delta

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s $\pi = 3{,}14$

UWAGA CZYTELNICY !

Tylko PRENUMERATA
gwarantuje systematyczne otrzymywanie naszego czasopisma.

Zamówienia na prenumeratę na 1988 rok przyjmują
Oddziały RSW "Prasa Książka Ruch"
oraz
Urzędy Pocztowe i doręczyciele na wsi,
w terminie do dnia 10 listopada 1987 r.

W kioskach "Ruchu" przyjmowane są zlecenia na odkładanie prasy do teczek.

SPIS TREŚCI

NUMERU 9(165)

W następnym numerze:
Obalamy prawa fizyki

SZANOWNI CZYTELNICY !

Informujemy, że począwszy od nr 10 ulega zmianie cena jednego egzemplarza naszego pisma, która będzie wynosić 40,- zł.

Konieczność zmiany ceny wynika ze wzrostu niezależnych od nas kosztów wydawania pisma. Składa się na to wzrost kosztów papieru, druku, oraz pozostałych kosztów jak np.: transportu, energii, telekomunikacji, czynszów itp.

Nowa cena tylko częściowo zrównoważy wzrost kosztów.

Jednocześnie informujemy, że prenumeratorzy będą otrzymywali pismo po starej cenie, aż do wygaśnięcia opłaconych okresów prenumeraty.

KRAJOWE WYDAWNICTWO CZASOPISM

„Delta"
matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch"
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. centr. 25-72-91 do 93
Biuro Reklam i Propagandy
tel. 25-56-26
Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd; 2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 4535/12/87. K-9.

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 120,— półrocznej zł 240,— rocznej zł 480,—

1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch", zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch" i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
2. dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch", opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch" opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty" na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch".
3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—

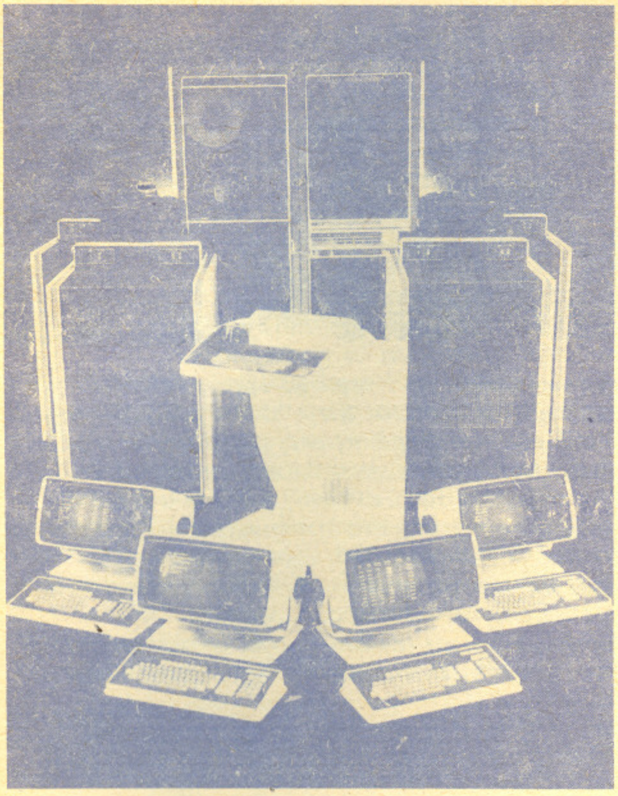
FIZYCZNE NOWINKI

ZNÓW MONOPOL MAGNETYCZNY !

Z teorii kosmologicznych wynika, że na wczesnych etapach rozwoju Wszechświata mogły powstawać cząstki posiadające "ładunek magnetyczny" - tzw. monopole magnetyczne. Przechodząc przez pętlę z nadprzewodnika monopol indukuje w niej prąd. Taki detektor jest nieczuły na przejście ładunku elektrycznego czy magnetycznego dipola. W 1982 r. B. Cabrera z Uniwersytetu w Stanford zarejestrował skok prądu w pętli o powierzchni 100 cm^2, który interpretował jako wynik przejścia monopola.

W ubiegłym roku za pomocą pętli o pow. 0,18 m^2 A. Caplin z Imperial College w Londynie prowadził podobne badania przez 8 tys. godzin. Zarejestrował jeden przypadek gwałtownej zmiany prądu.

Czy można twierdzić, że monopol został odkryty? Oczywiście nie - za mało zaobserwowano przypadków. Konstruuje się jednak znacznie większe detektory, które być może potwierdzą dotychczasowe wyniki.



W ubiegłym roku tylko 15% obrotów firm amerykańskich związanych z komputerami i informatyką pochodziło ze sprzedaży mikrokomputerów. Komputery szeregu głównego przyniosły 17%, a urządzenia zewnętrzne (też dla dużych komputerów) — 27%. Reszta to oprogramowanie i inne usługi. Największy producent, IBM, sprzedał towary i usługi za 50 mld dolarów, z tego wszystkie mikrokomputery razem wzięte — za 5,5 mld. Firma Apple zajęła dopiero (aż ?) siedemnaste miejsce na liście największych firm komputerowych, choć ma najwyższą wydajność na jednego zatrudnionego. Natomiast największą stopę zysku miał producent superkomputerów — CRAY, a drugi był producent oprogramowania Lotus dla mikrokomputerów.

Do czego może służyć komputer

Mgr Jarosław DEMINET

Komputery istnieją już przeszło czterdzieści lat, a jednak wiele osób jakby dopiero niedawno uświadomiło sobie ich istnienie. Stało się tak za sprawą mikrokomputerów. Dla wielu osób ZX Spectrum, Commodore 64 albo choćby i IBM PC są pierwszymi komputerami, z których można normalnie korzystać. Niektórzy uważają, że właśnie mikrokomputery są reprezentatywne dla wszystkich komputerów i że każdy problem, który można rozwiązać za pomocą komputera, da się rozwiązać korzystając z takiej właśnie małej i taniej maszynki. Zastanówmy się więc, jak się mają obecne mikrokomputery do reszty komputerowego świata.

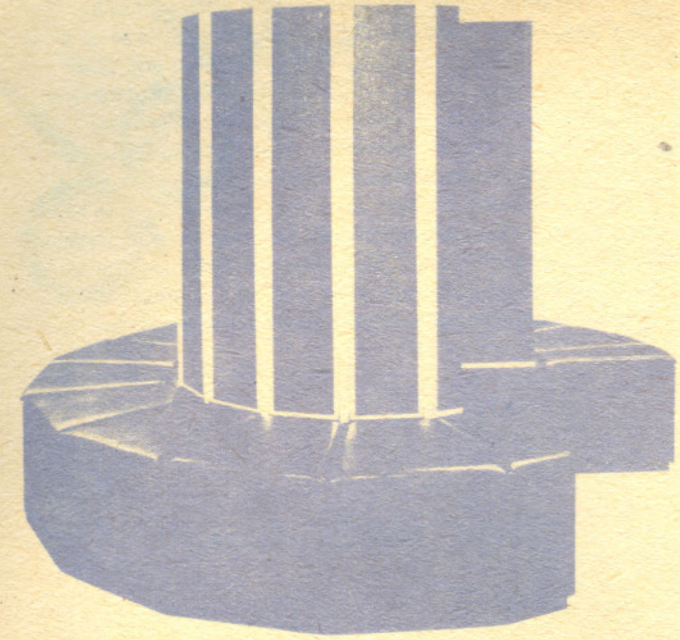
Nikogo nie dziwi, że człowiek skonstruował wiele rozmaitych urządzeń służących do pokonywania odległości. Wiadomo, że do czego innego służy hulajnoga, do czego innego rower, samochód i samolot. Same samochody zresztą także bywają rozmaite. Nawet gdyby każdy człowiek miał swój własny samochód osobowy, to i tak nie spowodowałoby to zniknięcia ciężarówek i autobusów. Czasami trzeba przewieźć pięć ton węgla albo koparkę, a „maluchami" byłoby to albo niewygodne, albo niemożliwe.

Oczywiście właściwe użycie środków transportu odnosi się do typowych użytkowników. Zdarzają się amatorzy, którzy z pasją i samozaparciem usiłują, mniej lub bardziej skutecznie, udowodnić, że każdy środek transportu nadaje się do wszystkiego: że do „malucha" może wejść tyle osób, co do autobusu; że na rowerze można dojechać z Moskwy do Paryża, a na hulajnodze z Warszawy do Pułtuska; że jednosilnikowym samolotem sportowym da się przelecieć, a deską z żaglem przepłynąć Atlantyk.

Czasami takie próby mają charakter badawczy lub eksperymentalny, częściej — czysto rozrywkowy, np. w celu umieszczenia swojego nazwiska w Księdze Guinnessa. Na szczęście żadna poważna linia żeglugowa nie próbuje otworzyć stałych połączeń Europy z Ameryką za pomocą sprzętu nadającego się do przybrzeżnych zabaw.

Nie wiedzieć czemu to, co jest oczywiste w przypadku środków transportu (a także np. magnetofonów, wiertarek i innych narzędzi i urządzeń), przestaje być oczywiste w przypadku komputerów. Wiele osób uważa, że właściwie różnice między rozmaitymi komputerami są niewielkie i że domowy komputerek mógłby doskonale spisać się w biurze, fabryce, kopalni itp. A to przecież tak, jakby proponować dowożenie pracowników do pracy na hulajnogach!

Spróbujmy porównać egzemplarze z dwóch różnych stron komputerowego widma. Mikrokomputer domowy ZX Spectrum kosztuje około stu dolarów i potrafi wykonać kilkaset operacji na liczbach rzeczywistych w ciągu sekundy. Najszybszy obecnie superkomputer ETA-10 wykonuje do kilku miliardów takich operacji na sekundę, ale i kosztuje odpowiednio więcej — przeszło 20 milionów dolarów. Stosunek szybkości jest więc jak jeden do kilku milionów, podczas gdy stosunek szybkości hulajnogi do szybkości samolotu Concorde jest co najwyżej jak jeden do kilkuset, a nawet po pomnożeniu przez liczbę pasażerów (co daje pewną miarę wydajności urządzenia) nie przekracza kilkudziesięciu tysięcy. Podobny jest stosunek wyporności deski z żaglem do nośności największych supertankowców.



Superkomputer CRAY-1
- cykl zegara 12,5 ns
- 80 mln instrukcji/s
- około 100 mln operacji zmiennopozycyjnych/s
- pamięć — 1 mln słów 64-bitowych, czyli 8 MB
- cena — 7 mln dolarów

Superkomputer ETA-10
- cykl zegara 10 ns
- 100 mln instrukcji/s
- około 1 mld operacji zmiennopozycyjnych/s
- pamięć — do 128 mln słów 64-bitowych, czyli około 1 GB
- cena — 20 mln dolarów

Komputer IMB 3033M
- cykl zegara 57 ns
- 9 mln instrukcji/s
- pamięć — 32 MB
- cena — 2,7 mln dolarów

Komputer IBM 3081
- cykl zegara 26 ns
- 10 mln instrukcji/s
- pamięć — 32 MB
- cena — 3 mln dolarów

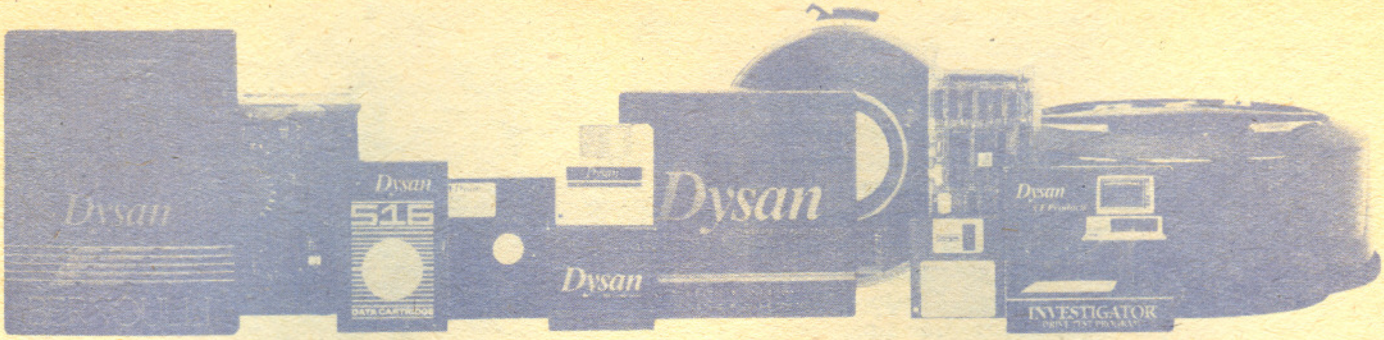
Minikomputer DEC VAX 11/760
- cykl zegara 320 ns
- 1,1 mln instrukcji/s
- pamięć — 2 MB
- cena — 90 tys. dolarów

Minikomputer DEC VAX 11/780
- cykl zegara 200 ns
- 2 mln instrukcji/s
- pamięć — 8 MB
- cena — 145 tys. dolarów

Mikrokomputery — baliśmy się napisać, bo po co urażać posiadaczy.

Jakie zatem są dzisiejsze komputery? Zacznijmy od najmniejszych. Do niedawna mówiono po prostu o komputerach osobistych. Obecnie ta klasa również rozwarstwiła się — wydziela się z niej tzw. komputery domowe, przeznaczone głównie do zabawy. Mają one zazwyczaj ośmiobitowe procesory (tzn. operacje arytmetyczne są wykonywane na ośmiobitowych bajtach; dodanie dwu liczb 16-bitowych wymaga dwóch operacji), co ogranicza pojemność ich pamięci operacyjnej do 64 kB (kilobajtów — tysięcy bajtów). Komputery te mogą współpracować ze stacjami pamięci na kasetach magnetofonowych, bardzo wolnych i zawodnych — wyklucza to profesjonalne zastosowania. Zestaw dostępnego oprogramowania obejmuje głównie i przede wszystkim gry, choć bywają także miniaturowe programy przygotowywania tekstów i obsługi baz danych. Konstruktorzy dodają też często interpreter języka Basic, zapisany na stałe w pamięci. Przewidywane zastosowania komputerów domowych nie wymagają niezawodności, trwałości ani wygody dostępu. Informacja bywa wypisywana na kolorowym ekranie o małej rozdzielczości, który przy wielogodzinnej pracy (zwłaszcza przy wypisywaniu tekstów) przyprawia o ból głowy. Klawiatura może być kiepska, w szczególności nie nadająca się do pisania na ślepo (bez patrzenia na klawisze), a tak pisze każda maszynistka. Zakłada się, że z komputera domowego korzysta się (być może po okresie początkowej fascynacji) przez kilka godzin dziennie, a po dwóch — trzech latach można go bez żalu wyrzucić. Obecnie ten rynek jest opanowany przez komputery mające jeden z procesorów Z80 (Amstrad 464, Spectrum, MSX) lub 6502 (Apple, Commodore, Atari).

