

# SPIS TREŚCI

## NUMERU 3 (159)

Spektroskopia optyczna <i>mgr Piotr Myśliński</i>	str. 1
Patrz w niebo	str. 3
Hipoteza Hadwiger'a o pokryciu brył wypukłych ... <i>dr Marek Lassak,</i> <i>dr Horst Martini</i>	str. 4
O pewnych własnościach przestrzeni euklidesowych <i>Piotr Jędrzejewicz</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Kontrprzykład Stanisława Mazura <i>dr Zbigniew Sawoń</i>	str. 10
Zadania	str. 11
Białe karty <i>dr Tomasz Kwast</i>	str. 12
Klub 44	str. 14
Drobiazgi	str. 16

**W następnym numerze:**  
Mikroskop tunelowy

### „Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichoński  
dr Antoni L. Dawidowicz  
dr Alicja Derkowska  
doc. dr Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
doc. dr Tomasz Hofmokl — v-przewodniczący  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
doc. dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Mąkowski  
dr Zbigniew Płochocki  
dr Jan Rempała  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Grzegorz SitarSKI  
prof. dr Józef I. Smak  
prof. dr Kazimierz Stępień  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Aniela Wolska  
prof. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Zakowski —  
przewodniczący

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
  - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
  - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
  - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
  - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleconiodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:

- do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
- do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nacz.  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr hab. Marek Kordos — red. nacz.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nacz.  
mgr inż. arch. Mariola Łotysz  
dr Andrzej Majhofer  
mgr Anna Rudnik  
dr Jerzy Ryll  
mgr Joanna Udalska  
mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa  
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism

RSW „Prasa—Książka—Ruch”

ul. Noakowskiego 14

00-666 Warszawa

tel. centr. 25-72-91 do 93

Biuro Reklam i Propagandy

tel. 25-56-26

Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;

2,50 ark. druk;

papier offsetowy V kl. 70 g.

Wydrukowano w Drukarni

im. Rewolucji Październikowej

Warszawa, ul. Mińska 65.

Nr zam. 3119/12/86. P-11.





# Spektroskopia optyczna

Mgr Piotr MYŚLIŃSKI

W opublikowanej w 1672 roku pracy Isaac Newton opisał wyniki swoich doświadczeń z widmem rozszczepionego w pryzmacie światła białego. Na ich podstawie wykazał, że istnieje związek między wartością współczynnika załamania i barwą światła. Blisko dwieście lat później Gustaw Robert Kirchhoff i Robert Wilhelm Bunsen obserwując różne substancje pobudzone do świecenia w płomieniu gazowym lub wyładowaniu elektrycznym ustalili, że otrzymane widma emisyjne składają się z szeregu linii o układzie charakterystycznym dla każdego z pierwiastków. Zbadali oni i opisali widma znanych wówczas pierwiastków, dzięki czemu możliwe stało się ustalanie składu chemicznego próbki przez porównanie jej widma z poprzednio skatalogowanymi — odnalezienie znanych linii jakiegos pierwiastka świadczyło o jego obecności w próbce.

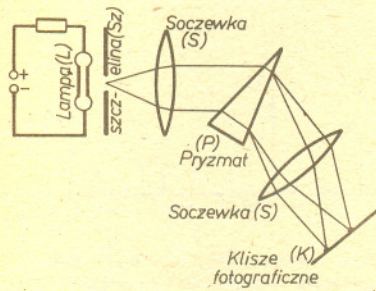
Teoretyczna interpretacja widm stała się możliwa dopiero w latach dwudziestych naszego wieku w ramach mechaniki kwantowej. Okazało się, że atomy i cząsteczki mogą istnieć tylko w stanach o dyskretnych wartościach energii. Zmianie stanu towarzyszy pochłonięcie lub wyemitowanie kwantu promieniowania o długości fali odwrotnie proporcjonalnej do różnicy energii stanu początkowego i końcowego. W cząsteczce poza zmianą konfiguracji powłok elektronowych (jak w atomie) możliwa jest również zmiana stanu wzajemnego ruchu jąder składowych atomów (oscylacje i rotacje), co powoduje, że widma cząsteczkowe mają o wiele bogatszą strukturę niż widma atomowe. Analiza widm atomów i cząsteczek zaczęła więc dostarczać informacji o ich wewnętrznej budowie tworząc obszerny dział fizyki zwany spektroskopią.

Różnice energii stanów oscylacyjnych i rotacyjnych cząsteczki są zwykle bardzo małe i odpowiadające im linie widmowe znajdują się poza obszarem widzialnym w części podczerwonej widma. Widzialnym długościom fal mogą odpowiadać zmiany stanu elektronowego z jednoczesną zmianą stanu rotacyjnego lub oscylacyjnego. Oddziaływanie elektronów jednocześnie z jądrami kilku atomów powoduje, że widmo elektronowe cząsteczki różni się od widm tworzących ją atomów. Również oddziaływanie międzycząsteczkowe (zaniedbywalne w fazie gazowej) zmienia energie dozwolonych przejść i powoduje, że ciecze i ciała stałe mają widma ciągłe (np. żarzące się włókno żarówki).

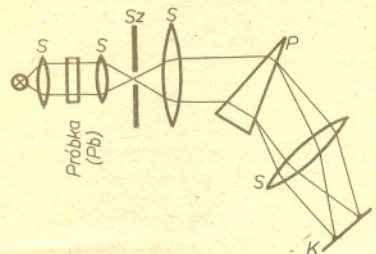
Prosty spektrograf do badania widm emisyjnych (podobny do takiego, jakim posługiwali się Bunsen i Kirchhoff) przedstawiony jest schematycznie na rysunku 1. Oświetlając szczelinę lampą, w której badany gaz pobudzony jest do świecenia przez wyładowanie elektryczne, otrzymujemy na kliszy fotograficznej szereg prążków. Odpowiadają one wyemitowanemu przez lampę światłu o różnych długościach fal, a więc różnie odchylonemu przez pryzmat. Niedogodnością tego typu pomiarów jest fakt, że nie wszystkie substancje dają się w prosty sposób pobudzić do świecenia. W takich przypadkach stosuje się spektrografy absorpcyjne. Schemat takiego spektrografu przedstawia rysunek 2. Jak widać — układ szczeliny, pryzmatu i kliszy nie zmienił się i nadal służy do zarejestrowania na kliszy rozszczepionego obrazu szczeliny. Zmienił się jedynie sposób oświetlenia szczeliny. Źródłem światła jest w tym przypadku silna żarówka emitująca światło białe. Między żarówką a szczeliną wstawiona została badana próbka. Próbka pochłania (absorbuje) jedynie światło o tych długościach fal, jakie sama by wyemitowała (prawo Kirchhoffa). Zarejestrowane na kliszy widmo jest zatem negatywnym widma emisyjnego. Inny typ spektrografu absorpcyjnego przedstawia rysunek 3. Tym razem próbka oświetlana jest światłem monochromatycznym, czyli światłem o określonej długości fali. Jest ono wydzielone z emitowanego przez żarówkę widma ciągłego dzięki znanemu już układowi pryzmatu, soczewki i szczeliny. Próbka wraz z soczewkami i elementem światłoczułym (zwykle fotopowielaczem) zamontowana jest na ruchomym stoliku, który może się przesuwać w kierunkach zaznaczonych na rysunku, co równoważne jest oświetlaniu próbki światłem o coraz to innej długości fali. Wynik pomiaru natężenia światła za próbką w zależności od położenia stolika pozwala zatem zmierzyć widmo absorpcyjne równoważne uzyskanemu w spektrografie z rysunku 2.

Widma emisyjne i absorpcyjne atomów i cząsteczek składają się z wielu linii. Bardzo często szereg linii położonych jest niezwykle blisko siebie, to znaczy, że różnica odpowiadających im długości fal jest niewielka. Ze względu na skończoną szerokość szczeliny spektrografu oraz występowanie zjawiska dyfrakcji dla każdego spektrografu istnieje minimalna różnica długości fal dwóch linii, dla której spektrograf zmierzy te linie jako oddzielne. Wszystkie linie widmowe znajdujące się bliżej siebie zostaną zarejestrowane jako jedna linia. Zdolnością rozdzielczą spektrografu nazywamy stosunek długości fali  $\lambda$  światła analizowanego do tej minimalnej różnicy długości fal  $\Delta\lambda_{min}$ . W dalszej części zdolności rozdzielczą będziemy mniej precyzyjnie nazywali bezpośrednio wielkość  $\Delta\lambda_{min}$ . Zdolność rozdzielcza spektrografu zależy przede wszystkim od rodzaju zastosowanego pryzmatu (lub siatki dyfrakcyjnej), od szerokości szczeliny i geometrii układu optycznego. Zwiększenie zdolności rozdzielczej pozwala na uzyskiwanie bardziej szczegółowych widm. Widma takie dostarczają więcej informacji o budowie badanych atomów czy cząsteczek. Stosując zamiast układu soczewek, pryzmatu i szczeliny źródło światła monochromatycznego o dużym natężeniu, można wyeliminować znaczną część czynników pogarszających zdolność rozdzielczą spektrografu. Takim źródłem światła jest laser. Do zbudowania układu analogicznego do przedstawionego na rysunku 3 potrzebny jest laser „strojony”, w którym można zmieniać długość fali emitowanego światła.

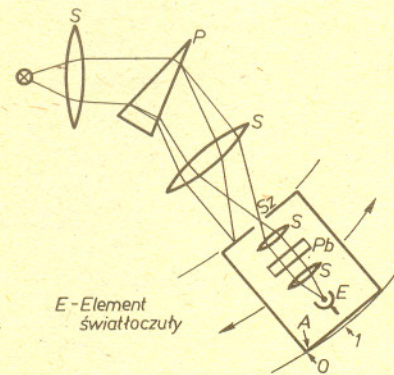
Ośrodek aktywny lasera (np. mieszanina helu i neonu) pobudzony do świecenia emituje spontanicznie we wszystkich kierunkach. Gdy umieścić go między dwoma zwierciadłami, to odbita od nich część promieniowania wraca znow do osrodka. Jeśli natężenie światła odbitego jest wystarczająco duże, aby w osrodku następowały akty emisji wymuszonej (tj. emisji fotonu w obecności innego identycznego fotonu), to następuje generacja akcji laserowej w kierunku prostopadłym do powierzchni zwierciadeł.



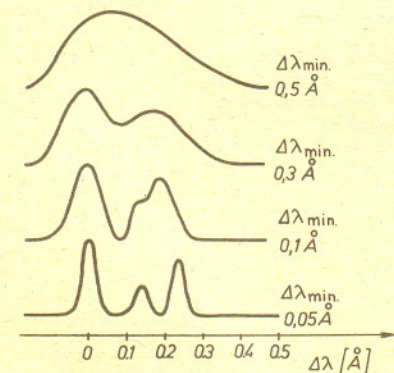
Rys. 1. Spektrograf do badania widma emisyjnego.



Rys. 2. Spektrograf do badania widma absorpcyjnego.



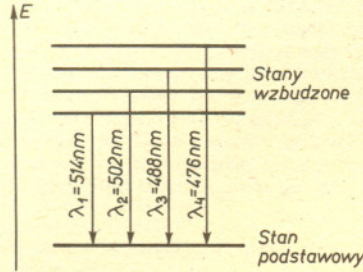
Rys. 3. Inny typ spektrografu do badania widma absorpcyjnego.



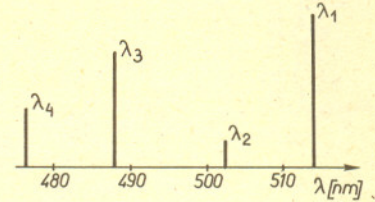
Rys. 4. Linie widmowe uzyskane przy badaniu tego samego pierwiastka spektrografami o różnej zdolności rozdzielczej.



Akcja laserowa może zająć jedynie na tej długości fali, na jakiej następuje emisja spontaniczna w atomach czy cząsteczkach ośrodka aktywnego. W laserze helowo-neonowym generację akcji laserowej uzyskuje się tylko w części czerwonej widma na długości fali  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$  ( $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} = 10 \text{ \AA}$ ). Inaczej wygląda sytuacja w laserze argonowym. We wzbudzonych jonach argonu możliwe jest uzyskanie akcji laserowej na kilku długościach fal w części niebiesko-zielonej widma (rysunki 5 i 6), gdyż jony argonu charakteryzują się niezwykle silną emisją spontaniczną światła o tych właśnie długościach fal.

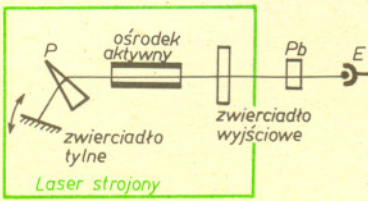


Rys. 5. Struktura energetyczna jonów argonu. Zaznaczone są długości fal odpowiadających możliwym przejściom.

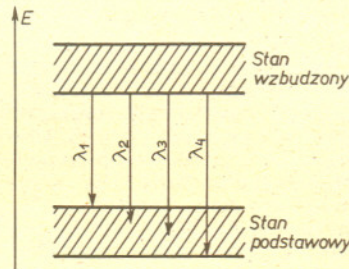


Rys. 6. Widmo emisyjne argonu. Wysokość kreski jest proporcjonalna do natężenia emitowanego promieniowania.

