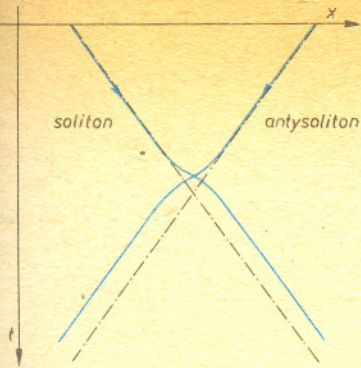
to φ jest rozwiązaniem równania (6); u — jest pewnym parametrem, $u < 1$, a znaki \pm przed nawiasem i w nawiasie w wyrażeniu (7) można przyjmować niezależnie, tzn. $+, +, +-, -, +, --$.

Na rysunku 3 zamiast funkcji φ wykreśliłmy funkcję

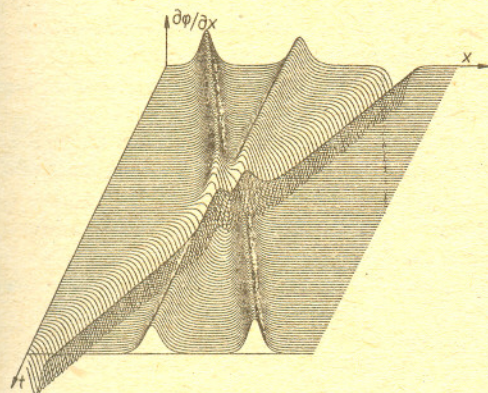
$$(9) \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{2}{\operatorname{ch}(k\xi \pm \omega\tau)}.$$

Ponieważ φ jest wychyleniem wahadła ze stanu równowagi, przeto $\sin(\varphi/2)$ przedstawia akurat obwiednię rzutu na płaszczyznę pionową końców szpilek w naszym modelu, gdy jeden z końców gumy zostanie skrecony o 360° względem drugiego. Odróżniać należy skręt zgodny z ruchem wskazówek zegara i skręt przeciwny, chociaż ich rzuty na płaszczyznę pionową wyglądają identycznie.

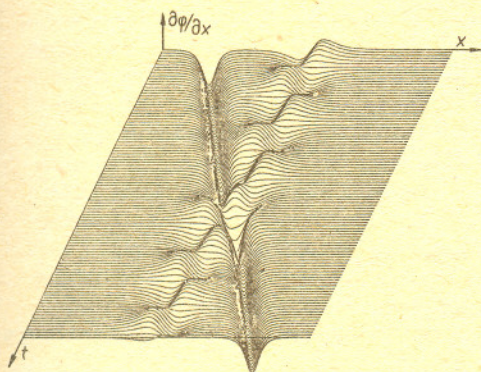
Stany te mogą być statyczne, gdy $\omega = 0$ i dynamiczne, gdy $\omega \neq 0$, a „skręt” porusza się z prędkością $\dot{\varphi} = \omega/k$. Szerokość „skrętu” w przypadku, gdy jest on nieruchomy, wynosi



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

$\delta h_{stat} \approx 1,32[\alpha/mg]^{1/2}$, natomiast gdy porusza się:
 $\delta h_{dyn} = \delta h_{stat} \sqrt{1-v^2/v_0^2} \leq \delta h_{stat}$, gdzie v_0 jest kresem górnym osiągniętych prędkości $v_0^2 = a/ml^2$.

Fakt, iż obiekt poruszający się ulega skróceniu proporcjonalnie do $\sqrt{1-v^2/c^2}$ (skrócenie Lorentza) jest charakterystyczny dla zagadnień relatywistycznych i jest konsekwencją relacji (8). Łańcuch wahań stanowi więc także pewien model procesu relatywistycznego, choć ze szczególną teorią względności poza występowaniem pierwiastka nie ma nic wspólnego.

Zamiast wykresów $\sin(\varphi/2)$ wygodnie jest wykreślać $\partial\varphi/\partial x$, co zilustrowano na rysunku 4, gdyż wówczas obrazy skrętów przeciwnego i zgodnego z ruchem wskazówek zegara są różne. Dla przyjętego dodatniego kierunku kąta φ (rys. 2) pierwszy będzie dodatni, a drugi ujemny.

Obraz przestrzenny przedstawiający ewolucję w przestrzeni i w czasie rozwiązania zawierającego dwa takie obiekty przedstawia rys. 5. Z upływem czasu obiekt dodatni przesuwa się w prawo, ujemny — w lewo, aż do momentu zderzenia, po którym oba obiekty zamieniają się miejscami bez zmiany ich kształtu (a w tym przypadku także bez zmiany prędkości). Obiekty o tej własności noszą nazwę solitonów. Aby obiekty takie mogły pretendować do miana solitonów, musi zatem być ich przynajmniej dwa. Podstawową konsekwencją ich oddziaływania jest gwałtowne przesunięcie w chwili, gdy znajdują się blisko siebie, tak jak gdyby solitony o tej samej skrętności odpychały się, a solitony o przeciwnych skrętnościach — przyciągały. Dla pary obiektów o przeciwnych skrętnościach przyjęły się nazwy soliton i antisoliton. Wynik oddziaływania solitonu i antisolitonu z rys. 5 widać wyraźniej na rys. 6, gdzie wykreślono trajektorie ich wierzchołków — tzw. linie świata. Po zderzeniu linie świata pozostają równoległe do linii przed zderzeniem, lecz są przesunięte.

Rys. 7 przedstawia proces potrójny: zderzenie dwóch solitonów i antisolitonu. Czytelnik potrafi zapewne samodzielnie naszkicować odpowiednie linie świata. Należy podkreślić, że to, co przedstawiono na rysunkach 5 i 7, stanowi wykres dokładnego rozwiązania analitycznego równania (6), tak zwanych rozwiązań dwu i trój-solitonowych, a ponieważ równanie jest nieliniowe, wykresy te nie są oczywiście zwykłą sumą dwóch lub trzech rozwiązań jedno-solitonowych.

Oprócz wymienionych rozwiązań równanie sinus-Gordona dopuszcza jeszcze inny obiekt, tzw. breather (w wolnym tłumaczeniu: oddychacz). Odpowiada to stanowi związanemu: parze soliton-antisoliton, które pulsując poruszają się z jednakową prędkością i stanowią jeden obiekt. Rysunek 8 przedstawia właśnie zderzenie prawie nieruchomego breathera z antisolitonem.

Jak widać z przytoczonych rysunków, solitony mają wiele cech właściwych cząstkom materialnym, wiele reguł opisujących ich oddziaływania ma swoje odpowiedniki w dynamice ciał materialnych, a że stanowią one równocześnie dokładne rozwiązania nieliniowych równań różniczkowych, przesądziło to o ich karierze w fizyce i matematyce.

A nasz gumowy model? Można na nim wytworzyć solitony, antysolitony, breathery, nawet stany wielosolitonowe i obserwować najprostsze zderzenia. Gdyby jednak solitony poruszały się nieco niemrawo, można spróbować zmniejszyć natężenie pola grawitacyjnego, ustawiając gumę skośnie, a nawet prawie pionowo, lub dobierając inne obciążenie szpilek.

Życzymy ciekawych eksperymentów!

Baterie słoneczne

Dr Małgorzata GÓRSKA

1. Wykorzystanie energii słonecznej

Ostatnio coraz częściej mówi się o „kryzysie energetycznym”, to znaczy o wyczerpaniu się podstawowych surowców energetycznych, takich jak ropa naftowa i węgiel.

W poszukiwaniach nowych źródeł energii zwrócono uwagę na możliwość wykorzystania energii słonecznej. Ma ona wiele zalet — jest powszechnie dostępna, bezpłatna (jak dotąd), niewyczerpalna przynajmniej przez następnych kilka miliardów lat, bezpieczna i w dodatku nie niszczy środowiska. Wykorzystanie promieniowania słonecznego nie jest zresztą pomysłem nowym — przeciwnie, jest dosłownie „stare jak świat”. Rośliny czerpią energię do życia wyłącznie ze Słońca, a używane przez nas powszechnie paliwa w postaci drewna, węgla czy ropy naftowej są właśnie pochodzenia roślinnego. Tak więc wykorzystujemy energię słoneczną zmagazynowaną przez rośliny w ciągu kilku okresów geologicznych. Niestety, zapasy te wyczerpujemy znacznie prędzej niż możemy liczyć na ich odnowienie i dlatego teraz poszukujemy szybszych i bardziej bezpośrednich sposobów wykorzystania energii słonecznej. Konwencjonalne metody to wykorzystanie siły wiatru i spadku wód (nie należy zapominać, że zawdzięczamy je oddziaływaniu Słońca na atmosferę). Nowocześniejsze jest wykorzystanie promieniowania słonecznego w zakresie podczerwieni — ciepła i w zakresie widzialnym — światła. Skoncentrowaną wiązką promieniowania słonecznego można np. nagrzać do temperatury kilkuset stopni grzejnik silnika cieplnego — można w ten sposób wykorzystać około 25% dostarczonego ciepła.

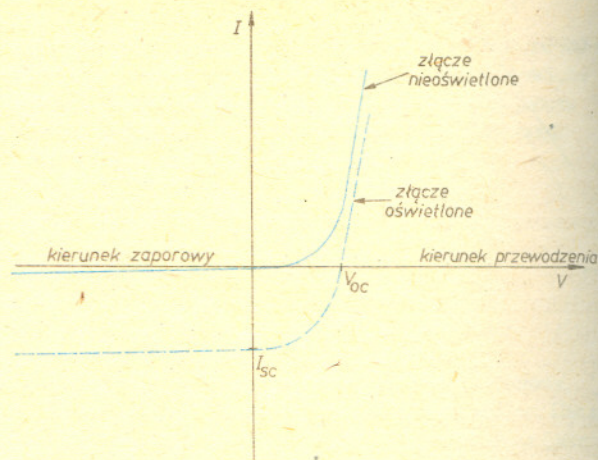
Promieniowanie w zakresie widzialnym możemy za to przekształcić bezpośrednio w energię elektryczną. Urządzenia służące do tego celu to właśnie baterie słoneczne, które działają dzięki istnieniu efektu fotowoltaicznego.

2. Efekt fotowoltaiczny

W półprzewodniku część elektronów należy do wiązań atomowych i ma ograniczone możliwości ruchu, a część może swobodnie poruszać się w kryształach i te elektrony mają oczywiście wyższe energie. Różnica między najwyższą energią dostępną elektronom wiązań i najniższą, jaką mają elektrony swobodne, zwana jest przerwą energetyczną. Jeżeli elektron wiązania uzyska energię równą lub większą od tej przerwy, to może oderwać się od wiązań i stać się elektronem swobodnym, pozostawiając lukę w wiązaniach. Luki takie można opisać jako cząstki o ładunku dodatnim, zwane dziurami. Jeżeli w półprzewodniku liczba elektronów swobodnych przewyższa znacznie liczbę dziur (różnica takie powstają w wyniku obecności defektów lub domieszek), to nazywamy go półprzewodnikiem typu n, typu p zaś, gdy dziur jest znacznie więcej niż elektronów swobodnych.

Układ, w którym półprzewodnik typu p i półprzewodnik typu n znajdują się w bezpośrednim kontakcie, zwany jest złączem p-n. Charakterystyka prądowo-napięciowa złącza p-n przedstawiona jest na rys. 1 linią ciągłą. Jest ona, jak widać, niesymetryczna. Gdy dodatni biegun napięcia przyłożymy do obszaru p, a ujemny do obszaru n, to taki kierunek pola sprzyja dyfuzji swobodnych elektronów z obszaru n do p (i dziur w przeciwnym kierunku) i powoduje przepływ prądu. Jest to kierunek przewodzenia. Odwrotne przyłożenie napięcia powoduje opróżnienie obszaru złącza ze swobodnych nośników

i zahamowanie dyfuzji, a więc prąd przestanie płynąć. Ścisłej mówiąc, będzie płynął prąd, ale bardzo mały, ograniczony małą liczbą swobodnych elektronów w półprzewodniku typu p i dziur w półprzewodniku typu n. Ten kierunek napięcia i prądu nazywamy kierunkiem zaporowym.



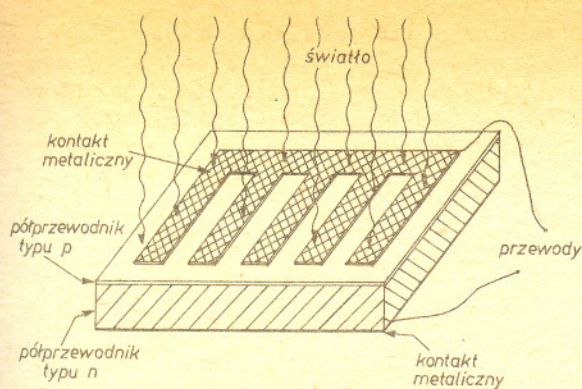
Rys. 1. Charakterystyka prądowo-napięciowa złącza p-n.