Właściwe, profesjonalne czy półprofesjonalne komputery osobiste zostały zaprojektowane tak, aby mogły być używane w domu i w biurze przez wiele godzin dziennie przez kilka lat. Nieodzowne jest wyposażenie ich w stacje pamięci na dyskach elastycznych (na jednym takim dysku można zapamiętać do 300 stron maszynopisu, a dostęp do dowolnego miejsca trwa około pół sekundy), co pozwala na szybkie i wygodne ładowanie do pamięci wielu różnych programów i korzystanie z dużych zbiorów danych. Do większości komputerów można także przyłączyć stacje pamięci na dyskach sztywnych, pozwalające na zapamiętanie 10 i więcej tysięcy stron maszynopisu, z czasem dostępu rzędu 1/20 sekundy. Klawiatura przypomina klawiaturę dobrej, elektrycznej maszyny do pisania, a ekran (zazwyczaj jednobarwny, zielonkawy lub bursztynowy) nie powoduje zmęczenia nawet po całym dniu wpatrywania się weń. Komputery osobiste mają procesory od ośmiobitowych (Z80 — Amstrad 6128 i PCW; 6502 — Apple II) przez szesnastobitowe (8088/8086, 80286 — IBM PC, IBM PC/AT, ich krewni i znajomi, np. Amstrad 1512) po 32-bitowe (68000 — Apple MacIntosh, Commodore Amiga, Atari 520ST/1040ST). Pierwsza grupa zresztą stopniowo nabiera charakteru komputerów domowych, a między drugą i trzecią toczy się zajadła walka o panowanie na rynku. Pamięć wewnętrzna może mieć nawet kilka megabajtów (milionów bajtów). Większość komputerów z tej klasy może być połączona w sieć z innymi komputerami, można też dołączać do nich rozmaite urządzenia. Bezkonkurencyjne pod tym względem są komputery wzorowane na IBM PC oraz Apple II.



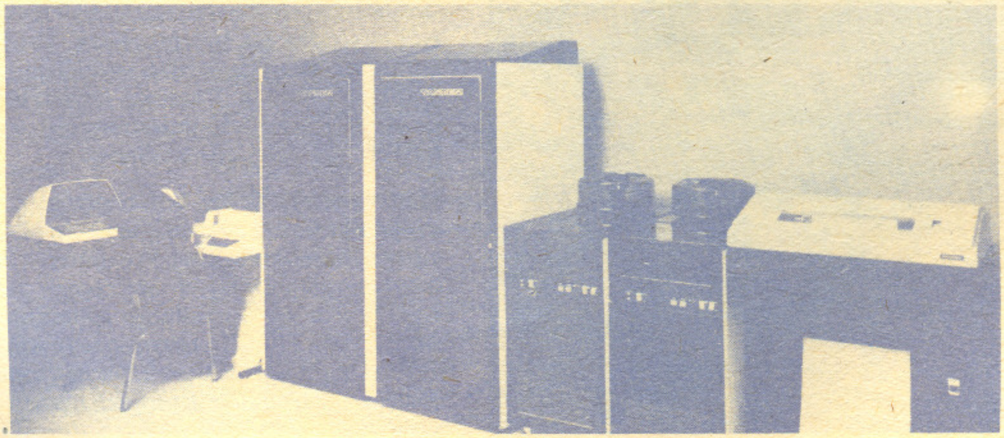
Poza standardowymi urządzeniami, dołączanymi przez zwykłe włożenie wtyczki do gniazdka, można do nich dołączać również prawie wszystkie inne, najdziwaczniejsze wynalazki, wkładając do komputera, do specjalnych gniazd, płytki z elektronicznymi układami sterującymi. Komputery te są wyposażone w prawdziwe systemy operacyjne, np. CP/M (procesor Z80) i MS DOS (8086). Istnieją dziesiątki profesjonalnych procesorów tekstów, programów obsługi baz danych, kompilatorów wszystkich chyba wymyślonych dotąd języków programowania.

Komputery osobiste, jak sama ich nazwa wskazuje, służą zazwyczaj tylko jednemu użytkownikowi, choć czasami może on równocześnie pracować z kilkoma programami. Wprawdzie istnieją protezy, pozwalające na pewną formę dostępu kilku użytkowników do komputera osobistego, ale jest to robione wbrew założeniom projektantów. Następną klasą komputerów są mikrokomputery wielodostępne (np. MicroVAX), zazwyczaj 32-bitowe, coraz częściej pracujące pod kontrolą systemu operacyjnego Unix. Mechanizmy sprzętowe pozwalają na ochronę programu jednego użytkownika przed efektami pracy innych użytkowników. Użytkownicy (na ogół jest ich kilku) mają do dyspozycji kilka megabajtów pamięci operacyjnej oraz co najmniej kilkadziesiąt megabajtów pamięci na szybkich dyskach. Każdy komputer jest zresztą dopasowywany według żądań kupującego, a oferta producentów obejmuje kilkaset rozmaitych urządzeń, modułów pamięci itp. Oprogramowanie obejmuje np. pakiety programów przeznaczonych do obsługi baz danych i często jest przykrajane do specyficznych potrzeb właściciela komputera. Tego typu sprzęt, pracujący często bez wyłączania całymi miesiącami, jest projektowany z myślą o niewielkich biurach lub oddziałach firm. W połączeniu z minikomputerami może sterować instalacjami przemysłowymi.

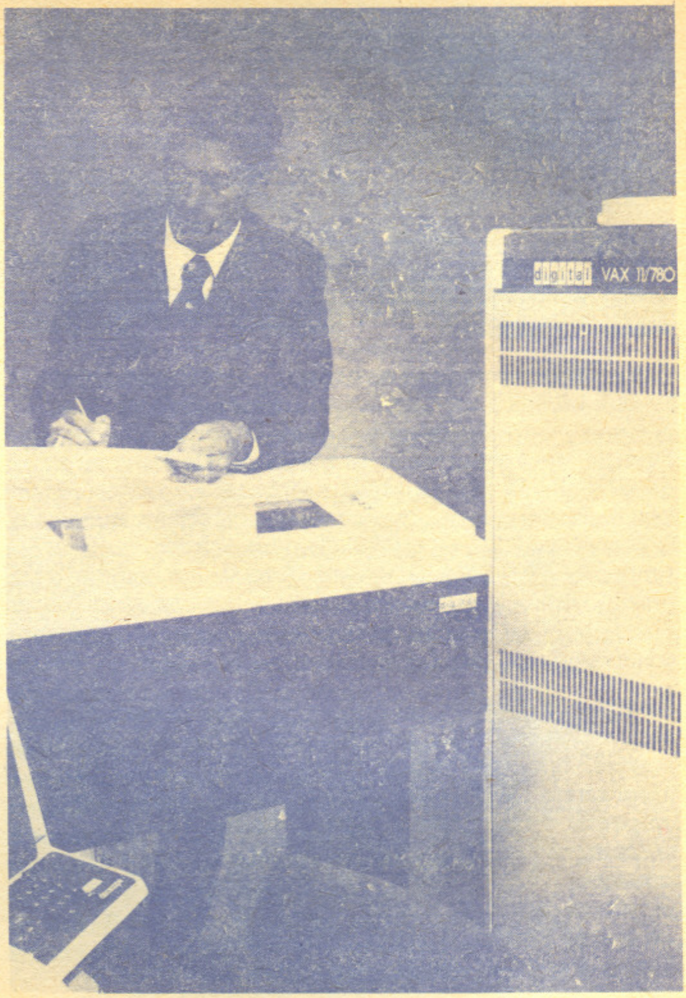
Przypuśćmy, że chcemy założyć bazę danych wszystkich mieszkańców Polski. Dla każdego zapisujemy imiona, nazwisko, datę urodzenia, numer dowodu osobistego, odsyłacz do matki i ojca, adres i rysopis (w sumie około 130 znaków po zakodowaniu). Przy 40 mln osób wymaga to 5,2 mld znaków (5,2 GB). Zajęłyby one pamięć dyskową 250 mikrokomputerów osobistych IBM PC albo 5 dużych dysków dołączonych do jednego komputera głównego szeregu.

W szesnastych amerykańskich mistrzostwach szachów komputerowych wygrał program HITECH, pracujący na minikomputerze SUN. Ciekawe, że trzecie miejsce zajął program INTELLIGENT SOFTWARE dla mikrokomputera osobistego Apple IIe! Programy pracujące na superkomputerach CRAY X-MP oraz CRAY 1M zajęły dopiero piąte i siódme miejsce.

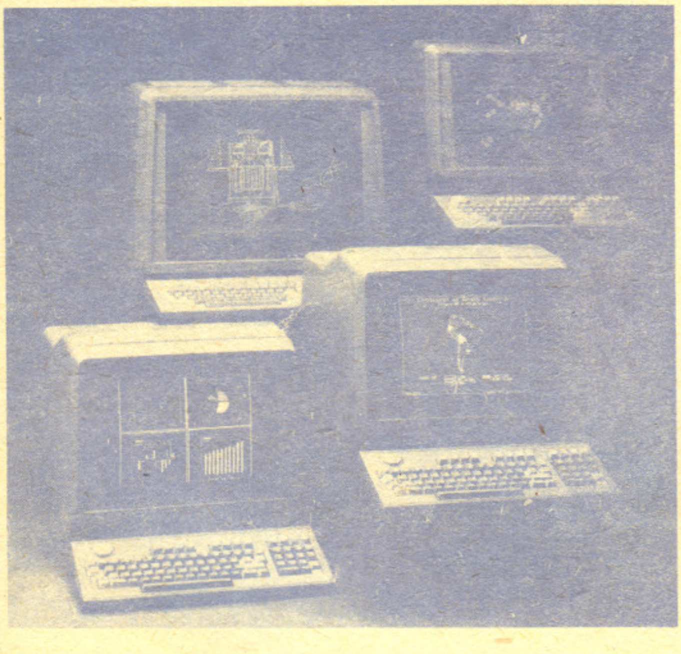
Producent minikomputera Tandem zapewnia, że dzięki dublowaniu istotnych składników sprzętu komputer zawsze będzie działać. Istotnie, żadna zainstalowana konfiguracja nie uległa nigdy pełnej awarii. Oprogramowanie potrafi wykryć błąd części komputera i zażądać sprowadzenia ekipy naprawczej.



Minikomputery (np. VAX) stanowią następny krok. Pozwalają na równoczesną pracę kilkunastu lub kilkudziesięciu użytkowników (zazwyczaj poprzez sieć telefoniczną), mają większą pamięć operacyjną, a zwłaszcza zewnętrzną (kilkaset megabajtów), przy czym oprogramowanie może korzystać z niej tak samo, jak z pamięci operacyjnej (tzw. pamięć wirtualna). Stosuje się je w instytutach naukowych, a także w przedsiębiorstwach średniej wielkości — wszędzie tam, gdzie jest potrzebna stosunkowo duża szybkość obliczeń. Często dołącza się do nich drogie, ale wydajne urządzenia pamięci (stacje taśmy magnetycznej o dużej gęstości i szybkości, bardzo szybkie drukarki, drukujące kilkadziesiąt wierszy tekstu na sekundę). Minikomputery wymagają na ogół klimatyzowanych pomieszczeń, regularnej konserwacji — jednym słowem — ośrodka obliczeniowego.

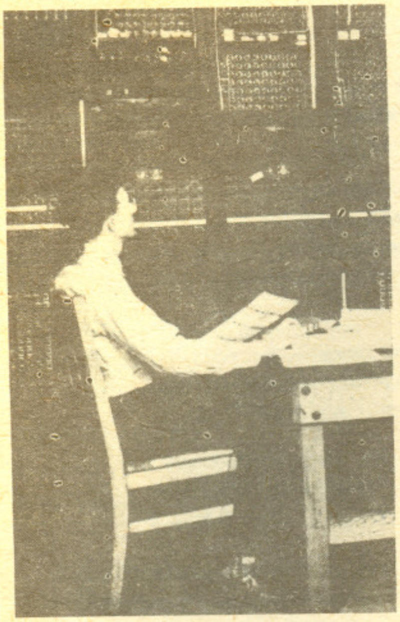


Następny krok to komputery tzw. szeregu głównego. Tu niepodzielnie od wielu lat króluje firma IBM ze swoimi komputerami serii 360, 370, 3030, 3080. To takie maszyny na ogół obsługują banki, sieci rezerwacji biletów kolejowych i lotniczych, biura ewidencji ludności, duże przedsiębiorstwa, itp. W takich komputerach nacisk jest położony na możliwość rozbudowy i komunikacji z innymi komputerami. Właściwie nie istnieje górna granica pojemności ich pamięci operacyjnej, a zwłaszcza zewnętrznej, która może sięgać dziesiątków gigabajtów (miliardów bajtów). Również liczba użytkowników może sięgać tysięcy, zwłaszcza jeśli główny komputer jest wspomagany paroma tuzinami mini- lub mikrokomputerów. Często takie wspomagające komputery zajmują się „drobnymi" zadaniami, jak np. sterowanie stacjami taśm magnetycznych, szybkimi drukarkami, monitorami graficznymi. Wyspecjalizowane oprogramowanie jest kupowane wraz ze sprzętem, a jego przygotowanie może trwać lata. Obsługą sprzętu i oprogramowania zajmuje się później zespół profesjonalistów, który może liczyć od kilku do kilkuset osób.



I wreszcie arystokratyczna elita, czyli superkomputery. Tu liczy się przede wszystkim szybkość obliczeń, do komunikacji ze światem zewnętrznym służą dołączone komputery głównego szeregu lub bardzo szybkie minikomputery. Liczba użytkowników na ogół nie jest wielka, natomiast każdy z nich jest bardzo absorbujący — programy wymagają szybkiego wykonania miliardów operacji na liczbach rzeczywistych. Na przykład przy prognozowaniu pogody należy rozwiązać układy równań opisujących stan powietrza w różnych obszarach atmosfery. Im więcej obszarów, tym dokładniejsza prognoza. Oczywiście, obliczenia muszą być wykonane szybko, jeśli prognoza ma być prognozą. Także sterowanie rakietami wymaga bardzo szybkiego podawania wyników obliczeń. Ostatnio superkomputerów używa się też w grafice komputerowej, np. przy kolorowaniu starych, czarno-białych filmów.

Mam nadzieję, że ten krótki przegląd umożliwi Czytelnikowi zrozumienie tego, że dla każdego zadania można znaleźć właściwy komputer, i że nawet milion komputerów osobistych nie zastąpi przy prognozowaniu pogody jednego porządnego superkomputera. A że są tacy, którzy potrafią rozwiązywać wielkie układy równań na ZX Spectrum? No cóż, czasami jedynym dostępnym środkiem transportu przez ocean może być mała żaglówka.