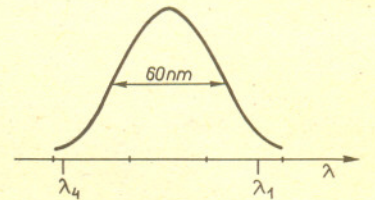
W laserze „strojonym” pomiędzy zwierciadłem wyjściowym i tylnym prócz ośrodka aktywnego (argonu) umieszczono pryzmat. Obrót zwierciadła tylnego względem osi prostopadłej do płaszczyzny wyznaczonej przez promienie świetlne zmienia długość fali, dla której zwierciadła są „równoległe”. Obracając zatem zwierciadło tylne uzyskiwać będziemy kolejno generację akcji laserowej na poszczególnych długościach fal charakterystycznych dla jonów argonu. Otrzymujemy zatem rodzaj lasera strojonego, ale, niestety, strojonego skokowo, to znaczy nie będziemy mogli uzyskać akcji laserowej na długości fali np. między 514,5 nm a 501,7 nm. Chęć zbudować laser strojony w sposób ciągły, czyli umożliwiający generację światła o dowolnej długości fali, zamiast argonu powinniśmy użyć ośrodka o ciągłym widmie emisyjnym. Doskonałymi materiałami tego typu okazały się roztwory barwników organicznych, niezwykle podobnych do używanych do barwienia tkanin. Na skutek oddziaływania z cząsteczkami rozpuszczalnika stan podstawowy oraz stany wzbudzone cząsteczki barwnika nie mają już tak jednoznacznie określonej energii jak stany jonów argonu. Cząsteczka może mieć energię w ramach całego pasma energetycznego (rysunek 8). Widmo emisyjne cząsteczki będzie zatem widmem ciągłym (rysunek 9), a zatem umożliwi generację akcji laserowej w całym obszarze spektralnym od długości fali  $\lambda_1$  do  $\lambda_4$ .



Rys. 7. Spektrograf wykorzystujący laser strojony.



Rys. 8. Struktura energetyczna cząsteczek barwnika w rozpuszczalniku.



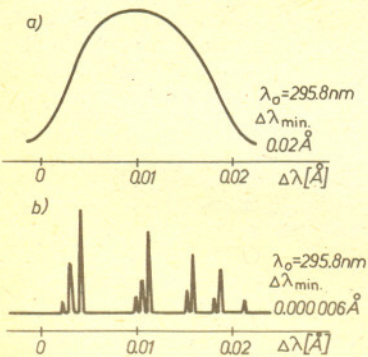
Rys. 9. Widmo emisyjne barwnika.

Typowa szerokość widma emisyjnego barwnika wynosi około 60 nm — oznacza to, że użycie pięciu różnych barwników o przesuniętych względem siebie widmach emisyjnych umożliwia generację akcji laserowej w całym obszarze widzialnym (od około 400 nm do około 700 nm). Układ pomiarowy z użyciem strojonego lasera barwnikowego przedstawia rysunek 7. Ze względu na dużą moc światła emitowanego przez laser ogniskowanie światła w próbce nie jest konieczne. Wystarczy zatem zmierzyć natężenie światła laserowego w zależności od kąтового ustawienia zwierciadła tylnego, aby uzyskać odpowiednie widmo absorpcyjne.

Zastosowanie laserów barwnikowych pozwoliło polepszyć zdolność rozdzielczą w spektroskopii o kilka rzędów wielkości. Najlepiej ilustruje ten fakt rysunek 10. W części b) rysunku przedstawione jest widmo atomu europu ( $^{151}\text{Eu}$ ) zmierzone za pomocą lasera barwnikowego. Składa się ono z jedenastu linii widmowych skupionych w pięciu grupach. Rozdzielenie położonych blisko siebie linii umożliwiła wysoka zdolność rozdzielcza wynosząca 0,000 006  $\text{\AA}$ , uzyskana dzięki zastosowaniu lasera. Dla porównania część a) rysunku przedstawia to samo widmo zmierzone za pomocą klasycznego spektrografu o bardzo wysokiej zdolności rozdzielczej 0,02  $\text{\AA}$ . Klasyczny spektrograf zmierzyłby zamiast jedenastu tylko jedną linię nie pozwalając na szczegółowe rozróżnienie struktury widmowej.

Zastosowanie laserów w spektroskopii to nie tylko zwiększenie zdolności rozdzielczych. Inne parametry światła laserowego, takie jak spójność, mała rozbieżność wiązki, duża moc i możliwość generacji bardzo krótkich impulsów stworzyły nowe możliwości badawcze w spektroskopii. W miejsce prostych eksperymentów absorpcyjnych opisanych w tym artykule stosuje się złożone systemy doświadczalne pozwalające badać procesy atomowe i cząsteczkowe.

Czytelnikom zainteresowanym technikami laserowymi polecamy książkę Arkadiusza Piekary *Nowe oblicze optyki* czy też bardziej zaawansowaną Franciszka Kaczmarka *Wstęp do fizyki laserów*.



Rys. 10. Linie widmowe atomu europu.



Od dawna podstawowe zjawiska na sferze niebieskiej, jak jej ruch dzienny określający dobę oraz ruch roczny Słońca, stanowią bazę, na której opiera się rachuba czasu. Te naturalne wzorce sprawiają nam jednak sporo kłopotów. Spróbujmy zdefiniować dobę jako odstęp czasu wyznaczony przez obrót Ziemi wokół osi.

Przede wszystkim obrót Ziemi nie jest dokładnie jednostajny. Tarcie pływowe powoduje spowolnienie obrotu o  $0^{\circ}0016$  w ciągu stulecia (tzw. zwolnienie wiekowe). Przemieszczanie się mas powietrza i wody wywołuje tzw. zmiany sezonowe — różnica między najszybszym obrotem w sierpniu a najwolniejszym w marcu dochodzi do  $0^{\circ}0025$ . Ponadto zdarzają się nieregularne, gwałtowne zmiany szybkości obrotu dochodzące do  $0^{\circ}005$ , których przyczyna nie jest na razie znana.

Obserwacja dobowego obrotu nieba gwiazdzistego, będącego odbiciem obrotu Ziemi, prowadzi do pojęcia czasu gwiazdowego. Gdyby gwiazdy były ściśle nieruchomymi punktami sfery niebieskiej, to za obiekt służący do wyznaczania czasu moglibyśmy wybrać dowolną z nich i dobę określić jako odstęp czasu między dwoma kolejnymi jednakowymi jej położeniami na niebie (np. kulminacjami górnymi). Jednak ponieważ gwiazdy zmieniają swe względne położenia, dobę gwiazdową definiuje się jako odstęp czasu między dwiema kolejnymi kulminacjami punktu równonocy wiosennej. Wprawdzie on również nie jest nieruchomy, lecz przynajmniej wiadomo, że jego położenie zmienia się, wskutek zjawiska precesji osi ziemskiej, w sposób jednostajny. W związku z ciągłym przemieszczaniem się punktu Barana dobę gwiazdową jest o  $0^{\circ}003$  krótsza od obrotu Ziemi wokół osi.

Inny sposób zdefiniowania doby wynika z obserwacji ruchu dziennego Słońca. Prawdziwą dobę słoneczną nazywamy odstęp czasu między dwiema kolejnymi górnymi kulminacjami środka tarczy słonecznej (zwróćmy uwagę, że takie doby zaczynają się w południe). Jest ona dłuższa o mniej więcej 4 minuty od doby gwiazdowej, ponieważ wskutek rocznego ruchu Ziemi po orbicie Słońce przemieszcza się wśród gwiazd w kierunku przeciwnym do pozornego ruchu dziennego sfery niebieskiej. Prawdziwe doby słoneczne są krótsze latem i dłuższe zimą (różnice dochodzą do  $51^s$ ) głównie z powodu niejednostajności ruchu Ziemi po orbicie. Prawdziwy czas słoneczny wskazują zegary słoneczne.

Zbudowanie mechanizmu zegarowego wskazującego prawdziwy czas słoneczny byłoby bardzo trudne, wobec tego w życiu codziennym posługujemy się tzw. średnim czasem słonecznym. Cywilna rachuba czasu oparta jest na pewnym fikcyjnym Słońcu średnim, które porusza się równomiernie i nie po ekliptyce, a wzdłuż równika niebieskiego. Tak zwane równanie czasu, tj. różnice między czasem prawdziwym i średnim, podają roczniki astronomiczne. Średni czas słoneczny (liczony od północy) na południku przechodzącym przez Greenwich nazywa się czasem uniwersalnym (UT). Stąd już tylko krok do pojęcia tzw. czasu strefowego — obowiązującego na określonym obszarze. Nasze zegarki (w Polsce) zimą wskazują czas południka  $15^{\circ}$  długości geograficznej wschodniej — tzw. czas zimowy — i południka  $30^{\circ}$  długości geograficznej wschodniej latem — tzw. czas letni. Oczywiście można by korzystać z tzw. czasu miejscowego. W praktyce jednak byłoby to bardzo niewygodne ze względu na konieczność ciągłej zmiany czasu podczas podróży. Aby nastawić zegarek na czas miejscowy, wystarczy do czasu strefowego dodać poprawkę wynikającą z różnicy długości geograficznej lokalnego południka strefowego i danego miejsca, wyrażoną w jednostkach czasu.

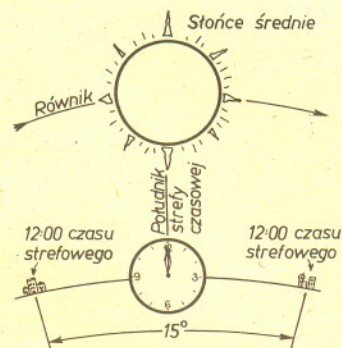
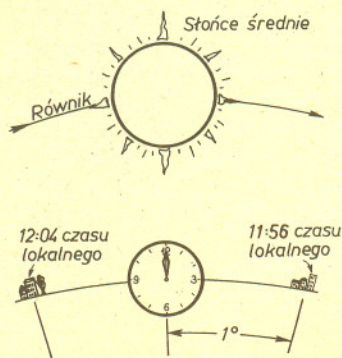
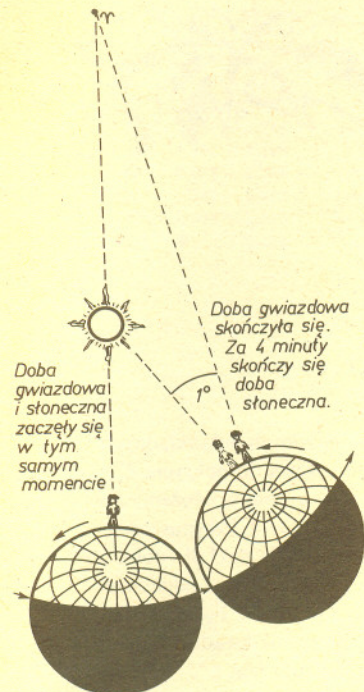
Znacznie trudniej nastawić zegarek na czas gwiazdowy. Przepis na wyznaczenie czasu gwiazdowego określa związek:

$$\text{czas gwiazdowy} = \text{średni czas słoneczny w Greenwich} + \lambda + \text{równanie czasu} - 12^h + \alpha_{\odot},$$

gdzie:  $\lambda$  — długość geograficzna,  $\alpha_{\odot}$  — rektascensja Słońca.

Rektascensja Słońca jest równa zeru w momencie równonocy wiosennej (Słońce w punkcie Barana) i  $12^h$  w momencie równonocy jesiennej (Słońce w punkcie Wagi). Znajomość dokładnego czasu uniwersalnego rozpoczęcia wiosny (lub jesieni) i wartości równania czasu wystarczą do wyznaczenia czasu gwiazdowego w tym momencie. Aby jednak zegar gwiazdowy chodził dobrze, powinien spieszyć się o  $3^m56^s$  w ciągu każdej doby słonecznej.

Wspomniane wcześniej nierównomierności w obrocie Ziemi spowodowały, że astronomowie wprowadzili jeszcze jeden rodzaj czasu. Jest to równomiernie płynący tzw. czas efemeryd. Czasu efemeryd używa się do analizy ruchu ciał niebieskich i obliczania ich położenia (obliczanie efemeryd). Aby zamienić czas efemeryd (ET) na uniwersalny (UT), należy uwzględnić poprawkę, którą wyznacza się na podstawie teorii ruchu Księżyca i dokładnych obserwacji pozycji Księżyca wśród gwiazd. Obecnie (1987 r.) różnica ET i UT wynosi  $+57^s$ .







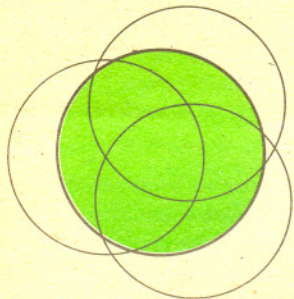
# Hipoteza Hadwigera o pokryciu brył wypukłych zmniejszonymi obrazami jednokładnymi

Dr Marek LASSAK, dr Horst MARTINI

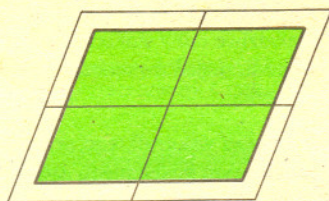
Chcemy przedstawić pewien problem geometryczny sformułowany 30 lat temu. Angażuje on wielu specjalistów z dziedziny geometrii kombinatorycznej. Dzięki prostemu sformułowaniu przyciąga także amatorów.

## Przypuszczenie Hadwigera

Koło  $K$  można pokryć sumą trzech mniejszych kół (rys. 1), podczas gdy dwa nie starczą. Dowolny równoległobok  $P$  daje się pokryć czterema swoimi zmniejszonymi obrazami jednokładnymi (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

Jednocześnie trzy takie zmniejszone równoległoboki nie wystarczają (dlaczego?). Sześcian  $S$  daje się pokryć ośmioma swoimi zmniejszonymi obrazami jednokładnymi, siedem zaś nie starczą. W 1957 roku szwajcarski geometra Hadwiger wysunął przypuszczenie [2], że dowolna wypukła bryła euklidesowej przestrzeni trójwymiarowej  $E^3$  daje się pokryć ośmioma swoimi zmniejszonymi obrazami jednokładnymi. Problem ten pozostaje nie rozwiązany mimo intensywnych badań. Hadwiger sformułował swoje przypuszczenie także dla  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej  $E^n$ . Mówi ono, że dowolna bryła wypukła w  $E^n$  powinna dać się pokryć za pomocą  $2^n$  swoich zmniejszonych jednokładnych obrazów. Prócz oczywistej odpowiedzi dla  $n = 1$  pozytywne rozwiązanie znane jest tylko dla  $n = 2$ .