Energia fotonu w widzialnej części promieniowania słonecznego jest większa niż przerwa energetyczna w typowych półprzewodnikach. Światło padające na półprzewodnik może więc przekazać swą energię elektronom wiązań, które dzięki temu mogą stać się elektronami swobodnymi (pozostawiając po sobie dziury). Jeżeli oświetlimy złącze p-n, to po obu stronach złącza powstanie dodatkowa liczba swobodnych elektronów i dziur. Zwiększenie liczby swobodnych elektronów po stronie p i dziur po stronie n złącza spowoduje wzrost prądu zaporowego (jego natężenie, jak pamiętamy, zależy właśnie od liczby tych nośników). Charakterystyka prądowo-napięciowa złącza „przesunie się” więc pod wpływem oświetlenia w kierunku zaporowym o wartość prądu (I_{sc}) proporcjonalną do natężenia światła. Jest ona zaznaczona na rys. 1 linią przerywaną. Na rysunku tym widać również, że gdy prąd nie płynie (a więc gdy obwód jest otwarty), na końcach złącza powstanie pod wpływem oświetlenia napięcie (V_{oc}). Jak się okazuje, nie może być ono dowolnie duże. Jego wartość nie przekracza wartości przerwy energetycznej podzielonej przez ładunek elektronu (w typowych złączach od 1 do 2 V). Powstawanie napięcia pod wpływem oświetlenia to właśnie efekt fotowoltaiczny.

3. Baterie słoneczne

Złącze p-n, w którym pod wpływem światła słonecznego powstaje napięcie, to ogniwo słoneczne. Takie ogniwo naszkicowane jest w powiększeniu na rys. 2 (w praktyce grubość ogniwa nie przekracza 0,5 mm). Na kryształach typu n osadzona jest cienka warstwa typu p (lub odwrotnie, to nie ma większego znaczenia). Światło pada na całą powierzchnię warstwy. Jeżeli jest ona dostatecznie cienka — od kilku do kilkudziesięciu mikronów — to światło przenika przez nią i dociera do granicy z półprzewodnikiem typu n, a więc do obszaru złącza, gdzie wywołuje efekt fotowoltaiczny. W ten sposób wykorzystujemy całą powierzchnię złącza, a nie tylko jej część, jak przy oświetleniu bocznym. Kontakt prądowy od strony oświetlonej ma zwykle kształt siatkowy lub „grzebieniowy” — aby nie zasłaniać światła, a jednocześnie zapewnić równomierny przepływ prądu przez całe ogniwo.

Kilka takich ogniw połączonych szeregowo lub równolegle tworzy zapowiedzianą w tytule baterię słoneczną.



Rys. 2. Schematyczny szkic ogniw słonecznych.

Z jakich półprzewodników robi się baterie słoneczne? Przede wszystkim — z krzemu. Baterie krzemowe są to na razie jedyne baterie, które działają niezawodnie i weszły do produkcji na skalę przemysłową. Krzem jest materiałem tanim i dostępnym — otrzymuje się go z SiO_2 , czyli po prostu — z piasku! Niestety — krzem jako materiał jest wprawdzie tani, ale za to technologia otrzymywania krzemu półprzewodnikowego — bardzo droga. Dlatego też ostatnio poszukuje się coraz intensywniej półprzewodników, z których można by robić tanie baterie słoneczne (choćby nawet nieco gorsze niż krzemowe). Otrzymuje się baterie słoneczne o coraz to innych własnościach,

a ich opisy wypełniły już całe tomy. Na razie jednak baterie krzemowe wciąż jeszcze wychodzą zwycięsko z wszelkiej konkurencji.

4. Zastosowanie baterii słonecznych

Przejdźmy teraz do praktycznego stosowania baterii słonecznych. Przede wszystkim interesuje nas moc prądu, jaki możemy z takiej baterii otrzymać. Strumień padającego na Ziemię promieniowania słonecznego wynosi około 100 mW/cm^2 . W produkowanych obecnie bateriach krzemowych udaje się wykorzystywać 15% energii padającego promieniowania. Tak więc bateria słoneczna o powierzchni 1 m^2 dostarczy nam 150 W mocy. Nie jest to, jak widać, dużo i na razie musimy zrezygnować z marzeń o samochodzie z napędem słonecznym. Za to, jeżeli dysponujemy powierzchnią 1 km^2 baterii słonecznych, to otrzymamy moc 150 MW , a więc średnią elektrownię. Eksperymentalne elektrownie słoneczne buduje się już w wielu krajach, przede wszystkim w Stanach Zjednoczonych. Wprowadzić są one bardzo drogie, ale za to „paliwo” nie nie kosztuje i w dodatku nie musimy się martwić o jego wyczerpanie.

Elektrownie słoneczne to jeszcze przyszłość. Już dziś natomiast baterie słoneczne torują sobie coraz szerszą drogę w przemyśle elektronicznym. Stosuje się je w miniurządzeniach, takich jak kalkulatory czy elektroniczne zegarki oraz we wszystkich satelitach i statkach kosmicznych.



Zadania

Redaguje dr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 374. Na płaszczyźnie leży n kół o równych promieniach i rozłącznych wnętrzach. Wykazać (nie odwołując się do twierdzenia o czterech barwach), że można tak pokolorować nasze koła czterema barwami, iż żadna para kół stycznych nie będzie pomalowana tym samym kolorem. Podać przykład, w którym nie jest możliwe takie pokolorowanie trzema barwami.
Rozwiązanie na str. 7.

M 375. Rozwiązać równanie

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

n kresek ułamkowych $\dots \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

Rozwiązanie na str. 10.

M 376. Rozwiązać równanie $16 \cos \frac{x}{7} \cos \frac{2x}{7} \cos \frac{4x}{7} \cos \frac{8x}{7} = 1$.

Rozwiązanie na str. 7.

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 158. Na metalowe zwierciadlane podłoże napyłono warstwę emulsji fotograficznej. Przy prostopadle padającym świetle zaczernienie emulsji wystąpiło w odległości d od zwierciadła.

a) Jaka była długość fali padającego światła?

W jakiej odległości wystąpi drugie zaczernienie?

b) Co zaobserwujemy oglądając zdjętą z podłoża emulsję oświetloną białym światłem?

Rozwiązanie na str. 13.

F 159. W przyrządach optycznych w celu wyeliminowania strat światła spowodowanych odbiciem napyla się na powierzchnię szkła cienką warstwę przezroczystej substancji. Grubość i współczynnik załamania warstwy dobrane są tak, aby promienie odbite od szkła i warstwy całkowicie się wygaszały. Dobrać parametry warstwy napyłonej na płaską płytkę szklaną o współczynniku załamania n tak, by nie występowało odbicie światła o długości fali λ padającego prostopadle do powierzchni płytki.

Rozwiązanie na str. 7.

Doc. dr Lesław W. SZCZERBA

Zagadnienie poznania geometrii Wszechświata od dawna zaprzętało umysły. Przez wieki obowiązywała hipoteza, że we Wszechświecie obowiązuje geometria euklidesowa, taka jakiej uczyliśmy się w szkole. Obecnie kosmolodzy odrzucają tę hipotezę na rzecz bardziej skomplikowanych. Czy w ogóle możliwe jest badanie geometrii Wszechświata? Kluczem jest tu pomysł opisany w 1884 roku przez E. A. Abbota: Wyobraźmy sobie istoty dwuwymiarowe, Płaszczków, żyjących na powierzchni kuli. Kula ma wymiary duże w porównaniu z Płaszczkami, tak, że Płaszczaczy początkowo byli przekonani o tym, że w ich Wszechświecie obowiązuje dwuwymiarowa geometria euklidesowa. Państwo Płaszczków miało kształt koła, w którego środku znajdowała się stolica. W miarę upływu czasu waleczni Płaszczaczy powiększali swoje państwo, zachowując jednak jego kolisty kształt. Początkowo długość granic obliczona ze wzoru $2\pi r$, gdzie r było odległością granic od stolicy, wydawała się dokładna. Po pewnym czasie pojawiły się rozbieżności pomiędzy teorią a pomiarem, ale zwalono wszystko na niedokładność pomiarów. Gdy jednak długość granic zamiast rosnąć zaczęła maleć, trzeba było zrewidować teorię.

Aby móc zastanawiać się dalej nad geometrią Wszechświata, trzeba się umówić, czemu w rzeczywistości odpowiadają abstrakcyjne pojęcia geometryczne, takie jak na przykład „proste” lub „odległość”.

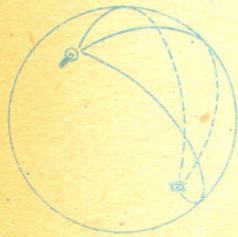
Zazwyczaj odpowiada się na ten problem następująco: światło rozchodzi się po liniach prostych, a więc prostymi powinny być promienie światła, a ponieważ prędkość światła (w próżni) jest stała, więc odległość jest to czas potrzebny światłu na przebycie mierzonej drogi. Ścisłej jest to jedna z odległości: światło może biec po kilku prostych. Wyobraźmy sobie cienką płytkę szklaną, gładką, to znaczy bez załamań, lecz powyginaną na różne sposoby, płytka ta została posrebrzona po obu stronach, tworząc podwójne lustro zwrócone odbijającymi stronami do środka. Światło wpuszczone do tej płytki nie może jej opuścić i rozchodzi się po pewnych krzywych, które zgodnie z naszą kosmologiczną definicją prostej będą prostymi w wewnętrznej geometrii naszej płytki. Te same proste otrzymamy usuwając płytkę i naciągając gumową nitkę pomiędzy pozostałymi srebrnymi okładzinami. Oczywiście zamiast o płytce, która jakkolwiek cienka, ma jednak pewną grubość, powinniśmy mówić o dwuwymiarowej powierzchni, zwanej dwuwymiarową przestrzenią Riemanna. Proste opisane przez doświadczenie ze światłem lub gumką noszą nazwę krzywych geodezyjnych. Jeśli w takich przestrzeniach umówimy się mierzyć odległość wzdłuż geodezyjnych, otrzymamy geometrie riemannowskie na ogół różne dla różnych powierzchni.

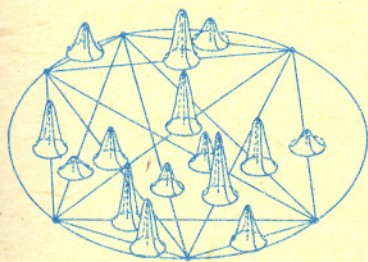
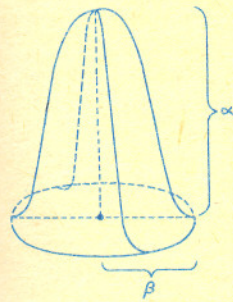
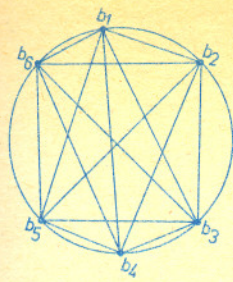
Płaszczaczy geometryści odkryli po wielu wysiłkach, że świat ich ma kształt kuli. Gdybyśmy chcieli powtórzyć ich sukces, musielibyśmy uogólnić pojęcie przestrzeni Riemanna na więcej wymiarów. Nie stwarza to jednak trudności (poza rachunkowymi). Podobno Karol Fryderyk Gauss był pierwszym, który podjął próbę sprawdzenia, jaka geometria obowiązuje w naszym świecie. Wykorzystał w tym celu twierdzenie o sumie kątów w trójkącie. W geometrii euklidesowej suma ta wynosi 180° , natomiast w geometrii odkrytej przez Gaussa, a zwanej dziś geometrią Bolyai-Łobaczewskiego, jest mniejsza; różnica nosi nazwę defektu trójkąta i jest proporcjonalna do jego powierzchni. Gauss korzystając z tego, że właśnie prowadził pomiary Królestwa Hanoweru, wybrał trzy góry: Hohenhagen, Inselberg i Brocken jako wierzchołki trójkąta, pomierzył kąty, dodał i ... za pomocą wymyślonego przez siebie rachunku błędów wykazał, że różnica jest zbyt mała, by świadczyć o czymkolwiek: można ją wyjaśnić błędami pomiaru.

