



## SPIS TREŚCI

### NUMERU 10(178)

Statyka katedr gotyckich <i>dr hab. Jan Królikowski</i>	str. 1
Zadania	str. 7
Mała Delta	str. 8
O toczeniu wielokąta <i>mgr Jarosław Górnicki</i>	str.10
Sieć dróg dla czterech miejscowości <i>Nguyen Chuong Chi</i>	str.12
Kącik prac uczniowskich	str.13
Patrz w niebo	str.14
Klub 44	str.15
Drobiazgi	str.16
Fotomechanika	str.17

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Edukacji Narodowej

#### Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichoński  
dr Antoni L. Dawidowicz  
dr Alicja Derkowska  
doc.dr Jan A. Gaj  
doc.dr Bolesław Gleichgewicht  
doc.dr Tomasz Hofmoki – v-przewodniczący  
doc.dr Tadeusz Jarzębowski  
doc.dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Makowski  
dr Zbigniew Plochocki  
dr Jan Rempala  
prof.dr Konrad Rudnicki  
prof.dr Grzegorz Sitarski  
prof.dr Józef I. Smak  
prof.dr Kazimierz Stępień  
prof.dr Mieczysław Subotowicz  
doc.dr Andrzej Szymacha  
doc.dr Aniela Wolska  
prof.dr Andrzej Woszczyk  
prof.dr Wojciech Żakowski –  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
dr hab. Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
mgr Krystyna Kordos – sekr. red.  
dr hab. Marek Kordos – red. nac.  
dr Tomasz Kwast  
mgr inż. arch. Mariola Łotysz – ilustr.  
dr Andrzej Majhofer  
mgr Anna Rudnik  
dr Jerzy Ryll  
mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
tel. 25-56-39

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe  
RSW „Prasa-Książka-Ruch”  
Al. Jerozolimskie 125/127  
02-017 Warszawa  
tel. centr. 28-52-31

Biurowo Reklamowe Prasowe i Ogłoszeń  
ul. Poznańska 38  
00-689 Warszawa  
tel. 28-23-09

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd:  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w Prasowych  
Zakładach Graficznych  
RSW „Prasa-Książka-Ruch”  
w Łodzi, ul. Armii Czerwonej, 28  
Nr zam. 2607/88, U-58.  
Skład systemem TeX  
wykonała redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 210,- półrocznej zł 420,- rocznej zł 840,-

- dla osób prawnych – instytucji i zakładów pracy  
– instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach.  
– instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych – indywidualnych prenumeratorów:  
– osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli  
– osoby fizyczne zamieszkałe w miastach – siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1658-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleciodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.  
Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
– do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny.  
– do dnia 1 każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 70,-

**W następnym numerze:**

**Piąta siła**



# Statyka katedr gotyckich – zastosowanie modelowania fotoelastycznego

Dr hab. Jan KRÓLIKOWSKI

Zmysły radują się rzeczami należycie odmierzonymi, gdyż mają je za sobie podobne, bowiem zmysł to także rodzaj rozumu, jak każda władza poznawcza

Tomasz z Akwinu  
*Summa Theologiae*

## „Problem katedr”

Na przełomie XII i XIII wieku w okolicach Paryża pojawiły się wielkie katedry budowane w nowym stylu gotyckim, budowle oparte na koncepcji radykalnie odmiennej od panującej poprzednio, rządzącej stylem romańskim. Na rysunku 1 przedstawiono przekrój poprzeczny trzech kościołów: romańskiego St. Foy w Conques (Płd. Francja, 1150), wczesnogotyckiej katedry Notre Dame w Laon (około 1160) i jednej z wielkich katedr Gotyku Wzniosłego, katedry Notre Dame w Reims (1211). Porównując te budowle zauważamy, że

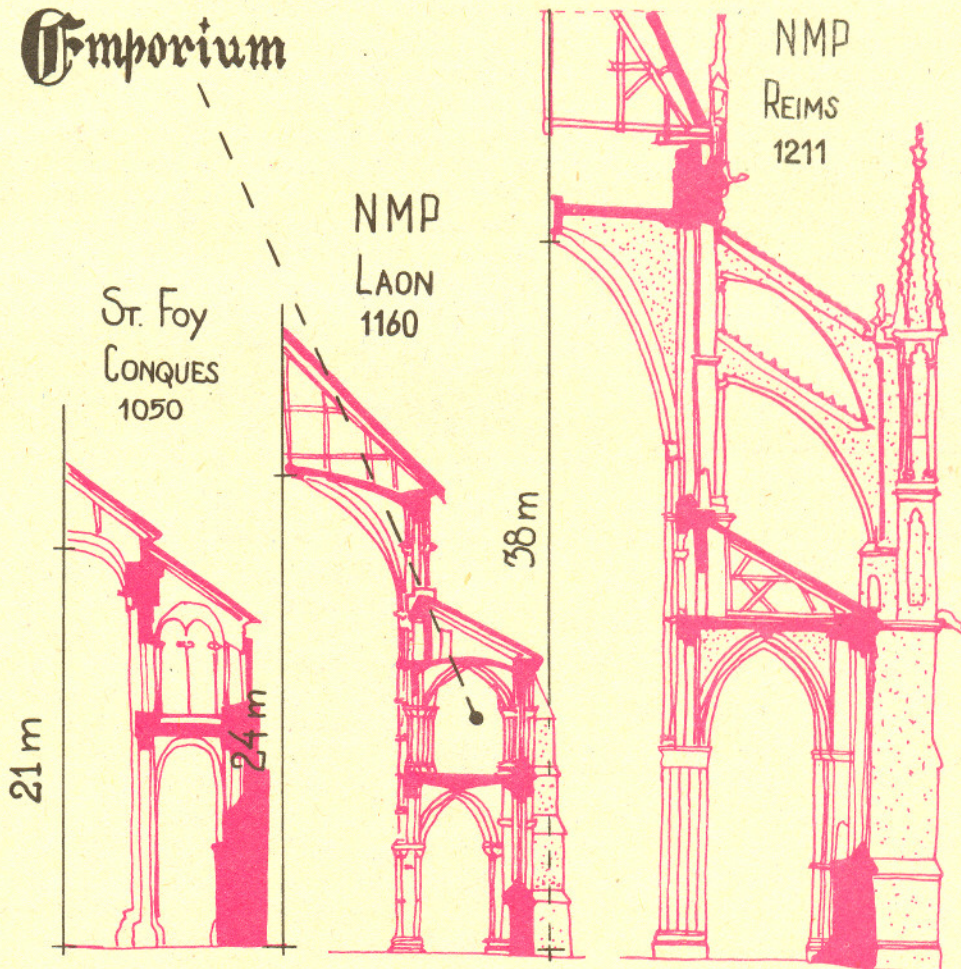
- 1) katedry gotyckie są niemal dwukrotnie wyższe od romańskich,
- 2) szerokość nawy głównej zwiększa się,
- 3) grubość murów nawy głównej maleje.