Przypomnijmy, że zbiór  $A \subset E^n$  nazywamy **wypukłym**, gdy wraz z dowolną parą swoich punktów zawiera cały odcinek łączący te punkty. Jeżeli ponadto  $A$  jest domknięty, ograniczony i zawiera punkty wewnętrzne, to nazywamy go bryłą **wypukłą**. Przy  $n \geq 2$  ostatni warunek oznacza, że  $A$  nie mieści się w przestrzeni niższego wymiaru. Na przykład trójkąt jest bryłą wypukłą w  $E^2$ , ale nie jest bryłą wypukłą w  $E^3$ .

Łatwy rachunek pokazuje, że dowolne przesunięcie zmniejszonego jednokładnego obrazu wypukłej bryły  $C$  jest także zmniejszonym obrazem jednokładnym bryły  $C$ . Dlatego rozważając pokrycie bryły wypukłej  $C$  jej zmniejszonymi obrazami jednokładnymi można nie zwracać uwagi na położenie środków jednokładności. Wystarczy pokrywać  $C$  przesunięciami pewnego jej zmniejszonego obrazu.

Najmniejszą możliwą liczbę zmniejszonych jednokładnych obrazów wypukłej bryły  $C$  wystarczającą do pokrycia  $C$  oznaczamy przez  $L(C)$ . Symbol ten jest bardzo wygodny. Możemy krótko napisać, że  $L(K) = 3$ ,  $L(P) = 4$ ,  $L(S) = 8$ . Przypuszczenie Hadwigera wyraża się nierównością  $L(C) \leq 2^n$  dla dowolnej bryły wypukłej  $C \subset E^n$ . Może Czytelnik zechce odgadnąć i ewentualnie uzasadnić wartości  $L(C)$  dla  $C$  będącego czworoscianem, ostrosłupem o podstawie kwadratowej, a także kulą w przestrzeni  $E^3$ , i ogólniej, przestrzeni  $E^n$ .

## Odpowiedź dla $n = 2$

Zgodnie z terminologią przyjętą dla  $E^n$  także przy  $n = 2$  będziemy używać określenia „bryła wypukła”, mimo że słowo „bryła” niezbyt kojarzy się nam ze zbiorami płaskimi. Pokryciem płaskiej bryły wypukłej swoimi zmniejszonymi jednokładnymi obrazami zajął się jeszcze dwa lata przed Hadwigerem niemiecki matematyk Levi. Udowodnił on [5] następujące

**Twierdzenie 1.** Dla dowolnej bryły wypukłej  $C \subset E^2$  nie będącej równoległobokiem zachodzi równość  $L(C) = 3$ .

Razem z równością  $L(P) = 4$  twierdzenie to dawało dla  $n = 2$  pozytywną odpowiedź na przypuszczenie Hadwigera jeszcze przed jego opublikowaniem: każda płaska bryła wypukła daje się pokryć czterema swoimi zmniejszonymi jednokładnymi obrazami. Pojawia się tutaj naturalne pytanie o najmniejszą możliwą skalę tych czterech obrazów. Odpowiemy na nie w Twierdzeniu 2. Najpierw jednak potrzebujemy pewnej definicji oraz dwóch własności sformułowanych jako Zadanie i Lemat (może Czytelnik spróbuje rozwiązać Zadanie, dowód Lematu jest dość trudny).

Równoległoboki  $P, Q$  nazywamy **quasi-dualnymi**, jeżeli boki  $P$  są równoległe do przekątnych  $Q$  oraz jeżeli boki  $Q$  są równoległe do przekątnych  $P$ .

**Zadanie.** Niech  $P, Q$  będą równoległobokami quasi-dualnymi. Uzasadnić, że stosunki długości boków  $P$  do równoległych przekątnych  $Q$  są identyczne. Oznaczmy te stosunki przez  $p$ . Wykazać, że stosunki długości boków  $Q$  do przekątnych  $P$  są równe i wynoszą  $q = 1/2p$ .

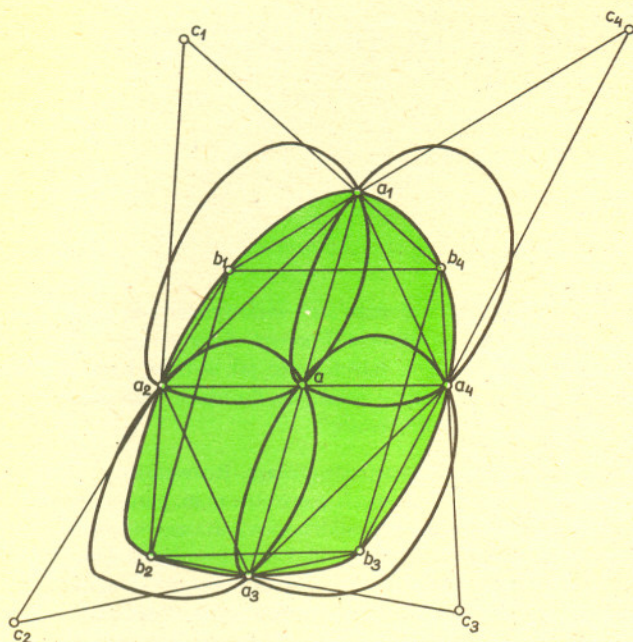
**Lemat.** W dowolną bryłę wypukłą  $C \subset E^2$  daje się wpisać para równoległoboków quasi-dualnych.

Kolej na obiecanie twierdzenie [4]:

**Twierdzenie 2.** Dowolna bryła wypukła  $C \subset E^2$  daje się pokryć czterema swoimi jednokładnymi obrazami o skali  $\sqrt{2}/2$ .

**Dowód.** Lemat pozwala znaleźć takie kolejne punkty  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4$  na brzegu  $C$ , że czworokąty  $P = a_1a_2a_3a_4$  oraz  $Q = b_1b_2b_3b_4$  są quasi-dualnymi równoległobokami (rys. 3). Przynajmniej jedna z liczb  $p, q$  występujących w Zadaniu jest nie większa niż  $\sqrt{2}/2$ . Niech np.  $p \leq \sqrt{2}/2$ .





Rys. 3

Oznaczmy przez  $a$  środek równoległoboku  $P$ . Niech  $c_1, c_2, c_3, c_4$  będą punktami wspólnymi par prostych zawierających odpowiednio odcinki:  $a_1b_4$  oraz  $a_2b_2, a_2b_1$  oraz  $a_3b_3, a_3b_2$  oraz  $a_4b_4, a_4b_3$  oraz  $a_1b_1$  (zob. rys. 3). Ponieważ  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4$  są kolejnymi punktami brzegu bryły  $C$ , więc  $C$  jest zawarte w sumie czworokątów  $aa_1c_1a_2, aa_2c_2a_3, aa_3c_3a_4, aa_4c_4a_1$ . Niech  $H_i$  będzie jednokładnością o środku  $c_i$  i skali  $p$ , gdzie  $i = 1, 2, 3, 4$ . Ponieważ  $H_1(b_4) = a_1, H_1(b_2) = a_2, a_1a \parallel b_4b_3$  oraz  $a_2a \parallel b_2b_3$ , więc  $H_1(C)$  pokrywa trójkąt  $aa_1a_2$ . Niech  $x \in C$  będzie punktem trójkąta  $aa_1a_2$ . Ponieważ  $H_1(C)$  jest wypukłe i zawiera punkty  $a_1, a_2, H_1(x)$ , więc zawiera też trójkąt  $a_1a_2H_1(x)$ . W szczególności  $x \in H_1(C)$ . Czyli  $H_1(C)$  zawiera tę część  $C$ , która leży w czworokącie  $aa_1c_1a_2$ . Analogicznie, części wspólne bryły  $C$  i czworokątów  $aa_2c_2a_3, aa_3c_3a_4, aa_4c_4a_1$  są podzbiórmi zbiorów  $H_2(C), H_3(C), H_4(C)$ . Tak więc  $C$  daje się pokryć czterema obrazami o skali  $p$ . Tym bardziej daje się więc pokryć czterema swoimi jednokładnymi obrazami o skali  $\sqrt{2}/2$ .

### Przypadek $n = 3$

Niech  $C \subset E^3$  będzie bryłą wypukłą, a  $x$  jej punktem brzegowym. Mówimy, że płaszczyzna  $\pi$  podpira bryłę  $C$  w punkcie  $x$ , jeżeli  $x \in \pi$  i jeżeli  $C$  zawiera się całkowicie w jednej z domkniętych półprzestrzeni wyznaczonych przez  $\pi$ . Jeżeli tylko jedna płaszczyzna podpira  $C$  w punkcie  $x$ , to nazywa się on **regularny**. Jeżeli takich podpierających płaszczyzn jest więcej, to  $x$  nazywamy **nieregularnym**. Na przykład wszelkie punkty krawędziowe, a w tym wierzchołki, są jedynymi nieregularnymi punktami wielościanu wypukłego. Wszystkie punkty brzegowe kuli są regularne. W 1960 roku Boltiański podał

**Twierdzenie 3.** Jeżeli bryła wypukła  $C \subset E^3$  ma na brzegu tylko punkty regularne, to  $L(C) = 4$ .

Przystępny dowód tego twierdzenia można znaleźć w popularnonaukowej książeczce [1]. Okazuje się, że podane twierdzenie daje się nieznacznie ulepszyć. Udowodniono, że brzeg  $C$  może mieć do czterech punktów nieregularnych i nadal  $L(C) = 4$ .

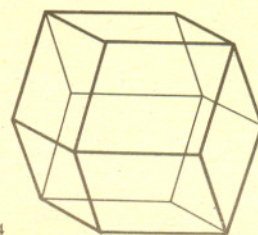
Inny kierunek badań w celu znalezienia chociażby częściowego rozwiązania polega na rozważaniu tylko środkowo-symetrycznych

brył wypukłych. Przy  $n = 3$  dwa oszacowania wspomniane w ostatniej części tego artykułu dają  $L(C) \leq 148$  oraz  $L(C) \leq 64$  dla dowolnej środkowo-symetrycznej bryły wypukłej  $C \subset E^3$ . Ostatnio udało się uzyskać [3] ostateczny wynik w tym kierunku:

**Twierdzenie 4.** Dowolna środkowo-symetryczna bryła wypukła przestrzeni  $E^3$  daje się pokryć ośmioma swoimi jednokładnymi obrazami.

Oczywiście dla równoległościanu  $K$  mamy  $L(K) = 8$ . Można przypuszczać, że dla dowolnej wypukłej bryły środkowo-symetrycznej  $C \subset E^3$  różnej od równoległościanu będzie  $L(C) \leq 6$ . Nawet przy dodatkowym założeniu, że  $C$  jest wielościanem, nie udało się uzyskać odpowiedzi. Natomiast jest ona pozytywna [6], gdy założymy środkową symetrię nie tylko dla naszego wielościanu, ale i jego ścian (zob. tw. 5). Takie wielościany zwane są **zonotopami**. Stosuje się je w krystalografii. Najprostszym przykładem zonotopu jest równoległościan. Innym przykładem jest dwunastościan rombowy (rys. 4).

**Twierdzenie 5.** Dowolny, różny od równoległoboku zonotop  $Z \subset E^3$  daje się pokryć sześcioma swoimi zmniejszonymi obrazami jednokładnymi.



Rys. 4

### Co wiadomo o pokryciu w $E^n$ ?

Przypuszczenie Hadwiger'a zostało potwierdzone tylko dla pewnych klas brył wypukłych. Klasę taką stanowią bryły wypukłe mające co najwyżej  $2^n - 1$  punktów nieregularnych na brzegu. Wynika to z twierdzenia Boltiańskiego, że  $L(C) \leq m + 1$ , jeżeli  $C$  ma na brzegu co najwyżej  $m$  punktów nieregularnych (zob. [1]). Także  $L(Z) \leq 2^n$  dla dowolnego zonotopu  $Z \subset E^n$ , co pokazali Boltiański i Sołtan. Co więcej,  $L(Z) \leq \frac{3}{4} \cdot 2^n$ , jeżeli  $Z \subset E^n$  jest zonotopem różnym od równoległościanu [6]. Dla dowolnej środkowo-symetrycznej bryły wypukłej  $C \subset E^n$  Rogers podał oszacowanie  $L(C) \leq 2^n (n \ln n + n \ln \ln n + 5n)$ , a Lewin i Pietuchin wykazali, że  $L(C) \leq (n + 1)^n$ . Dowodów tych dwóch oszacowań nie opublikowano.

#### Bibliografia

- [1] В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, *Теоремы и Задачи Комбинаторной Геометрии*, Наука, 1965.
- [2] H. Hadwiger, *Ungelöste Probleme*, Nr. 20, Elem. Math. 12 (1957), 121.
- [3] M. Lassak, *Solution of Hadwiger's covering problem for centrally symmetric convex bodies in  $E^3$* , J. London Math. Soc. 30 (1984), 501—511.
- [4] M. Lassak, *Covering a plane convex body by four homothetical copies with the smallest positive ratio*, Geom. Dedicata (w druku).
- [5] F. W. Levi, *Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebung seines offenen Kerns*, Arch. Math. 6 (1955), 369—370.
- [6] H. Martini, *Some results and problems around zonotopes*, Intuitive Geometry, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, North Holland (w druku).



# O pewnych własnościach przestrzeni euklidesowych

Piotr JĘDRZEJEWICZ



Artykuł stanowi omówienie pracy poświęconej próbie aksjomatyzacji wielowymiarowej geometrii euklidesowej. Pomysł napisania tej pracy zrodził się po lekturze *Geometrii elementarnej* A. W. Pogorielowa. W pracy ograniczamy się do zbadania takich pojęć, jak wymiar, równoległość, prostopadłość. Aby wskazać, że definicje przyjęte w pracy są naturalne, ilustrujemy uzyskane twierdzenia przykładami z trójwymiarowej geometrii euklidesowej.

Zanim wypiszemy przyjęte w pracy aksjomaty, zróbmy następującą uwagę. Rozważając trójwymiarową geometrię euklidesową przyjmuje się jako pojęcia pierwotne m.in. punkty, proste i płaszczyzny, z których każde, jako uniwersum dla geometrii euklidesowej niższego wymiaru ma analogiczne własności. Myśl tę rozszerzamy również na przypadek przestrzeni euklidesowych wyższych wymiarów. Symbolem  $E^n$  dla  $n = -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  ( $E^{-1}$  — zbiór pusty,  $E^0$  — punkt,  $E^1$  — prosta,  $E^2$  — płaszczyzna euklidesowa,  $E^3$  — trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa) będziemy oznaczać  $n$ -wymiarowe przestrzenie euklidesowe, które zamiennie nazywać będziemy  $n$ -przestrzeniami lub po prostu przestrzeniami.