Komputer ENIAC, 1946,
University of Pennsylvania

Liczby rzeczywiste są na ogół zapamiętywane w komputerach w tzw. notacji zmiennopozycyjnej, tzn. jako $s \times k \times 2^c$, gdzie s jest znakiem ($+1$ lub -1), k jest mantysą z przedziału $[0{,}5,\ 1)$, a c — cechą (zero jest traktowane jako szczególny przypadek i jest zapisywane inaczej). Do zapamiętania k i c przeznacza się ustaloną liczbę bitów. Zwiększenie długości k zwiększa dokładność zapamiętywania (liczbę cyfr znaczących), a zwiększenie długości c — powiększenie zakresu reprezentowalnych liczb. Dodatkowo jeden bit trzeba przeznaczyć na zapamiętanie znaku całej liczby, a jeden bit cechy określa jej znak. Najkrótsze liczby zmiennopozycyjne mają 32 bity, z tego cecha ma 8 bitów, a mantysa — 23 (plus znak). Pozwala to na zapisanie liczb o wartości bezwzględnej z przedziału $(10^{-38}, 10^{38})$ z dokładnością do 7 cyfr znaczących (dziesiętnie). Na ogół taki zakres wystarcza, natomiast dokładność — nie, a więc stosuje się tzw. zapis podwójnej dokładności na 64 bitach, z 55-bitową mantysą. Zakres pozostaje bez zmian, natomiast dokładność zwiększa się do 16 cyfr dziesiętnych. Wiele obliczeń w wewnętrznych rejestrach komputera jest wykonywanych z jeszcze większą precyzją (22 cyfry). Okazuje się jednak, że w rozmaitych obliczeniach (głównie fizycznych) potrzebny jest większy zakres liczb. Niektóre komputery pozwalają więc 64-bitowe słowo podzielić inaczej — na 11-bitową cechę i 52-bitową mantysę. Zakres rośnie wówczas oszałamiająco do $(10^{-308}, 10^{308})$, natomiast dokładność maleje do 15 cyfr. Wreszcie dla fanatyków rozmiaru i dokładności istnieje format poczwórnej precyzji: 128 bitów, 15-bitowa cecha i 112-bitowa mantysa. Zakres — $(10^{-4932}, 10^{4932})$, a dokładność — 33 cyfry dziesiętne. Dla laika są to ogromne wartości, ale na pewno są profesjonaliści, którym ten zakres i dokładność nie wystarczają!

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 481. Dane są liczby $a, b > 0$. Utwórzmy ciągi (a_n) i (b_n) w następujący sposób:

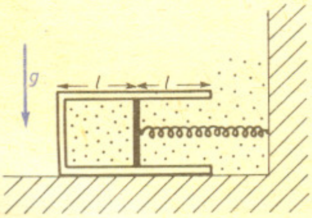
$$a_0 = a, \quad b_0 = b; \quad a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{2}{\dfrac{1}{a_{n-1}} + \dfrac{1}{b_{n-1}}} \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Udowodnić, że oba ciągi są zbieżne i znaleźć ich granice.
Rozwiązanie na str. 7

M 482. Mamy siedem odcinków o długościach zawartych w przedziale [1, 10]. Udowodnić, że wśród nich są takie trzy, które mogą być bokami pewnego trójkąta. Wykazać, że liczby siedem nie da się zastąpić przez mniejszą.
Rozwiązanie na str. 7

M 483. Wybrano losowo i niezależnie cztery punkty x_1, x_2, x_3, x_4 na okręgu. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że łuki x_1x_2 i x_3x_4 przecinają się. (Zakładamy, że jest dany wyróżniony kierunek obiegu okręgu; zgodnie z nim określamy łuk — posuwając się w tym kierunku od początku do końca.)
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI



F 228. Cylindryczny pojemnik o długości $2l$ z tłokiem o polu przekroju równym S (patrz rysunek) może poruszać się po poziomej płaszczyźnie ze współczynnikiem tarcia k. Na lewo od tłoka, który znajduje się w odległości l od krawędzi, znajduje się gaz o temperaturze T_0 i ciśnieniu p_0. Między nieruchomą ścianką a tłokiem znajduje się sprężyna o współczynniku sprężystości $\varkappa$. Ile razy trzeba zwiększyć temperaturę gazu z lewej strony tłoka, aby objętość tego gazu podwoiła się? Tarcie między tłokiem a pojemnikiem możemy zaniedbać. Masa pojemnika i tłoka jest równa m, a ciśnienie zewnętrzne równe jest p_0.
Rozwiązanie na str. 6

F 229. W poziomym, nieruchomym cylindrycznym pojemniku, który jest zamknięty tłokiem o masie m, znajduje się jeden mol gazu. Gaz ten jest podgrzewany, wskutek czego tłok porusza się jednostajnie z prędkością v. Jaką ilość ciepła dostarczono do gazu? Wewnętrzna energia jednego mola tego gazu wynosi $U = cT$. Pojemność cieplną pojemnika i tłoka oraz ciśnienie zewnętrzne możemy zaniedbać, a ciśnienie p wewnątrz pojemnika jest stałe.
Rozwiązanie na str. 6

Niewierni mężowie

Podobno na Atlantydzie panował matriarchat. Nie byłoby w tym jeszcze nic strasznego, gdyby nie to, że pewnego dnia królowa Henrietta I zebrała wszystkie swoje poddane na rynku Mamajorki — stolicy Atlantydy — i obwieściła im, co następuje:

,,Wiadomo mi, że pośród waszych mężów znajdują się mężowie wiarołomni. Wiem również, że każda żona wie o zdradach wszystkich pozostałych mężów, ale żadna żona nie wie, czy własny mąż ją zdradza. Zakazuję wam rozmawiać na te tematy między sobą. Rozkazuję natomiast, abyście zastrzeliły swojego męża o północy pierwszej nocy po tym, kiedy zorientujecie się, że was zdradza".

Trzydzieści dziewięć spokojnych nocy minęło po pamiętnym zebraniu, a o północy czterdziestej nocy rozległy się strzały. Powstają pytania: ilu mężczyzn zostało pozbawionych życia, czy wszyscy z nich byli wiarołomni i czy którykolwiek wiarołomny mąż przeżył?

Uzupełnijmy może informacje o Atlantydzie. Po pierwsze więc, wszystkie poddane były bezwzględnie posłuszne królowej. Po drugie, królowe były prawdomówne. Po trzecie, każda poddana była znakomitym logikiem i po czwarte, każdy wystrzał był powszechnie słyszany.

Mając te informacje możemy już wywnioskować, że na wyspie było czterdziestu wiarołomnych mężów i wszyscy oni zginęli owej czterdziestej nocy. Ogólnie rzecz biorąc, gdyby przy tych założeniach minęło n cichych nocy, to następnej nocy zginie wszystkich $n+1$ wiarołomnych mężów i nikt ponadto. Można to łatwo wykazać przez indukcję. My na razie sprawdzimy tylko przypadek jednego i dwóch wiarołomnych mężów. W przypadku, kiedy na wyspie znajdował się tylko jeden wiarołomny mąż, to jego żona, która, zgodnie z założeniami, nie wiedziała jeszcze przed zebraniem o żadnym wiarołomnym mężu, a od królowej dowiedziała się o istnieniu wiarołomstwa na wyspie, zastrzeliłaby swojego męża o północy od razu pierwszej nocy po tamtym zebraniu. Przy dwóch wiarołomnych mężach obie zdradzane żony wiedzą o jednym wiarołomnym mężu, a wszystkie pozostałe kobiety — o dwóch. Obie te panie kładą się spokojnie do łóżka pierwszej nocy i każda z nich spodziewa się, przy założeniu wierności swojego męża, usłyszeć strzał tej drugiej. Nie doczekawszy się go mogą obie ze spokojnym sumieniem pozbawić życia obu swych małżonków już następnej nocy.

Ogólnie rzecz biorąc każda żona powinna rozumować tak: ,,Tylko dwie liczby wiarołomnych mężów są znane wszystkim żonom. Skoro ja wiem o k wiarołomnych mężach, to albo mój chłop jest w porządku i wtedy każda ze zdradzanych żon, o których wiem, wie o $k-1$ wiarołomnych mężach i zastrzeli swojego męża k-tej nocy, albo mój mąż mnie zdradza i wtedy każda zdradzana żona wie też o k mężach, a pozostałe o $k+1$ i ja zastrzelę swojego męża $(k+1)$-ej nocy, podobnie jak i te, o których wiem, że są zdradzane".

Zauważmy, że Henrietta I mogła przy tym wszystkim oszczędzić swoim poddanym rozkoszy łamania głowy i zamiast zawiłej instrukcji ułożyć im prosty program działań: ,,jeżeli wiesz o k wiarołomnych mężach i nie nastąpią strzały k-tej nocy, to zastrzel swego męża $(k+1)$-ej nocy".

Jej następczyni, Henrietta II po paru latach próbowała powtórzyć sukces swojej matki i zorientowawszy się, że wiarołomstwo znów się rozpleniło, chciała skorzystać z jej pomysłu. Jednocześnie, pragnąc ulżyć swoim poddanym, zamiast zbierać je wszystkie na rynku, wprowadziła pocztę. Pierwszy jej list, rozesłany do wszystkich poddanek, zawiadamiał je o tym i informował jednocześnie, że każdy list wysłany na wyspie dotrze w skończonym czasie do adresata. Drugi list rozesłany przez nią, był kopią słynnego przemówienia jej matki. No cóż ... w efekcie żadne strzały nie padły i wszyscy wiarołomni mężowie grzeszyli dalej do woli. Henrietta II popełniła okropny błąd. Nie potrafiła bowiem zsynchronizować momentu otrzymania wiadomości przez swoje poddane i w rezultacie żadna z nich nie była pewna, czy brak strzałów k-tej nocy po otrzymaniu listu (gdzie k było liczbą wiarołomnych mężów) był spowodowany wiarołomstwem jej męża, czy też po prostu nieotrzymaniem listu we właściwym momencie przez pozostałe kobiety (wiarołomnych mężów było bowiem więcej niż jeden). Na szczęście, nie mając pewności, żadna z poddanych nie pociągnęła za spust ,,swojej" $(k+1)$-ej nocy.

Henrietta III próbowała naprawić błąd swojej matki. Przede wszystkim ulepszyła system pocztowy tak, że listy dochodziły albo tego samego, albo następnego dnia po wysłaniu. Poinformowała o tym swoje poddane w pierwszym liście i parę dni potem rozesłała kopię przemówienia swojej babki.

Zmarła później w opinii bardzo niesprawiedliwej, choć nieco skuteczniejszej królowej niż jej matka. Łatwo sprawdzić, że jeśli listy do zdradzanych żon dotarły w różnych terminach, to te, które otrzymały list w dniu jego wysłania, zastrzeliły swoich mężów, a te, które dostały list dnia następnego, nie zastrzeliły.

Rozwiązanie zadania F 229. Na podstawie pierwszej zasady termodynamiki ilość ciepła zamieniająca się na wzrost energii wewnętrznej gazu podczas jego ogrzania o ΔT i pracę W jest równa $Q = \Delta U + W$, gdzie $\Delta U = c\Delta T$. W naszym przypadku praca W, którą wykonuje gaz rozszerzając się, jest równa energii kinetycznej $mv^2/2 = p\Delta V$ (co wynika z zasady zachowania energii). Wtedy z równania stanu gazu doskonałego mamy $p\Delta V = \mathrm{R}\Delta T$, co daje

$$Q = c\Delta T + p\Delta V = c\Delta T + \mathrm{R}\Delta T = (c+\mathrm{R})\Delta T.$$

Otrzymujemy stąd

$$\Delta T = \frac{Q}{(c+\mathrm{R})} \text{ i } Q = \frac{Qc}{c+\mathrm{R}} + mv^2/2,$$

co pozwala napisać końcowy wynik:

$$Q = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{c}{\mathrm{R}}\right).$$

Rozwiązanie zadania F 228. Rozpatrzmy przypadki 1) $kmg > \varkappa l$ i 2) $kmg < \varkappa l$.
1) Jeśli pojemnik nie porusza się, to wtedy $(p-p_0)S = \varkappa l$ i na podstawie równania stanu gazu doskonałego $p\frac{2Sl}{T} = p_0\frac{Sl}{T_0}$. Stąd znajdujemy, że $\frac{T}{T_0} = 2(1+\varkappa l/pS)$.
2) Pojemnik pozostaje w spoczynku do momentu osiągnięcia maksymalnej wartości siły wywieranej przez gaz na tłok równoważącej siłę tarcia spoczynkowego. Znajdziemy teraz odpowiadającą temu momentowi temperaturę T'. Jeśli deformację sprężyny oznaczymy $x = kmg/\varkappa$, to na podstawie warunku równowagi i równania stanu gazu możemy napisać

$$p - p_0 = kmg/S, \quad \frac{pS(l+x)}{T'} = p_0\frac{Sl}{T_0},$$

stąd

$$T' = \left(1 + \frac{kmg}{p_0 S}\right)\left(1 + \frac{kmg}{\varkappa l}\right)T_0.$$

Od momentu rozpoczęcia się ruchu pojemnika proces zwiększania objętości zachodzi przy stałym ciśnieniu:

$$\frac{T}{T'} = \frac{V}{V'} = \frac{2Sl}{(l+x)S} = \frac{2}{1+kmg/\varkappa l}.$$

Podstawiając do tego wyrażenia otrzymaną wyżej wartość T' otrzymujemy

$$T = 2T_0\left(1 + \frac{kgm}{p_0 S}\right).$$

Co ciekawsze, gdyby Henrietta III pomyślała trochę i rozkazała wstrzymać się ze strzelaniem przez dwie noce, to osiągnęłaby rezultaty swojej babki. Gorąco polecam sprawdzić ten fakt.

Zanim przejdziemy do genialnej Margarety, córki Henrietty III, zatrzymajmy się na chwilę i zróbmy dygresję.

Załóżmy, że w systemie informatycznym działa równolegle n procesorów, każdy wykonując swój program. Załóżmy również, że każdy z n programów składa się z jednej, być może skomplikowanej pętli, której kolejne wykonania muszą być zsynchronizowane z kolejnymi wykonaniami pętli w pozostałych programach. Synchronizacja polegać ma na tym, że po wykonaniu k-tego obrotu pętli nie wolno nam zacząć wykonywać $k+1$ obrotu, dopóki nie nabierzemy pewności, że pozostałe procesory zakończyły już k-ty obrót.

Cały problem polega na tym, jak zorganizować przepływ informacji, aby ta zasada była spełniona. Utrudnieniem dodatkowym niech będzie to, że jedynym miejscem w pamięci, do którego mają dostęp wszystkie procesory, jest jeden jedyny bit, do którego mogą wszyscy zaglądać i w razie potrzeby nadawać mu wartość 0 lub 1. Załóżmy jeszcze, że istnieje wspólny „kalendarz", czyli że wszystkie procesory zaczynają działanie jednocześnie w chwili zero i działają następnie w takt „metronomu" tak, że tylko różne długości pojedynczego obrotu pętli w procesorach powodują problemy synchronizacyjne.