Doświadczenie Gaussa wskazuje, jaką drogą należy postępować: należy wybrać pewną liczbę punktów i pomierzyć, powiedzmy, odległości pomiędzy tymi punktami, a następnie spróbować odwzorować te punkty w jakąś przestrzeń Riemanna tak, by pomierzone odległości zgodziły się z teoretycznymi. Ze względów praktycznych trudno się spodziewać, by wybranych punktów było nieskończenie wiele. Niech zatem będą to punkty a_1, \dots, a_n . Możemy przypuścić,

E. A. Abbot: „Flatland”, London, 1884; mamy więc właśnie stulecie.

Czy nie przypomina to problemu, czy Ziemia jest płaska?





że dla dowolnych punktów odległość będzie znią mniejszą, że będzie zerem wtedy i tylko wtedy, gdy punkty się pokrywają, że odległość od a_i do a_j jest taka sama jak odległość od a_j do a_i . Ponieważ punktów jest skończenie wiele, więc i odległości między nimi jest skończenie wiele, musi zatem istnieć najmniejsza odległość między różnymi punktami. Weźmy teraz okrąg o średnicy jeszcze mniejszej i rozmieśmy na nim punkty b_1, \dots, b_n . Odległość b_i od b_j jest zatem mniejsza od odległości a_i od a_j . Przygotujmy teraz kołpaczki wycięte z wykresu funkcji $f(x, y) = \alpha(x^2 + y^2 - \beta^2)^2 / \beta^4$ i poprzyklejajmy je na odcinkach łączących wybrane punkty na okręgu zwracając parametry α i β tak, by nie włożyły na odcinki łączące inne punkty i aby w tak otrzymanej przestrzeni Riemanna odległości między b_i i b_j były równe odległościom między a_i i a_j . Zinterpretowaliśmy zatem nasze doświadczenie w pewnej dwuwymiarowej geometrii Riemanna.

Wynik jest dość zaskakujący: bez względu na to, jaki jest wynik doświadczenia, można go zinterpretować w geometrii płaskiej. Oznacza to, że nie można wykluczyć, że w naszym Wszechświecie obowiązuje geometria płaska! Co więcej, jeśli zasadę brzytwy Ockhama rozumieć jako postulat przyjmowania najprostszycch rozwiązań, to musimy przyjąć, że Wszechświat (a my z nim) jest płaski. Przyzwyczajono nas już przecież do niewierzenia naszym oczom: Ziemia (podobno) nie jest płaska, za to krąży dokoła Słońca; w kryształowo czystej wodzie znajdują się tysiące żyjątek...

Może jednak mój wniosek jest zbyt pochopny. Ostatecznie pokazałem tylko, jak konstruować odpowiednią przestrzeń Riemanna w przypadku doświadczenia polegającego tylko na mierzeniu odległości. Konstrukcja ta nie daje się zastosować już w przypadku doświadczenia Gaussa polegającego na mierzeniu kątów. Dla takich doświadczeń również potrafię skonstruować odpowiednią powierzchnię Riemanna. Nie umiem jednak udowodnić, że można to zrobić dla dowolnego doświadczenia. Nie pozostaje mi zatem nic innego, jak tylko ogłosić konkurs na zaprojektowanie takiego doświadczenia, które ostatecznie obaliłoby zakorzeniony przesąd, że żyjemy w trójwymiarowej przestrzeni.



Rozwiązanie zadania F 159. Całkowite wygaszenie odbicia nastąpi wtedy, gdy amplitudy obu fal odbitych będą takie same, a różnica dróg optycznych równa nieparzystej wielokrotności połowy długości fali. Drugi z tych warunków spełniony jest, gdy

$$d = \frac{\lambda}{4n'}$$

gdzie n' jest współczynnikiem załamania napyłonej warstwy. Dla płaskiej fali elektromagnetycznej padającej prostopadle na granicę dielektryków (o współczynnikach załamania n' i n) stosunek amplitud pola elektrycznego fali padającej E_0 i odbitej E jest równy

$$\frac{E}{E_0} = \frac{n - n'}{n + n'}$$

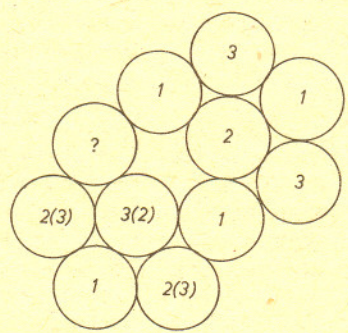
Jeśli zaniedbamy wielokrotne odbicia, to otrzymamy stąd warunek równości amplitud

$$\frac{n' - 1}{n' + 1} = \frac{n - n'}{n + n'}$$

a stąd $n' = \sqrt{n}$. Dla światła o długości fali $\lambda = 550$ nm (największa czułość oka) oraz $n = 1,516$ (szkło typu crown) grubość warstwy wynosi $d \approx 110$ nm, a $n' = 1,231$. Często dla wygaszenia fal odbitych o różnych barwach pokrywa się szkło kilkoma warstwami substancji przeciwdoblaszkowej.



Rozwiązanie zadania M 374. Gdy $n \leq 4$, teza naszego zadania jest w oczywisty sposób prawdziwa. Przypuśćmy teraz, że żądane pokolorowanie istnieje dla wszystkich układów m kół i rozpatrzmy pewien układ $m + 1$ kół. Ustalmy pewien punkt O i wybierzmy koło K , którego środek leży najdalej od O . Środki wszystkich kół naszej konfiguracji leżą w kole domkniętym, na którego obwodzie leży środek K . Wynika stąd, że K może być styczne najwyżej do trzech innych kół. Usuając K otrzymamy układ m kół, dla którego żądane pokolorowanie istnieje na mocy założenia indukcyjnego. Wystarczy teraz pomalować K na kolor różny od barw kół stycznych do K , aby zakończyć krok indukcyjny. Przykład konfiguracji, której nie można pokolorować trzema barwami, pokazuje rysunek.



Rozwiązanie zadania M 376. Mnożąc obie strony równania przez $\sin \frac{x}{7}$ mamy

$$16 \sin \frac{x}{7} \cos \frac{x}{7} \cos \frac{2x}{7} \cos \frac{4x}{7} \cos \frac{8x}{7} = \sin \frac{x}{7},$$

$$\text{skąd } 8 \sin \frac{2x}{7} \cos \frac{2x}{7} \cos \frac{4x}{7} \times \cos \frac{8x}{7} = 4 \sin \frac{4x}{7} \cos \frac{4x}{7} \cos \frac{8x}{7} = 2 \sin \frac{8x}{7} \cos \frac{8x}{7} = \sin \frac{16x}{7} = \sin \frac{x}{7},$$

czyli $0 = \sin \frac{16x}{7} - \sin \frac{x}{7}$, skąd otrzymujemy dwie serie:

$$x = \frac{14}{15} k\pi, \quad x = (2k + 1) \cdot \frac{7\pi}{17}$$

Jeżeli jednak $\frac{14}{15} k\pi = 7n\pi$ (czyli $k = 15m$,

$$n = 2m), \text{ lub } (2k + 1) \frac{7\pi}{17} = 7n\pi,$$

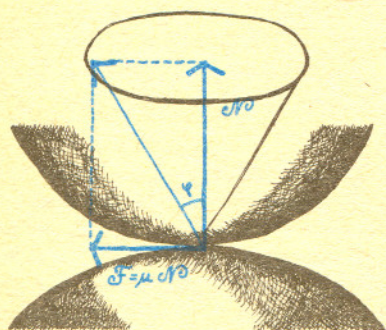
(czyli $k = 17m + 8, n = 2m + 1$), to otrzymane pierwiastki nie spełniają równania wyjściowego (wprowadziliśmy je mnożąc

nasze równanie przez $\sin \frac{x}{7}$). Ostatecznie więc rozwiązaniami naszego równania są:

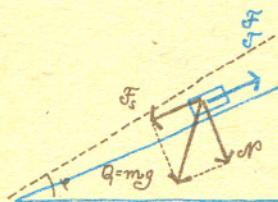
$$x = \frac{14}{15} k\pi \quad 15 \nmid k$$

$$x = (2k + 1) \cdot \frac{7\pi}{17} \quad 17 \nmid k - 8.$$

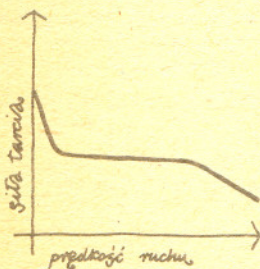
delta mata delta



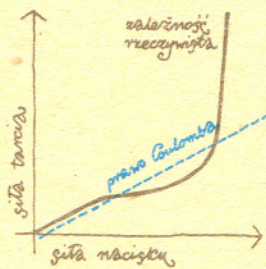
Siła tarcia statycznego zrównoważy składową styczną (do powierzchni) siły działającej na ciało, o ile ta składowa jest mniejsza niż μN , gdzie N — składowa prostopadła. A więc gdy wektor działającej siły leży wewnątrz stożka o kącie rozwarcia φ ($\tan \varphi = \mu$), to tarcie zapobiegnie poślizgowi.



Jeśli kąt nachylenia zbocza jest mniejszy niż kąt rozwarcia stożka na poprzednim rysunku, to ciało nie zsuwa się pod wpływem własnego ciężaru. Np. dla suchego piasku kąt φ (kąt zsypania) wynosi około 30° .



Tak w przybliżeniu wygląda rzeczywista zależność siły tarcia od prędkości przesuwania...



...a tak od siły nacisku między trącymi powierzchniami.

Tarcie

Król perski Kserkses przygotowując w 480 r. p.n.e. wyprawę na Grecję rozkazał przekopać kanał przez przesmyk półwyspu Atos. Do pracy tej zapędzono poddanych wielonarodowego królestwa. Tak opisuje to wydarzenie Herodot:

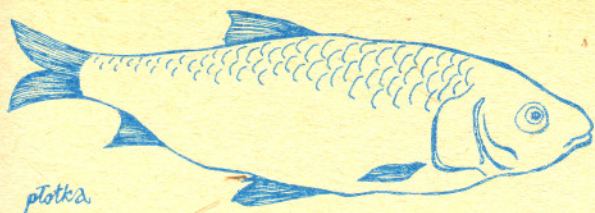
„Wszystkim, prócz Fenicjan, zapadające się ściany kanału przysparzały podwójnej pracy. Skoro bowiem robili kanał równie szerokim u góry i u dołu, więc oczywiście musiało się im to wydarzyć. Lecz Fenicjanie okazali i przy tej, jak przy wszystkich innych robotach, swą zręczność. Otrzymawszy bowiem przypadający na nich losem odcinek, kopali tak, że górny otwór rowu dwakroć szerszym uczynili niż miał być sam kanał, a w miarę postępu pracy stale go zwężali”.

Jest to, być może, najstarsza wzmianka o wykorzystaniu wiedzy o zjawisku tarcia. Wyniki systematycznych badań tarcia opublikował Charles de Coulomb dopiero w 1785 roku. Zawarte są one w czterech następujących prawach:

- Siła tarcia leży w płaszczyźnie stycznej do trących się powierzchni i jest skierowana przeciwnie do sił wywołujących przesunięcie, przy czym maksymalna siła tarcia statycznego (siła potrzebna do rozpoczęcia ruchu) jest większa od siły tarcia kinetycznego (podczas ruchu).
- Wartość siły tarcia F jest proporcjonalna do siły nacisku N — prostopadłej do powierzchni $F = \mu N$.
- Wartość siły tarcia nie zależy od pola stykających się powierzchni, a tarcia kinetycznego nie zależy również od prędkości ruchu.
- Współczynnik tarcia zależy od rodzaju stykających się powierzchni.

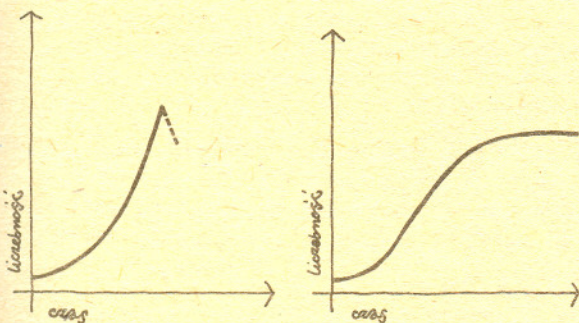
Jak posługując się tymi prawami można wyjaśnić, dlaczego Fenicjanie uniknęli osuwania się ścian kanału, objaśnimy na rysunkach. Prawa Coulomba są zgodne z większością zjawisk obserwowanych w codziennym życiu. Fizycy jednak zawsze usiłują sprawdzić sformułowane prawa w warunkach skrajnych. Okazało się, że przy bardzo małych prędkościach — mniejszych niż 1 mm/s — współczynnik tarcia kinetycznego wzrasta do wartości współczynnika tarcia statycznego, a dla bardzo dużych prędkości (rzędu kilkudziesięciu metrów na sekundę) staje się malejącą funkcją prędkości. Zwiększanie siły nacisku powyżej pewnej wartości powoduje gwałtowny wzrost siły tarcia. Również codzienna obserwacja, że tarcie maleje, gdy wygładzamy powierzchnię, przestaje być słuszną — dla powierzchni idealnie wygładzonych i chemicznie czystych metali współczynnik tarcia może osiągać wartość $5 \div 6$ (zwykle jest wyraźnie mniejszy niż 1).