Punktem wyjścia do naszych rozważań jest następujący układ aksjomatów.

- I Dla każdej przestrzeni istnieje punkt nie należący do niej.
- II Częścią wspólną dwóch przestrzeni jest przestrzeń.
- III Jeśli  $E^k = E^l$ , to  $k = l$ . Jeśli  $E^k \subset E^l$  i  $E^k \neq E^l$ , to  $k < l$ .
- IV Dla dowolnych  $n+1$  punktów nie będących równocześnie elementami tej samej  $(n-1)$ -przestrzeni istnieje dokładnie jedna przestrzeń zawierająca te punkty.
- V Dla dowolnej  $n$ -przestrzeni i każdego  $m \geq n$  istnieje  $m$ -przestrzeń zawierająca tę  $n$ -przestrzeń.
- VI Jeśli  $E^n \subset E^{n+1}$ , to  $E^{n+1}$  jest sumą  $E^n$  i dwóch, rozłącznych i rozłącznych z  $E^n$ ,  $(n+1)$ -półprzestrzeni otwartych, takich, że odcinek o końcach należących do jednej  $(n+1)$ -półprzestrzeni nie ma punktów wspólnych z  $E^n$ , a odcinek o końcach w dwóch  $(n+1)$ -półprzestrzeniach ma punkt wspólny z  $E^n$  ( $n \geq 0$ ).

Powyższy układ aksjomatów nie był badany pod kątem niezależności. W gruncie rzeczy jego cechą jest duża naturalność, zgodność z intuicją. W efekcie rozważań o charakterze wyłącznie czystej dedukcji uzyskuje się pewną liczbę twierdzeń, z których przytaczamy jedynie najważniejsze.

Uwieńczeniem pierwszej części dotyczącej własności wymiaru jest

**Twierdzenie.** Jeśli  $k$ -przestrzeń i  $l$ -przestrzeń generują  $m$ -przestrzeń, a przekrojem ich jest  $w$ -przestrzeń ( $w \geq 0$ ), to  $m+w = k+l$ .

Użyte wyżej pojęcie generowania przestrzeni przez zbiór określamy następująco.

**Definicja.** Zbiór  $X$  generuje przestrzeń, jeśli jest to  $n$ -przestrzeń zawierająca zbiór  $X$  oraz nie istnieje  $(n-1)$ -przestrzeń zawierająca ten zbiór. Przestrzeń generowaną przez zbiór  $X$  oznaczamy symbolem  $\langle X \rangle$ .

W drugiej części pracy omówione jest pojęcie równoległości przestrzeni.

**Definicja.**  $k$ -przestrzeń i  $l$ -przestrzeń, gdy  $k \leq l$ , nazywamy rozłącznie równoległymi, jeśli są rozłączne i leżą w  $(l+1)$ -przestrzeni ( $k \geq 0$ ).

**Definicja.**  $k$ -przestrzeń i  $l$ -przestrzeń nazywamy równoległymi, jeśli są rozłącznie równoległe lub jedna zawarta jest w drugiej ( $k, l \geq 0$ ). Jeśli  $E^k$  i  $E^l$  są równoległe, to piszemy  $E^k \parallel E^l$ .

Wiadomo, że do każdej płaszczyzny przez dowolny punkt można poprowadzić płaszczyznę równoległą i przy tym dokładnie jedną. W naszym przypadku zachodzi twierdzenie ogólniejsze.

**Twierdzenie.** Do każdej  $n$ -przestrzeni przez dowolny punkt można poprowadzić  $n$ -przestrzeń równoległą i przy tym dokładnie jedną ( $n \geq 0$ ).

Dalsze udowodnione w pracy własności relacji równoległości przedstawiają się następująco.

**Twierdzenie.** Jeśli  $E^k \parallel E^l$ ,  $E^l \parallel E^m$ ,  $k \leq l \leq m$ , to  $E^k \parallel E^m$ .



**Rozwiązanie zadania M 465.** Skorzystamy z wyniku poprzedniego zadania. Niech  $X_i = 1$ , gdy  $i$ -te niemowlę jest chłopcem, w przeciwnym razie  $X_i = -1$ . Mamy oszacować

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq \delta\right), \text{ gdzie } n = 700\,000, \delta = \frac{1}{100}.$$

Przypomnijmy nierówność Czebyszewa:

$$\text{jeśli } X \geq 0, \text{ to } P(X \geq \delta) \leq \frac{EX}{\delta}.$$

Zastosujemy ją do zmiennej losowej  $e^{\lambda S_n}$ , gdzie  $\lambda > 0$ .

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq \delta\right) = P(S_n \geq n\delta) =$$

$$= P(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda n\delta}) \leq \frac{Ee^{\lambda S_n}}{e^{\lambda n\delta}},$$

co na mocy poprzedniego zadania nie przekracza  $e^{\frac{1}{2}\lambda^2 n - \lambda n\delta}$ .

Funkcja  $f(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 n - \lambda n\delta$  ma minimum

dla  $\lambda = \delta$ , i ostatecznie

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq \delta\right) \leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n}.$$

Dla  $n = 700\,000$  i  $\delta = \frac{1}{100}$  badane

prawdopodobieństwo nie przekracza  $e^{-35} < 7 \cdot 10^{-16}$ . Pouczające jest porównanie

z oszacowaniem przez  $\frac{1}{560}$ , otrzymanym

za pomocą jednej ze standardowych wersji nierówności Czebyszewa.





Rozwiązanie zadania M 463. Z rozwinięcia funkcji  $e^x$  w szereg potęgowy mamy

$$\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} = 1 + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \dots + \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

zarazem

$$e^{\frac{1}{2}\lambda^2} = 1 + \frac{\lambda^2}{2! \cdot 1!} + \frac{\lambda^4}{2^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{\lambda^{2n}}{2^n \cdot n!} + \dots$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że  $(2n)! \geq 2^n \cdot n!$ .



Rozwiązanie zadania F 217. W procesie anihilacji muszą być spełnione m.in. zasady zachowania energii i pędu. Ponieważ energia kinetyczna elektronu i pozytonu jest bardzo mała w porównaniu z energią spoczynkową ( $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ ), to możemy ją zaniedbać (c jest prędkością światła). Całkowity pęd anihilujących cząstek jest równy zero. Ponieważ pęd musi być zachowany, w wyniku anihilacji nie może powstać jeden foton, pęd fotonu jest bowiem zawsze większy od zera. Zasada zachowania pędu będzie spełniona, jeśli powstaną dwa fotony o przeciwnych pędach. Zasada zachowania energii ma postać

$$2m_e c^2 = 2h\nu.$$

Zatem żaden z kwantów  $\gamma$  nie może mieć energii większej od  $m_e c^2$ . Tymczasem na mocy zasady zachowania energii dla procesu kreacji par elektronowo-pozytonowych mamy

$$E_\gamma = 2m_e c^2 + E_k,$$

gdzie  $E_k$  jest energią kinetyczną powstałych cząstek, a  $E_\gamma$  — energią kwantu wytwarzającego parę. Ponieważ  $E_\gamma$  jest mniejsze od  $m_e c^2$ , zatem kreacja pary jest niemożliwa.

Twierdzenie. Jeśli  $\langle E^k \cup E^l \rangle = E^m$ ,  $E^k \cap E^l = E^w$ ,  $w \geq 0$ ,  $E_1^k \parallel E^k$ ,  $E_1^l \parallel E^l$ ,  $E_1^k \cap E_1^l \neq \emptyset$ , to istnieją takie  $E_1^m$  i  $E_1^w$ , że  $\langle E_1^k \cup E_1^l \rangle = E_1^m$ ,  $E_1^k \cap E_1^l = E_1^w$ ,  $E_1^m \parallel E^m$  i  $E_1^w \parallel E^w$ .

W najprostszej swej nietrywialnej postaci  $k = l = 1$ ,  $m = 2$ ,  $w = 0$ , fakt ten oznacza, że jeśli mamy parę prostych przecinających się przez punkt poprowadzimy do nich równoległe, to wyznaczą one płaszczyznę równoległą. Warunek  $E_1^k \cap E_1^l \neq \emptyset$  można zastąpić przez  $E_1^k, E_1^l \subset E^m$ .

Twierdzenie. Jeśli  $E^k \parallel E^m$ ,  $E^k \parallel E^n$ ,  $E^m \cap E^n = E^l$ , to  $E^k \parallel E^l$ .

Weźmy prostą równoległą do dwóch przecinających się płaszczyzn. Twierdzenie powyższe orzeka, że prosta jest równoległa do krawędzi przecięcia tych płaszczyzn.

Twierdzenie. Jeśli przestrzeń przecina dwie przestrzenie równoległe, to te przekroje są przestrzeniami równoległymi.

Przecięcie płaszczyzną dwóch płaszczyzn równoległych tworzy dwie proste równoległe.

Twierdzenie. Dwie dowolne  $n$ -przestrzenie leżą w równoległych  $2n$ -przestrzeniach ( $n \geq 0$ ).

Dwie dowolne proste leżą w płaszczyznach równoległych.

W trzeciej części pracy przedstawione są podstawowe własności relacji prostopadłości przestrzeni.

Definicja. Prostą i  $n$ -przestrzeń nazywamy prostopadłymi, jeśli ich przekrojem jest punkt i prosta ta jest prostopadła do każdej z  $n$  prostych przechodzących przez ten punkt i takich, że ich suma generuje tę  $n$ -przestrzeń ( $n \geq 1$ ).

Definicja.  $k$ -przestrzeń i  $l$ -przestrzeń, gdy  $k \leq l$ , nazywamy ściśle prostopadłymi, jeśli się przecinają na  $(k-1)$ -przestrzeni i istnieje prosta zawarta w  $k$ -przestrzeni, prostopadła do  $l$ -przestrzeni ( $k \geq 1$ ).

Definicja.  $k$ -przestrzeń i  $l$ -przestrzeń nazywamy pękowo prostopadłymi, jeśli ich przekrojem jest punkt i każda z  $k$  prostych, które generują  $k$ -przestrzeń, jest prostopadła do każdej z  $l$  prostych, które generują  $l$ -przestrzeń ( $k, l \geq 1$ ).

Prostopadłość ścisłą oznaczamy  $\perp$ , a pękową  $\top$ .

Definicja ta jest poprawna, nie zależy od wyboru układów prostych generujących dane przestrzenie, na mocy następującego faktu.

Twierdzenie. Jeśli prosta jest prostopadła do przestrzeni, to jest prostopadła do każdej prostej zawartej w tej przestrzeni i przechodzącej przez jej punkt przecięcia z tą przestrzenią.

W przypadku trójwymiarowym stwierdzenie to oznacza, że jeśli prosta jest prostopadła do dwóch prostych zawartych w płaszczyźnie i przechodzących przez jej punkt przecięcia z tą płaszczyzną, to jest prostopadła do każdej prostej przechodzącej przez ten punkt i leżącej w tej płaszczyźnie.

A oto ważniejsze własności prostopadłości udowodnione w pracy.

Twierdzenie. Dla dowolnej przestrzeni  $E^k$  przez dowolny punkt  $A \in E^k$  można w  $E^{k+1}$  zawierającej  $E^k$  poprowadzić  $E^l$  pękowo prostopadłą do  $E^k$  i przy tym dokładnie jedną ( $k, l \geq 0$ ).

Twierdzenie. Jeśli  $E^k \perp E^l$ ,  $E_1^k \parallel E^k$ ,  $E_1^l \parallel E^l$ ,  $E_1^k \cap E_1^l \neq \emptyset$ , to  $E_1^k \perp E_1^l$ .

Twierdzenie. Jeśli  $E^k \top E^l$ ,  $E_1^k \parallel E^k$ ,  $E_1^l \parallel E^l$ ,  $E_1^k \cap E_1^l \neq \emptyset$ , to  $E_1^k \top E_1^l$ .

Twierdzenie. Jeśli  $E^k \top E^l$ ,  $E_1^k \top E^l$ ,  $E^k, E^l, E^l \subset E^{k+1}$ , to  $E^k \parallel E_1^k$ .

Interpretacja powyższych twierdzeń w trójwymiarowej geometrii euklidesowej jest oczywista. Zwróćmy uwagę, że ostatnia z tych własności nie ma swego odpowiednika w przypadku prostopadłości ścisłej (rozważmy np. płaszczyznę i dwie przecinające się płaszczyzny do niej prostopadłe).

Na zakończenie przytoczymy ostatnie (sześćdziesiąte czwarte) udowodnione w pracy twierdzenie.

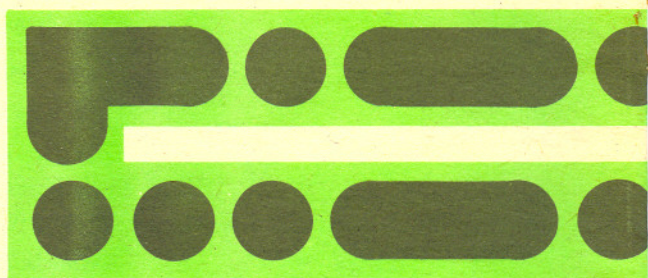
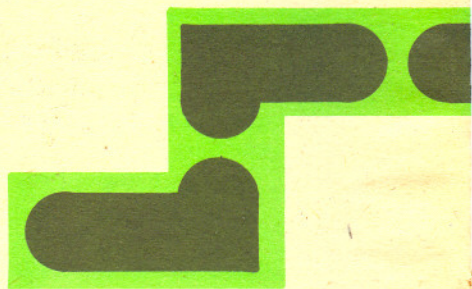
Z każdego punktu do każdej przestrzeni ( $E^n$ , gdzie  $n \geq 1$ ) nie zawierającej tego punktu można poprowadzić prostą prostopadłą i przy tym dokładnie jedną.