Ciekawe, że sytuacja nasza niezwykle przypomina ponurą rzeczywistość Atlantydy. Gdyby spytać w dowolnej chwili każdy z procesorów, który to krok pętli został ostatnio u niego zakończony, to odpowiedzi mogłyby być co najwyżej dwie: k bądź $k+1$ dla pewnego k. Można zatem zastosować coś, co bardzo przypomina niezwykłe pomysły Henrietty I. Wystartować w chwili zero, synchronizując lokalne zegary procesorów (zebranie na rynku) i założyć, że, dajmy na to, co sto taktów procesory umawiają się na kolejną sesję synchronizacyjną. Każda sesja będzie wyglądać mniej więcej tak: zerujemy bit wspólny i kolejne takty zegarów zaczynają nam odliczać na przemian „dni i noce". Jeżeli od początku sesji minie k nocy i k-tego dnia procesor, który jest po zakończeniu k-tego obrotu swojej pętli, widzi w bicie synchronizacyjnym zero, to $k+1$ nocy „strzela", czyli pakuje jedynkę do tego bitu (zauważmy tutaj, że liczba strzałów k-tej nocy nie była w ogóle istotna). Może po tym kontynuować lub zacząć wykonywanie $k+1$ obrotu, gdyż wie, że pozostałe procesory mają już zakończone co najmniej k obrotów (gdyby były takie, które by miały $k-1$, to jedynka pojawiłaby się w bicie już k-tego dnia i wtedy naszemu procesorowi nie wolno byłoby zacząć $k+1$ obrotu i musiałby czekać do następnej sesji).

Zauważmy jednak, że nasz algorytm, jakkolwiek poprawny, staje się coraz gorszy w miarę upływu czasu i wraz ze wzrostem k rośnie czas potrzebny na wykonanie sesji synchronizacyjnej. Królowa Margareta znalazła sposób, jak sobie z tym poradzić. Oto jej algorytm:

(a) każda żona, która wie o k_0 wiarołomnych mężach, gdzie $k_0 \equiv 0 \pmod 3$, strzela o północy pierwszej nocy. Jeżeli $k_0 = 0$, to strzela do męża, a jeśli $k_0 > 0$, to strzela w powietrze!
(b_0) jeżeli nie było strzałów pierwszej nocy, to każda żona wiedząca o k_1 wiarołomnych mężach, gdzie $k_1 \equiv 1 \pmod 3$, powinna zastrzelić swego męża drugiej nocy.
(b_1) jeżeli były strzały pierwszej nocy, to każda żona, wiedząca o k_2 wiarołomnych mężach, gdzie $k_2 \equiv 2 \pmod 3$, powinna zastrzelić swego męża drugiej nocy.
(c_0) jeżeli dwie pierwsze noce były ciche, to każda żona strzela do swego męża trzeciej nocy.
(c_1) jeżeli były strzały pierwszej nocy i nie było ich drugiej, to pierwszonocne strzelczynie strzelają do mężów trzeciej nocy (jeżeli jeszcze jest do kogo strzelać).

Powyższy protokół pozwala rozwiązać problem wiarołomstwa w sposób ostateczny w ciągu trzech nocy! Niezależnie od liczby żon i liczby wiarołomnych mężów. Można to łatwo sprawdzić badając wszystkie trzy przypadki $k = 0, 1, 2 \pmod 3$, gdzie k jest liczbą wiarołomnych mężów.

Dzięki temu pomysłowi Margareta przeszła do historii w chwale. Jaki morał płynie z tych wydarzeń? Po pierwsze, że równoległość stwarza czasami niespodziewane problemy. Po drugie, że synchronizacja działań jest często trudna, o czym świadczą przypadki Henrietty II i III. Po trzecie, że można synchronizować procesy, nie używając pojęcia wspólnego czasu, o czym świadczy ulepszony algorytm Henrietty III (z odczekaniem jednego dnia). Warunkiem musi być jednak ograniczenie czasu przesyłki komunikatów (w tym przypadku — komunikatu o rozpoczęciu sesji, wysyłanego przez jednostkę sterującą), w przeciwnym razie nie unikniemy niepowodzeń Henrietty II. Można wykazać, że jeśli komunikaty docierają co najwyżej po b dniach, to wstrzymanie się ze strzałem przez $(b+1)$ dni pozwoli na dobrą synchronizację.

Na koniec wreszcie, po czwarte, że jeżeli się chce przejść do historii w chwale, to nie należy zadowalać się słabymi rozwiązaniami, nawet jeśli są poprawne.

Opracował mgr Piotr CHRZĄSTOWSKI

Rozwiązanie zadania M 481. Zauważmy, że z nierówności dla średniej arytmetycznej i harmonicznej wynika, że oba ciągi są monotoniczne dla $n \geqslant 1$. Ponieważ są ograniczone, są zbieżne. Ponadto mają tę samą granicę:

$$|a_n - b_n| = \left|\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} - \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}\right| = \left|\frac{(a_{n-1}+b_{n-1})^2 - 4a_{n-1}b_{n-1}}{2(a_{n-1}+b_{n-1})}\right| = \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+b_{n-1})} \leqslant \frac{1}{2}|a_{n-1}-b_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}|a_1-b_1|.$$

Zauważmy jeszcze, że

$$a_n b_n = (a_{n-1}+b_{n-1})\frac{a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}} a_{n-1}b_{n-1}.$$

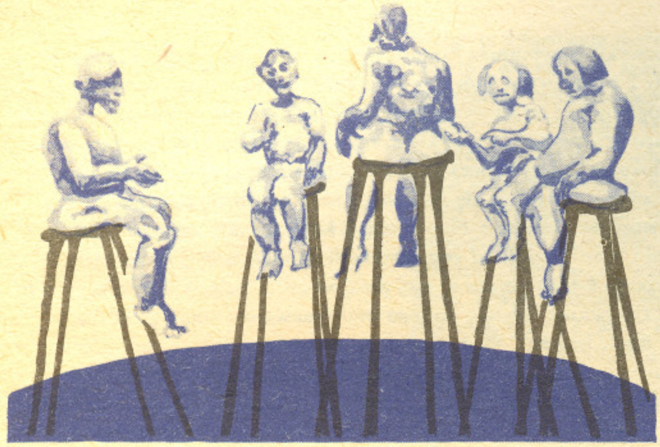
Wobec tego $a_n b_n \to g^2$, skąd $g = \sqrt{ab}$.

Rozwiązanie zadania M 482. Nietrudno zobaczyć, że spośród odcinków o długościach 1, 1, 2, 3, 5, 8 nie da się wybrać trzech, z których dałby się ułożyć trójkąt. Przypuśćmy teraz, że mamy siedem odcinków o długościach $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_7 \leqslant 10$. Rozpatrzmy odcinki o długościach $a_k \leqslant a_{k+1} \leqslant a_{k+2}$. Jeśli nie dałoby się z nich ułożyć trójkąta, to musiałoby być $a_k + a_{k+1} \leqslant a_{k+2}$. Zatem $a_1 \geqslant 1$, $a_2 \geqslant 1$, $a_3 \geqslant 2, \ldots, a_7 \geqslant 13$ — sprzeczność.

Rozwiązanie zadania M 483. Można obejść się bez rachunków (prawie). Ustalając x_1 widzimy, że dwie z sześciu możliwych permutacji pozostałych punktów dają przecięcie. Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{3}$.

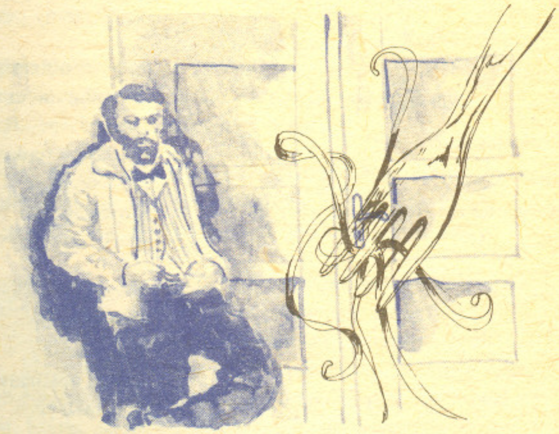
mała delta

Pięciu filozofów



W jednym z działów informatyki, zajmującym się badaniem właściwości grup programów działających równocześnie, do demonstrowania wielu problemów i rozwiązań stosuje się przykład, który podał E. Dijkstra. Przykład ten dotyczy pięciu filozofów, z których każdy na przemian myśli i je. Filozofowie mają wspólny okrągły stół, na którym stoi pięć talerzy (każdy filozof ma swój), a na środku półmisek z nieskończoną ilością spaghettii. Niestety, do jedzenia spaghetti filozof musi mieć dwa widelce, jeden w lewym, a drugi w prawym ręku, na stole zaś leży tylko pięć widelców, po jednym między dwoma sąsiednimi talerzami. Wynika z tego, że dwaj sąsiedzi zza stołu nigdy nie mogą jeść równocześnie. Należy ustalić taki protokół zachowania się przy stole, aby filozofowie mogli spokojnie jeść makaron.

Najprostszy opis postępowania (algorytm) głodnego filozofa może wyglądać następująco:
— usiądź przy stole,
— weź widelec do lewej ręki,
— weź widelec do prawej ręki,
— jedz,
— odłóż widelec z lewej ręki,
— odłóż widelec z prawej ręki,
— odejdź od stołu.
Takie postępowanie grozi jednak sytuacją, w której wszyscy filozofowie będą trzymać widelce w lewych rękach, nie mogąc wyjść poza pierwszy podany krok. Oczywiście, skończy się to śmiercią wszystkich z głodu. Taką sytuację nazywa się blokadą albo zakleszczeniem.



Przypuśćmy więc, że filozof potrafi równocześnie chwycić widelce obiema rękami i że wprowadzimy następujący algorytm:
— usiądź przy stole,
— weź oba widelce,
— jedz,
— odłóż oba widelce,
— odejdź od stołu.
To jednak grozi złośliwym sprzysiężeniem, gdy dwaj filozofowie mający wspólnego sąsiada zmówią się przeciw niemu i będą na przemian siadać za stołem. Filozof siedzący między nimi nigdy nie będzie mógł wziąć obu widelców. Nic dziwnego, że taka sytuacja nazywa się zagłodzeniem!

Najprostszą metodą uniknięcia zagłodzenia jest zatrudnienie lokaja, który będzie wpuszczał filozofa do jadalni tylko wówczas, gdy żaden z jego sąsiadów nie siedzi przy stole, przy czym głodni filozofowie będą czekać w kolejce (bez przepychania się). Algorytm głodnego filozofa wygląda wówczas następująco:
— stań w kolejce,
— gdy lokaj pozwoli, wejdź do pokoju ...
... i dalej jak poprzednio.
Oczywiście, trzeba jeszcze dać instrukcję lokajowi:
— gdy kolejny filozof chce jeść, to
  — jeśli ktoś już czeka w kolejce, to filozof musi stanąć za nim,
  — jeśli nikt nie czeka, a oba sąsiednie miejsca przy stole są wolne, to wpuść filozofa,
  — w przeciwnym razie filozof musi stanąć jako pierwszy w kolejce;
— gdy filozof wychodzi z pokoju, a pierwszy filozof w kolejce czeka tylko na jego widelec, to wpuść tego filozofa.
Sprawdźcie, że w ten sposób każdy filozof, który poczuje głód, będzie mógł go po skończonym czasie zaspokoić.

Małą Deltę przygotował Jarosław DEMINET

mgr Joanna UDALSKA

```
100 REM DATA KALENDARZOWA <---> DZIEN JULIANSKI
110 INPUT "DATA KALENDARZOWA (0) LUB DZIEN JULIANSKI (1) ";K
120 IF K=0 THEN GOTO 330
130 PRINT "DATA Z KALENDARZA JULIANSKIEGO (KJ) LUB"
140 PRINT "GREGORIANSKIEGO (KG) --> DZIEN JULIANSKI"
150 INPUT "KJ(0) LUB KG(1) ";G
160 INPUT "ROK,MIESIAC,DZIEN ";R,M,D
170 INPUT "CZAS UNIWERSALNY (GODZ,MIN,SEK) ";GO,MI,SE
180 LET FF=((60*GO+MI)*60+SE)/86400
190 LET F=FF-.5
200 LET J=-INT(7*(INT((M+9)/12)+R)/4)
210 IF G=0 THEN GOTO 260
220 LET S=SGN(M-9)
230 LET A=ABS(M-9)
240 LET J1=INT(R+S*INT(A/7))
250 LET J1=-INT((INT(J1/100)+1)*3/4)
260 LET J=J+INT(275*M/9)+D+G*J1
270 LET J=J+1721027!+2*G+367*R
280 IF F>=0 THEN GOTO 310
290 LET F=F+1
300 LET J=J-1
310 PRINT "DZIEN JULIANSKI: ";J;F
320 IF K=1 THEN GOTO 630
330 PRINT "DZIEN JULIANSKI -->DATA Z KALENDARZA"
340 PRINT "JULIANSKIEGO (KJ) LUB GREGORIANSKIEGO (KG)"
350 INPUT "KJ(0) LUB KG(1) ";G
360 INPUT "DZIEN JULIANSKI, ULAMEK ";J,F
370 LET F=F+.5
380 IF F<1 THEN GOTO 410
390 LET F=F-1
400 LET J=J+1
410 IF G=1 THEN GOTO 430
420 LET A=J: GOTO 450
430 LET A1=INT((J/36524.25)-51.12264)
440 LET A=J+1+A1-INT(A1/4)
450 LET B=A+1524
460 LET C=INT((B/365.25)-.3343)
470 LET D=INT(365.25*C)
480 LET E=INT((B-D)/30.61)
490 LET D=B-D-INT(30.61*E)+F
500 LET M=E-1
510 LET R=C-4716
520 IF E>13.5 THEN M=M-12
530 IF M<2.5 THEN R=R+1
540 LET D1=INT(D)
550 LET H=D-D1
560 LET GO=INT(24*H)
570 LET HH=24*H-GO
580 LET MI=INT(60*HH)
590 LET HHH=60*HH-MI
600 LET SE=INT(60*HHH)
610 PRINT "DATA (ROK,MIESIAC,DZIEN) ";R,M,D1
620 PRINT "CZAS UNIWERSALNY (GODZ,MIN,SEK) ";GO,MI,SE
630 END
```

Podstawową jednostką większości kalendarzy stosowanych w dziejach ludzkości jest czas, w którym dokonuje się pełna zmiana pór roku — tzw. rok zwrotnikowy. Nie jest on jednak całkowitą wielokrotnością dni, wobec czego żaden kalendarz nie może być doskonały — nie może dawać pełnej zgodności z ruchem Słońca.

Kalendarz juliański wprowadzony w Rzymie przez Juliusza Cezara w roku 46 p.n.e. opracowany został przez astronoma Sosigenesa z Aleksandrii. Był on ulepszoną wersją kalendarza egipskiego, w którym wszystkie lata były jednakowe i zawierały po 365 dni. W kalendarzu juliańskim na każde cztery lata przypadały 3 lata po 365 dni i jeden rok, tzw. rok przestępny, zawierający 366 dni. Dodatkowy dzień — 29 lutego — został dołączony do roku o numerze podzielnym przez 4. Kalendarz juliański ,,spóźniał się" w stosunku do Słońca o trzy doby w ciągu 400 lat tak, że w końcu XVI wieku różnica między kalendarzem i zjawiskami astronomicznymi przekraczała 10 dni.

W 1582 roku dokonano reformy kalendarza juliańskiego. Twórcą zreformowanego kalendarza, nazwanego na cześć papieża Grzegorza XIII gregoriańskim, był Krzysztof Clavius. Po 4 października 1582 roku nastąpił od razu 15 października, co jednorazowo zlikwidowało niezgodność kalendarza ze zjawiskami astronomicznymi. Ulepszenie na przyszłość polegało na tym, że wśród lat o numerach podzielnych przez sto przestępnymi pozostały tylko te, których numer podzielny jest przez 400. Różnica między kalendarzem gregoriańskim a rachubą lat zwrotnikowych jest tak mała, że dochodzi do jednej doby dopiero po upływie 3300 lat, co w zupełności wystarcza dla celów praktycznych.