Ile dzieci ma płotka

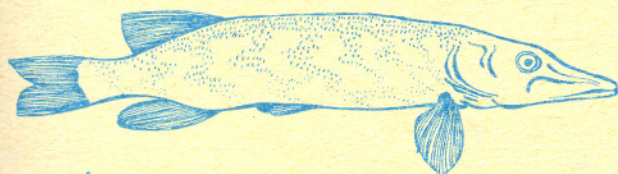


płotka

Ba! — nawet gatunki o mniej imponującej płodności też by nas mogły zadziwić; Karol Darwin obliczył na przykład, że gdyby para słoni zaczęła się rozmnażać w wieku 30 lat i przeżyła do setnego roku życia, dając w tym okresie zaledwie 6 młodych — to po upływie 750 lat żyłoby na świecie niemal 19 mln słoni! Przykłady takie można by mnożyć w nieskończoność.



Jasne więc, że sytuacja umożliwiająca rozwój wszystkim urodzonym osobnikom jest w przyrodzie raczej wyjątkowa. Maksymalna rozrodczość gatunku, wyrażająca się w podanych na wstępie imponujących liczbach, nie bywa z reguły realizowana, a stan liczebności osobników utrzymuje się zwykle na mniej więcej stałym poziomie. Oznacza to istnienie wielkiej śmiertelności, będącej skutkiem działania bardzo wielu i bardzo rozmaitych czynników (określanych łącznie mianem „oporu środowiska”). W efekcie tylko część potomstwa — z reguły drobny odsetek, niekiedy nawet wyrażający się w promilach — dożywa okresu dojrzałości płciowej. Reszta musi zginąć. Tak naprawdę więc można mówić jedynie o rozrodczości rzeczywistej gatunku — dużo, dużo mniejszej od dość teoretycznej rozrodczości maksymalnej — a ta nie prowadzi już do żadnych „kosmicznych” skutków.



sznorpak

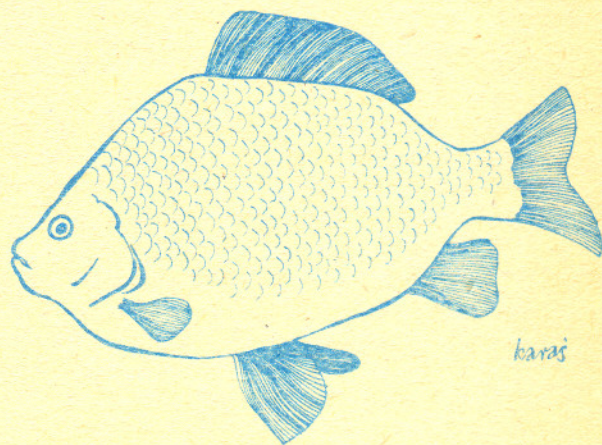
... której samica składa rocznie 5—200 tysięcy jajeczek? Albo taki na przykład dorsz — ze swoimi 10 milionami? Gdyby średnio połowa tych jajeczek dawała następne pokolenie równie płodnych samic, to każda z nich złożyłaby znów swe tysiące czy miliony sztuk ikry, z których ... itd., itd. Zabawę w podnoszenie owych liczb — olbrzymów do kolejnych potęg pozostawiamy tym, którym nie żal czasu i papieru. A przytoczone tu dane nie są bynajmniej rekordami w przyrodzie (zdarzają się tu bowiem i liczby rzędu setek milionów).



wąż

Czy zatem gdyby którykolwiek gatunek roślin bądź zwierząt miał do dyspozycji dostatecznie dużo czasu, osiągnąłby wówczas masę całego widzialnego świata i ekspandował w przestrzeń kosmiczną z zawrotną prędkością? Skoro w rzeczywistości nie stwierdza się takiej liczby słoni, ryb czy wszelkich innych żywych istot, jest rzeczą oczywistą, że taki nieograniczony (ściślej mówiąc — wykładniczy) wzrost liczebności na ogół w przyrodzie nie zachodzi.

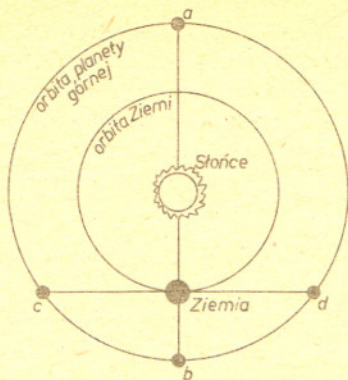
Podobny typ wzrostu obserwujemy przejściowo tylko wtedy, gdy jakiś gatunek wkracza w nowe, wolne dłań i zasobne środowisko; wzrost ów nie trwa jednak zbyt długo, gdyż prędzej czy później brak pożywienia, drapieżnik czy jakiś inny czynnik ograniczający powoduje jego załamanie się lub przyhamowanie.



karaś

Ile zatem dzieci ma nasza płotka? Jeśli potraktujemy ją jako gatunek statyczny, pozostający w równowadze z otoczeniem — rzecz by można „zasiedziały” już w swym środowisku — najwłaściwsza odpowiedź powinna chyba brzmieć następująco: ma ona tyle dzieci, ile wnuków, prawnuków itd. — nieważne może „ile” w sensie jakiejś konkretnej liczby, ale zawsze mniej więcej tyle samo w owym ciągu pokoleń.

Trzy spośród sześciu planet górnych Układu Słonecznego — Mars, Jowisz i Saturn, są wystarczająco jasne, by mogły być zaobserwowane gołym okiem. Od początku 1984 roku do połowy października widoczne są one jednocześnie na niebie pozostając w odległości kątowej kilkudziesięciu stopni.



Położenia planety górnej względem Ziemi i Słońca.

a — koniunkcja, czyli złączenie ze Słońcem,
 b — opozycja, czyli przeciwstawienie,
 c — kwadratura wschodnia,
 d — kwadratura zachodnia.
 Elongacja planety górnej zmienia się od 0° do ± 180°. Najbardziej dogodnym momentem do obserwacji jest opozycja — planeta widoczna przez całą noc (w największej odległości kątowej od Słońca) i jednocześnie znajduje się wtedy w najmniejszej odległości od Ziemi.

Widoczny przez cały rok 1984 Mars 3 września minął podobnie jak on czerwonego Antaresa — najjaśniejszą gwiazdę w gwiazdozbiore Skorpiona. Planeta i gwiazda widoczne są po zachodzie Słońca nisko nad południowo-zachodnim horyzontem. Przez kilka dni w okolicach tej daty można było obserwować najpierw stopniowe zbliżanie się, a potem oddalanie Marsa od Antaresa. Około połowy października Mars dogoni Jowisza znajdującego się w gwiazdozbiore Strzelca. Największe zbliżenie planet — na odległość 1,9 (odpowiada to ok. czterem tarczom Księżyca) będzie miało miejsce 13 października. Do końca roku Mars będzie jeszcze ciągle widoczny, aczkolwiek coraz krócej po zachodzie Słońca.

Jowisz jest widoczny przez niemal cały rok 1984, pozostając przez cały ten czas w gwiazdozbiore Strzelca. 24 listopada będzie można zaobserwować Wenus w bliskim jego sąsiedztwie (2°0). Zjawisko to powinno być dobrze widoczne wczesnym wieczorem w południowo-zachodniej stronie nieba, ponieważ obydwie planety są bardzo jasne i zwykle z łatwością można odnaleźć je na niebie.

Kolejna, widoczna gołym okiem planeta — Saturn — jest szczególnie atrakcyjna ze względu na otaczające ją pierścienie. Oczywiście nie można dostrzec ich bez użycia teleskopu, jednak obecność ich istotnie wpływa na obserwowaną jasność planety. W zależności od kąta nachylenia płaszczyzny pierścieni względem orbity Ziemi ich rozmiary kątowe przyjmują różne wartości. W maju tego roku Saturn przeszedł opozycję najjaśniejszą od 1978 roku, ponieważ pierścienie widoczne były z Ziemi pod kątem 26°. Planeta przez cały rok pozostaje w gwiazdozbiore Wagi. 7 października Wenus znajdzie się w odległości 2°5 na południe od Saturna, co będzie można zaobserwować w godzinach wieczornych w południowozachodniej stronie nieba. Saturn nie będzie widoczny w okolicy koniunkcji (11 listopada), ale już przy końcu tego miesiąca można próbować odnaleźć go na niebie porannym.

Tu w zasadzie kończy się lista planet górnych widocznych gołym okiem. Jednak uważny i doświadczony obserwator, przy sprzyjających warunkach może dostrzec również Urana, którego jasność w ciągu całego roku nie spada poniżej 5,7 wielkości. Uran pozostaje przez cały rok w gwiazdozbiore Wężownika — 5°0 na północ i trochę na wschód od Antaresa. Niestety, w najdogodniejszych warunkach obserwacyjnych planeta znajdowała się latem. W październiku można próbować zidentyfikować ją przy użyciu lornetki krótko po zachodzie Słońca w południowozachodniej części nieba. Ułatwieniem może być bliskie — bo w odległości 1°4 — przejście koło Urana jasnej Wenus, które będzie miało miejsce 29 października.

Neptun świeci zbyt słabo, by można zaobserwować go bez użycia teleskopu, jednak pewne wyobrażenie o jego położeniu na niebie mogą dać dwa zjawiska. 7 października Mars znajdzie się 3°3 na południe, zaś 13 listopada Wenus 3°1 również na południe od tej planety. Zarówno Marsa, jak i Wenus będzie można zaobserwować w tych dniach w gwiazdozbiore Strzelca, gdzie Neptun pozostaje przez cały rok.

Pluton — uważany zwykle za najdalszą planetę Układu Słonecznego znajduje się obecnie bliżej naszej gwiazdy dziennej niż Neptun i stan ten będzie trwał niemal do końca wieku. Jest to wynikiem silnego spłaszczenia orbity Plutona. Planeta na skutek znacznego oddalenia i niewielkich rozmiarów świeci tak słabo, że aby ją zaobserwować, należałoby użyć przynajmniej 30-centymetrowego teleskopu. Obecnie Pluton pozostaje w południowowschodniej części gwiazdozbioru Panny przemieszczając się bardzo powoli na tle gwiazd.

mgr Joanna FILIPOWICZ



Rozwiązanie zadania M 375. Zauważmy, że jeżeli $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, to

$$1 + \frac{1}{ax+b} = \frac{(c+a)x + (b+d)}{cx+d}$$

jest również postaci $\frac{a'x+b'}{c'x+d'}$.

Wynika stąd przez łatwą indukcję, że równanie nasze jest równoważne równaniu postaci

$$x = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ czyli } cx^2 + (d-a)x - b = 0,$$

może więc mieć najwyżej dwa pierwiastki.

Z drugiej strony jeżeli $x = 1 + \frac{1}{x}$, to

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}} = \dots = 1 + \frac{1}{x} = x$$

x jest pierwiastkiem naszego równania.

Pozostaje zauważyć, że równanie $x^2 - x - 1 = 0$

równoważne równaniu $x = 1 + \frac{1}{x}$ ma

pierwiastki $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, które wobec

tego są pierwiastkami naszego równania.

Mgr Piotr

CHRZĄSTOWSKI

Dojeżdżałem przez cztery lata do szkoły. Na trasie miałem przesiadkę i każdy odcinek mogłem przejechać jednym z kilku autobusów. Zawsze, kiedy stałem na przystanku, fascynowały mnie związki pomiędzy czasem oczekiwania i liczbami wypisanymi na tabliczkach. Liczby te miały oznaczać częstotliwość kursowania autobusów.

Było to dla mnie oczywiste, że gdyby na przystanek dojeżdżał co 10 minut jeden autobus, a ja przyszedłbym w sposób losowy, to średnio czekałbym 5 minut. Na mój przystanek podjeżdżały jednak dwa odpowiadające mi autobusy — nazwijmy je R i S . R podjeżdżał co 10, a S — co 11 minut i nijak nie mogłem ani analitycznie, ani empirycznie ustalić wzoru, podającego średni czas oczekiwania na którykolwiek z nich.