Fakt ten stwarza możliwość określenia odległości punktu od przestrzeni. Pojęcie to może stanowić początek badań własności metrycznych  $E^n$ .





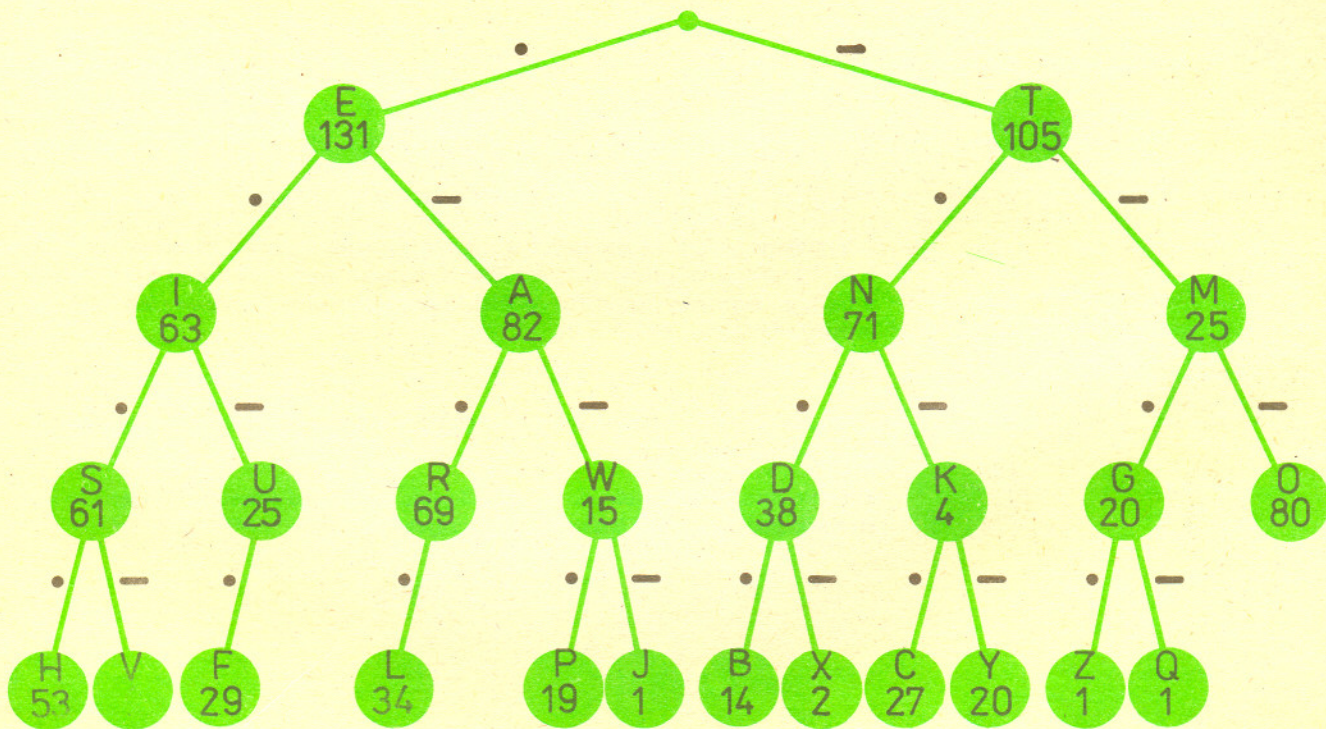
# delta mata delta



## Alfabet Morse'a

został opracowany w roku 1838 w celu przekazywania wiadomości telegrafem. Każdej literze odpowiada pewna kombinacja „kropek” i „kresek” — krótkich i długich sygnałów. Co ciekawe, literom częściej występującym w języku angielskim odpowiadają krótkie kody, a rzadziej występującym — dłuższe. E, które pojawia się najczęściej (średnio 131 razy na 1000 liter), to pojedyncza kropka. Z występuje średnio 1 raz na 1000 liter i ma kod „— — —”. Nietrudno zauważyć, że taki sposób kodowania jest oszczędny. Przekazanie wiadomości złożonej z 1000 liter wymaga średnio 2500 znaków i 1000 odstępów między kodami poszczególnych liter (są to odpowiedniej długości pauzy). Gdybyśmy natomiast chcieli kodować tekst w sposób prymitywny, dla każdej z 26 liter trzeba by było pięciu znaków (dlatego, że jest tylko  $2^4 = 16$  ciągów złożonych z czterech znaków; dopiero  $2^5 = 32$ ). Moglibyśmy tu zrezygnować z odstępów między literami, niemniej jednak 1000 liter wymagałoby 5000 znaków.

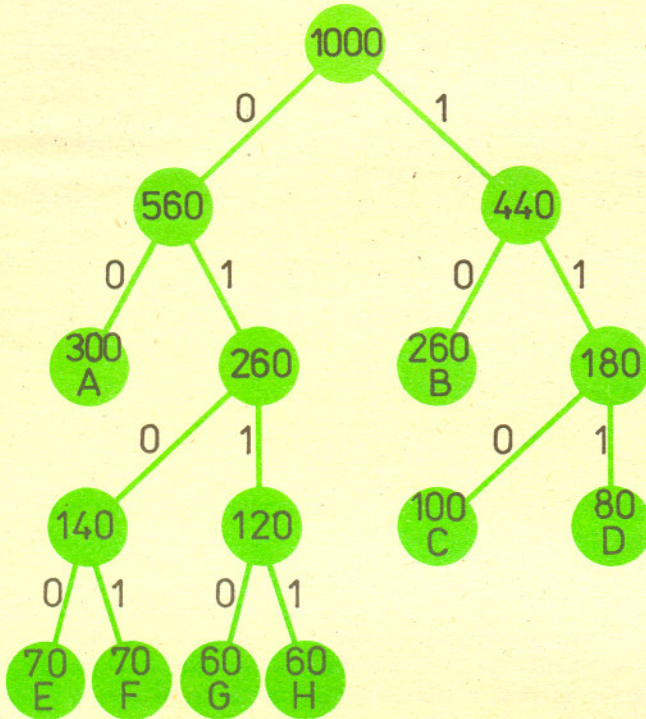
Alfabet Morse'a można przedstawić w postaci drzewa. W węzłach znajdują się litery wraz z częstościami. Krok w lewo to kropka, w prawo — kreska. Widać tu jednak pewne odchylenia od optymalnego wyboru kodów. Zastanawia niska pozycja O (— — —) i wysoka M (— —). Może wzięto pod uwagę łatwość uczenia się alfabetu? Z sześciu liter: E, T, I, A, N, M, których kody składają się z co najwyżej dwóch znaków, można pewnie ułożyć więcej słów do ewentualnych „wprawek”, niż z sześciu liter najczęściej występujących: E, T, I, A, N, O. Na dodatek litery E, T, I, A, N, M stanowią i tak prawie 50% tekstu.





Co będzie, jeśli zechcemy kodować nie pojedyncze litery, ale pary lub trójki liter czy wreszcie całe słowa? Okazuje się, że taki kod jest jeszcze bardziej oszczędny, ma jednak poważną wadę: procesowi kodowania podołałby chyba tylko komputer. Pierwotny pomysł Samuela Morse'a był właśnie taki. Kombinacje kropek i kresek oznaczały numery słów w księdze kodowej, nad którą Morse pracował w latach 1832—1837.

Przedstawimy teraz inny sposób kodowania, pochodzący od Huffmana. Dla prostoty przypuścimy, że w przekazywanym tekście występują symbole **A, B, C, D, E, F, G, H** z częstościami odpowiednio 300, 260, 100, 80, 70, 70, 60, 60 na 1000 znaków. Budujemy teraz drzewo od dołu: najpierw znajdujemy dwa znaki o najmniejszych częstościach. Łączymy je węzłem i piszemy w węźle sumę częstości. Zapominamy teraz o częstościach znaków poniżej węzła (węzłów) i powtarzamy operację, dopóki się da. (Drzewo na rysunku zostało już uporządkowane.) Na gałęziach drzewa prowadzących w lewo piszemy 0, w prawo — 1. Możemy teraz odczytać kody: **E** to 0100, **B** — 10, **A** — 00. Po chwili zastanowienia widać, że nie potrzeba tu dodatkowych znaków dla odstępów między kodami poszczególnych symboli. Taki kod jest najoszczędniejszy, jeśli chcemy kodować pojedyncze symbole.



Na zakończenie zauważmy, że kodem służącym do przekazywania wiadomości jest język naturalny. Procesy optymalizacyjne zachodzą w nim między innymi dzięki naszemu lenistwu. Oto kilka przykładów: w sklepie mówimy raczej „kilo” zamiast „kilogram”, a „sześćdziesiąt” w potocznej wymowie brzmi „szesiąt”. Przypomnijmy szkolne „panie psorze” i staropolskie „Waszmość” i „Waść”, pochodzące od „Wasza Miłość” oraz liczne zdrobnienia imion. W rezultacie słowa częściej używane są krótsze, a uczące się mówić dziecko najpierw przyswaja sobie słowa „mama”, „tata”, „kot” i tym podobne, zanim przyjdzie kolej na tasiemce, takie jak „antyimperialistyczny”, „kontrpropozycja” i „rewaloryzacja”.



Małą Deltę przygotował Rafał SZTENCEL



# Pewien kontrprzykład skonstruowany przez Stanisława Mazura

W listopadzie ubiegłego roku minęła piąta rocznica śmierci Stanisława Mazura, który był moim wielkim mistrzem. Pamiętając o tym pozwolę sobie przypomnieć jego pierwszą publikację, która stała się przyczyną długotrwałej i owocnej współpracy ze Stefanem Banachem.

Zacznę od paru definicji:

Niech  $\mathfrak{A} = (a_{n,k})_{n,k=1,2,\dots}$  będzie nieskończoną macierzą o wyrazach rzeczywistych spełniającą następujące warunki

- 1)  $a_{n,k} \geq 0$ ,  $a_{n,n} \neq 0$ ,  $a_{n,k} = 0$  dla  $k = n+1, n+2, \dots$ ,
- 2) dla każdego  $k$  mamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = 0$ ,

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{n,k} = 1.$$

Mówimy, że ciąg  $x = (t_n)_{n=1}^{\infty}$  jest limesowalny macierzą  $\mathfrak{A}$ , jeśli istnieje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{n,k} t_k$ .

Wówczas

- (i) liczbę  $A_n(x) = \sum_{k=1}^n a_{n,k} t_k$  nazywamy  $n$ -tą transformatą ciągu  $x$  wyznaczoną przez macierz  $\mathfrak{A}$ ,
- (ii) liczbę  $A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$  nazywamy uogólnioną granicą ciągu  $x$  wyznaczoną przez macierz  $\mathfrak{A}$ ,
- (iii) zbiór  $\mathfrak{A}^* = \{x = (t_k)_{k=1}^{\infty} : \text{istnieje } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)\}$  nazywamy polem metody limesowalności wyznaczonej przez macierz  $\mathfrak{A}$ .

Warunki 1, 2 i 3 zapewniają, że wszystkie ciągi zbieżne leżą w polu metody  $\mathfrak{A}$  i że granica uogólniona dla ciągu zbieżnego jest równa jego zwykłej granicy. Aby Czytelnik mógł się o tym przekonać, odsyłam go do mojego artykułu „Metoda wędrującego garbu”, zamieszczonego w ósmym numerze zeszłorocznej *Delty*.

Przykładem metody limesowalności jest metoda wyznaczona przez macierz:

$$a_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } k = 1, 2, \dots, n, \\ 0 & \text{dla } k > n. \end{cases}$$

Wówczas dla każdego ciągu  $x = (t_k)_{k=1}^{\infty}$

$$A_n(x) = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Jednym z podstawowych problemów teorii limesowalności w początkowym stadium jej rozwoju był problem sformułowany przez Hugona Steinhausa:

Niech  $\mathfrak{A}$  i  $\mathfrak{B}$  będą dwiema macierzami spełniającymi warunki 1, 2, 3. Przypuśćmy ponadto, że  $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B}^*$ . Czy dla każdego  $x \in \mathfrak{A}^*$  musi być  $A(x) = B(x)$ ? Inaczej mówiąc, czy jeśli dwie metody limesowalności mają jednakowe pole („uzbieśniają” te same ciągi), to uogólnione granice są takie same? Problem ten rozwiązał Stanisław Mazur i odpowiedź jest negatywna. Prostota podanego przez niego kontrprzykładu pozwala na przedstawienie go na łamach *Delty*.

Zamiast wypisywać macierze  $\mathfrak{A}$  i  $\mathfrak{B}$  wypiszmy od razu transformaty odpowiadające tym macierzom, prosząc jednocześnie Czytelnika, aby za autora wypełnił tę lukę

$$A_1(x) = B_1(x) = t_1,$$

$$A_n(x) = t_{n-1} + \frac{1}{n} t_n, \quad B_n(x) = \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) t_{n-1} + \frac{1}{n} t_n \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Zatem

$$(*) \quad B_n(x) = A_n(x) + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} t_{n-1} \quad \text{dla } n = 2, 3, \dots$$

Oznaczmy:

$$Q_1 = 1; \quad Q_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{k!}\right) \quad \text{dla } n = 2, 3, \dots$$

Czytelnik z łatwością udowodni, że ciąg  $Q_n$  jest zbieżny i że jego granica jest liczbą dodatnią.



Oczywiście Czytelnik bez trudu zauważy, że przedstawioną konstrukcję można uogólnić biorąc zamiast ciągu  $e_n = \frac{1}{n}$  dowolny ciąg  $e_n \rightarrow 0$ ,  $e_n > 0$ . Tak też wyglądała w oryginale praca St. Mazura. Wybrałem jednak jeden konkretny ciąg oczekując, że uważny Czytelnik bez trudu uchwyci ideę tego pomysłu i potrafi ją zaadaptować do przypadku ogólnego.