Nie zawsze jednak wystarcza to do celów naukowych. Aby uniknąć nieporozumień związanych ze stosowaniem różnych kalendarzy oraz aby ułatwić obliczanie długich odstępów czasowych, historycy i astronomowie stosują na wielką skalę ciągłą rachubę dni — tzw. dni juliańskie. Metoda ta została opracowana w 1583 roku przez Józefa Scaligera, a po raz pierwszy zastosowana w astronomii przez Johna Herschela w XVIII wieku. Począwszy od 1 stycznia 4713 roku p.n.e. każdej dacie odpowiada kolejny numer — dzień juliański rozpoczynający się w średnie południe czasu uniwersalnego. Dzień zerowy został wybrany w tak odległej przeszłości, by przy badaniach historii dziejów ludzkości nie zaistniała potrzeba stosowania ujemnych dni. Obecnie dni juliańskie wyrażają się liczbami siedmiocyfrowymi — np. 1 stycznia 1988 roku będzie 2447162 dniem juliańskim.

Przedstawiony obok program pozwala na wzajemne przeliczanie dni juliańskich i dat. Napisany jest w języku Basic, co daje możliwość zastosowania go praktycznie na każdym mikrokomputerze. Po uruchomieniu programu użytkownik wybiera tryb pracy ($K = 0$ przeliczanie dnia juliańskiego na datę kalendarzową, $K = 1$ — odwrotnie) i rodzaj kalendarza ($G = 0$ — juliański, $G = 1$ — gregoriański). Dane wejściowe podawane są w postaci: ROK, DZIEŃ, MIESIĄC oraz GODZINA, MINUTY, SEKUNDY czasu uniwersalnego w trybie 0 lub numer i ułamek dnia juliańskiego w trybie 1. Wyniki obliczeń drukowane są na ekranie.

Należy tu zwrócić uwagę na pewną pułapkę związaną z oznaczaniem lat p.n.e. W programie wykorzystana jest tzw. rachuba astronomiczna, która różni się od ogólnie stosowanej historycznej. Według rachuby astronomicznej 1 rok p.n.e. to rok 0, a 2 r.p.n.e. to rok -1 itd. Początek rachuby dni juliańskich wypada więc w roku -4712.

Oprócz zastosowań czysto astronomicznych wykorzystując dni juliańskie możemy łatwo określić liczbę dni między różnymi momentami unikając kłopotliwego przeliczania lat przestępnych. Jak bowiem inaczej prosto obliczyć, ile dni upłynęło od np. bitwy pod Grunwaldem czy też od Twoich, Czytelniku, urodzin?

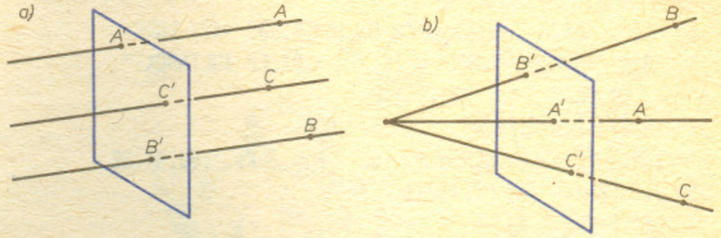
Grafika komputerowa

Dr Michał JANKOWSKI

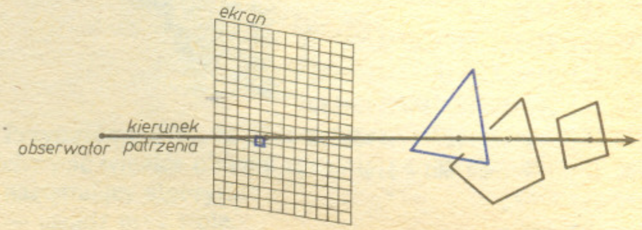
Dla większości młodych ludzi kontakt z informatyką zaczyna się od gier komputerowych. Z czasem nawet najciekawsze z nich opatrują się. Pojawia się chęć rysowania samemu. Najlepiej, żeby tworzone na ekranie monitora obrazki były możliwie realistyczne — kolorowe, uwzględniające oświetlenie i cieniowanie. Jeszcze fajniej, gdy coś się rusza (i to nie raz na godzinę, ale tak szybko, jak w normalnym filmie animowanym). Czy posiadacze Spectrum, Atari, a nawet IBM PC mają szansę osiągnąć takie wyniki?

Zacznijmy od skromnego początku. Załóżmy, że chcemy rysować (kreskami albo kolorowymi plamami) sceny przestrzenne — trójwymiarowe, zbudowane ze ścian będących wielokątami. Mogą to być np. układanki z klocków będących prostopadłościanami, graniastosłupami czy ostrosłupami. Zakładamy przy tym, że ściany nie przecinają się (mogą tylko mieć wspólne krawędzie).

Rysowaną scenę opisujemy podając współrzędne (x, y, z) wierzchołków wielokątów (= ścian), każda krawędź określona jest przez numery wierzchołków, które łączy; wreszcie ściana definiowana jest numerami uporządkowanych krawędzi. Mając taki opis musimy dla narysowania wykonać rzutowanie, tzn. odwzorować trójwymiarową scenę na płaszczyznę ekranu monitora. Zasady rzutów: równoległego i środkowego ilustrują rysunki 1a i 1b, potrzebne zaś wzory i dokładne wyjaśnienia można znaleźć np. w niedawno wydanej przez WNT książce Iana Angella *Wprowadzenie do grafiki komputerowej.*



Rys. 1

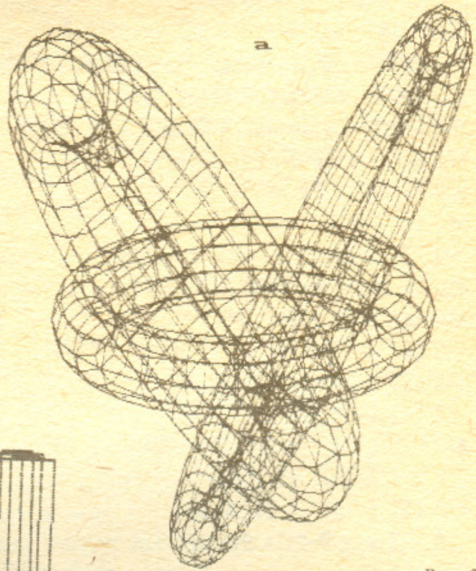


Rys. 3

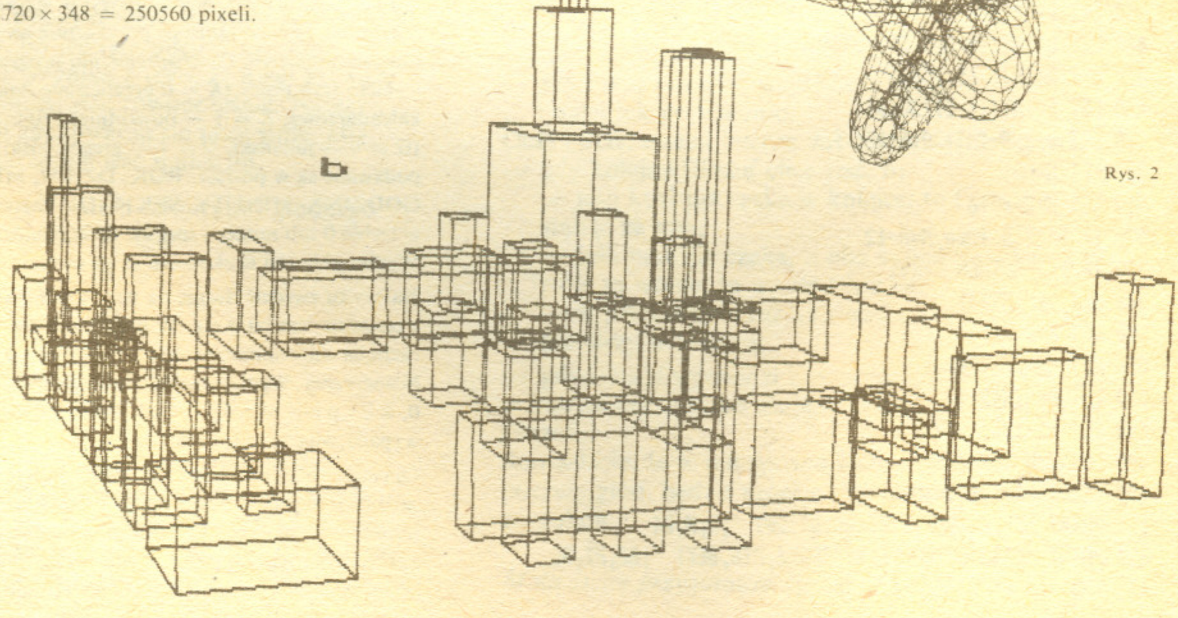
Po zrzutowaniu wszystkich wierzchołków postępowanie jest proste: łączymy kreskami rzuty końców krawędzi albo wypełniamy kolorem (czy rastrem) wielokąty będące rzutami ścian. W ten sposób otrzymujemy takie rysunki jak 2a i 2b. Prawda, że trudno domyślić się, co chcieliśmy narysować? Przyczyna niepowodzenia jest oczywista — narysowaliśmy wszystkie krawędzie (ściany), a przecież niektóre z nich są całkowicie, a pewne częściowo zasłonięte przez inne ściany.

Jeśli chcemy, by rysunki były bardziej czytelne, musimy zająć się jednym z podstawowych problemów grafiki komputerowej — zadaniem wyznaczania linii (powierzchni) zasłoniętych.

Jednym z prostszych rozwiązań jest znalezienie dla każdego elementu ekranu (tzw. pixela) ściany leżącej najbliżej przed nim w kierunku patrzenia (rys. 3) i wyświetlenie danego elementu kolorem przypisanym tej najbliższej ścianie. Koszt takiego algorytmu zależy głównie od rozdzielczości ekranu, dla Spectrum musimy zbadać $256 \times 176 = 45056$, a dla IBM PC (z kartą graficzną Hercules) aż $720 \times 348 = 250560$ pixeli.



Rys. 2



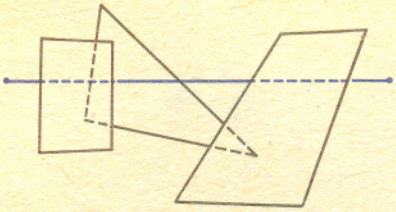
Gdy chcemy uzyskać rysunek ,,druciany" (taki jak np. 4), to możemy zastosować algorytm Ricciego (dokładny jego opis i program w Fortranie można znaleźć w rozdziale 8 książki Angella). Zasada tego algorytmu sprowadza się do porównywania rzutu każdej krawędzi z rzutami wszystkich ścian. Sprawdza się, jakie fragmenty krawędzi (rys. 5) są zasłonięte (tzn. leżą za jedną ze ścian). Rozwiązanie jest ,,brutalne" — badamy położenie wszystkich krawędzi względem wszystkich ścian. Koszt takiego algorytmu na ogół jest proporcjonalny do n^2, gdzie n oznacza liczbę krawędzi lub ścian (przykładowo scena z rysunku 4 zbudowana jest z 1000 czworokątów).

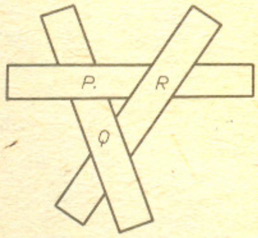
Gdy rysujemy nie kreskami, ale kolorowymi plamami, to najprościej byłoby ponumerować ściany, czyli ustawić je np. w takiej kolejności: jako pierwszą weźmy ścianę, która żadnej innej nie zasłania, a każda następna niech zasłania tylko poprzednie (już ustawione). Jeśli takie ustawienie jest wykonalne, to możemy wyświetlać na ekranie zadanymi kolorami wielokąty będące rzutami kolejnych ścian. Nowe ściany będą tym samym zamalowywały (zasłaniały) fragmenty wcześniej narysowanych. Ale znowu, tak jak w algorytmie Ricciego, koszt będzie proporcjonalny do n^2 (dla rysunku 6 jest $n = 640$) działań.

Czy można rozwiązać zadanie wyznaczenia linii (powierzchni) zasłoniętych taniej, a tym samym szybciej? Okazuje się, że dla dowolnych scen trójwymiarowych, zbudowanych z wielokątów, odpowiedź jest negatywna. Może wydać się to dziwne — ustawienie ścian to nic innego jak ich sortowanie, a przecież np. n liczb umiemy uporządkować znacznie taniej niż kosztem rzędu n^2 działań.

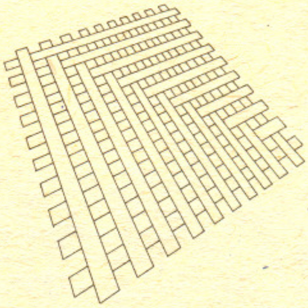
To prawda — różnica polega na tym, że relacja zasłaniania ścian nie jest porządkiem. Jeśli ściana P zasłania Q, a Q zasłania R, to wcale nie oznacza, że P zasłania R (relacja nie jest przechodnia). Natomiast już przy trzech ścianach może wystąpić tzw. zakleszczenie wzajemnych zasłonięć: P zasłania Q, Q zasłania R, a R zasłania P (rys. 7) — w takim przypadku nie możemy wybrać ściany, która żadnej innej nie zasłania! Przyjrzyjmy się dokładniej rysunkowi 8, ta scena zbudowana jest z n linii, $n/4$ ścian, a liczba widocznych fragmentów ścian jest rzędu n^2.

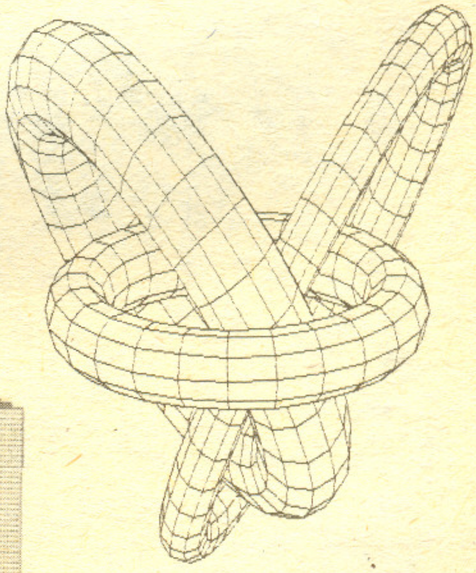
Wniosek jest chyba pesymistyczny. Rozstrzyganie, co jest widoczne, a co zasłonięte w ogólnym przypadku wymaga sporej liczby działań. Badanie oświetlenia jest jeszcze kosztowniejsze. Mimo tego grafika komputerowa nawet na Spectrum może sprawić frajdę. Ale o tym kiedy indziej.