W końcu rozwiązałem to zadanie tak:

W ciągu godziny przyjeżdża $\frac{60}{10}$ autobusów R oraz $\frac{60}{11}$ autobusów S . Łącznie $\frac{126}{11}$

autobusów obu linii, czyli tak jak gdyby w ciągu godziny jeździło $\frac{126}{11}$ autobusów jednej

linii, dajmy na to S . Na karteczce dla autobusu S napisano by, że kursuje średnio co $\frac{11}{126}$

godziny, zatem czekałbym średnio połowę tego, czyli $\frac{11}{252}$ godziny. Z rozwiązania tego byłem

bardzo zadowolony, gdyż otrzymane równanie ogólne przypominało mi równanie soczewki, a optykę wtedy wyjątkowo lubiłem.

Jako student zaproponowałem od niechcienia to samo zadanie na ćwiczeniach z rachunku prawdopodobieństwa, okazało się wtedy, że mamy temat na dwa kolejne zajęcia. Niepoprawność mojego rozwiązania wyszła na jaw bardzo szybko. Po pierwsze, rozwiązanie zależy (przy założeniu rzetelności MZK) od punktu startowego całego „doświadczenia”. Nie jest bowiem obojętne, czy autobusy R i S wyjadą rano z zajezdni jednocześnie, czy, dajmy na to, w odstępie półminutowym. Po drugie zaś założenie, że para autobusów R i S może być zastąpiona przez jeden autobus S kursujący regularnie co $\frac{11}{126}$ godziny jest błędne. Przerwy pomiędzy

przyjazdami R i S są przecież z konieczności nieregularne. Może się na przykład zdarzyć, że oba przyjadą na przystanek jednocześnie i wtedy tracimy w globalnym rozrachunku jeden autobus. Po stwierdzeniu tych faktów okazało się, że choć wszyscy wiemy o co chodzi, to mamy duże trudności w samym sformułowaniu zadania w sposób precyzyjny. W końcu brzmiało ono tak:

Mamy dwie niezależne zmienne losowe o rozkładzie jednostajnym: X na odcinku $[0, a]$ oraz Y na odcinku $[0, b]$, gdzie a i b oznaczają odstępy pomiędzy przyjazdami autobusów odpowiednio R i S (czyli w moim przypadku $a = 10$, $b = 11$ min.). Należy obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej

$$Z = \min(X, Y).$$

Rozwiążmy to zadanie odwołując się do intuicji geometrycznych. Wyobraźmy sobie funkcję $f(x, y) = \min(x, y)$ określoną na prostokącie $[0, a] \times [0, b]$. Nasze losowe przyjscie na przystanek równoważne jest losowemu wyborowi punktu tego prostokąta, zaś współrzędne tego punktu określają, jak długo będziemy czekać na każdy z dwóch autobusów. Funkcja \min odpowiada temu, że wsiądziemy do autobusu, który wcześniej przyjedzie.

Średnia wartość funkcji f jest to wysokość prostopadłościanu o podstawie $a \cdot b$ i objętości równej objętości bryły znajdującej się pod wykresem funkcji f .

Załóżmy, że $b \geq a$. Na trójkącie OAD funkcja f przyjmuje wartość y , na pozostałym zaś obszarze prostokąta $OACB$ — wartość x . Powstałą bryłę można podzielić na dwa przystające ostrosłupy: $OADD'$ i $ODD'E$ oraz graniastosłup $EBC'D'DC$. Elementarne wyliczenie objętości jest łatwe:

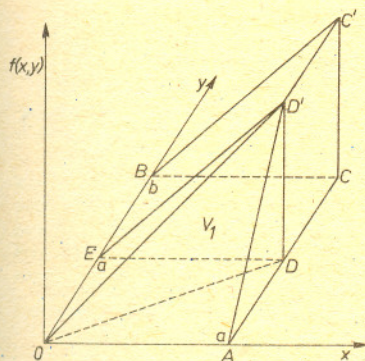
$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^3 + \frac{1}{2} \cdot (b-a)a^2 = \frac{1}{2} \cdot a^2b - \frac{1}{6} \cdot a^3,$$

a wysokość szukanego (uśredniającego) prostopadłościanu wynosi

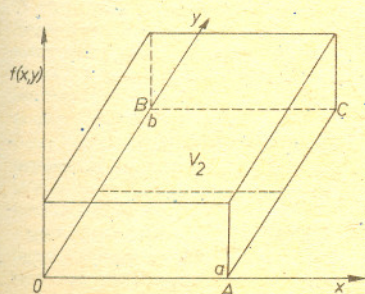
$$h = \frac{V}{ab} = \frac{1}{2} \cdot a \left(1 - \frac{a}{3b} \right);$$

w naszym przypadku $h = \frac{115}{33}$, czyli mniej niż 4 minuty.

Postanowiłem spisać to wszystko czekając 25 minut na jeden z siedmiu środków komunikacji, z których każdy — zgodnie z rozkładem — powinien jeździć góra co 15 minut.



$$V_1 = V_2$$



Doc. dr Kazimierz STĘPIEŃ

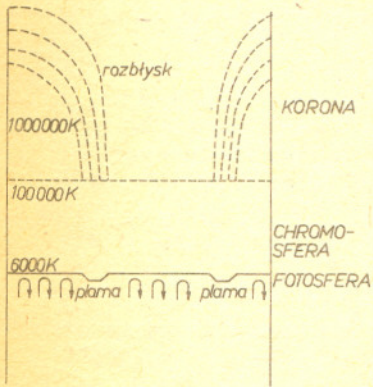
Sądzą, że każdy z Czytelników *Delty* miał okazję oglądać plamy na Słońcu — jeżeli nie w naturze, to na licznych zdjęciach zaplamionej tarczy słonecznej reprodukowanych w czasopiśmie i książkach astronomicznych. Plamy słoneczne były zauważane i obserwowane już w starożytności, o czym świadczą przechowane do dziś stare kroniki. Nie zawsze i nie wszędzie można się było do takich obserwacji przyznać. Czasem można było stracić głowę, gdy oficjalna religia państwa uważała Słońce bądź za boga, bądź za twór boski, a zatem doskonały. Takie Słońce nie mogło być „brudne” i zaplamione. Jeżeli uczoney twierdził, że widzi na nim plamy, skracano go o głowę za próbę splugawienia religii.

Ale to dawne czasy. Obecnie każdy niedowiarek może sobie obejrzeć plamy na Słońcu osobiście. I choć czasami bywa, że wciąż próbuje się zaprzeczać istnieniu nawet takich zjawisk, które widać „gołym okiem”, to w przypadku plam słonecznych nie ma to już miejsca. Wszelkie badania plam przeprowadzone w ciągu ostatnich 200 lat pozwalają odpowiedzieć na pytanie, co to są plamy słoneczne, choć jeszcze nie znamy pełnej odpowiedzi na pytanie, skąd się one biorą. Zainteresowanie plamami słonecznymi znacznie wzrosło u astrofizyków nie zajmujących się Słońcem, lecz gwiazdami zmiennymi, gdy około 20 lat temu wykonano obserwacje sugerujące, że gigantyczne plamy występują też na innych gwiazdach. Ale o tym za chwilę. Najpierw skoncentrujemy się na tym, co wiemy o plamach słonecznych.

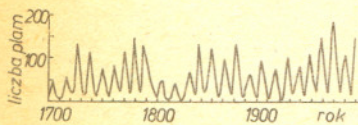
Obserwacje pokazały, że plamy są obszarami znacznie chłodniejszymi od otoczenia. Mają temperaturę o około 1800 K niższą (dotyczy to części wewnętrznej plamy, tzw. cienia. Jest on otoczony półcieniem, który jest tylko nieco chłodniejszy od obszaru poza plamą). Drugą ważną obserwacją było stwierdzenie, że w plamach istnieje silne pole magnetyczne. Ma ono natężenie około 3000 Oe, co jest bardzo dużo, jeżeli się weźmie pod uwagę, że natężenie ogólnego pola magnetycznego jest, podobnie jak ziemskiego, rzędu 1—2 Oe, a 3000 Oe osiągnięte jest między biegunami sporego elektromagnesu. Ścisły związek plam z polami magnetycznymi rzucił na ich zagadnienie nowe światło. Wiadomo mianowicie, że pole magnetyczne steruje całym kompleksem zjawisk na Słońcu, zwanym aktywnością słoneczną. Aktywność słoneczna zmienia się cyklicznie narastając co około 11 lat, a następnie słabnąc. W okresie dużej aktywności widzimy silnie rozbudowaną koronę słoneczną (jest to bardzo rozrzedzony, ale gorący, mający temperaturę około miliona stopni obszar rozciągający się na dużą odległość ponad atmosferą Słońca). Musi ona być stale podgrzewana, a rolę przewodów doprowadzających energię w postaci fal hydromagnetycznych gra pole magnetyczne. Większa i gorętsza korona świadczy o wzroście natężenia pól magnetycznych na Słońcu. Nie są one rozłożone równomiernie, lecz mają tendencję do skupiania się w duże obszary magnetyczne o średnim natężeniu rzędu 50 Oe. Strumień energii podgrzewający koronę płynie głównie w tych obszarach. Pomiedzy gorącą koroną i stosunkowo chłodną powierzchnią Słońca (o temperaturze rzędu 6000 K) występuje obszar o pośredniej temperaturze i gęstości zwany chromosferą. Z aktywnością Słońca związane jest też występowanie rozbłysków, które powstają zapewne przez anihilację przeciwnie skierowanych pól magnetycznych czy związanych z nimi prądów. Są to zjawiska o stosunkowo niedużej skali nie mające wpływu na całkowitą jasność Słońca. I wreszcie plamy. One też pojawiają się w dużych ilościach podczas maksimum aktywności, a potem ich liczba maleje. Nie ulega zatem wątpliwości, że przyczyną wszystkich przejawów aktywności słonecznej jest pole magnetyczne i jego okresowe zmiany pociągają za sobą zmiany aktywności.

Jak więc wygląda pełny obraz zachowania się pola magnetycznego na Słońcu? Otóż przypuszczamy, że głębiej położone warstwy Słońca rotują szybciej. Linie sił ogólnego (słabego) pola magnetycznego przenikają Słońce i ponieważ materia słoneczna jest zjonizowana, są one jakby wzmrożone w ośrodek, czyli mogą poruszać się wyłącznie wraz z materia. Niejednakowa rotacja powoduje, że linie sił nawijają się na głębsze warstwy niczym nici na szpulę. Po pewnym czasie pole staje się niestabilne i dzieli się na „kielbaski”, które unoszą się ku powierzchni. Linie sił wewnątrz każdej „kielbaski” starają się ekspandować, rozpychają się i przez to gęstość materii wewnątrz każdej z nich jest mniejsza niż w jej otoczeniu. „Kielbaska” niczym balonik unosi się w górę, aż osiągnie powierzchnię Słońca. Jest wtedy zwykle pofalowana i gdy tylko któraś z fałdek zbliży się do powierzchni, natrafia nagle na dużo rzadszy gaz. Ciśnienie magnetyczne staje się dużo większe od ciśnienia otaczającego gazu i nic nie przeszkadza liniom sił w gwałtownym rozprężeniu się. Linie sił wyskakują wtedy ponad powierzchnię Słońca niczym sprężyna z zegarka. Powstają obszary magnetyczne, z których następnie tworzą się plamy. Pole magnetyczne wewnątrz plamy i bezpośrednio pod nią utrudnia konwekcję i częściowo ją hamuje. Linie sił zachowują się niby sztywne druty, między którymi ma przepływać materia. Dlatego mniej energii cieplnej płynie w górę wewnątrz plamy, a jej nadwyżka, zatrzymana pod plamą, rozchodzi się szybko na boki i rozmywana jest w całej warstwie konwektywnej. Ponieważ nawijanie się linii sił występuje głównie w pobliżu równika słonecznego, bo tam obserwujemy najszybsze zmiany prędkości wirowania, w tym też obszarze będą głównie wyrzacać się „kielbaski” i tu powinniśmy głównie obserwować plamy. Jest to zgodne z obserwacjami. Po wypłynięciu „kielbask” proces nawijania zaczyna się od nowa. Oczywiście wszystkie pozostałe zjawiska aktywności zmieniają się w tym samym rytmie.