Dla  $n = 2, 3, \dots$  mamy wzory

$$\frac{(-1)^n}{n!} t_n = -t_1 - \sum_{k=2}^n A_k(x) \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} = -Q_{n-1} \sum_{k=2}^n B_k(x) \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)! Q_{k-1}}.$$

Należy teraz zauważyć, że gdy ciąg  $(\beta_k)_{k=1}^\infty$  jest zbieżny, to zbieżne są też szeregi

$$\sum_{k=2}^n \beta_k \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{i} \quad \sum_{k=2}^n \beta_k(x) \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)! Q_{k-1}};$$

z tego zaś wynika, że jeśli jeden z ciągów  $(A_k(x))_{k=1}^\infty$ ,  $(B_k(x))_{k=1}^\infty$  jest zbieżny, to zbieżny jest też ciąg  $\left( (-1)^k \frac{t_k}{k!} \right)_{k=2}^\infty$ . Ze wzoru (\*) wynika, że ciągi  $(A_k(x))_{k=1}^\infty$  i  $(B_k(x))_{k=1}^\infty$  są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne. Czyli, że  $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B}^*$ . Tymczasem dla ciągu  $x_0 = ((-1)^n n!)_{n=1}^\infty$  mamy

$$x_0 \in \mathfrak{A}^* \quad \text{i} \quad A(x_0) = 0 \quad \text{oraz} \quad B(x_0) = 1.$$

Zacytowany tutaj kontrprzykład zachwycić może swoją prostotą i elegancją. Należy też pamiętać o tym, że autorem jego był dziewiętnastoletni samouk. Stanisław Mazur opublikował powyższy kontrprzykład w jednym z czasopism niemieckich. Po pewnym czasie artykuł ten dotarł do Stefana Banacha, który polecił odszukać we Lwowie autora. W ten sposób doszło do pierwszego spotkania dwóch gigantów polskiej matematyki. Być może w kolejnym artykule napiszę, w co grywali w wolnych chwilach Stanisław Mazur i Stefan Banach.



## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 463. Udowodnić, że  $\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \leq e^{\frac{1}{2}\lambda^2}$ .

Rozwiązanie na str. 7

M 464. Niech  $(X_i)_{i=1}^\infty$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych,

$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ ,  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Pokazać, że  $E e^{\lambda S_n} \leq e^{\frac{1}{2}\lambda^2 n}$ .

Rozwiązanie na str. 12

M 465. W Polsce rodzi się rocznie 700 tysięcy niemowląt. Załóżmy dla uproszczenia rachunków, że prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi  $\frac{1}{2}$ . Oszacować możliwie najlepiej

prawdopodobieństwo tego, że liczba chłopców przewyższy liczbę dziewcząt o 7 tysięcy lub więcej.

Rozwiązanie na str. 6

Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI

F 216. W wyniku oddziaływań elektromagnetycznych cząstek o przeciwnych ładunkach elektrycznych (np. elektronu  $e^-$  i pozytonu  $e^+$  lub pionów  $\pi^+$  i  $\pi^-$ ) może powstawać związany układ tych cząstek tworząc rodzaj atomu. Opierając się na modelu atomu Bohra znaleźć:

- Wartość energii stanu podstawowego pozytonium, tj. atomu powstałego z  $e^-$  i  $e^+$ .
- Energii kwantu  $\gamma$  wypromieniowanego przy przejściu pionium, tj. układu  $\pi^-$  i  $\pi^+$ , ze stanu wzbudzonego o  $n = 2$  do stanu podstawowego ( $n = 1$ ). Oszacować rozmiary pionium i pozytonium w stanie podstawowym. Masa elektronu i pozytonu jest taka sama i wynosi  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-21}$  g; masy pionów  $\pi^+$  i  $\pi^-$  przyjąć należy za równe i wynoszące  $m_\pi \approx 273,1 \cdot m_e$ ; ładunek elektronu  $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

Rozwiązanie na str. 13

F 217. Egzotyczne atomy omówione w poprzednim zadaniu są nietrwałe. Np. pozytonium rozpada się po krótkim czasie na skutek anihilacji elektronu i pozytonu. Ile co najmniej kwantów  $\gamma$  powstanie w wyniku tego procesu? Czy energia ich będzie wystarczająca do kreacji nowej pary elektron-pozyton?

Rozwiązanie na str. 7





Dr Tomasz KWAST

Każda stabilna gwiazda zawdzięcza swoje trwanie równoważeniu się sił działających na każdy element jej objętości. Siły te są przynajmniej dwie: ciężar i parcie hydrostatyczne. Faktem jest, że parciu hydrostatycznemu pomaga ciśnienie światła, nie będziemy jednak go uwzględniać, gdyż w gwiazdach, o których będzie mowa, jest ono nieistotne. Zatem w sferycznie symetrycznej gwiazdzie element objętości o jednostkowej podstawie i wysokości  $dr$  w odległości  $r$  od środka gwiazdy waży  $GM_r \rho dr/r^2$ , gdzie  $M_r$  jest masą gwiazdy zawartą w kuli o promieniu  $r$ ,  $\rho$  — gęstością elementu,  $G$  — stałą grawitacji. Ciężar ten jest równoważony przez różnicę ciśnień  $dP$  na drodze  $dr$ . W rezultacie w każdym punkcie wewnątrz gwiazdy spełnione jest równanie (równowagi hydrostatycznej)

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{GM_r \rho}{r^2}$$

Oczywiste jest ponadto, że masa  $dM_r$  warstewki gwiazdy o grubości  $dr$  wynosi  $4\pi r^2 \rho dr$ , skąd mamy drugie równanie (ciągłości)

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

(O innych równaniach budowy wewnętrznej gwiazd pisaliśmy w *Delcie* 12/1982.)

Z tych dwóch równań można od razu wyeliminować  $M_r$ .

Mianowicie: pomnożymy pierwsze przez  $r^2/\rho$ , zróżniczkowawszy formalnie względem  $r$  i skorzystawszy z drugiego dostajemy

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho$$

Równanie to zawiera dwie funkcje niewiadome  $P(r)$  i  $\rho(r)$ , jest więc nierozwiązalne, dopóki nie określimy jeszcze jakiegoś związku między nimi. Narzucające się tu równanie stanu gazu doskonałego jest nieprzydatne, bo wprowadza następną nieznaną funkcję, temperaturę. Tak się jednak składa, że w pewnych warunkach temperatura gazu nie ma wpływu na pozostałe jego parametry. Tak jest w niskich temperaturach lub przy dużej gęstości gazu, gdy przejawia on własności kwantowe. Jest on wtedy tzw. gazem zdegenerowanym i jego równanie stanu jest algebraicznym związkiem między ciśnieniem i gęstością, zawierającym ponadto tylko stałe fizyczne. Nie będziemy tego równania stanu wyprowadzać — wydłużyłoby to znacznie artykuł — a ponadto bardziej zależy nam na ukazaniu dość niezwykłych własności gwiazd zbudowanych z materii zdegenerowanej. Przyjmijmy więc bez dowodu, że parametryczne równanie stanu elektronowego gazu zdegenerowanego ma postać:

$$\text{ciśnienie } P = A \cdot f(x), \text{ gęstość } \rho = Bx^3,$$

$$\text{gdzie } f(x) = 2x^3 \sqrt{1+x^2} - 3x \sqrt{1+x^2} + 3A \operatorname{Arsinh} x,$$

$$A = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} = 6,002 \cdot 10^{21} \text{ Pa}, \quad B = \frac{8\pi m^3 c^3 H}{3h^3} \mu_e = 9,739 \cdot 10^8 \mu_e \text{ kg/m}^3,$$

gdzie  $x$  kolejno oznacza masę elektronu,  $c$  — prędkość światła,  $h$  — stałą Plancka,  $H$  — masę jednostki masy atomowej,  $\mu_e$  jest tzw. masą atomową przypadającą na jeden elektron i dla helu wynosi dokładnie 2 (każdy atom helu ma masę atomową 4 i 2 elektrony), natomiast dla pierwiastków cięższych niewiele więcej.

Przejdźmy w ostatnim równaniu do zmiennych bezwymiarowych ( $\eta, \varphi$ ) wykonując podstawienie

$$r = \alpha \eta, \quad x = \sqrt{\beta^2 \varphi^2 - 1},$$

gdzie  $\alpha = \frac{1}{\beta \beta} \sqrt{\frac{2A}{\pi G}}$ , a sens parametru  $\beta$  wyjaśni się za chwilę. Po nieco żmudnych, ale łatwych rachunkach dostajemy równanie

$$(*) \quad \frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left( \eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \right) = - \left( \varphi^2 - \frac{1}{\beta^2} \right)^{3/2}$$

Od funkcji  $\varphi(\eta)$  będziemy żądać, by była unormowana ( $\varphi(0) = 1$ ) oraz stosownie „gładka” ( $\varphi'(0) = 0$ ). Ponieważ gęstość  $\rho$  wynosi  $B(\beta^2 \varphi^2 - 1)^{3/2}$ , a co za tym idzie — w centrum gwiazdy mamy  $\rho_c = B(\beta^2 - 1)^{3/2}$ , więc  $\beta$  jest monotoniczną funkcją gęstości centralnej i przybiera wartości z przedziału  $(1, \infty)$ .



Rozwiązanie zadania M 464. Mamy

$$Ee^{\lambda S_1} = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}. \text{ Przepuścimy, że}$$

$$Ee^{\lambda S_m} = \left( \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \right)^m. \text{ Wtedy } Ee^{\lambda S_{m+1}} =$$

$$= Ee^{\lambda(S_m + X_{m+1})} = Ee^{\lambda S_m} e^{\lambda X_{m+1}} =$$

$$= \sum_{k=-m}^m e^{\lambda k} e^{\lambda P(S_m = k, X_{m+1} = 1) +}$$

$$+ \sum_{k=-m}^m e^{\lambda k} e^{-\lambda P(S_m = k, X_{m+1} = -1)} =$$

$$= \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \cdot \sum_{k=-m}^m e^{\lambda k} P(S_m = k) =$$

$$= \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \cdot Ee^{\lambda S_m} = \left( \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \right)^{m+1}.$$

Korzystaliśmy z faktu, że zdarzenia

$\{S_m = k\}$  i  $\{X_{m+1} = j\}$  są niezależne.

Zostało wykazane, że  $Ee^{\lambda S_n} = \left( \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \right)^n$

dla każdego  $n$ . Na mocy poprzedniego zadania  $Ee^{\lambda S_n} \leq e^{\frac{1}{2} \lambda^2 n}$ .



Własności białych karłów

$\beta^2$	$\rho_c/B$	$\eta_1$	$R/\alpha\beta$	$(-\eta^2\varphi)_1$	$M/M_{max}$
1	0	$\infty$	$\infty$	0	0
2	1	3,533	2,498	0,707	0,350
5	8	3,727	1,667	1,243	0,616
10	27	4,069	1,287	1,519	0,752
20	83	4,460	0,997	1,710	0,847
50	343	4,986	0,705	1,865	0,924
100	985	5,357	0,536	1,932	0,957
$\infty$	$\infty$	6,897	0	2,018	1

Mamy więc pierwszy, bardzo ważny wniosek: gęstość centralna jednoznacznie określa strukturę zdegenerowanej gwiazdy. Bowiem w równaniu (\*) mamy tylko jeden dowolny parametr  $\beta$  („gęstość centralną”) i ma ono, przy narzuconych warunkach początkowych, rozwiązanie.

Tabela podaje niektóre parametry białych karłów w zależności od  $\beta$  (dolny wskaźnik „1” oznacza wartość danej funkcji na powierzchni gwiazdy, czyli tam, gdzie  $\varphi(\eta)$  przyjmuje po raz pierwszy wartość zero:  $\varphi(\eta_1) = 0$ ). Posługując się tą tabelką można samemu obliczyć np. masę ( $M$ ), rozmiary ( $R$ ) białego karła o zadanej gęstości centralnej. Mamy bowiem

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr = 4\pi \alpha^3 B \beta^3 \int_0^{\eta_1} d \left( -\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \right) = 4\pi \frac{1}{B^2} \left( \frac{2A}{\pi G} \right)^{3/2} \left( -\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_1$$

Ostatni czynnik nawet dla najmasywniejszych gwiazd jest skończony, zatem widzimy, że istnieje naturalne ograniczenie na masę białego karła. Dla karła helowego byłoby

$$M_{max} = 4\pi \frac{1}{B^2} \left( \frac{2A}{\pi G} \right)^{3/2} \cdot 2,018 = \frac{5,826}{\mu_e^2} M_{\odot} = 1,456 M_{\odot}$$

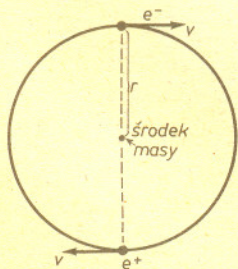
Jest to tzw. granica Chandrasekhara. Biały karzeł o takiej masie musiałby mieć rozmiary zerowe, co wynika z faktu, że  $R = \alpha\eta_1 = \text{const} \cdot \eta_1/\beta \rightarrow 0$ , przy  $\beta \rightarrow \infty$ . W ogólności widać, że im masywniejszy biały karzeł, tym jest mniejszy.

Pytanie tylko — czy aby nie zajmujemy się obiektami nieistniejącymi? Otóż nie. Nieustannie przerabiając wodór na hel każda gwiazda wytwarza w swoim centrum helowe jądro. Jeżeli masa gwiazdy jest niewielka (poniżej  $0,5 M_{\odot}$ ), to jej temperatura centralna jest zbyt niska, aby hel mógł zacząć się palić. Takie helowe jądro nie produkuje więc energii, a tylko zwiększa masę i ulega ścisaniu przez położone wyżej warstwy gwiazdy. Owo ścisanie prowadzi do degeneracji materii i tak w centrum gwiazdy powstaje nowy osobliwy obiekt — kula zdegenerowanego helu. Gdy zewnętrzne warstwy gwiazdy ulegną ewentualnie rozproszeniu (np. przechodząc przez fazę mgławicy planetarnej), helowe jądro zostaje odsłonięte i oczom obserwatora ukazuje się mała, gorąca gwiazda, świecąca już tylko dzięki stygnięciu, czyli helowy biały karzeł. Gwiazda masywniejsza jest w stanie sprężyć helowe jądro do temperatury wyższej od temperatury zapłonu helu. Wtedy w centrum jądra zaczynają tworzyć się jeszcze cięższe pierwiastki i tak dochodzi do powstania gwiazdy o wielowarstwowej strukturze z jądrem np. węglowym. Po rozproszeniu warstw zewnętrznych odsłania się biały karzeł o niejednorodnym składzie chemicznym. Zauważmy, że bez względu na skład chemiczny jego  $\mu_e \approx 2$ , wskutek czego jego maksymalna masa niewiele różni się od przytoczonej już granicy Chandrasekhara.