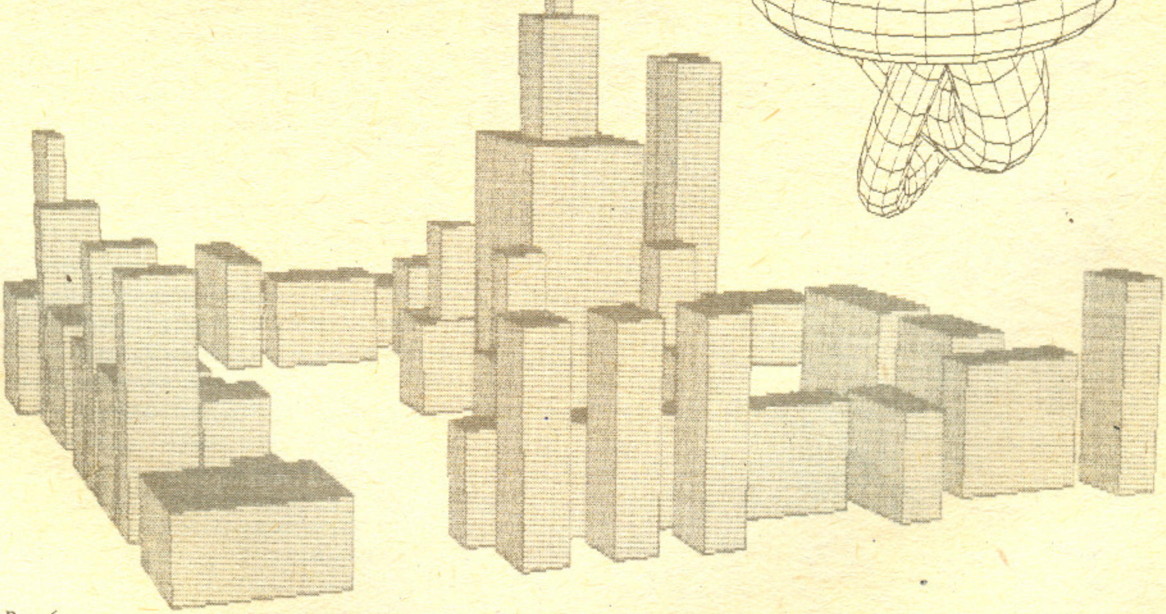

Rys. 5



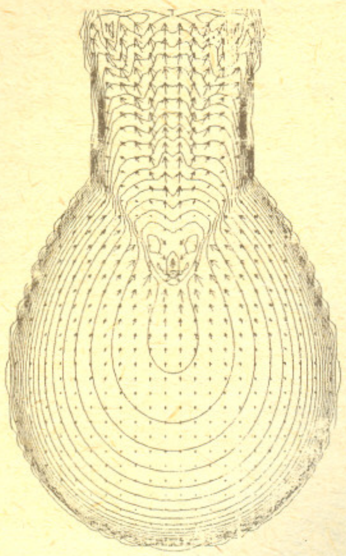
Rys. 7


Rys. 8

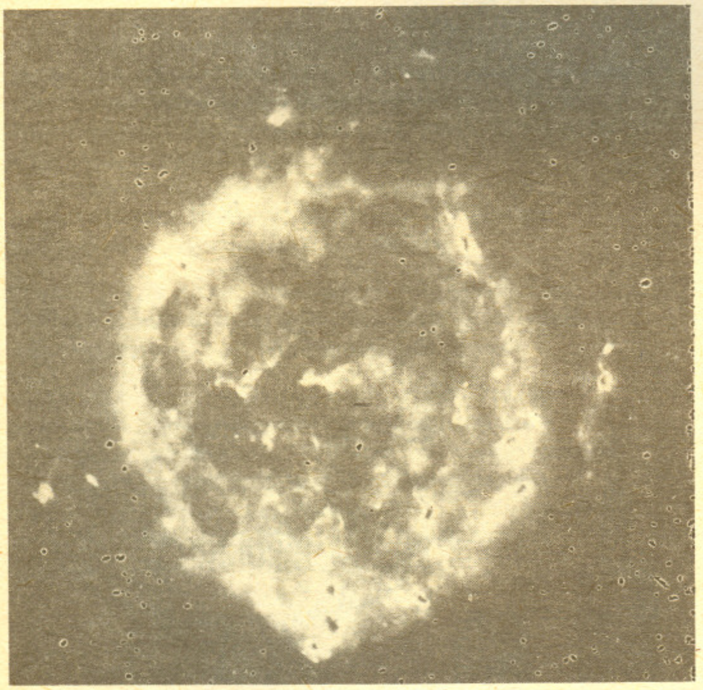

Rys. 4


Rys. 6

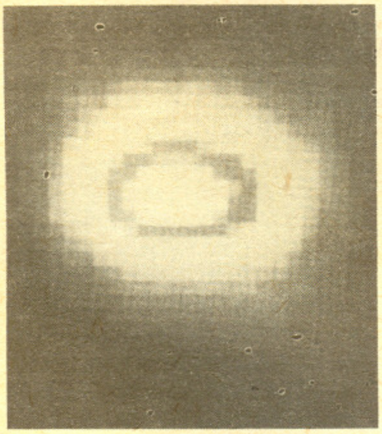
Patrz nie tylko w komputer



Komputerowa symulacja „przestrzeliwania" gwiazdy ciągu głównego białym karłem. Strzałki oznaczają lokalne prędkości materii.



Radiowa mapa mgławicy *Cas* A, pozostałości po wybuchu supernowej.



Podczerwony obraz obłoku pyłu wokół gwiazdy R *Coronae Borealis* uzyskany przez satelitę IRAS.

Już wiele lat temu pewien znany astronom z Warszawy (obecnie profesor) w rozmowie z kolegami stwierdził, że zaobserwował interesujące zachowanie się jakiejś gwiazdy. Widząc zdziwienie swych rozmówców — no, bo jak to możliwe, że „zaobserwował"? — poprawił się precyzując, że owo zachowanie się gwiazdy ujrzał na wydrukach komputerowych.

Nie od dziś dyskutowany jest problem: do jakiego stopnia komputer jest tylko urządzeniem do szybkiego liczenia, a w jakiej mierze może przyczynić się do dokonania odkrycia czegoś istotnie nowego. W tym momencie czujemy, w każdym razie ja czuję, brak definicji „odkrycia". W powszechnym rozumieniu na pewno na tę nazwę zasługuje np. pierwsze zaobserwowanie pierwszej planetoidy przez Piazziego, nie zasługuje natomiast pierwsze zaobserwowanie komety Halleya przy jej kolejnym powrocie w pobliże Słońca. Czyżby zatem w odkryciu musiał zawierać się element przypadkowości? Jeżeli tak, to pierwsze zaobserwowanie Neptuna nie było odkryciem. Wszak Galle jedynie skierował teleskop w kierunku ściśle określonym przez Leverriera. To może Leverrier odkrył Neptuna? Ale on z kolei tylko wyciągnął wnioski z mechaniki, a dokładniej z zakłóceń ruchu Urana, czyli istnienie Neptuna wyszło mu z obliczeń przeprowadzonych na gruncie teorii już znanej. Czy wynik obliczeń może być odkryciem? Takim wynikiem może być np. wydedukowanie, że równania Einsteina dopuszczają możliwość istnienia fal grawitacyjnych, albo stwierdzenie okresowości jakiejś gwiazdy na podstawie wyników analizy fourierowskiej przebiegu jej jasności.

Panuje przekonanie, że to, co robi komputer, może też wykonać człowiek „na papierze", co jedynie trwać będzie odpowiednio dłużej. W zasadzie to prawda, ale rozważmy np. proces uzyskania radiowego obrazu mgławicy *Cassiopeia* A zaprezentowanego obok. Obraz ten powstał w wyniku opracowania radiowych obserwacji interferometrycznych obszaru nieba $6' \times 6'$ przez komputer CRAY X-MP, przy czym czas pracy komputera wyniósł 10 godzin. Komputer ten wykonuje ponad 100 mln operacji na sekundę (na liczbach zmiennoprzecinkowych), wykonał zatem ponad $100 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 3600 = 3{,}6 \cdot 10^{12}$ działań. Jeżeli przyjąć, że człowiekowi wykonanie jednego działania zajmuje 10 s, dochodzimy do wniosku, że wykonywałby obliczenia przez milion lat. Chyba wszyscy się zatem zgodzimy, że są zagadnienia absolutnie niewykonalne bez komputera, aczkolwiek komputer nie wnosi tu nic od siebie, on tylko bardzo szybko liczy.

Weźmy inny przykład. Budowa gwiazdy jest określona przez konkretne prawa przyrody ujęte w odpowiednie równania, najczęściej różniczkowe. Układ tych równań jest tak skomplikowany, że chociaż wiadomo, jak się go rozwiązuje (rzecz jasna numerycznie), nikomu nie zaleca się próbować robić to „na papierze". Mimo to człowiek może, a nawet powinien, kontrolować tu pracę komputera, gdyż na podstawie wprowadzonych doń równań komputer może zbudować bezsensowny model gwiazdy. Mianowicie: równania różniczkowe rozwiązuje się metodą małych kroków, czyli startując z jakichś początkowych wartości gęstości, ciśnienia, temperatury itd., zadanych na powierzchni gwiazdy, oblicza się nowe wartości tych funkcji na głębokości d*r*, z tego oblicza się następne wartości o dalsze d*r* głębiej itd. Może się zdarzyć, że zanim program obliczeniowy dojdzie do środka gwiazdy, masa jej zostanie już wyczerpana. Komputer w ten sposób „odkryłby" gwiazdę pustą w środku. Oczywiście można program udoskonalić tak, by takie przypadki sygnalizował lub odrzucał, ale wniosek pozostanie jeden: komputer może zrobić wszystko w obrębie wprowadzonego doń modelu (z czego nie wszystko musi być sensowne) i nie zrobi nic, co wykraczałoby poza ten model. Komputer może zasygnalizować załamanie się modelu, ale nie wymyśli nowego, lepszego. Jeżeli ma symulować ewolucję gwiazdy wodorowej, to przeprowadzi ją aż do wyczerpania wodoru, ale sam nie wpadnie na to, żeby zapalić hel.

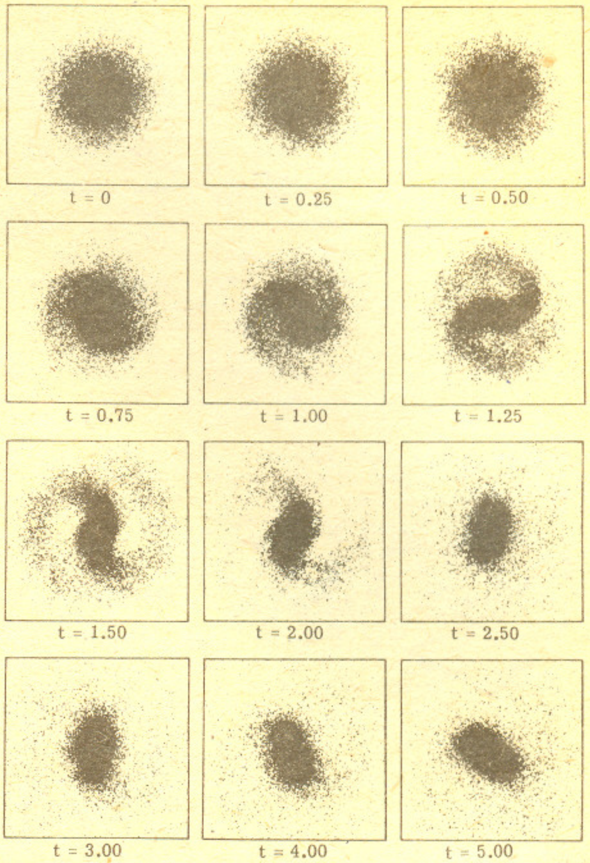
Niektórzy jednak uważają, że skądinąd banalne wykonywanie obliczeń przez komputer może prowadzić do wyników zasługujących na miano odkryć — jakby ,,ilość przeszła w jakość". Przykładem może być śledzenie ruchu wielu ciał lub hydrodynamika. Równania ruchu są w obu przypadkach zasadniczo bardzo proste, jednak dzięki możliwości wykonania ogromnej liczby obliczeń dochodzi się do wyników zupełnie nieprzewidywalnych, nawet intuicyjnie. Intuicja jakoś nie może nam podpowiedzieć, dlaczego układ liczący tysiące (i więcej) gwiazd w pewnych okolicznościach staje się spiralny. Niepodobna też intuicyjnie przewidzieć, czy i dlaczego dysk akrecyjny wokół białego karła zasilany strumieniem materii płynącej z jego towarzysza będzie stabilny czy nie. Jest tu w pewnym sensie gorzej niż z modelowaniem gwiazd. Mianowicie: model gwiazdy powstaje w wyniku skończonej liczby obliczeń, podczas gdy we wspomnianych przypadkach badacz puszczając program w ruch nie ma pojęcia, co z tego wyjdzie i nie wie nawet, w którym momencie może wyjść coś ciekawego. Komputer nie podpowie tu, jak długo trzeba prowadzić obliczenia, bo nie wie, co to jest ,,ciekawy wynik".

Gdy rozmawiałem na te tematy z moimi kolegami, jeden z nich stwierdził, że wprawdzie jeszcze nie dziś, ale może już niedługo jakiś lepszy komputer będzie mógł osiągnąć wyższy stopień inteligencji, niż tylko umiejętność szybkiego liczenia. Miał tu na myśli możliwość takiego zaprogramowania maszyny, by sprawdzała, czy wprowadzone do niej dane pasują do modelu (hipotezy, teorii), który chcemy zweryfikować. Swoje przekonanie opierał na fakcie, że sprawdzanie, czy fakty pasują do modelu, jest czynnością podlegającą logice, a więc możliwą do przeprowadzenia przez komputer. Oczywiście komputer mógłby sprawdzić w ten sposób słuszność modelu na gruncie jedynie skończonej liczby faktów obserwacyjnych, tej — którą by go uprzednio załadowano. Należy chyba przypuszczać, że odkrycia dokonane w ten sposób byłyby tylko negatywne i sprowadzałyby się tylko do stwierdzenia, że jakiś fakt nie pasuje do sprawdzanego modelu. Trudno sobie wyobrazić, by komputer mógł wtedy zasugerować lepszy model lub inne doświadczenie mogące rozstrzygnąć o słuszności badanego modelu. Prawdę mówiąc, wspomniany tu kolega był większym optymistą. Jego zdaniem mianowicie będzie można zaprogramować komputerowi nawet intuicję, skojarzenia lub zniechęcenie wynikające z braku pozytywnego wyniku. Rzecz jasna, nie ustaliliśmy technicznych szczegółów, jak to zrobić. Słyszeliśmy już co prawda o uczących się maszynach, jednak mój optymizm tak daleko nie sięgał. A może przemawia przeze mnie podświadoma niechęć, by maszyna zrównała się ze mną pod względem pewnych cech, uważanych za wyłącznie ,,ludzkie"?