### Gmporium

St. Foy  
CONQUES  
1050

NMP  
LAON  
1160

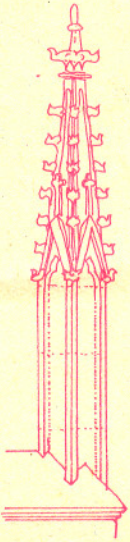
NMP  
REIMS  
1211



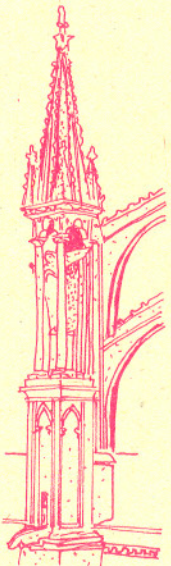
Rys. 1

Wnętrze kościoła w Conques przypomina ciemny i długi tunel w porównaniu z obszernym wnętrzem podobnej do niego wymiarami katedry w Laon. Wnętrze katedry w Reims to już pustka rozświetlona kolorowym światłem z wielkich witraży, które zajmują większość ścian.

O modelowaniu fotoelastycznym można przeczytać na str. 17.



## Sterczyna







**Rozwiązanie zadania M 521.**  
Niech  $ABC$  będzie danym trójkątem. Istnieje przekształcenie afiniczne  $f$ , przekształcające ten trójkąt na trójkąt równoboczny  $A'B'C'$ . Wiadomo, że przekształcenia afiniczne przeprowadzają elipsy na elipsy oraz zachowują stosunek pól. Opiszmy okrąg  $O'$  na  $A'B'C'$  i niech  $E$  będzie elipsą, opisaną na  $ABC$ , przy czym  $f(E) = O'$ . Stosunek pola  $O'$  do pola  $A'B'C'$  (a także pola  $E$  do pola  $ABC$ ) wynosi  $r$ . Zauważmy teraz, że trójkątem o największym polu, wpisanym w okrąg, jest trójkąt równoboczny. Ponadto każdą elipsę można przekształcić afinicznie na okrąg. Dlatego stosunek pola każdej elipsy do pola każdego trójkąta wpisanego jest nie większy niż  $r$ . W rezultacie elipsa  $E = f^{-1}(O')$ , dla której stosunek pól wynosi  $r$ , jest szukany rozwiązaniem.

Możliwość wznoszenia ogromnych, pustych budowli o ażurowych ścianach zawdzięczali budowniczości średniowieczni wielkiemu wynalazkowi „latającego” łuku przyporowego, przenoszącego naprężenia górnych części ścian (pochodzące od ciężaru dachu i sklepienia nawy) na masywne filary umieszczone na zewnątrz budowli (rysunek na okładce). Dzięki łukom przyporowym ściana nawy nie przenosiła już dużych naprężeń, co umożliwiło zwiększenie jej wysokości, zmniejszenie grubości i wreszcie przebicie w niej ogromnych okien, prawdziwej koronki kamiennych kolumniek, łuków i ozdób.

Nie wiemy, kto był autorem tego wynalazku, ale możemy dość dokładnie prześledzić, jak został on dokonany. Stadium pośrednim była tu katedra w Laon, gdzie nad nawami bocznymi wybudowano jak gdyby drugie nawy, tzw. emporia. Łuki sklepień emporiów przenosiły rozpierające naprężenia nawy głównej na zewnętrzne masywne przypory ściany nawy bocznej. Pozwoliło to na zwiększenie względnej wysokości nawy głównej w stosunku do naw bocznych oraz niemal dwukrotne poszerzenie nawy głównej. Stąd tylko jeden krok do przeniesienia łuków emporiów na zewnątrz budynku – czyli do konstrukcji łuku przyporowego. Pierwszy znany nam łuk przyporowy wybudowano w 1180 r. w katedrze Nôtre Dame w Paryżu, a już w 1193 r. w Chartres zbudowano podwójne łuki przyporowe; dolny przenosił naprężenia statyczne pochodzące przede wszystkim od sklepienia nawy głównej, górny zaś naprężenia dynamiczne związane z działaniem wiatru na wysoki dach katedry.

Można powiedzieć, że przełom techniczny dokonał się w ciągu jednego pokolenia budowniczych. Jak to się jednak stało, stanowi zagadkę, której rozwiązaniu poświęcili wiele uwagi historycy sztuki i architektury oraz budowniczowie i konstruktorzy. Historycy sztuki zwrócili uwagę na klimat intelektualny, społeczny i gospodarczy czasu katedr, który w Europie Zachodniej był okresem prosperity gospodarczej oraz wielkiego rozwoju filozofii scholastycznej. Te niezwykle cenne rozważania dostarczają nam wyjaśnień, dlaczego właśnie wtedy rozpoczęto budowę większych i wyższych kościołów, ale nie tłumaczą, jak to mogło być możliwe od strony technicznej.

Próby rozwiązania zagadki przez budowniczych i architektów do niedawna nie doprowadzały do rozwiązania, a nawet można powiedzieć, że oddalały nas od niego, gdyż wiele wyników otrzymanych do 1960 r. okazało się po prostu wynikami błędnymi. Istotny przełom związany jest z nazwiskiem prof. Roberta Marka z Uniwersytetu w Princeton, który w latach sześćdziesiątych rozpoczął wraz z grupą współpracowników analizę naprężeń w budowlach gotyckich posługując się technikami modelowania w materiałach fotoelastycznych. Badania te zostały w latach siedemdziesiątych uzupełnione przez obliczenia komputerowe (metodami elementów skończonych). Wyniki badań prof. Marka są zbyt obszerne, żeby można je było przedstawić w tym artykule. Ograniczę się do opisu techniki doświadczalnej, dzięki której można było rozwiązać wiele zagadek, takich jak pytanie czy górne łuki przyporowe były tylko elementami zdobniczymi lub czy sterczyny na szczytach przypór są tylko elementami dekoracyjnymi, czy też są niezbędne dla stabilności konstrukcji. Nim jednak opiszę wyniki i technikę doświadczalną, muszę poświęcić kilka zdań siłom działającym na konstrukcję katedr oraz własnościom materiałów budowlanych używanych do budowy katedr.