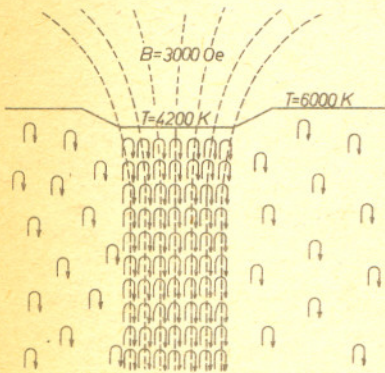
Teraz już czas przejść do innych gwiazd. Jak wyglądają możliwości zaobserwowania przejawów aktywności słonecznej? Gorąca, o temperaturze miliona stopni korona wysyła promieniowanie, którego maksimum, zgodnie z prawem przesunięcia Wiena, znajduje się w obszarze fal rentgenowskich. Gdyby Słońce było w odległości typowej dla bliskich gwiazd, jego emisja rentgenowska byłaby mierzalna dla obecnych satelitów rentgenowskich. Natomiast fakt istnienia bądź nieistnienia na jego powierzchni plam byłby z dużej odległości nie do stwierdzenia. Łączna powierzchnia plam, nawet w maksimum ich występowania, nie przekracza jednego procenta



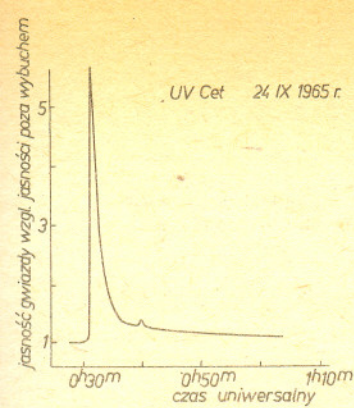
Rys. 1. Schematyczna struktura górnych warstw atmosfery Słońca. Nad fotosferą, w której istnieją plamy, rozciąga się chromosfera, a nad nią korona. Rozbłyski zachodzą wysoko w chromosferze lub w dolnej części korony.



Rys. 2. Liczba plam obserwowanych na Słońcu zmienia się z okresem około 11 lat.



Rys. 3. Model plamy słonecznej.



UV Cet 24 IX 1965 r.

Rys. 4. Rozblysk gwiazdy UV Ceti zaobserwowany w 1965 r. W maksimum gwiazda była ponad pięciokrotnie jaśniejsza niż poza rozblyskiem.

powierzchni Słońca. Zmiany jasności związane ze zmianą zaplamienia byłyby zatem poniżej granicy wykrywalności. Podobna sprawa jest z rozblyskami, które w jeszcze mniejszym stopniu wpływają na całkowitą jasność Słońca. A zatem widzimy, że sam fakt zaobserwowania jakichkolwiek zjawisk związanych z aktywnością na innych gwiazdach oznaczałoby, że aktywność ta musi być co najmniej taka sama, jak na Słońcu, a przy niektórych obserwacjach dużo większa.

Czy istnieją takie obserwacje? Od dość dawna znana była grupa gwiazd zmiennych, tzw. rozblyskowych. Były to bardzo chłodne gwiazdy o temperaturach 3000–4000 K, których jasność nagle rośnie w czasie sekund lub minut, po czym wolniej już maleje. W sumie przypomina to rozblysk słoneczny, tyle że jasność niektórych gwiazd powiększa się nawet parokrotnie. Jeżeli w obydwu przypadkach źródłem rozblysku jest anihilacja pola magnetycznego, to w gwiazdach rozblyskowych możemy spodziewać się dużo potężniejszych pól.

Również od lat w widmach niektórych chłodnych gwiazd widziano linie pochodzenia chromosferycznego, przy czym u wielu z nich linie te były znacznie silniejsze niż na Słońcu. A zatem i te obserwacje świadczą o istnieniu gwiazd, na których procesy aktywności magnetycznej zachodzą w o wiele większej skali. I wreszcie pomiary natężenia promieniowania rentgenowskiego pokazały, że gwiazdy chłodne, tzn. typu Słońca lub chłodniejsze, promieniują w dziedzinie rentgenowskiej, niektóre o wiele intensywniej niż Słońce. Można więc sądzić, że korony gwiazdowe są częstym zjawiskiem, przy czym niektóre gwiazdy muszą mieć je większe i gorętsze niż Słońce.

W tej sytuacji naturalne było poszukiwanie dowodów obserwacyjnych na istnienie ciemnych, dużych plam na powierzchni chłodnych gwiazd. Dlaczego chłodnych? Zarówno obserwacje, jak i teoria wskazują, że aktywność magnetyczna związana jest z gwiazdami, które mają grubą warstwę konwektywną. Otóż gorące gwiazdy są jej pozbawione. Pojawia się ona najpierw u gwiazd nieco gorętszych niż Słońce, ale jest w nich bardzo cienka. Dopiero Słońce ma ją już dość grubą (około 20% promienia) i grubość warstwy rośnie w kierunku gwiazd coraz chłodniejszych (a tym samym coraz mniej masywnych).

Istotnie, około 20 lat temu zaobserwowano po raz pierwszy gwiazdę, której jasność zmieniała się z okresem kilkudniowym. Po roku amplituda uległa wyraźnej zmianie, a po paru latach zmiany zanikły. Od tego czasu odkryto już wiele gwiazd o podobnych zmianach blasku. Zmiany te interpretowane są jako związane z plamami, gdyż inne mechanizmy zmienności (np. pulsacje gwiazd czy zaćmienia w układzie podwójnym) są o wiele stabilniejsze — nie dałyby zmian krzywych blasku z roku na rok. Jeżeli plamy rozłożone są na gwieździe niejednokrotnie (np. duża plama z jednej strony gwiazdy), to w czasie wirowania gwiazdy obszar silnie zaplamiony będzie chował się i pojawiał z okresem równym okresowi wirowania. Zmiany z roku na rok można interpretować jako zmiany związane z cyklem aktywności.

Amplitudy zmian związanych z plamami wahają się od kilku do kilkudziesięciu procent. A zatem ciemne plamy muszą w niektórych przypadkach zajmować kilkadziesiąt procent powierzchni gwiazdy!

Obserwacje plam w jednej długości fali nie pozwalają nam na ocenę ich rozmiarów i temperatur. Plama całkowicie czarna, o „zerowej” temperaturze i niewielkim rozmiarze da podobny spadek jasności, jak plama duża, ale niewiele chłodniejsza od otoczenia. Dopiero obserwacje w co najmniej dwóch długościach fal pozwalają na ocenę temperatury i rozmiarów plamy. Niestety, najmniej wiemy o kształcie plam. Na szczęście ostatnio opracowano metodę obserwacji ciemnych plam na podstawie zmian w liniach widmowych produkowanych przez plamy, która z kolei jest niezbyt czuła na temperaturę plamy, ale pozwala dużo dokładniej wyznaczyć położenie i kształt plamy. Równoczesne obserwacje fotometryczne i spektroskopowe, planowane w przyszłości, dadzą nam maksimum informacji o plamach.

No, ale mówiliśmy, że plamy słoneczne związane są z silnymi polami magnetycznymi. Jeżeli plamy gwiazdowe mają podobną naturę, to również powinniśmy obserwować w nich silne pola. To prawda, ale pomiary pól magnetycznych na odległych gwiazdach są bardzo trudne. Niektóre spośród zaproponowanych metod, np. metoda dobrze działająca dla gwiazd gorących, nie dały wyników i dopiero ostatecznie otrzymano w USA pomiary dla około 20 chłodnych gwiazd. Nowo zastosowana metoda pozwala na zmierzenie średniego natężenia pola i procentu powierzchni gwiazdy pokrytego polami. Okazało się, że typowe natężenia pól (w przypadkach, gdy metoda dała pozytywny wynik) wynoszą około 1000–3000 Oe, a pokrywają one do 80% powierzchni gwiazdy. Warto podkreślić, że teoretyczne modele dużych plam na chłodnych gwiazdach otrzymane niedawno w Obserwatorium Astronomicznym Uniwersytetu Warszawskiego przewidywały, że w dużych plamach natężenia pól powinny być mniejsze niż w stosunkowo małych plamach słonecznych. Dawniej istniejące modele przewidywały wzrost natężenia pola w dużych plamach, aż do wartości 15–20 000 Oe. Obserwacje potwierdziły przewidywania „warszawskich” modeli.

Wydawałoby się już teraz, że mamy dostatecznie dużo obserwacji, by zbudować pełny model zjawisk fizycznych związanych z aktywnością magnetyczną. Ale do tego celu potrzebna jest liczna grupa gwiazd, dla której istnieje komplet różnorodnych obserwacji. Na razie znamy takich gwiazd bardzo mało. Dlatego musimy jeszcze poczekać na szczegółowe modele aktywności gwiazdowej. Możemy tylko powiedzieć, że dane obserwacyjne wskazują na wyraźny związek aktywności i prędkości rotacji. Gwiazdy rotujące szybko są o wiele aktywniejsze niż gwiazdy rotujące powoli. Gwiazdy mogą rotować szybko z dwóch powodów: albo dlatego, że są bardzo młode, albo ponieważ są składnikami ciasnych układów podwójnych. Gwiazdy młode szybko wirują, gdyż moment pędu obłoku protogwieźdznego jest zawsze wystarczająco duży dla nadania gwieździe szybkiej rotacji. W miarę upływu czasu gwiazdy tracą moment pędu. Jest to właśnie związane z aktywnością magnetyczną. Jej skutkiem jest uciekanie od gwiazdy zewnętrznych, gorących warstw koronalnych w formie tzw. wiatru gwiazdowego. Wiatr unosi ze sobą linie sił pola magnetycznego, które przekazują moment pędu od gwiazdy do cząsteczek wiatru, „uwiązanych” przez jakiś czas sztywno liniami sił do gwiazdy. W ten sposób im starsza gwiazda, tym wolniej rotuje. Wyznaczanie okresów rotacji gwiazd pojedynczych jest



Rozwiązanie zadania 158. a) W pobliżu zwierciadła w wyniku interferencji fali padającej i odbitej powstanie fala stojąca. Przy odbiciu od zwierciadła ma miejsce zmiana fazy o π , a więc pierwsza strzałka wystąpi w odległości $\frac{\lambda}{4}$ od zwierciadła, czyli

$$\lambda = 4d.$$

Oczywiście grubość napyłonej warstwy emulsji musi być większa od d , czyli $\frac{\lambda}{4}$.

b) Różnica dróg optycznych między promieniami światła rozproszonymi na kolejnych zaczernionych warstwach będzie równa całkowitej wielokrotności λ . W wyniku interferencji w świetle rozproszonym barwa ta ulegnie wzmocnieniu, podczas gdy pozostałe barwy zostaną osłabione. Przy obserwacji pod tym samym kątem, pod którym padało światło przy naświetlaniu, ujrzymy więc barwę światła użytego do naświetlania. Efekt ten może być podstawą barwnej fotografii. Barwy zdjęcia zmieniają się jednak w zależności od kąta, pod którym je oglądamy.

dość złożone i nie będziemy się tym zajmować. Inaczej wygląda sytuacja dla gwiazd podwójnych, których okres obiegu jest krótszy od tygodnia. Wtedy gwiazdy oddziałują ze sobą przypywowo i „patrzają” na siebie zawsze tymi samymi stronami. A zatem okres rotacji każdej z nich jest równy okresowi obiegu, niezależnie od wieku układu.

Silny związek między szybkością rotacji i aktywnością magnetyczną przemawia za słuszością tzw. teorii dynamo powstawania pól magnetycznych. Zgodnie z nią oddziaływanie rotacji i konwekcji prowadzi do dużego wzmocnienia nawet bardzo słabego początkowego pola magnetycznego. Im szybsza rotacja i im głębsza warstwa konwektywna, tym silniejsze pole końcowe. Teoria dynamo opiera się na założeniach, z których kilka jest kwestionowanych przez jej przeciwników. Jest ona jednak stale modyfikowana i ulepszana, a ponadto nie ma innej teorii, która mogłaby z nią rywalizować w odniesieniu do chłodnych gwiazd. Teoria dynamo nie tłumaczy wciąż jeszcze wielu obserwowanych zjawisk, np. zagadnień związanych z cyklami aktywności u gwiazd.

W sumie widzimy, że badania aktywności magnetycznej są nie tylko ciekawe same w sobie, ale okazują się też bardzo ważne z punktu widzenia ewolucji gwiazd, wyznaczania ich wieku, a w przyszłości, gdy lepiej zrozumiemy oddziaływanie pól magnetycznych z konwekcją, będą mogły służyć do badania ich wnętrza.