Dalsze losy takiej gwiazdy zależą od tego, jak bardzo jej masa jest zbliżona do granicy Chandrasekhara. Mało masywne białe karły — jak powiedzieliśmy — po prostu już tylko stygną, natomiast w masywnych może zmieniać się  $\mu_e$ . Odpowiedzialny za to jest tzw. rozpad beta plus, czyli neutronizacja materii. Mianowicie, przy ogromnej gęstości materii wewnątrz gwiazdy zachodzi „łączenie” protonów z elektronami. Liczba nukleonów pozostaje wtedy stała, lecz ubywa elektronów, a więc  $\mu_e$  rośnie. Obniża się wtedy wartość  $M_{max}$  i może się okazać, że od pewnej chwili masa karła (pozostając nie zmieniona) musiałaby być większa od dopuszczalnej przez aktualne  $\mu_e$ . Prawdopodobnie wtedy centralne części karła zapadają się, wyzwolona w ten sposób ogromna energia grawitacyjna rozrywa resztę gwiazdy i obserwujemy wybuch supernowej I typu. Pozostaje po tym, być może, gwiazda neutronowa, ale to już inna historia.



**Rozwiązanie zadania F 216.** W egzotycznym atomie cząstki krążą po orbicie kołowej wokół środka masy. Ponieważ masy cząstek są równe, więc środek masy znajduje się w jednakowej odległości  $r$  od każdej z nich.



W normalnym atomie ze względu na dużą masę jądra w porównaniu z masą elektronu środek masy praktycznie pokrywa się ze środkiem jądra. Z porównania siły odśrodkowej i przyciągania elektrostatycznego

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2r)^2}$$

Z postulatu Bohra,  $2\pi r m v = n h / 2\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , i z powyższego równania otrzymujemy

$$(1) \quad r = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m}, \quad v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{n h}$$

Całkowita energia układu pozyton-elektron wynosi

$$(2) \quad E = 2 \cdot \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2r}$$

Wstawiając (1) do (2) otrzymujemy energie poziomów energetycznych atomu

$$E_n = - \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\pi^2 m}{h^2 n^2}$$

Wstawiając za  $m$  masę elektronu otrzymujemy energię stanu podstawowego pozytonium  $E_1 = -6,8 \text{ eV}$  ( $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ). Energia wypromieniowanego kwantu  $\gamma$  przy przejściu ze stanu o  $n = 2$  do  $n = 1$  w przypadku pionium wynosi

$$E_\gamma = E_2 - E_1 = \frac{m_\pi e^4}{16\epsilon_0^2 h^2} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = 1,4 \text{ MeV}$$

Na podstawie wzoru (1) otrzymujemy promienie orbit stanu podstawowego pozytonium i pionium odpowiednio  $r_e = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ ,  $r_\pi = 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ m}$ .



## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 1987

## Zadania z matematyki nr 147, 148

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

147. Dany jest ściśle rosnący ciąg  $(x_n)$ , którego wyrazami są liczby naturalne. Niech  $z_n$  będzie najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb  $x_1, \dots, x_n$ . Czy szereg  $\sum 1/z_n$  musi być zbieżny?

148. Niech  $P$  będzie punktem wewnętrznym wielościanu wypukłego  $W$  spełniającego następujący warunek: (\*) z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie 3 krawędzie. Załóżmy, że w szkielet każdego ostrosłupa, którego podstawą jest dowolna ściana wielościanu  $W$ , a pozostałym wierzchołkiem — punkt  $P$ , można wpisać kulę. Dowieść, że w szkielet wielościanu  $W$  można wpisać kulę. (Kula wpisana w szkielet wielościanu to kula styczna do wszystkich jego krawędzi.)

Zadanie 148 przysłał pan Henryk Kornacki z Augustowa stawiając przy tym pytanie (które przekazujemy Czytelnikom poza konkursem): czy twierdzenie jest prawdziwe bez założenia (\*)?

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1986

Przypominamy treść zadań:

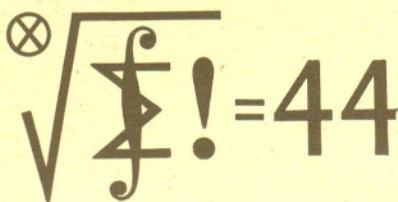
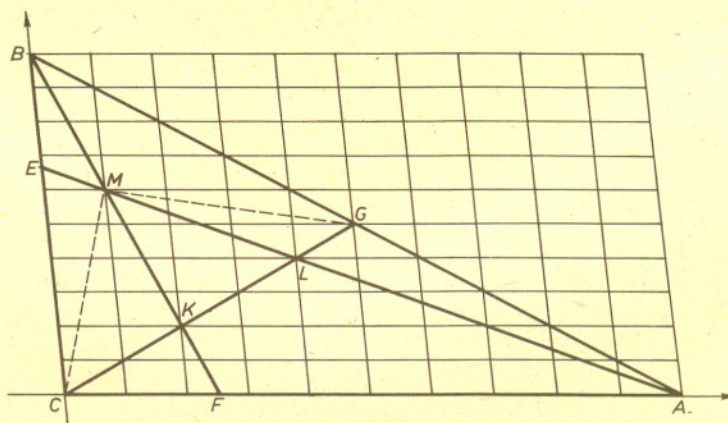
139. Dane są ciągi nieskończone liczb naturalnych  $(x_i), (y_i), (z_i)$ . Dowieść, że  $x_p \leq x_q, y_p \leq y_q, z_p \leq z_q$  dla pewnej pary numerów  $p, q$ .

140. Dany jest trójkąt  $ABC$ ;  $S_{ABC} = S$ . Niech  $E \in \overline{BC}, F \in \overline{CA}, G \in \overline{AB}, AG = GB, 2BE = EC, 3CF = FA$ ;  $prBF \cap prCG = \{K\}, prCG \cap prAE = \{L\}, prAE \cap prBF = \{M\}; S_{KLM} = S'$ . Obliczyć  $S'/S$ .

139. Jeśli ciąg o wyrazach naturalnych jest ograniczony z góry, to ma podciąg stały; jeśli jest nieograniczony z góry, to ma podciąg rosnący. W każdym przypadku ma więc podciąg niemalejący. Z ciągu  $(x_i)_{i=1}^{\infty}$  wybieramy podciąg niemalejący  $(x_{i_j})_{j=1}^{\infty}$ . Z ciągu  $(y_i)_{i=1}^{\infty}$  wybieramy podciąg niemalejący  $(y_{i_k})_{k=1}^{\infty}$ . Z ciągu  $(z_i)_{i=1}^{\infty}$  wybieramy podciąg niemalejący  $(z_{i_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ .

Przyjmując na przykład  $p = i_{j_{k_3}}, q = i_{j_{k_8}}$  dostajemy żądane nierówności.

140. Wprowadźmy na płaszczyźnie ukośnokątny układ współrzędnych tak, by  $A = (10,0), B = (0,10), C = (0,0)$ . Wówczas  $K = (2,2), L = (4,4), M = (1,6)$  (rysunek). Zachodzą proporcje  $S_{KLM} : S_{CGS} = KL : CG = 2 : 5$  oraz  $S_{CGM} : S_{CGB} = KM : KB = 1 : 2$  i wreszcie  $S_{CGB} : S_{ABC} = 1 : 2$ , skąd  $S' : S = 1 : 10$ .

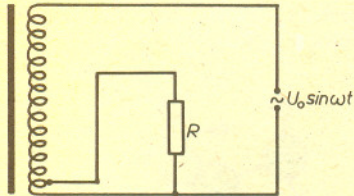


Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 135 /WT=2,27/ i 136 /WT=1,12/  
z numeru 9/1986

Marek Prauza	- Poraj	46,74pkt
Jerzy Mikuta	- Zielona G.	46,17pkt
Henryk Mikołajczak	- Wałbrzych	41,64pkt
Zbigniew Zaus	- Kraków	38,05pkt
Michał Marczak	- Radom	36,56pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	35,43pkt
Panowie Prauza i Mikuta - obaj już po raz drugi.		



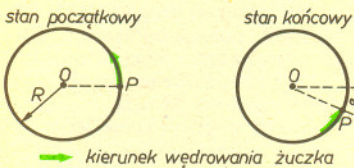
Redaguje dr Andrzej NADOLNY



Rys. 1

45. Rysunek 1 przedstawia obwód autotransformatora o bardzo dużej liczbie zwojów  $n$  ( $n > 1000$ ), w którym opornik o oporze  $R$  jest podłączony do jednego zwoju. Obliczyć natężenie prądu płynącego przez opornik przy założeniu, że prąd ten praktycznie nie wpływa na strumień pola magnetycznego w rdzeniu autotransformatora, a opór  $R$  jest znacznie większy od oporu jednego zwoju. Jakie jest przesunięcie fazowe prądu płynącego przez opornik w stosunku do prądu płynącego przez autotransformator? Jaka powinna być indukcyjność autotransformatora, aby przyjęte założenie mogło być spełnione?

46. Wyobraźmy sobie nieszczęśnika, pod którym załamał się lód na jeziorze. Mając przy sobie woreczek z piaskiem, uwiązany na cienkim sznurku, usiłuje on rzucić go tak, by dotarł jak najbliżej brzegu. Pod jakim kątem względem poziomu powinien być rzucony woreczek z daną prędkością, jeśli współczynnik tarcia woreczka o lód wynosi 0,1? Opór powietrza zaniedbujemy.



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 11/1986

Przypominamy treść zadań:

37. Jednorodna, pozioma tarcza o masie  $M$  i promieniu  $R$  może się obracać, praktycznie bez tarcia, wokół pionowej osi przechodzącej przez jej środek  $O$  (rysunek 2).

Z punktu  $P$  obwodu tej, początkowo nieruchomej, tarczy wyrusza żuczek (o rozmiarach znacznie mniejszych od  $R$ ), który wędruje dookoła tarczy po jej obwodzie i zatrzymuje się w punkcie  $P$  po dokonaniu okrążenia. Znając kąt  $\alpha$ , o jaki obróciła się tarcza w czasie tej wędrówki, wyznaczyć masę żuczka.

38. Znaleźć wypadkową pojemność nieskończonego łańcucha złożonego z jednakowych pojemności  $C$ .

37. Niech poszukiwana masa żuczka będzie  $m$ . Oznaczmy prędkość kątową żuczka względem osi tarczy w inercjalnym układzie współrzędnych przez  $\omega_m$ , a prędkość kątową tarczy przez  $\omega_t$  (dodatnie wartości obu prędkości odpowiadają temu samemu kierunkowi obrotów, np. zgodnemu z kierunkiem wędrówki żuczka). Względna prędkość kątową żuczka względem tarczy jest równa

$$(1) \quad \omega = \omega_m - \omega_t.$$

Ze względu na prawo zachowania momentu pędu (względem osi tarczy) mamy

$$m\omega_m R^2 + I\omega_t = 0,$$

gdzie  $I = MR^2/2$  jest momentem bezwładności tarczy względem jej osi. Wynika stąd

$$\frac{\omega_m}{\omega_t} = -\frac{M}{2m},$$

a po uwzględnieniu związku (1)

$$(2) \quad \omega = -\frac{M+2m}{2m}\omega_t.$$

Fakt obejścia przez żuczka całego obwodu tarczy zapisujemy jako

$$(3) \quad \int_0^{t_0} \omega dt = 2\pi,$$

gdzie  $t$  oznacza zmienną czasową, a  $t_0$  — czas wędrówki żuczka. Kąt, o jaki obróci się w tym czasie tarcza, wyraża się wzorem

$$(4) \quad \int_0^{t_0} \omega_t dt = -\alpha$$

(znak minus wskazuje, że tarcza obróciła się w kierunku przeciwnym do kierunku wędrówki żuczka).

$$\text{Ze wzorów (2), (3), (4) wynika } \alpha = \frac{2m}{M+2m}2\pi.$$

$$\text{Stąd wyznaczamy } m = \frac{\alpha}{2\pi - \alpha} \frac{M}{2}.$$

Uzyskany wynik nie zależy od postaci funkcji  $\omega(t)$ , czyli od tego, jak żuczek zmienia w drodze tempo marszu, a nawet od tego, czy przystaje lub chwilami się cofa.

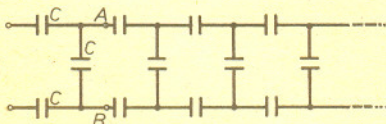
38. Niech wypadkowa pojemność łańcucha wynosi  $C_{AB}$ . Zauważmy, że dodanie do nieskończonego łańcucha jeszcze jednego „ogniwa”, jak na rysunku 3, nie zmieni jego pojemności.

Wynika stąd

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{2}{C} + \frac{1}{C+C_{AB}}.$$

Równanie to przyjmuje po przekształceniach postać równania kwadratowego o dwóch pierwiastkach, z których tylko jeden — jako nieujemny — ma sens fizyczny i wyraża poszukiwaną pojemność:

$$C_{AB} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} C \approx 0,37 C.$$



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 P"  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 33 /WT=2,40/ i 34 /WT=3,80/  
z numeru 9/1986

Tomasz Rawlik	- Gliwice	39,04pkt
Dzierżysław Lipniacki	- Lublin	36,68pkt
Aleksander Surma	- Myszków	34,50pkt
Anna Gluza	- Toruń	27,03pkt
Paweł Rogocz	- Legnica	23,63pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	20,80pkt
Piotr Bała	- Toruń	20,62pkt



Dla każdego źródła światła można określić tzw. współczynnik skuteczności wizualnej. Jest to ułamek całkowitej mocy promieniowania, jaki przypada na promieniowanie widzialne, przy czym definicja uwzględnia dodatkowo zależność czułości oka od długości fali światła.