**Rozwiązanie zadania M 522.**  
Mamy

$$f(s) \cdot f(t) = h(ts),$$

gdzie  $h$  jest pewną funkcją. Biorąc pochodną obu stron względem zmiennej  $s$  otrzymujemy

$$f'(s) \cdot f(t) = t \cdot h'(ts),$$

skąd po uwzględnieniu pierwszego równania mamy

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = t \cdot \frac{h'(ts)}{h(ts)}.$$

Po podstawieniu  $t = \frac{1}{s}$  otrzymujemy

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{h'(1)}{h(1)} = \frac{1}{s} \cdot A.$$

Zatem

$$[\log f(s)]' = A \cdot \frac{1}{s},$$

czyli

$$\log f(s) = A \cdot \log s + C,$$

gdzie  $C$  może być dowolną stałą. Ostatecznie

$$f(s) = e^C \cdot s^A = D \cdot s^A,$$

gdzie  $D > 0$ .

Wobec tego  $f$  jest (z dokładnością do stałej) funkcją potęgową.

## Średniowieczne materiały budowlane

Do budowy francuskich katedr używano ciosów kamiennych, najczęściej z wapienia – kamienia, który można łatwo obrabiać. Jeżeli w pobliżu budowy brakło wapienia, decydowano się na trudniejszy surowiec – piaskowiec, tuf wulkaniczny lub nawet granit. Ciosy były spajane za pomocą zaprawy wapiennej – wodnej zawiesiny kryształów wodorotlenku wapnia. Nadmiar wody wyparowywał lub był wchłaniany przez kamień; proces wiązania zaprawy trwał od kilku dni do kilku tygodni. Innym ważnym materiałem budowlanym było drewno. Drewniane belki stosowano w więźbie dachowej. Drewno służyło również do konstrukcji rusztowań podtrzymujących łuki przyporowe od dołu, do czasu związania zaprawy.

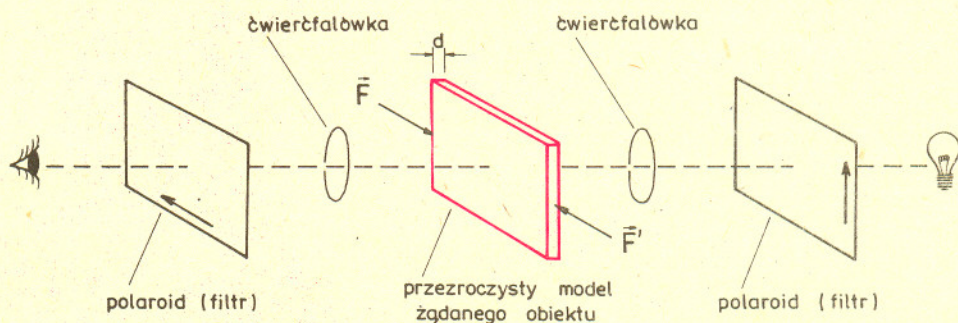
Wytrzymałość wapienia – podstawowego budulca katedr – zależy silnie od rodzaju naprężenia. Wapień jest stosunkowo odporny na ściskanie w zakresie naprężeń  $2 \cdot 10^7 - 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ , ale jego odporność na rozciąganie jest mniej więcej dziesięć razy mniejsza:  $2 \cdot 10^6 - 2 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ . Zaprawa wapienna, oczywiście po pełnym związaniu, jest w stanie wytrzymać rozciąganie mniej więcej dziesięć razy słabsze niż wapień, tj.  $2 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ , stanowi więc najslabsze ogniwo budynku. Innym typem naprężeń, które występuje w obszarach łuków przyporowych, jest zginanie. Jednorodny cios wapienny jest dość odporny na to odkształcenie, ale łuki przyporowe były budowane z wielu bloków kamiennych połączonych zaprawą i właśnie zaprawa między blokami najslabiej znosi zginanie.



Średniowieczny budowniczy musiał więc zadbać o to, żeby siły rozciągające i zginające były jak najmniejsze, nie musiał zaś zbyt przejmować się siłami ściskającymi. W jaki sposób umiano ocenić, czy siły nie przekroczyły wartości dopuszczalnych? Nie wiemy dokładnie, jak to robiono, ogromną rolę odgrywało z pewnością doświadczenie, wieloletnie terminowanie w zawodzie. Być może wykorzystywano pewną specyficzną własność budowli wiązanych zaprawą wapienną, która ma stosunkowo długi czas wiązania. Po wymurowaniu elementów budynku, zaś przed ostatecznym związaniem elementów zaprawy można częściowo usunąć rusztowanie. Jeżeli naprężenia są zbyt duże, zaprawa zaczyna wtedy pękać. Można ustawić rusztowanie z powrotem i wzmocnić konstrukcję. Warto zwrócić tu uwagę, że katedra gotycka ma w zasadzie strukturę modułarną – składa się z wielu identycznych sekcji. Doświadczenia zebrane przy konstrukcji pierwszej sekcji mogą być przeniesione bez zmian na następną.

### Modelowanie konstrukcji i obciążeń katedr

Metoda, którą zastosował prof. Mark, jest znana od sześćdziesięciu lat. Polega ona na wykorzystaniu własności żywic epoksydowych, tzw. fotoelastyczności, czyli zamrażania naprężeń. Próbkę z materiału fotoelastycznego poddana naprężeniom w temperaturze około 150°C i następnie ochłodzona do temperatury pokojowej wykazuje pamięć tych naprężeń. Materiał fotoelastyczny charakteryzuje się dwójłomnością wymuszoną pod wpływem naprężeń, a różnica współczynników załamania promieni zwyczajnych i nadzwyczajnych jest proporcjonalna do występującego naprężenia. Umieszczając próbkę w polarymetrze (rys.2) i oświetlając ją światłem monochromatycznym obserwujemy prążki interferencyjne.



Rys.2. Polaryzacyjna analiza naprężeń.