Dopplerowskie obrazy plam gwiazdowych

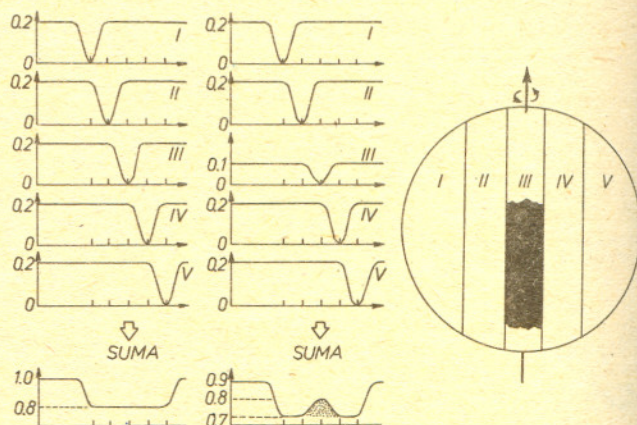
Mgr Krzysztof JAHN

Tak nazwano nową technikę obserwacyjno-obliczeniową pozwalającą konstruować obrazy powierzchni zaplamionych gwiazd. Czym jest plama gwiazdowa? W jakich warunkach może się pojawiać? Czy zjawisko to ma coś wspólnego z plamami słonecznymi? Odpowiedzi na te i na wiele innych pytań znajdzie Czytelnik w artykule doc. K. Stępnia.

Tutaj postaramy się odpowiedzieć na pytanie, czy można zobaczyć plamę gwiazdową? Oczywiście nie bezpośrednio, bo nawet największe teleskopy nie mają takiej zdolności rozdzielczej, która pozwoliłaby rozróżnić niejednorodności powierzchni odległych gwiazd. Dokładne obserwacje fotometryczne dostarczają wprawdzie pewnych informacji, ale są one często niejednoznaczne, i co więcej, na ich podstawie niewiele możemy powiedzieć o kształcie plamy. Z pomocą przychodzi spektroskopia. Okazało się, że subtelna analiza widm gwiazdowych w połączeniu z nowoczesną techniką obliczeniową umożliwia określenie rozmiarów, kształtu, położenia i temperatury plamy lub plam. Autorzy rozwijanej obecnie techniki — nazwanej techniką dopplerowskich obrazów plam gwiazdowych — zapewniają, że wkrótce można będzie otrzymać dodatkowo rozkład pola magnetycznego związanego z plamami.

Początki rozwoju tej techniki związane są z pewnym odkryciem, które miało miejsce w 1980 r. Zaobserwowano mianowicie pewną szczególną własność widma liniowego jednej z zaplamionych gwiazd (HR 1099 = V 711 Tauri). W profilach linii absorpcyjnych pojawiało się wybrzuszenie, które periodycznie przesunęło się wewnątrz profilu lub całkowicie zniknęło w zależności od tego, którą część tarczy gwiazda zwracała ku Ziemi. Okres zmian w linii odpowiadał dokładnie okresowi zmian obserwowanej jasności. Taką korelację położenia garbu wewnątrz profilu ze zmianami fotometrycznymi, za które odpowiedzialne są plamy, przejawiały wszystkie bez wyjątku linie absorpcyjne. Jak zinterpretować takie obserwacje? Jeśli na powierzchni rotującej gwiazdy znajduje się duży obszar o temperaturze niższej od temperatury otoczenia, to na ogół powinno to mieć swoje odzwierciedlenie w widmie liniowym. Dlaczego „na ogół”, a nie zawsze, to okaże się później. Teraz przyjrzymy się bliżej deformacji linii w najprostszym przypadku.

Pomocą w tym niech będzie rysunek, na którym porównamy kształty linii widmowych w przypadku gwiazdy bez plam (z lewej strony rysunku) i gwiazdy zaplamionej (strona prawa).



Podzielmy tarczę wirującej gwiazdy na sektory o jednakowej powierzchni (jak na rysunku). Gdyby możliwe było obserwowanie pojedynczych sektorów, to na skutek efektu Dopplera zauważylibyśmy przesunięcie się linii w kierunku większych długości fal w przypadku obszarów oddalających się (IV i V), oraz w kierunku niebieskiej części widma dla linii obserwowanych w sektorach zbliżających się do obserwatora (I i II). Obserwacja sektora III dałaby oczywiście linię nieprzesuniętą w widmie. W rzeczywistości obserwujemy strumień promieniowania z całej tarczy, a więc jedną, poszerzoną rotacyjnie linię. Lewa strona rysunku ilustruje przesunięcia linii dla poszczególnych sektorów, oraz zsumowany efekt — poszerzony profil. Co się stanie, gdy np. w sektorze III znajdzie się plama (dla uproszczenia całkowicie czarna) zajmująca 1/2 powierzchni sektora? Linie od pozostałych sektorów nie zmienią się, natomiast rozważany obszar emituje mniej promieniowania, bo połowa obszaru w ogóle nie świeci. W efekcie obniży się poziom widma ciągłego. Zostało to zaznaczone na rysunku wartością 0,1 (w pewnych umownych jednostkach). Sumowanie strumieni promieniowania od poszczególnych sektorów nie da tym razem wyłącznie spłyconego i poszerzonego profilu (można to sprawdzić dodając odczytane z rysunku wartości dla tych samych długości fal — 2, — 1, 0, 1, 2, też w pewnych jednostkach). Pojawił się

dotkadowo garb w centrum linii, który jest związany z istnieniem ciemnego obszaru na środku tarczy. Z tej uproszczonej analizy widać, że rozkład energii w zakresie długości fal obejmowanych przez poszerzoną rotacyjnie linię jest jednoznacznie odwzorowaniem niejednorodności jasności powierzchni gwiazdy. Jeśli plama znajdzie się w sektorze II lub IV, to garb przesunie się w lewo lub w prawo. Odwzorowanie to jest jednak tylko jednowymiarowe. Za jego pomocą można określić tylko odległość od osi rotacji gwiazdy. I to wszystko co można wynioskować z takiego obrazka. Na szczęście rzeczywistość jest bardziej skomplikowana. Przytoczony przed chwilą przykład nie uwzględnia pociemnienia brzegowego, jak też faktu, że plama również promieniuje (nie jest całkowicie czarna). Uwzględnienie obu efektów komplikuje oczywiście rachunki, ponieważ trzeba w nich uwzględnić różne poziomy ciąglej składowej (kontinuum) promieniowania (więc i różne względne głębokości linii) pochodzącego z plamy i normalnej fotosfery w różnych odległościach od brzegu tarczy. Niemniej, dzięki temu można wyznaczyć temperaturę plamy. Pociemnienie brzegowe w sposób naturalny dzieli tarczę gwiazdy na pierścienie, które promieniają tym słabiej, im bliżej brzegu są położone (patrz artykuł J. Madeja w *Delcie* 6/1983). W efekcie takiego obniżania poziomu kontinuum garb w linii obserwowanej blisko brzegu tarczy staje się bardziej ostry. Zauważmy, że można w ten sposób określić drugą współrzedną położenia plamy, a mianowicie odległość od centrum tarczy. Razem z odległością od osi rotacji daje nam to lokalizację chłodniejszego obszaru na gwieździe. Obserwacje linii absorpcyjnych muszą być przeprowadzone w kilku fazach obrotu gwiazdy tak, aby otrzymać profile dla różnych położenia plamy lub plam na tarczy. Wysokość i kształt garbu oraz jego położenie wewnątrz linii daje informację o temperaturze i lokalizacji plamy. A co z kształtem? Oczywiście i ta informacja jest zawarta w wymienionych cechach linii. Aby otrzymać kształt plamy, trzeba podzielić tarczę gwiazdy nie na kilka sektorów, a na kilka tysięcy małych prostokątów. Im więcej, tym dokładniejsze kontury plamy, bo większa jest wtedy rozdzielczość metody. Nie mogą one mieć jednak zbyt małych powierzchni, bo inaczej załamałyby się przybliżenia fizyczne w modelach numerycznych. Innymi słowy, również zbyt drobny podział tarczy nie jest wskazany.

Zobaczmy, jak wygląda w całości procedura prowadząca do otrzymania obrazu powierzchni gwiazdy pokrytej plamami. Na początku trzeba oczywiście zrobić obserwacje widma interesującej nas gwiazdy w różnych fazach oraz wybrać linie absorpcyjne, które będą następnie badane. Dalsza część pracy jest prowadzona przy użyciu komputera. Tarczę gwiazdy dzieli się na prostokątki i odgaduje się przybliżoną wartość temperatury każdego z nich.

Można to zrobić znając obserwowany kształt linii. Jeśli garb znajduje się w prawej części profilu, to obszar chłodniejszy jest na oddalającej się części tarczy, itd. Zauważmy, że przyporządkowując temperatury poszczególnym obszarom od razu określamy kształt plamy. W niczym to jednak nie przeszkadza procedurze, która wybierze tylko właściwe rozwiązanie. Po próbnym odgadnięciu temperatur i kształtów plam trzeba obliczyć profile linii dla każdego obszaru, a następnie zsumować je uwzględniając pociemnienie brzegowe. Otrzymany w ten sposób teoretyczny profil porównuje się z obserwowanym i jeśli oba pokrywają się, to odgadnięcie było prawidłowe. W praktyce to się jednak nie zdarza. Zwykle otrzymuje się kształt linii różny od obserwowanego. Całe postępowanie powtarza się z nowym rozkładem temperatury tak długo, aż zgodność profilu obliczonego i obserwowanego będzie zadowalająca. Przy odgadywaniu kolejnych rozkładów temperatur wykorzystuje się różnice między profilami teoretycznymi a obserwowanymi (różnice wysokości i szerokości garbu czy też jego położenia wewnątrz linii). Decyzję o modyfikacji temperatury, lokalizacji i rozmiarów plamy podejmuje człowiek; oczywiście w taki sposób, aby w następnym kroku zbliżyć się do poprawnego rozwiązania. Mogłoby się wydawać, że metoda ta może dawać niejednoznaczne wyniki, ponieważ decyzja człowieka jest w niej czynnikiem subiektywnym. Żeby sprawdzić, czy otrzymany obraz bardzo zależy od osoby dokonującej wyboru parametrów, przeprowadzono kilka eksperymentów, w których kilka osób niezależnie wykonało tę procedurę dla jednego zestawu obserwacji. Wyniki okazały się prawie identyczne, co przemawia za tym, że czynnik subiektywny metody jest co najmniej kontrolowany, jeśli nie jest to wręcz argumentem za jednoznacznością metody.

Nie chciałbym jednak, aby czytelnik odniósł wrażenie, że opracowanie obrazu powierzchni zaplamionej gwiazdy jest pracą niezwykle żmudną, polegającą np. na określaniu temperatury każdego z dziesięciu tysięcy sektorów. Jest to raczej podejmowanie ogólnych decyzji o zmianie temperatury, kształtu i położenia plamy. Czynnikiem umożliwiającym prawie pełną automatyzację procedury jest wykorzystanie obserwacji linii widmowych w różnych fazach rotacyjnych gwiazdy. Inaczej wygląda garb wewnątrz profilu, gdy plama jest na brzegu tarczy, a inaczej, gdy znajdzie się np. w centrum. Polega to nie tylko na zmianie położenia wewnątrz linii, lecz również na różnicach w kształcie garbu. Efekty takie, które trzeba oczywiście uwzględnić w obliczeniach numerycznych, umożliwiają zamknięcie cyklu iteracji i tak naprawdę człowiek byłby tu niepotrzebny, gdyby nie to, że całkowicie automatyczna procedura trwałaby znacznie dłużej. Brzmi to może paradoksalnie, ale specyfika tej metody rzeczywiście wymaga ingerencji człowieka, jeśli chce się skrócić czas obliczeń, który na dużych komputerach (bo takie są tu potrzebne) jest bardzo kosztowny.

Zanim zilustruję technikę otrzymywania obrazów zaplamionych gwiazd konkretnym przykładem (zresztą jedynym, jak dotąd, opracowanym do końca), powiemy coś o jej wadach lub raczej o zakresie jej stosowności. Granice takie wyznacza wielkość poszerzenia rotacyjnego linii; jeśli jest zbyt małe, tzn. porównywalne z normalnym jej kształtem, to nie znajdziemy w niej odzwierciedlenia przesuwania się plam po tarczy gwiazdy. Zmiany położenia garbu wewnątrz profilu mogą się wtedy sprowadzać do subtelnych deformacji kształtu linii, które nie niosą wystarczającej informacji. Z taką sytuacją będziemy mieli do czynienia wtedy, gdy prędkości radialne obszarów gwiazdy przybliżających się i oddalających (czyli iloczyn prędkości rotacji gwiazdy i sinusa kąta nachylenia osi obrotu do obserwatora — i) będą zbyt małe. Z tego powodu trzeba wyeliminować z obserwacji zarówno gwiazdy rotujące zbyt wolno, jak i te, które są zwrócone do obserwatora biegunem (gdy i jest bliskie zeru). Z drugiej strony, jeśli poszerzenie rotacyjne wzrasta, to profil linii staje się coraz bardziej płytki. Wówczas ze względu na jej duże rozmycie niemożliwe jest zaobserwowanie wewnątrz garbu. Widzimy więc, że nie dla każdej zaplamionej gwiazdy występuje zauważalna charakterystyczna deformacja linii absorpcyjnej.