Ciało doskonale czarne ma maksymalną skuteczność wizualną (14%) dla temperatury równej temperaturze powierzchniowej Słońca (około 6000 K). Wynika to z przystosowania oka do warunków oświetlenia panujących na Ziemi. Dla 3000 K skuteczność wizualna jest równa skuteczności żarówki, czyli około 3%. Bardzo małą skuteczność ma świeca — tylko 0,13%. Dużo lepsze są źródła światła, w których energia promieniowania powstaje nie kosztem ciepła, lecz kosztem innych rodzajów energii. Świetlówki mają skuteczność około 40%, a lampy sodowe nawet 45%.

Rewelacyjne z tego punktu widzenia są źródła chemiczne (np. fosfor, którego świecenie jest wynikiem utleniania w powietrzu). Dlatego bardzo dobrą skuteczność wizualną mają robaczki świętojańskie. Jednak absolutnym rekordzistą jest afrykański owad *Photuris pennsylvanica* o skuteczności świecenia sięgającej 90%.



Zgodnie z postanowieniami soboru nicejskiego z 325 roku Wielkanoc wypada w pierwszą niedzielę po pierwszej wiosennej pełni Księżyca. Za pierwszy dzień wiosny przyjęto 21 marca. Z postanowień tych wynika, że najwcześniej Wielkanoc może przypadać 22 marca, a to wówczas, gdy 21 marca wypada w sobotę i w tym dniu jest pełnia. Najpóźniej Wielkanoc obchodzimy, gdy pełnia wypada 20 marca i jest to sobota. Wówczas pierwszą pełnią wiosenną jest pełnia 18 kwietnia w niedzielę, a Wielkanoc obchodzimy w następną niedzielę, tj. 25 kwietnia. Wielkanoc może zatem przypaść w którąkolwiek niedzielę między 22 marca a 25 kwietnia.



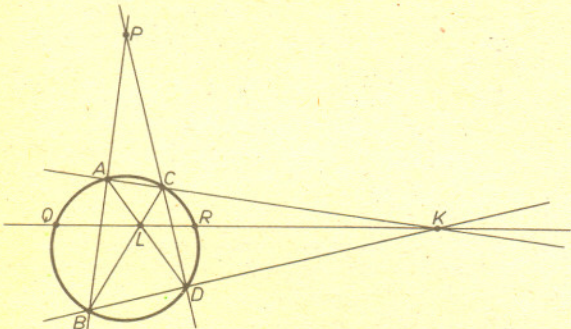
Do zapamiętania kolejnych cyfr rozwinięcia dziesiętnego  $\pi$  stosuje się różne teksty, w których liczby liter w kolejnych wyrazach są równe odpowiednim cyfrom. Ostatnio w *Mathematical Intelligencer* ukazało się krótkie opowiadanie umożliwiające zapamiętanie 402 cyfr. Jest to ponoć rekord światowy. Autorzy zachęcając do ułożenia dłuższego tekstu ostrzegają przed miejscem 601, gdzie pojawiają się trzy kolejne zera (zera są oznaczane znakami przestankowymi różnymi od kropki) oraz przed miejscem 772 — tam znajduje się sześć dziewiątek i ósemka.



Punkt orbity heliocentrycznej ciała niebieskiego (np. planety, komety), najbardziej oddalony od Słońca, w astronomii nosi nazwę *aphelium*. Wyraz ten należy wymawiać ap-helium, a nie — jak się to często zdarza — afehium, co oznacza miejsce, w którym nie ma kotów i z astronomią nie ma nic wspólnego.

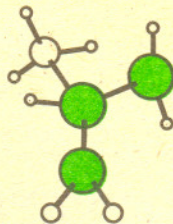


Oto konstrukcja stycznej z danego punktu  $P$  do danego okręgu wykonana samą linijką. Prowadzimy z  $P$  dwie dowolne sieczne okręgu otrzymując w przecięciu z nim odpowiednio punkty  $A$  i  $B$  oraz  $C$  i  $D$ . Przecinamy proste  $AC$  i  $BD$  oraz  $AD$  i  $BC$  otrzymując punkty  $K$  i  $L$ . W przecięciu prostej  $KL$  z okręgiem otrzymujemy punkty  $Q$  i  $R$ . Proste  $PQ$  i  $PR$  są styczne do okręgu (ale dlaczego?).

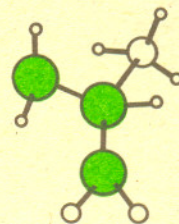


Ciekawe, że samą linijką nie można skonstruować środka danego okręgu.

Każdy z 20 aminokwasów odkrytych w organizmach żywych (z wyjątkiem glicyny) może istnieć w dwóch odmianach: prawoskrętnej i lewoskrętnej.



alanina lewoskrętna



alanina prawoskrętna

Rysunek przedstawia dwie odmiany alaniny. Obie formy mają ten sam skład chemiczny, a różnią się jedynie rozłożeniem atomów — jedna jest odbiciem zwierciadlanym drugiej. Syntetyczny aminokwas zawiera z reguły połowę odmiany prawo- i połowę lewoskrętnej. W organizmach żywych występuje wyłącznie odmiana lewoskrętna. Prawdopodobnie ta maksymalna asymetria powstała przypadkowo. Można przypuszczać, że bariery ewolucji łatwiej mogła pokonać jedna z równoważnych form niż dwie.



Pierwszym podwójnym laureatem nagrody Nobla jest Maria Skłodowska-Curie. Uzyskała ona nagrodę w dziedzinie fizyki w 1903 roku i w dziedzinie chemii w 1911 roku. Oprócz niej jest jeszcze trzech podwójnych laureatów: Linus Carl Pauling (1954 — chemia, 1962 — pokój), John Bardeen (1956 i 1972 — fizyka) i Frederick Sanger (1958 i 1980 — chemia). Nikt nie uzyskał trzykrotnie nagrody Nobla, mimo to jest trzykrotny laureat — Międzynarodowy Czerwony Krzyż (1917, 1944, 1963).



Weźmy na płaszczyźnie  $\frac{1}{2}n(n+3)$  punktów, z których żadne trzy

nie leżą na jednej prostej i spróbujmy poprowadzić przez nie krzywą opisaną równaniem  $W(x, y) = 0$ , gdzie  $W$  jest wielomianem stopnia  $n$ . Okazuje się, że zawsze da się to zrobić, a gdy  $n$  jest większe od dwóch — nawet na wiele sposobów. Przez

$\frac{1}{2}n(n+3)+1$  punktów na ogół nie da się poprowadzić żadnej

krzywej opisanej wielomianem stopnia  $n$ . Fakt, że dla  $n > 2$  nie istnieje liczba punktów wyznaczająca jednoznacznie krzywą stopnia  $n$ , nazywa się paradoksem Cramera. Dla  $n = 2$  mamy natomiast twierdzenie Braikenridge'a — Maclaurina: przez każde pięć punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, przechodzi dokładnie jedna stożkowa (czyli elipsa lub parabola, lub hiperbola).



Kopalny uran zawiera przede wszystkim izotop o masie atomowej 238. Jedyne 0,7202% stanowią atomy uranu 235 używanego jako materiał rozszczepialny w reaktorach jądrowych. Skład izotopowy uranu jest jednakowy wszędzie na Ziemi, a także w całym Układzie Słonecznym — w skałach księżycowych i meteorytach. Procesy chemiczne, erozja i ruchy tektoniczne spowodowały, że niektóre regiony są bogate w złoża uranu, a inne ubogie. Nie ma jednak w przyrodzie procesów, które mogłyby rozdzielać izotopy. Dlatego, gdy zauważono w jednej z fabryk paliwa jądrowego we Francji, że przetwarzany uran zawiera jedynie 0,7171% izotopu 235, rozpoczęto systematyczne badania złoża, z którego pochodziła ruda. Jak się okazało — centrum złoża, położonego w Gabonie, jest jeszcze uboższe, zawiera bowiem tylko 0,44% rozszczepialnego uranu.

Aby wyjaśnić ten niezrozumiały fakt, trzeba było założyć, że co najmniej 200 mln lat temu w erze prekambryjskiej samorzutnie „zapaliła się” w złożu reakcja łańcuchowa. Dalsze badania całkowicie potwierdziły tę hipotezę. W szczególności stwierdzono obecność wielu pierwiastków będących typowymi produktami reakcji łańcuchowej. Ich ilość odpowiada spaleniowi 6 ton uranu 235. Zatem w ciągu setek lat w tym naturalnym reaktorze wydzielili się energia równa około 15000 megawatolat. Jest to w przybliżeniu energia wyprodukowana w ciągu czterech lat przez jeden reaktor w dużej elektrowni jądrowej.

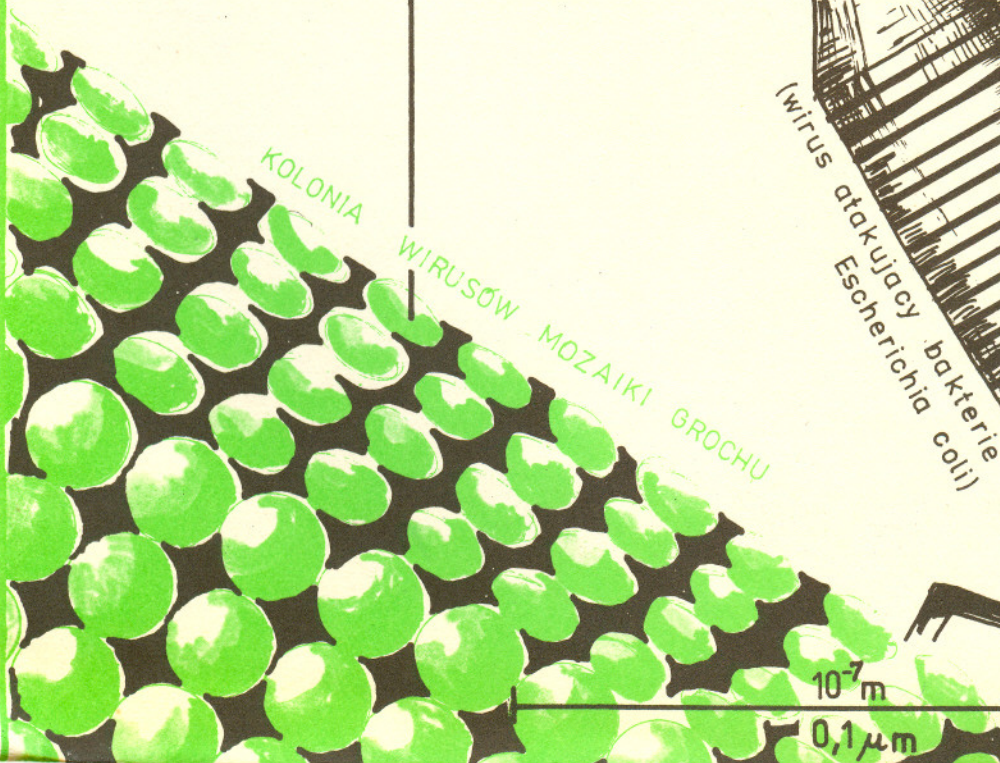


$10^6$

CZĄSTEČKA CELULOZY — długość:

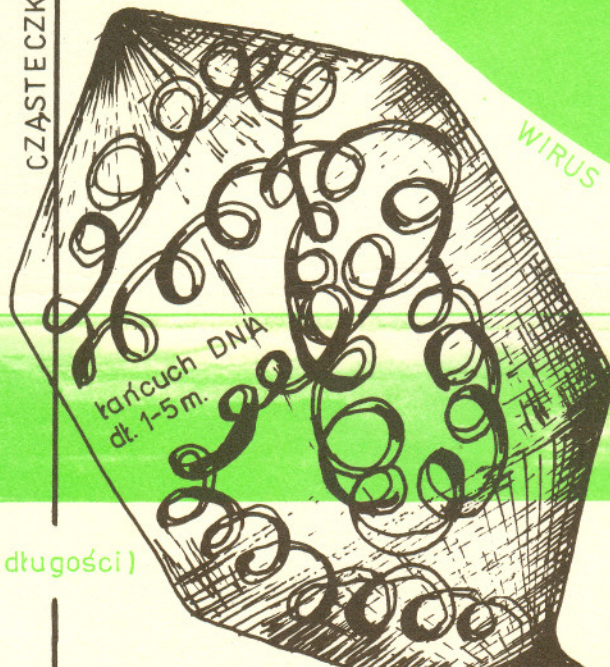
do 10 metrów

WIRUS MOZAIKI TYTONIOWEJ (połowa długości)



KOLONIA

WIRUSÓW MOZAIKI GROCHU

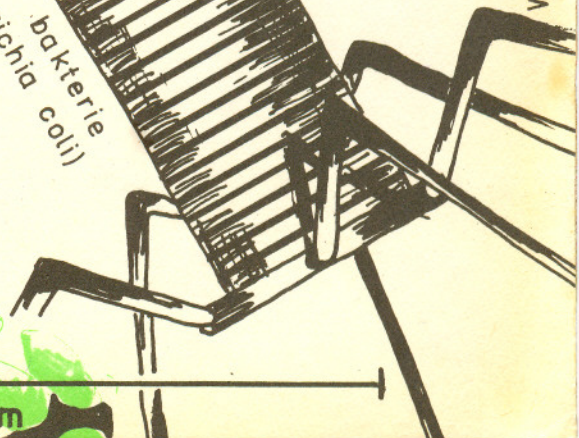


łańcuch DNA  
dł. 1-5 m.

WIRUS OSPY

● najmniejsze cząstki rejestrowane przez ultramikroskop

BAKTERIOFAG T2  
(wirus atakujący bakterie Escherichia coli)



$10^{-7}$  m

0,1  $\mu$  m

WIRUS GRYPY

WYSOKOŚĆ TEJ STRONY JEST RÓWNA POŁOWIE DŁUGOŚCI FALI ŚWIATŁA POMARAŃCZOWEGO