Oświetlając próbkę światłem białym możemy zaobserwować piękne interferencyjne wzory barwne (rysunki na tylnej okładce). Jakościowo, obszary o dużym zagęszczeniu linii są obszarami dużych naprężeń, naprężenia zginające charakteryzują się niemal równoległymi liniami interferencji wzdłuż osi elementu, brak linii to małe naprężenia. Metoda polegająca na wykorzystaniu fotoelastyczności nadaje się również do obliczeń ilościowych. Naprężenie  $f_m$  (na jednostkę długości) w punkcie modelu, charakteryzującym się rzędem interferencji  $N$ , jest proporcjonalne do  $N$ :

$$(1) \quad f_m = K \cdot N,$$

gdzie czynnik kalibrujący  $K$  możemy wyznaczyć z niezależnego pomiaru poddając prosty element, np. prostopadłościan, znanemu naprężeniu. Za pomocą wzoru (1) oraz interpolacji możemy wykonać mapę naprężeń w modelu. Porównanie naprężenia statycznego  $f_m$  w modelu i w konstrukcji w pełnej skali  $f_p$  jest możliwe dzięki skalowaniu. Jeżeli wszystkie elementy konstrukcji są przeskalowane przez ten sam czynnik oraz rozkłady sił zewnętrznych działających na model i konstrukcję są takie same, wtedy można wprowadzić parametr bezwymiarowy wiążący wymiary geometryczne, siły zewnętrzne (obciążenia) i naprężenia wewnątrz konstrukcji; parametr ten będzie miał taką samą wartość dla konstrukcji i modelu.

W naszym przypadku między naprężeniem  $f$ , wysokością budynku  $L$  i całkowitym obciążeniem  $F$  zachodzi następujący związek:

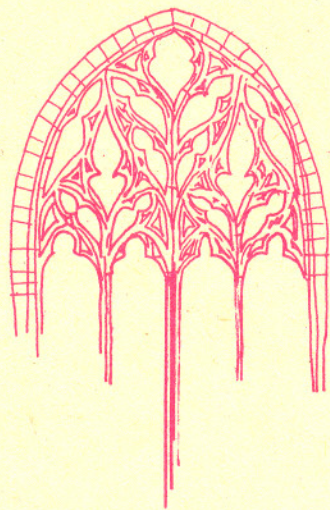
$$(2) \quad f_m \frac{L_m}{F_m} = f_p \frac{L_p}{F_p}$$

( $m$  – model,  $p$  – konstrukcja w pełnej skali), czyli

$$(3) \quad f_p = f_m \frac{L_m}{L_p} \frac{F_p}{F_m},$$

gdzie  $(L_m/L_p)$  jest skalą modelu,  $(F_p/F_m)$  jest stosunkiem całkowitych obciążeń konstrukcji i modelu. Za pomocą wyrażeń (1) i (3) można więc prosto obliczać naprężenia konstrukcji o zawiłych kształtach stosując badania modelowe.



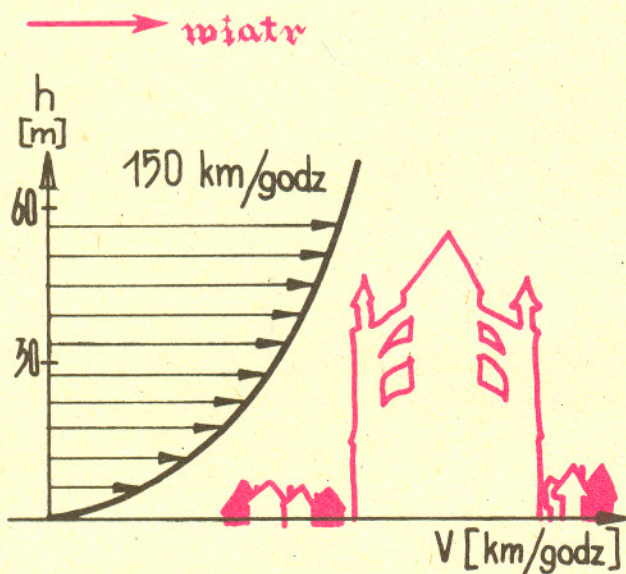


Metoda ta jest powszechnie stosowana np. w przemyśle lotniczym lub przy projektowaniu osłon reaktorów elektrowni atomowych. Zastosowanie jej do badania katedr wymagało zbadania obciążeń działających na te wysokie budowle. Obciążenia mogą być statyczne – przede wszystkim ciężar sklepienia i dachu, oraz dynamiczne – ciężar śniegu zgromadzonego na dachu lub ciśnienie wiatru. Poprawne uwzględnienie siły wiatru okazało się trudne. Prędkość wiatru zależy od wysokości nad ziemią oraz od otoczenia budynku – im więcej wysokich domów w okolicy, tym jest ona mniejsza. Prof. Mark ocenił tę prędkość posługując się danymi meteorologicznymi zebranymi w okolicy katedr oraz przyjmując zabudowę okolicy odpowiadającą wysokością średniowiecznemu miastu. Typowa zależność prędkości wiatru od wysokości dla okolic katedry w Amiens przedstawiona jest na rysunku 3.

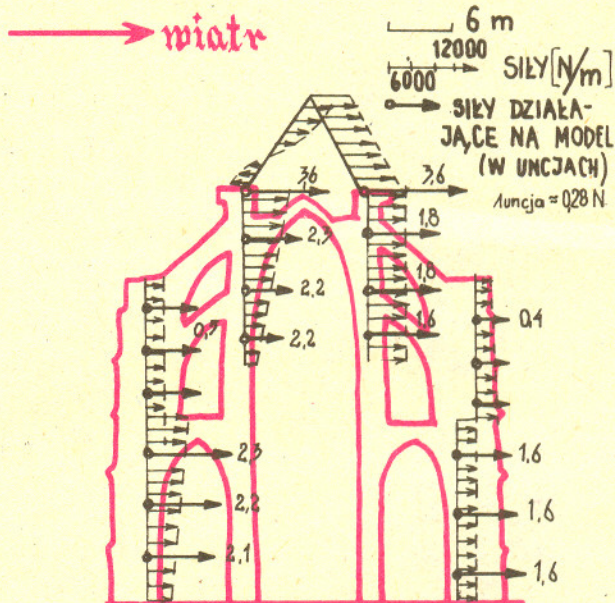
Dokładniejsze badania w tunelu aerodynamicznym pokazały, że ciśnienie wiatru (lub podciśnienie na zawietrznej stronie katedry) jest skomplikowaną funkcją prędkości  $v$  i wysokości nad ziemią  $h$ :