Poza ograniczeniem dopuszczalnej prędkości rotacji istnieje jeszcze jedna trudność. Jeśli obserwowana gwiazda ma oś rotacji skierowaną prostopadle do obserwatora ($i = 90^\circ$), to omawiana tu procedura nie może określić, na której półkuli znajduje się plama. Wyznaczenie położenia obszarów chłodniejszych w kierunku równoległym do osi rotacji jest wtedy niejednoznaczne.

Czasami wiele trudności może sprawiać problem wyboru do opracowania odpowiednich linii widmowych. Gwiazdy z plamami są chłodne; ich temperatury są niższe od 5000 K.

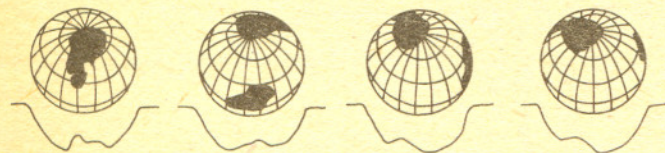
Widma takich gwiazd są bardzo gęsto pocięte liniami absorpcyjnymi, które często zachodzą na siebie, a czasami nawet tworzą pasma. Kłopot polega na tym, że trzeba wybrać nie tylko takie linie, które byłyby widoczne w całości (nie zachodziły na inne), ale także aby kształt tych linii nie był zbyt czuły na temperaturę. Chodzi o to, aby linia powstająca w atmosferze plamy (w obszarze chłodniejszym) była z grubsza taka sama jak ta z niezaburzonej fotosfery (pewnych linii w plamach w ogóle nie widać). Do tego celu najbardziej nadają się linie metali niezjonizowanych. Na szczęście, w widmach interesujących nas gwiazd czasami udaje się znaleźć linie spełniające odpowiednie warunki.

Pierwszym obiektem, dla którego zastosowano technikę dopplerowskich obrazów plam, była ta sama gwiazda, w której widmie po raz pierwszy odkryto „wgrzyzienia” linii absorpcyjnych skorelowane z fazą rotacyjną. Obiekt ten, HR 1099 (lub V 711 Tauri), znany był już wcześniej jako układ podwójny, w którym jeden ze składników jest pokryty dużymi plamami powodującymi obserwowane zmiany fotometryczne z okresem równym okresowi rotacji tego składnika. Po dokonaniu wyboru odpowiednich linii w widmie gwiazdy — były to linie obojętne żelaza (6430,9 Å) i wapnia (6439,1 Å) — wykonano obserwacje spektroskopowe w różnych fazach rotacyjnych.

Załączone rysunki ilustrują obserwowane „wygryzienia” w liniach.

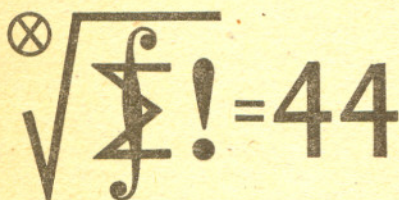


Po wykonaniu obliczeń okazało się, że na powierzchni gwiazdy istnieją dwie plamy: jedna położona na biegunie, a druga w pasie równikowym. Następny rysunek pokazuje tarczę gwiazdy widoczną w różnych fazach.



Pod każdą ilustracją zaznaczony został, tym razem schematycznie, odpowiedni profil, aby zilustrować odwzorowanie obrazu tarczy w kształcie linii. Plamy te, jak widać, w niczym nie przypominają plam słonecznych. Zwłaszcza biegunowa, ze względu na swe położenie nie ma swego odpowiednika na Słońcu. Plamy te nie mają praktycznie tzw. półcienia, który w przypadku plam słonecznych stanowi duży procent ich powierzchni. Jeśli w tych olbrzymich plamach półcienia istnieje, to tylko w formie paska otaczającego ciemny obszar. Musi on być stosunkowo wąski, bo opisywana tu metoda nie może go rozróżnić.

Twórcy tej techniki obiecują w najbliższej przyszłości uzupełnić otrzymywane obrazy o jeszcze jedną ważną informację — natężenie pola magnetycznego w plamach. Będzie to najprawdopodobniej możliwe po takim zmodyfikowaniu aparatury obserwacyjnej, aby można było prowadzić pomiary linii widmowych przy użyciu polarymetru. Zrozumiałe jest, że taka informacja o polu magnetycznym, jego natężeniu i położeniu na gwiazdzie, byłaby niezwykle cenna dla badań teoretycznych tego typu zjawisk.



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delfy”

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Klub 44

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadania nr 91, 92, 93

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1984

91. Na płaszczyźnie dana jest łamana zamknięta. Łącząc odcinkami środki kolejnych jej boków otrzymujemy nową łamaną zamkniętą. Powtarzając tę operację wielokrotnie dostajemy ciąg łamanych zamkniętych. Zakładamy, że w żadnej z tych łamanych środki żadnych dwóch boków nie pokrywają się, a więc wszystkie łamane mają tę samą liczbę wierzchołków i boków. Udowodnić, że ciąg długości otrzymanych łamanych dąży do zera.

92. Czy trzema kwadratami o boku 5 można pokryć kwadrat o boku 2π ?

93. Niech $x = m/n$ będzie ułamkiem nieskracalnym, $x \in (0, 1)$. Dowieść, że liczbę x można przedstawić w postaci sumy odwrotności co najwyżej $n-1$ różnych liczb naturalnych.

Zadanie 93 przysłał pan Jerzy Tyszkiewicz z Warszawy.

Przypominamy treść zadań:

85. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne m , dla których odpowiedź na następujące pytanie jest jednoznaczna: Ile prostych poprowadzono na płaszczyźnie, jeśli wiadomo, że zbiór wszystkich punktów przecięcia tych prostych składa się z m punktów?

86. Obliczyć objętość największego czworościanu, który można umieścić w dwunastościanie foremnym o danej krawędzi a .

87. a) Czy prawdą jest, że jeśli $f: \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją taką, że dla każdej liczby $a \in \langle 0, 1 \rangle$ istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a+n)$ i jej wartość nie zależy od wyboru a , to istnieje granica $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$? b) Czy odpowiedź zmieni się, jeśli dodatkowo założyc, że funkcja f jest ciągła?

85. Tylko dla $m = 2$ odpowiedź na postawione pytanie jest jednoznaczna (3 proste; jedyna możliwa konfiguracja to para prostych równoległych przeciętych trzecią prostą; łatwy dowód tego pomijamy). Gdy $m = 1$, można wziąć dowolną liczbę prostych przecinających się w jednym punkcie. Gdy natomiast $m > 2$, to weźmy $m-1$ punktów P_1, \dots, P_{m-1} leżących na jednej prostej L_0 oraz pojedynczy punkt P_m poza tą prostą i poprowadźmy proste $L_i = pP_iP_m$ ($i = 1, \dots, m-1$) oraz prostą L_m , równoległą do L_0 i przechodzącą przez P_m . Zbiór $\{P_1, \dots, P_m\}$ jest zbiorem wszystkich punktów przecięcia zarówno dla rodziny prostych $\{L_0, L_1, \dots, L_{m-1}\}$, jak i dla rodziny $\{L_0, L_1, \dots, L_{m-1}, L_m\}$.

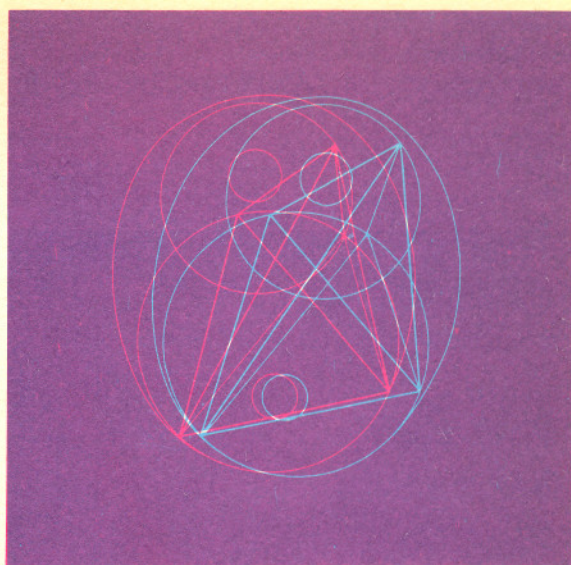
86. Lemat. Spośród wszystkich czworościanów wpisanych w daną sferę największą objętość ma czworościan foremny.

Dowód. Istnienie największego czworościanu T wynika stąd, że objętość jest ciągłą funkcją położenia wierzchołków, a sfera jest zbiorem zwartym.

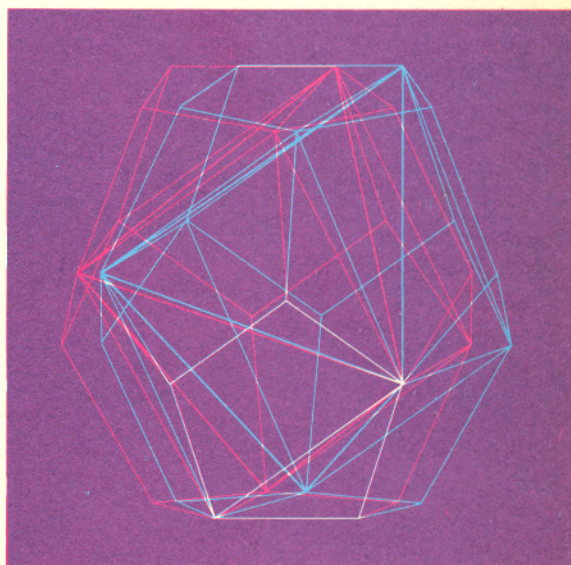
Przypuśćmy, że T ma ścianę nie będącą trójkątem równobocznym. Przesuwając jeden z wierzchołków tego trójkąta (w jego płaszczyźnie) możemy zwiększyć jego pole, a tym samym — nie zmieniając położenia czwartego wierzchołka T — możemy zwiększyć objętość T , wbrew maksymalności (rys. 1).

Rozwiązanie zadania. Dwunastościan foremny D zawiera sześcian C , którego krawędziami są przekątne pewnych ścian D (rys. 2). Długość d przekątnej pięciokąta foremnego i długość boku a związane są wzorem $d = (1 + \sqrt{5})a/2$. W sześcianie C o krawędzi d możemy umieścić czworościan foremny T o krawędzi $\sqrt{2}d$ (rys. 3). Na mocy lematu T jest największym czworościanem wpisanym w sferę opisaną na D , a więc i największym czworościanem zawartym w D . Ponieważ T powstaje z sześcianu C przez odcięcie czterech ostrosłupów o objętości $d^3/6$, zatem objętość T równa się $d^3/3 = (2 + \sqrt{5})a^3/3$.

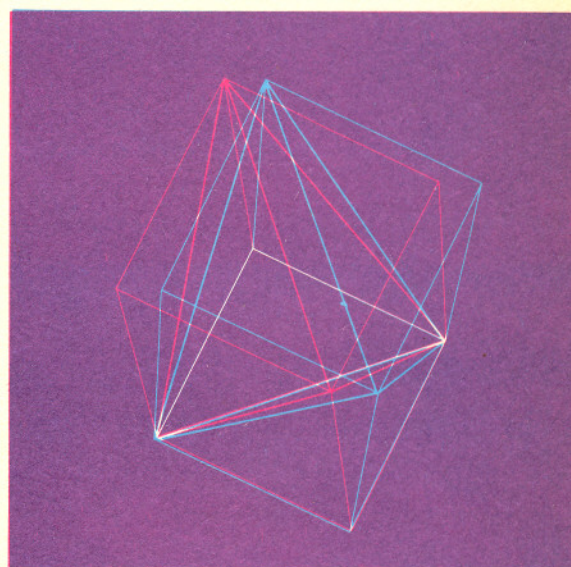
87. Odpowiedź na oba pytania jest przecząca. Jako kontrprzykład — do pytania b), a tym samym i do pytania a) — może służyć funkcja, która w każdym z przedziałów $I_n = \langle n, n+1/n \rangle$, $n = 1, 2, 3, \dots$, jest ciągła, przyjmuje wartość 0 na końcach I_n oraz wartość 1 w pewnym punkcie wewnątrz I_n i równa się zero poza zbiorem $\cup I_n$.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3