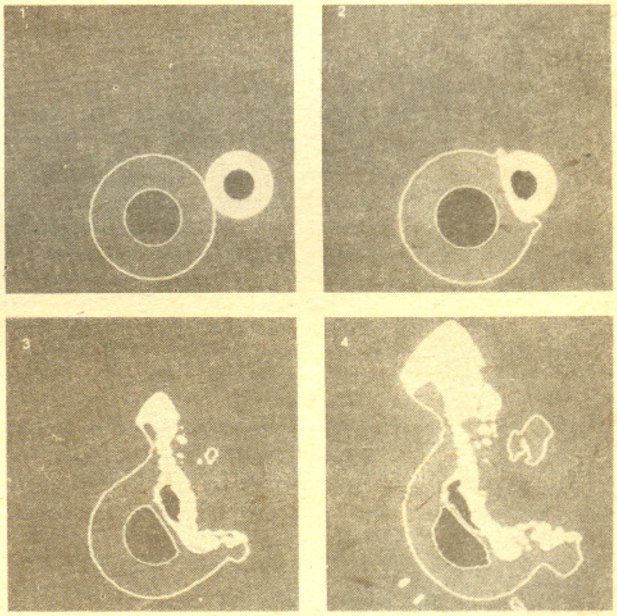
Obecne powszechnie dostępne komputery nie są w każdym razie jeszcze doskonałe. Dość jest problemów choćby z uwzględnieniem wpływu kumulowania się nieuniknionych błędów obliczeniowych na ostateczny wynik. Komputer wykonuje wszak obliczenia ze skończoną dokładnością i końcowy rezultat bardzo długiego ciągu obliczeń może mieć wiarygodność bardzo problematyczną. Dowodem tego są np. obliczenia ruchu komety Halleya na 3000 lat wstecz. Rozbieżność wyników sięga tam już jednego pełnego obiegu komety wokół Słońca, a z pewnością wszyscy zainteresowani badacze dołożyli starań, by błędy maszynowe zminimalizować.

Te nieco chaotyczne rozważania skłaniają mnie do wniosku: komputer to niewątpliwie wspaniałe narzędzie, dzięki niemu można pokusić się o badanie problemów o niesłychanym stopniu komplikacji, ale robienie odkryć zostawiłbym jednak człowiekowi.

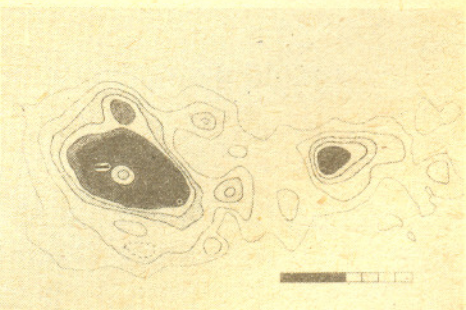
dr Tomasz KWAST



Komputerowa symulacja ewolucji struktury spiralnej.



Komputerowa symulacja zderzenia dwóch planet.



Radiowa mapa galaktyk M81 i M82.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 45 /WT=2,96/ i 46 /WT=2,43/
z numeru 3/1987

Piotr Bała	- Toruń	43,63pkt
Robert Repucha	- Gołdap	42,31pkt
Anna Gluza	- Toruń	39,89pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	38,47pkt
Jerzy Lipkowski	- Elbląg	37,09pkt
Piotr Wach	- Katowice	35,27pkt
Leszek Szalast	- Radzyń Pdl	30,98pkt

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1987

Zadania z fizyki nr 53, 54

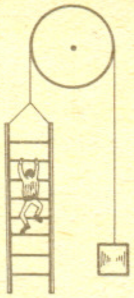
Redaguje dr Andrzej NADOLNY

53. Kierowca samochodu pędzącego po poziomej, suchej płycie lotniska nagle zauważył przeszkodę ustawioną prostopadle do kierunku jazdy. Jaki manewr — hamowanie czy skręt — daje większą szansę uniknięcia zderzenia z przeszkodą? Zakładamy, że nawierzchnia lotniska ma jednakowe własności w całym obszarze manewru, a przeszkoda jest szeroka.

54. Wyobraźmy sobie, że opanowano technikę superdrobnego druku, odczytywanego za pomocą mikroskopu elektronowego. Jakim kryteriom powinien odpowiadać materiał użyty jako „farba drukarska" nanoszona na podłoże przenikliwe dla elektronów, aby zapewnić trwałość zapisu i dobrą jakość obrazu?
Ocenić, jaką najmniejszą wielkość mogłaby mieć reprodukcja całości zbiorów biblioteki liczącej 1 milion książek, średnio po 400 stron. W jaki ewentualnie sposób można by informację zawartą w tych książkach zapisać na jeszcze mniejszej powierzchni?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1987

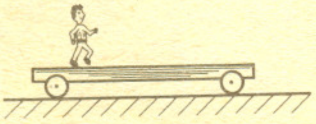
Przypominamy treść zadań



49. Na jednym końcu liny przerzuconej przez blok stały (rysunek) zamocowana jest drabinka sznurowa o masie m, na której znajduje się człowiek o masie M, na drugim końcu liny wisi przeciwciężar o masie $M+m$. Układ ten początkowo pozostaje w spoczynku. W pewnym momencie człowiek zaczyna się wspinać po drabince i pokonuje na niej odcinek o długości l. Obliczyć drogę, jaką przebył człowiek w układzie odniesienia związanym z Ziemią, przy założeniu, że masy liny i bloku są bardzo małe w stosunku do M i m, a tarcie jest zaniedbywalne.

50. Pragniemy sfotografować pejzaż w świetle Księżyca tak, aby uzyskane zdjęcie było zbliżone jasnością do zdjęcia wykonanego w warunkach dziennych. Ile — orientacyjnie — razy czas ekspozycji podczas pełni Księżyca, przy bezchmurnym niebie, winien być dłuższy od czasu ekspozycji przy bezpośrednim oświetleniu słonecznym?
W przybliżonych rachunkach przyjąć, że średnica kątowa tarczy Księżyca wynosi $0{,}^\circ 5$ oraz że powierzchnia Księżyca odbija około 0,1 padającego promieniowania.

49. Zadanie to jest ideowo zbliżone do zadania nr 37, którego rozwiązanie zamieściliśmy w numerze 3/1987.
Zamiast omawianego układu można rozpatrzyć układ równoważny, przedstawiony na rysunku:



człowiek (c) na wózku (w) o masie $M+2m$, poruszającym się bez tarcia na poziomej płaszczyźnie. Stosunek przyspieszeń (a), prędkości (v) oraz odległości (s) przebytych przez człowieka i wózek w układzie związanym z nieruchomym środkiem masy, czyli z Ziemią, jest równy

$$\frac{a_c}{a_w} = \frac{v_c}{v_w} = \frac{s_c}{s_w} = \frac{M+2m}{M},$$

przy czym odpowiednie wektory dla człowieka i wózka mają przeciwne zwroty.
Droga przebyta przez człowieka w układzie wózka wynosi

$$l = s_c + s_w = \left(1 + \frac{M}{M+2m}\right) s_c.$$

Stąd wzór na poszukiwaną drogę:

$$s_c = \frac{M+2m}{2(M+m)}\, l.$$

50. Oświetlenie Księżyca przez Słońce jest zbliżone do oświetlenia Ziemi. Niech natężenie tego oświetlenia wynosi I_0, całkowity strumień świetlny padający na powierzchnię Księżyca jest więc $\pi R^2 I_0$, gdzie R — promień Księżyca. Można przyjąć w przybliżeniu, że Księżyc odbija część $a = 0{,}1$ tego promieniowania jednorodnie w półsferę. Natężenie odbitego od Księżyca światła będzie zatem na powierzchni Ziemi wynosiło

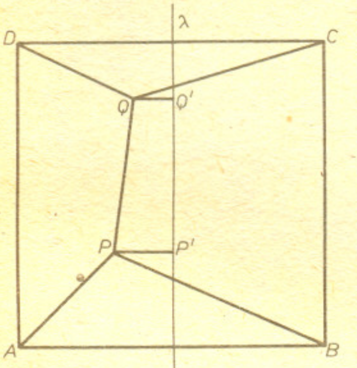
$$I = a\pi R^2 I_0/(2\pi r^2) = (a/2)(R/r)^2 I_0 = (a/8)\gamma^2 I_0,$$

gdzie r jest odległością Ziemia—Księżyc, γ — średnicą kątową tarczy Księżyca (w radianach). Po podstawieniu danych otrzymujemy $I/I_0 = 10^{-6}$. Czas naświetlania powinien więc zostać wydłużony 10^6 razy. Należy jednak pamiętać, że przy bardzo słabym oświetleniu wymagane są dłuższe czasy ekspozycji, niżby to wynikało z prostych zależności (dlatego też wskazane jest wykorzystanie pełnego otworu obiektywu).
Faktyczna jasność Księżyca w pełni wynosi około 1/400 000 jasności Słońca. Wyższa od obliczonej przez nas wartość wiąże się z faktem nieizotropowego odbicia światła przez powierzchnię Księżyca — odbicie w kierunkach zbliżonych do kierunku padania światła jest stosunkowo bardziej intensywne.

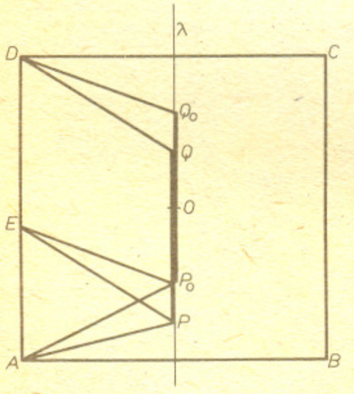
Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 145 /WT=3,13/ i 146 /WT=1,15/
z numeru 2/1987

Piotr Jędrzejewicz	- Toruń	48,12pkt
Andrzej Bonk	- Chełmża	45,22pkt
Zbigniew Zaus	- Kraków	43,01pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	42,82pkt
Karol Jachacy	- Tłuszcz	41,97pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	41,27pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	39,39pkt
Mirosław Mikucki	- Augustów	39,14pkt

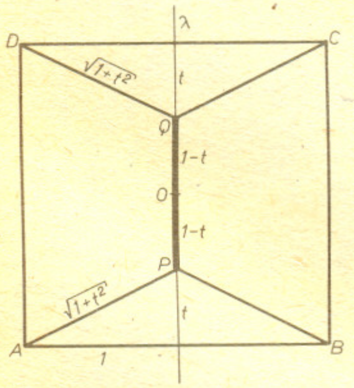
Panowie Jędrzejewicz i Bonk - obaj kończą drugą rundę.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Zadania z matematyki nr 155, 156

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

155. Wyznaczyć kres górny wartości funkcji $f(x) = 2^{-x}+2^{-1/x}$ na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich.

156. Czy dla każdej liczby naturalnej k istnieje wielościan wypukły mający dokładnie k przekątnych? (Bierzemy pod uwagę tylko przekątne przecinające wnętrze wielościanu.)

Zadanie **156** przysłał pan Werner Mnich z Opola.

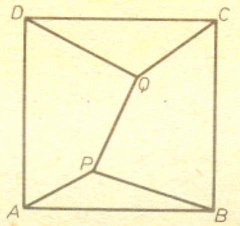
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1987

Przypominamy treść zadań:

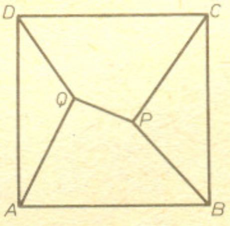
151. Zaprojektować sieć dróg o minimalnej łącznej długości, łączących cztery miejscowości w wierzchołkach kwadratu.

152. Dowieść, że $(\Sigma k^{-1/2})^2+(\Sigma k^{-1/3})^3 > 2(n^2+n-2)$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$; sumowanie po $k = 1, \ldots, n$.

151. Przez sieć dróg rozumiemy w tym zadaniu zbiór S będący sumą skończenie wielu łuków krzywych o dobrze określonych, skończonych długościach. Zakłada się przy tym, że zbiór S jest spójny, tzn. każde jego dwa punkty łączy krzywa zawarta w S, oraz że wierzchołki A, B, C, D rozpatrywanego kwadratu K należą do S. Każdy taki zbiór można przedstawić w postaci sumy łuków nie mających punktów wspólnych innych niż końce. Suma długości tych łuków — to wielkość, którą mamy zminimalizować. Wielkość ta, oczywiście, nie zwiększy się, gdy każdy z tych łuków zastąpimy odcinkiem prostej; możemy więc do takich sieci ograniczyć uwagę. Jeśli pewne fragmenty sieci S leżą poza kwadratem K, to zastępując każdy punkt $P \in S-K$ przez punkt $P' \in K$ leżący najbliżej P otrzymamy sieć S' o łącznej długości mniejszej niż S. Wystarczy więc rozpatrywać sieci S zawarte w K.
Przeciwległe wierzchołki A i C musi łączyć pewna łamana zawarta w S. Dla ustalonej łamanej L, biegnącej od A do C, minimalną długość sieci S zawierającej L uzyskamy dołączając do L odcinki BP i DQ, gdzie $P, Q \in L$ są punktami leżącymi najbliżej wierzchołków B i D (odpowiednio). Długość ta nie zwiększy się, gdy „wyprostujemy" fragmenty łamanej L, na które została ona podzielona punktami P i Q. Tak więc wystarczy ograniczyć uwagę do sieci S złożonych z pięciu odcinków, jak pokazują rysunki 1 i 2; rozróżnienie bierze się stąd, że punkt Q może leżeć na łamanej L między punktami P i C lub między A i P, a ponieważ sytuacje te są w pełni symetryczne, będziemy rozważać tylko sieci pierwszego typu (rysunek 1). Dopuszczamy położenia graniczne, tj. takie, w których punkty P i Q pokrywają się bądź też któryś z nich pokrywa się z którymś z wierzchołków.



Rys. 1



Rys. 2

Niech λ będzie symetralną boków AB i CD. W sytuacji z rysunku 1 długość sieci nie zwiększy się, gdy punkty P i Q zastąpimy ich rzutami P', Q' na prostą λ (rysunek 3): $AP+PB \geqslant AP'+P'B$ (co wynika z własności elips o ogniskach A, B), $CQ+QD \geqslant CQ'+Q'D$ (analogicznie), $PQ \geqslant P'Q'$. Możemy więc zakładać, że $P, Q \in \lambda$. Dalej, można zakładać, że środek odcinka PQ pokrywa się ze środkiem O kwadratu $ABCD$. Bowiem jeśli nie, to przesuwamy ten odcinek do położenia P_0Q_0 symetrycznego względem O (rysunek 4) i oznaczając przez E punkt odcinka AD taki, że $DE = PQ = P_0Q_0$, mamy $AP+QD = AP+PE \geqslant AP_0+P_0E = AP_0+Q_0D$ (z własności elips o ogniskach A, E, jako że P_0 leży na symetralnej odcinka AE).
Ostatecznie zredukowaliśmy zadanie do sytuacji z rysunku 5: $P, Q \in \lambda$, $OP = OQ = 1-t \in [0, 1]$ (przyjmujemy, że bok kwadratu ma długość 2). Ale wówczas $AP = BP = CQ = DQ = \sqrt{1+t^2}$, $PQ = 2-2t$ i długość sieci S równa się $2-2t+4\sqrt{1+t^2}$. Badając pochodną otrzymanej funkcji zmiennej $t \in [0, 1]$ stwierdzamy, że osiąga ona minimum przy $t = \sqrt{1/3}$. Nietrudno zauważyć, że wówczas trzy odcinki wychodzące z punktu P (i podobnie z Q) wyznaczają sektory o równej rozwartości 120°. Jest to poszukiwana konfiguracja.