$$(4) \quad p(V, h) = \frac{1}{2} C(h) \cdot G \cdot V^2.$$

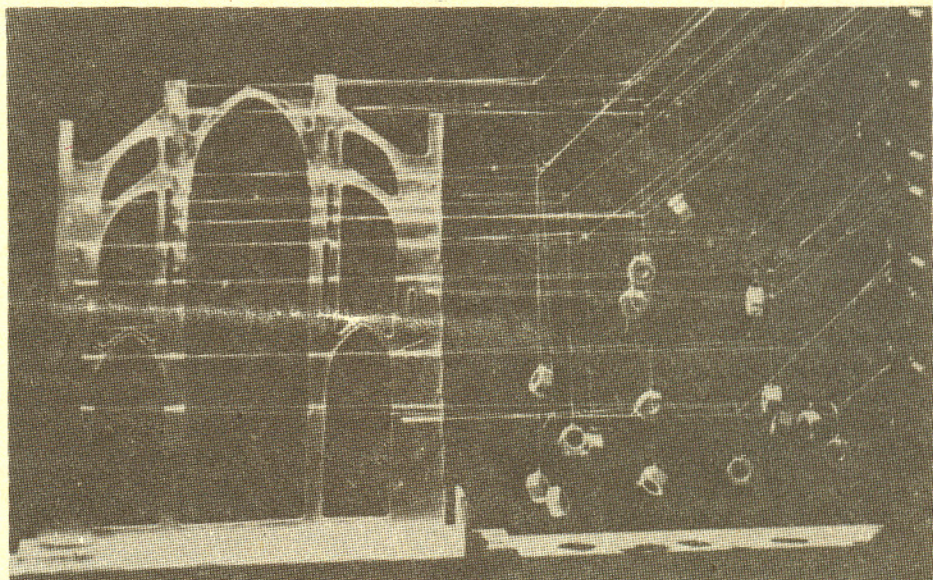
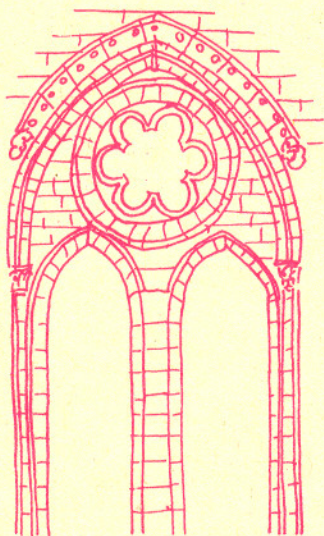
Zmienność współczynnika  $C(h)$  pokazana jest na rysunku 4. (Czynnik  $G$  został wprowadzony, żeby uwzględnić nierównomierne porywy wiatru.) Wynikiem zastosowania wzoru (4) jest np. rozkład obciążeń (w N/m) pokazany także na rysunku 4; na tym rysunku pokazano również miejsca, w których został obciążony model służący do badań fotoelastycznych. Poniżej zamieściliśmy fotografię modelu katedry w Amiens przygotowanego do pomiaru uwzględniającego wpływ wiatru.



Rys.3



Rys.4

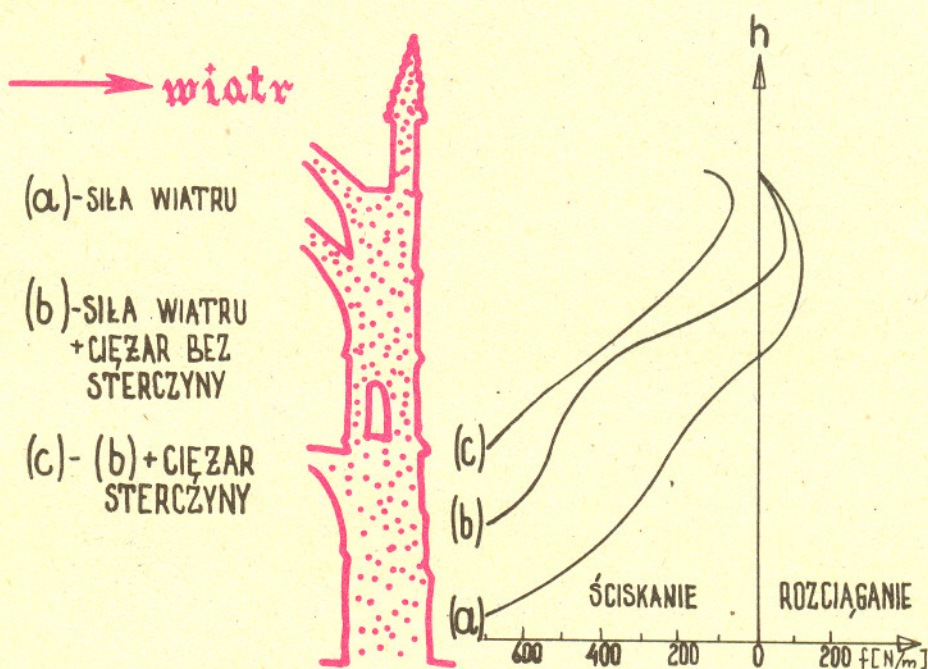




## Czy sterczyń katedry w Amiens mają znaczenie konstrukcyjne

Jako pierwsze z zastosowań metody doświadczalnej opisanej powyżej prof. Mark wybrał modelowanie naprężenia w okolicy sterczyń przypory katedry w Amiens (rysunek na okładce). Ta wspaniała budowla rozpoczęta przez Roberta de Luzarches około 1220 r., jest od lat uważana przez historyków sztuki za typowy przykład Gotyku Wzniosłego, zarówno dzięki swej wysokości (nawa – 42 m), jak i elegancji, logicznej spójności i lekkości konstrukcji. Jeden z wybitnych architektów XIX w. Viollet-le-Duc, szermierz logiki konstrukcyjnej gotyku, uważał, że sterczyńa umieszczona na skraju przypory ma do spełnienia ważną rolę konstrukcyjną, ale nie umiał tego stwierdzenia udowodnić. Na pierwszy rzut oka wydaje się to stwierdzeniem dziwnym. Po pierwsze – całkowity ciężar sterczyńy (0,5 t) jest zanedbywalny w stosunku do ogromnego ciężaru przypory (1000 t). Po drugie – można by się spodziewać, że sterczyńa umieszczona bliżej osi nawy mogłaby mieć pewne znaczenie konstrukcyjne równoważąc momenty sił rozpychających przypory na zewnątrz. Niemal powszechną praktyką było jednak umieszczanie sterczyń na zewnętrznej stronie przypory, gdzie mogły one tylko zwiększać momenty sił, a więc niepożądane odkształcenia zginające i rozciągające łuki przyporowe.

Badania fotoelastyczne pozwoliły ustalić jednak, że lokalne znaczenie sterczyńy w konstrukcji poddanej wpływowi wiatru ma kluczowe znaczenie dla stabilności konstrukcji. Na rysunku 5 widzimy siłę działającą na zewnętrzną krawędź zawietrznej przypory: uwzględniono tu osobno siłę wiatru, sumę siły wiatru i obciążeń grawitacyjnych bez sterczyńy i wreszcie wypadkową siłę uwzględniając ciężar sterczyńy.



Rys.5

O ile bez sterczyńy górna część przypory podlega siłom rozciągającym, to dodanie sterczyńy zmienia zwrot siły na ściskającą. Jak wiemy, budowle gotyckie „nie znoszą” rozciągania. Dalsze doświadczenia pokazały, że umieszczenie sterczyńy bliżej osi nawy nie zmienia zwrotu siły, a więc nie prowadzi do oczekiwanych efektów.

## Porównanie konstrukcji katedr w Bourges i Chartres – budownictwo indywidualne i projekt typowy

Katedry w Chartres i Bourges zaczęto budować mniej więcej w tym samym czasie – około 1195 r. Katedra w Chartres (rysunek na tylnej okładce) z masywnymi, podwójnymi łukami przyporowymi była konstrukcją typową – na niej wzorowali się budowniczowie późniejszych katedr w Amiens, Reims, Rouen. Pięcionawowa katedra w Bourges pozostała bez naśladowców. Obie katedry powstawały w okresie eksperymentowania z łukami przyporowymi, ich konstruktorzy zastosowali je w odmienny sposób. Łuk z przyporą w systemie Chartres waży około 1000 t, w systemie Bourges jest o 60% lżejszy, waży około 400 t. Dlaczego właśnie cięższy i droższy system Chartres został powielony w innych budowlach ?



## FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

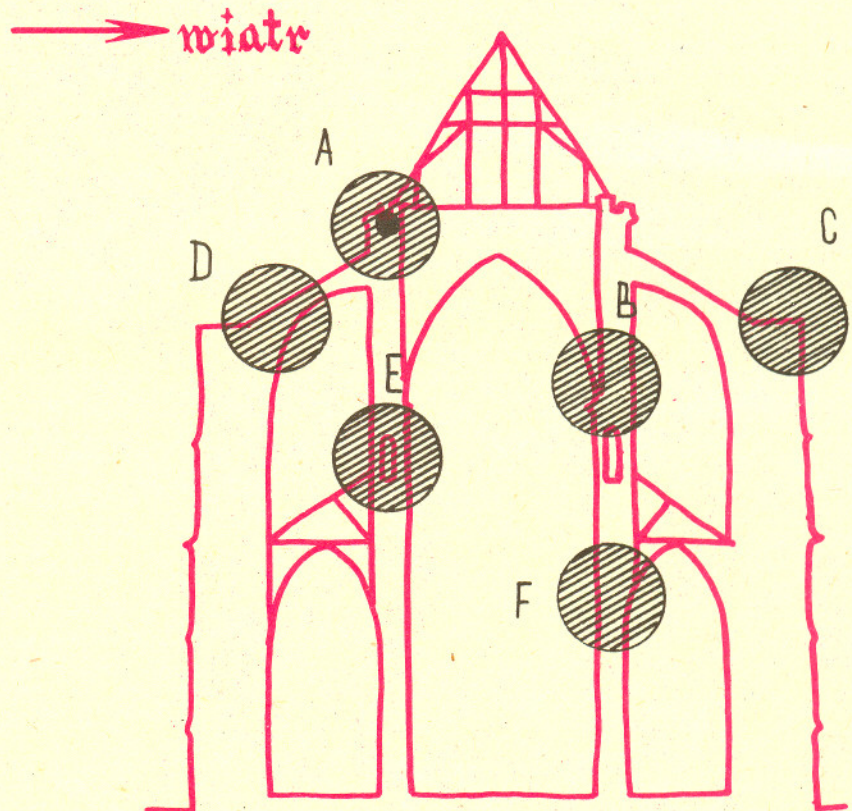
### NERWOPODOBNE SIECI ELEMENTÓW ELEKTRONICZNYCH

Sposób pracy najlepszego znanego "komputera osobistego", jakim jest mózg ludzki, jest, jak dotąd, istotnie różny od zasad działania obecnie wytwarzanych mikroprocesorów i budowanych z nich bardziej złożonych układów. Współczesne małe i duże komputery są w stanie wykonywać niezwykle szybko ogromne ilości konkretnych, zadanych poleceń. Natomiast w niewielkim stopniu dysponują one umiejętnością uczenia się i aktywnego dostosowywania do danego problemu. Różnica ta będzie jednak w najbliższym czasie maleć, gdyż rozpoczęto już opracowywanie i wytwarzanie układów elementów elektronowych imitujących strukturę sieci neuronowej w organizmach żywych. Kilka amerykańskich laboratoriów kończy opracowywanie całej gamy nerwopodobnych obwodów scalonych. Na przykład grupa fizyków ciała stałego pracujących w Pasadenie (Kalifornia, USA) ogłosiła, że przed końcem roku 1988 będzie dysponować nerwopodobnym układem scalonym o wysokiej skali integracji (VLSI). Układ ten ma być stworzony z mniejszych "synaptycznych klocków", z których każdy jest zbudowany z matrycy  $32 \times 32$  jednobitowych komórek. Podobne cyfrowo-analogowe układy scalone przygotowywane są przez laboratoria wielkiej amerykańskiej firmy Bell. Z kolei fizycy z Uniwersytetu w Pittsburgu (Pensylwania, USA) opracowali specjalne elementy elektronowe imitujące pracę pojedynczych neuronów. W Kalifornii powstała już nawet firma Synapsis Inc., która ma zamiar zacząć produkcję i sprzedaż nerwopodobnych układów scalonych. Natomiast teoretycy pracujący w Los Alamos (Nowy Meksyk, USA) sprawdzają obecnie na superkomputerze Cray X-MP algorytmy sieci neuronowych i twierdzą, że są one stokrotnie dokładniejsze od metod obecnie stosowanych. Generalnie rzecz biorąc, nerwopodobne sieci będą mogły być stosowane do szybkiego przetwarzania obrazów. (Spotykając znajomego na ulicy nie porównujemy jego wizerunku ze wszystkimi znanymi sobie osobami — a tak by postępował tradycyjny komputer.) Dalej — do nauki i rozpoznawania charakterów pisma, do odtwarzania brakujących elementów jakiegoś układu i innych podobnych działań itp. Niektórzy twórcy twierdzą, że wprost trudno jest przewidzieć możliwe zastosowania tych nowych układów. Czy to wszystko oznacza możliwość konstrukcji myślących komputerów? Raczej za wcześniej o tym mówić. Po prostu dzięki nerwopodobnym układom scalonym i nowemu rodzajowi oprogramowania imitującego proces myślenia kolejne generacje komputerów będą trochę "mniej beżmyślne". W końcu umiejętność czytania różnych charakterów pisma czy rozpoznawania i klasyfikacji obserwowanych obiektów posiada już, w wysokim stopniu, dziesięcioletnie dziecko. Można więc stwierdzić, że komputery wychodzą powoli z wieku niemowlęcego i posyłamy je do szkoły podstawowej.