Uwaga. W końcowym fragmencie można było zastosować do trójkąta AOB twierdzenie mówiące, że w trójkącie T o kątach $\leqslant 120°$ suma odległości punktu $P \in T$ od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza wtedy, gdy boki T są widoczne z P pod równymi kątami 120°.

152. Skorzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną oraz z nierówności $2^n n! < n^n$ zachodzącej dla $n \geqslant 6$ i łatwej do udowodnienia przez indukcję. Dla liczb naturalnych $m \geqslant 1$ i $n \geqslant 6$ mamy więc

$$\frac{1}{n}\Sigma k^{-1/m} > (\Pi k^{-1/m})^{1/n} = ((n!)^{1/n})^{-1/m} > \left(\frac{n}{2}\right)^{-1/m},$$

a stąd $(\Sigma k^{-1/m})^m > 2n^{m-1}$. Przyjmując $m = 2$ i $m = 3$ otrzymujemy dla lewej strony danej w zadaniu nierówności oszacowanie z dołu przez sumę $2n+2n^2$, słuszne dla $n \geqslant 6$. Gdy to wyrażenie zmniejszymy jeszcze o 4, dostaniemy nierówność prawdziwą także dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ (o czym można się przekonać bezpośrednim sprawdzeniem). Dowodzona nierówność zachodzi zatem dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 1$.

Drobiazgi

Do tej pory nie wiadomo dokładnie, jak należy organizować zespoły pracujące nad wielkimi programami. Jedną z propozycji jest tzw. zespół głównego programisty, którego struktura wzoruje się na zespole chirurgicznym, składającym się z wyspecjalizowanych fachowców (anestezjolog, instrumentariuszka, asystenci) pracujący pod bezpośrednim kierunkiem chirurga. Główny programista odpowiada, oczywiście, chirurgowi, a wspomagają go programiści — asystenci, wykonujący zlecone podprogramy, specjalista od dokumentacji, specjalista od testowania lub weryfikowania poprawności itp. Pierwsza próba takiego zespołu miała miejsce przy okazji komputeryzacji przez firmę IBM archiwum dziennika *New York Times*. Efekty były zachęcające, choć złośliwi twierdzą, iż do zespołu wzięto tak znakomitych programistów, że przy dowolnej organizacji zespołu efekty musiały być takie...

Do największych i najbardziej skomplikowanych wytworów myśli ludzkiej należą wielkie programy komputerowe, zwłaszcza te, które stanowią tzw. oprogramowanie podstawowe lub narzędziowe (systemy operacyjne, kompilatory języków programowania, systemy zarządzania bazami danych). Napisanie kompilatora języka Ada, opracowanego pod egidą Departamentu Obrony USA, wymaga co najmniej 100 osobo-lat pracy programistów, nie licząc pracowników obsługi, kosztów sprzętu, narzędzi programowych itp. System operacyjny OS 360/370 dla dużych komputerów firmy IBM wymagał, według różnych źródeł, od kilkudziesięciu do kilkuset tysięcy osobo-lat pracy. Zakładając, że w tak dużych programach wydajność statystycznego programisty wynosi do 30 wierszy programu dziennie, można oszacować rozmiar takich programów!

Kilkanaście lat temu Departament Obrony USA zlecił zaprojektowanie języka programowania, w którym można by napisać system operacyjny, a następnie w sposób formalny dowieść jego poprawności. Chodziło o to, aby można pod kontrolą takiego systemu przetwarzać tajne dane równocześnie z nietajnymi i aby można całkowicie wiarygodnie dowieść, że nikt niepowołany nie będzie mógł dostać się do tych pierwszych. W związku ze spadkiem cen sprzętu program zarzucono (wygodniej i pewniej było kupić osobny komputer do tajnych informacji), ale nawet gdyby się zakończył sukcesem, oficerowie kontrwywiadu nie mogliby spać spokojnie. Program, aby działał na komputerze, musiałby być przetłumaczony na język wewnętrzny, a kto potrafiłby zagwarantować poprawność programu tłumaczącego?

Przy analizie sygnałów elektronicznych (głównie radarowych, ale także będących wynikiem badań fizycznych i astronomicznych) korzysta się z transformacji Fouriera. Pozwala ona odtworzyć amplitudy i częstotliwości fal sinusoidalnych, których superpozycją jest badany sygnał. Taki sam algorytm pozwala zresztą potem odtworzyć sygnał na podstawie składowych. Klasyczny algorytm Fouriera wymaga rzędu $n \times n$ mnożeń liczb zespolonych (gdzie n jest liczbą zmierzonych lub wyliczonych wartości amplitudy sygnału). Trzydzieści lat temu odkryto tak zwany szybki algorytm transformacji Fouriera (FFT), wymagający tylko $n \times \lg(n)$ mnożeń. Załóżmy, że dysponujemy komputerem, który potrafi wykonać 100 tysięcy mnożeń liczb zespolonych na sekundę (typowa wartość dla bardzo dużych minikomputerów). Porównajmy: dla miliona wartości algorytm klasyczny wymagałby miliarda mnożeń, co trwałoby 10 milionów sekund (około 116 dni). Algorytm szybki wymagałby 20 milionów mnożeń, czyli około 200 sekund. Nic dziwnego, że odkrycie FFT stało się przełomowym momentem w analizie sygnałów, pozwalając na ogromne zwiększenie zasięgu i dokładności badań.

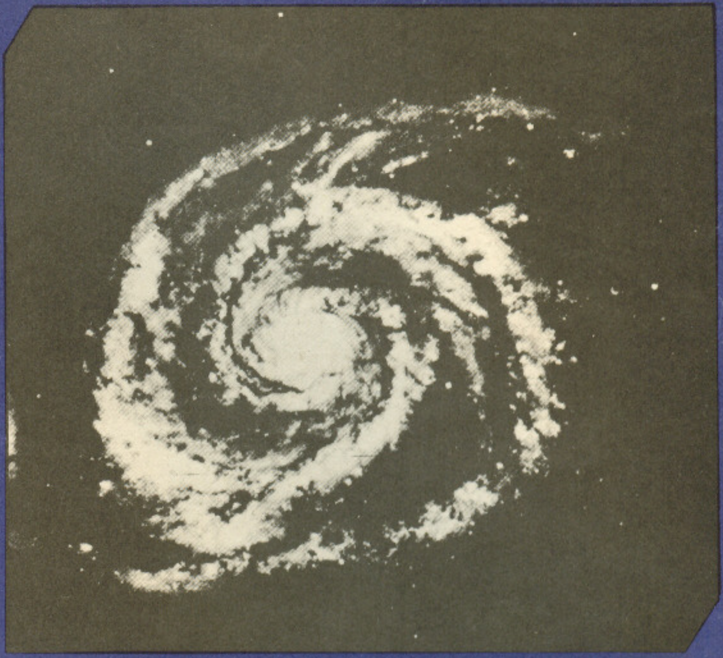
Komputery są bardzo intensywnymi źródłami ciepła. Zużywana (a więc i wydzielana) moc jest z grubsza proporcjonalna do szybkości działania. W wielkich komputerach moce dochodzą do setek kilowatów. Z drugiej strony, aby osiągnąć dużą szybkość działania, zmniejsza się rozmiar komputera, a więc całe to ciepło wydzielane jest w objętości około jednego metra sześciennego. Ciepło to trzeba odprowadzić na tyle szybko, aby temperatura wewnętrzna komputera nie przekroczyła około 70°C. Spełnienie tych warunków jest jednym z podstawowych problemów przy konstruowaniu superkomputerów. Stosuje się wymyślne układy chłodzące, podobne do szaf chłodniczych, a od kilku lat najszybsze komputery są zanurzane w beczkach wypełnionych płynem chłodzącym pod ciśnieniem. Z beczki wychodzą tylko rury doprowadzające i odprowadzające płyn chłodzący oraz przewody łączące układy elektroniczne z zasilaniem i z urządzeniami zewnętrznymi.

Płyta z zapisem laserowym (dysk kompaktowy) może być używana do przechowywania informacji cyfrowej. Mieści się wówczas na niej około 500 MB (megabajtów, czyli milionów znaków). Jest to pięć razy tyle, ile zawiera trzynastotomowa Wielka Encyklopedia Powszechna PWN. Ale z drugiej strony do zapamiętania obrazu składającego się z miliona punktów (1000 rzędów po 1000 punktów), z których każdy może mieć jeden z 64 kolorów (po cztery poziomy czerwieni, zieleni i błękitu), potrzeba 0,75 MB. Gdyby zapisać ruchomy film (50 obrazów na sekundę, tyle, co w telewizji), to na płycie zmieściłoby się tylko około 13 sekund. Oczywiście, w rzeczywistości ilość informacji przekazywana w czasie transmisji telewizyjnej jest znacznie mniejsza; obraz składa się z mniejszej liczby punktów, a sąsiednie punkty ekranu nie mogą mieć zupełnie dowolnych kolorów.

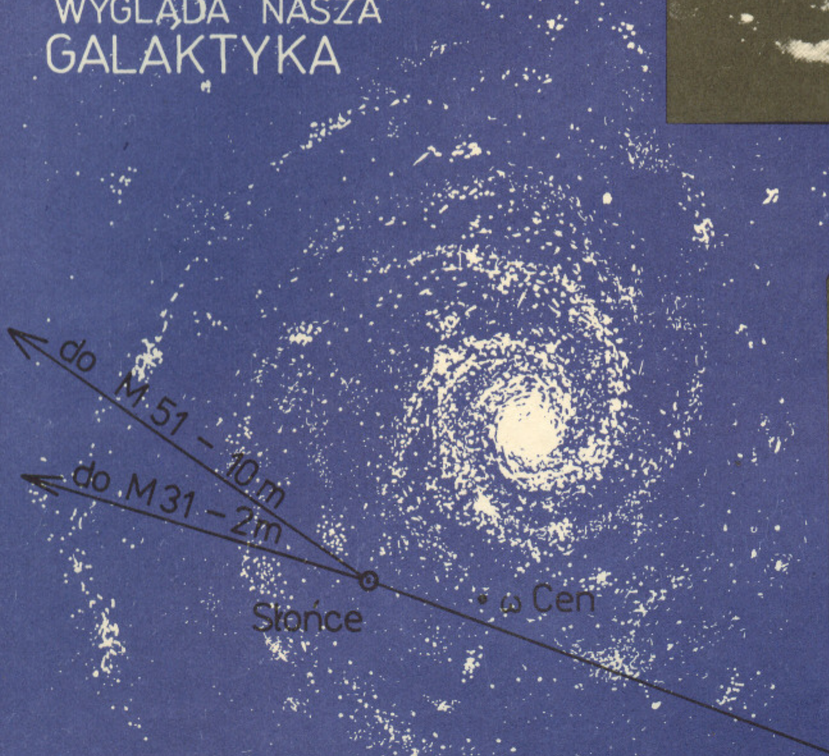
Jeszcze dziesięć lat temu w Centrum Ochrony Obszaru Powietrznego Ameryki Północnej (NORAD) pracowały dwa komputery lampowe, zainstalowane w latach pięćdziesiątych. Podobno przez przeszło dwadzieścia lat w każdej chwili co najmniej jeden z nich działał! Komputery zajmowały wielką salę w podziemnym schronie, a ich obsługa wymagała wymiany co tydzień 200 lamp elektronowych. Przez 20 lat żaden producent nie potrafił dostarczyć nowocześniejszego, a równie niezawodnego sprzętu. Dopiero na początku lat osiemdziesiątych udało się to firmie Hewlett-Packard; dwa zainstalowane nowe komputery zajmują mniej miejsca niż same klimatyzatory potrzebne starym. Wielka sala komputerowa pozostała pusta — pracownicy Centrum proponowali zrobić w niej boisko do siatkówki.

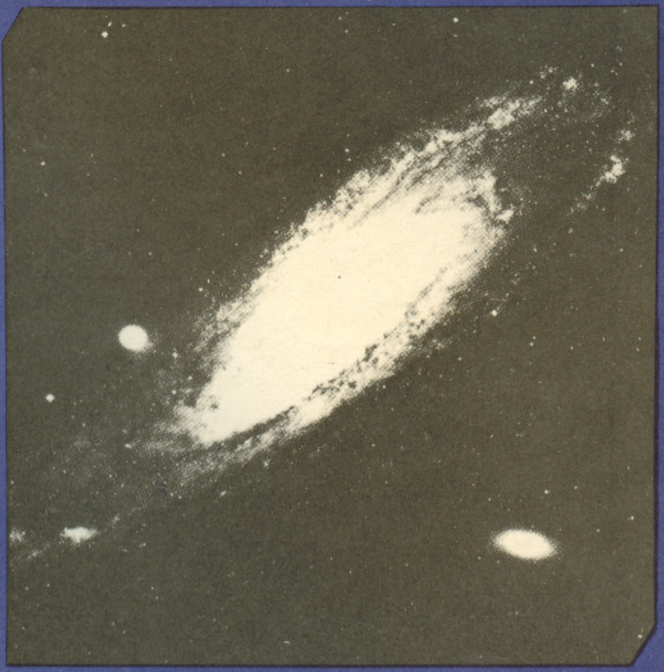
Z algebry liniowej wiadomo, że można rozwiązać każdy oznaczony układ n równań z n niewiadomymi za pomocą wyznaczników. Okazuje się jednak, że koszt obliczenia wyznacznika rośnie wykładniczo wraz ze wzrostem n. Co gorsza — przy skończonej dokładności obliczeń błąd obliczeń może być ogromny! Znacznie lepsze wyniki otrzymuje się stosując algorytm rugowania zmiennych (eliminacja Gaussa), którego koszt jest proporcjonalny do n^3. W latach siedemdziesiątych udało się znaleźć inne, jeszcze trochę szybsze algorytmy (m. in. Strassena). Okazało się, że jeśli potrafimy pomnożyć dwie macierze $m \times m$ wykonując k mnożeń, to potrafimy rozwiązać układ równań kosztem n^a, gdzie $a = \log_m k$. Standardowa metoda mnożenia macierzy zawsze daje $a = 3$. Strassen pokazał, że można pomnożyć macierze 2×2 korzystając z siedmiu mnożeń, otrzymując $a = 2{,}8$. Aby poprawić ten wynik, należało znaleźć algorytm mnożenia macierzy 3×3 korzystający z co najwyżej 21 mnożeń, co też się wkrótce udało. Wprawdzie można w ten sposób tworzyć coraz lepsze algorytmy, ale uzyskana poprawa wyniku nie jest tak radykalna, jak to było np. w wyniku algorytmu FFT.

10^{-22}



TAK PRAWDOPODOBNIE WYGLĄDA NASZA
GALAKTYKA





Wielka Mgławica w Andromedzie

Wielki Obłok Magellana (slajd na zewnątrz)

10^{21} m = 33 kpc