Badania modelowe prof. Marka wykazują, że system Bourges jest nieporównanie bardziej bezpieczny, np. maksymalne naprężenie rozciągające występuje po nawietrznej stronie katedry w okolicy połączenia górnego łuku przyporowego ze ścianą nawy i wynosi około  $7 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ . W systemie Chartres w tym samym miejscu naprężenie jest prawie cztery razy większe (około  $3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ ). Nacisk wiatru na sekcję nawy w Bourges wynosi około  $6 \cdot 10^4 \text{ N}$ , w Chartres zaś prawie dwa razy tyle —  $1,1 \cdot 10^5 \text{ N}$ .

Porównując przekroje naw pokazane na rysunku na tylnej okładce zauważamy, że łuki przyporowe w Bourges opadają bardziej stromo niż łuki w Chartres oraz dolny łuk przyporowy w Bourges styka się ze ścianą nawy bliżej i niżej niż w Chartres. Dzięki temu większość naprężeń dynamicznych związanych z wiatrem jest przenoszona przez bardziej masywny dolny łuk przyporowy. W systemie Chartres dolne łuki przyporowe są zbyt nisko, żeby mogły spełniać tę rolę, stąd dużo większe naprężenia rozciągające górnych łuków po nawietrznej stronie katedry. Ponadto górny łuk przyporowy dotyka ściany katedry bardzo wysoko, tuż obok wiązań dachowych, tylko po to, żeby uniemożliwić pojawienie się krytycznych napięć rozciągających, gdyby zawiął wiatr.

Badania modelowe pokazują więc, że system Bourges był dużo bardziej racjonalny i bezpieczny oraz dwukrotnie tańszy. Najwyraźniej nie zgadzał się on jednak z wyobrażeniami średniowiecznych budowniczych dotyczącymi bezpieczeństwa katedr. Dowód tego znajdujemy w dwóch ostatnich przeszłach nawy w Bourges, zbudowanych po 1232 r., po zaangażowaniu nowego budowniczego, który nie chciał (lub nie mógł) zmienić systemu lekkich łuków Bourges na masywne łuki Chartres, ale najwyraźniej czuł się nieswojo. Zwiększył więc niemal dwukrotnie grubość dwóch ostatnich górnych łuków przyporowych. Jak przekonywająco wykazał prof. Mark, nie istniały ku temu powody konstrukcyjne.



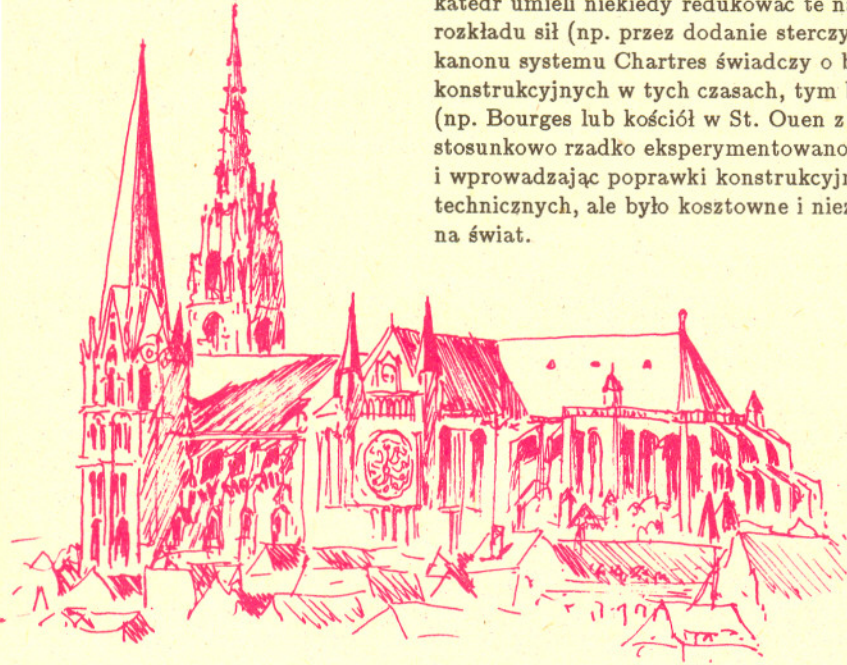
Rys.6.

- A — przedłużenie łuków przyporowych po stronie nawietrznej — zginanie i rozciąganie (Chartres)
- B — przedłużenie łuków przyporowych po stronie zawiętrznej — zginanie i obrót (Chartres)
- C — zawiętrzna kawęrdź przypory — rozciąganie (Amiens)
- D — łuk przyporowy — zginanie i rozciąganie (Chartres)
- E — okolice obejścia na poziomie dachu nawy bocznej — duże naprężenia ściskające filarów zewnętrznych (Bourges)
- F — połączenie filarów nawy głównej z filarami ściany nawy — silne naprężenia zginające (Beauvais).

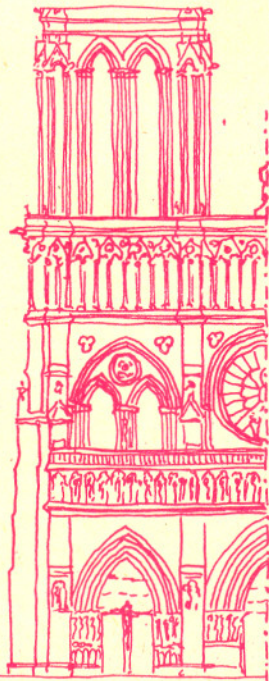
W nawiasach podano nazwy katedr, w których w odpowiednich obszarach naprężenia przekraczają krytyczne wartości.



Analiza strukturalna katedr gotyckich oparta o modelowanie fotoelastyczne pozwoliła na wyjaśnienie kilku zagadek związanych z ich budową. Wyodrębniono kilka obszarów, w których mogą występować krytycznie duże naprężenia rozciągające (rys.6), związane przede wszystkim z parciem wiatru na budowlę. Okazało się, że budowniczowie katedr umieli niekiedy redukować te naprężenia za pomocą zmiany lokalnego rozkładu sił (np. przez dodanie sterczyny lub filarów). Z drugiej strony przyjęcie jako kanonu systemu Chartres świadczy o bardzo niedoskonałym zrozumieniu problemów konstrukcyjnych w tych czasach, tym bardziej że istniały konstrukcje doskonalsze (np. Bourges lub kościół w St. Ouen z końca XIII w.). Świadczy to także o tym, że stosunkowo rzadko eksperymentowano z konstrukcjami, np. badając pęknięcia zaprawy i wprowadzając poprawki konstrukcyjne, co leżało w zakresie ówczesnych możliwości technicznych, ale było kosztowne i niezgodne ze średniowiecznym sposobem patrzenia na świat.



Katedra  
w Chartres



Katedra  
Notre-Dame  
w Paryżu



## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

**M 520.** Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , gdzie  $u_n > 0$ , jest zbieżny. Niech  $r_n = u_n + u_{n+1} + \dots$

Udowodnić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{r_n}$  jest rozbieżny.

Rozwiązanie na str.13

**M 521.** Jaka elipsa opisana na trójkącie ma najmniejsze pole ?

Rozwiązanie na str.2

**M 522.** Dodatnia i różniczkowalna funkcja  $f$ , określona na przedziale  $(0, \infty)$  ma następującą własność:  $f(s) \cdot f(t)$  zależy tylko od iloczynu  $s \cdot t$ . Jaka funkcja może być  $f$  ?

Rozwiązanie na str.2

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

**F 254.** Wyobraźmy sobie, że w pewnej chwili wszystkie cząsteczki powietrza znajdujące się w piłce futbolowej leżącej na podłodze zaczęły poruszać się pionowo w górę. Ocenić, na jaką wysokość wzniosłaby się wtedy piłka ? Przyjąć masę piłki  $M$  równą 400 g, promień  $r = 10$  cm, a ciśnienie powietrza wewnątrz piłki  $p = 1,5p_0$ , gdzie  $p_0 = 10^5$  Pa jest normalnym ciśnieniem atmosferycznym. Temperatura powietrza wynosi  $0^\circ\text{C}$ . Średnia masa molowa powietrza  $\mu$  jest równa 29 g/mol.

Rozwiązanie na str.12

**F 255.** Ocenić prędkość pocisku wylatującego z naboju, który eksploduje wrzucony do ogniska. Prędkość pocisku wylatującego przy wystrzale tego samego naboju w strzelbie wynosi około 800 m/s. Stosunek masy pocisku do masy łuski wynosi  $m_p/m_l = 3$ .

Rozwiązanie na str.15





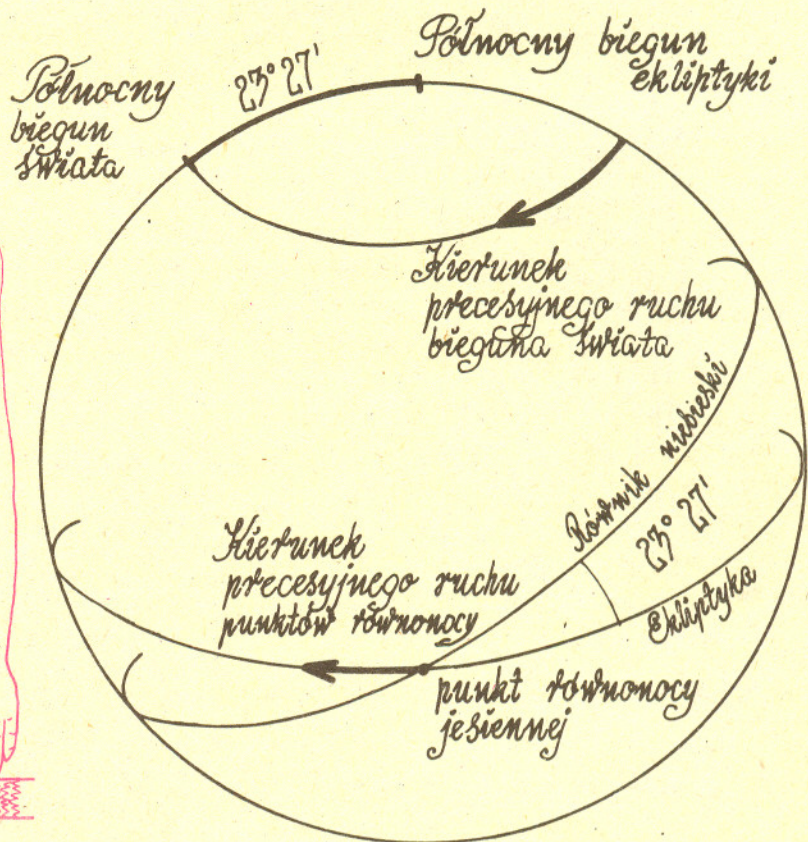
# mata delta

## Precesja i piramidy

Na przedłużeniu ziemskiej osi obrotu leży – w przybliżeniu – Gwiazda Polarna. Dlatego jest ona doskonałym drogowskazem; patrząc na nią na wprost stoimy zarazem przodem w kierunku północnym.

Tak przedstawia się sytuacja „na dziś”, bowiem oś ziemiska nie zachowuje stałego kierunku w przestrzeni. Jest mianowicie tak, że niemal stałe położenie wśród gwiazd zajmuje ekliptyka (roczna droga Słońca), a więc też jej bieguny (północny leży w gwiazdozbiornie Smoka). Natomiast równik niebieski, leżący, oczywiście, w płaszczyźnie równika ziemskiego, zachowując stałe nachylenie do ekliptyki (kątem  $\epsilon$ ) zmienia powoli orientację, tak że punkty jego przecięcia z ekliptyką (punkt równonocy wiosennej i jesiennej) przesuwały się po niej w kierunku zaznaczonym strzałkami. W rezultacie północny biegun świata (Pn) wędruje wokół północnego bieguna ekliptyki po kole o „promieniu” również  $\epsilon$ . Zjawisko to nazywa się precesją, a przyczyną jego jest fakt, że Ziemia nie jest dokładnie kulista i jej ruch wirowy zaburzany jest przez Księżyc i Słońce. Ziemia zachowuje się w przybliżeniu jak wirujący bąk, którego oś usiłuje ktoś odchylić.

*Aut ukazano jako ocean niebieski połykający nocne słońce i oddający słońce dzienne, które oświetla symboliczne przedstawienie Dendery*

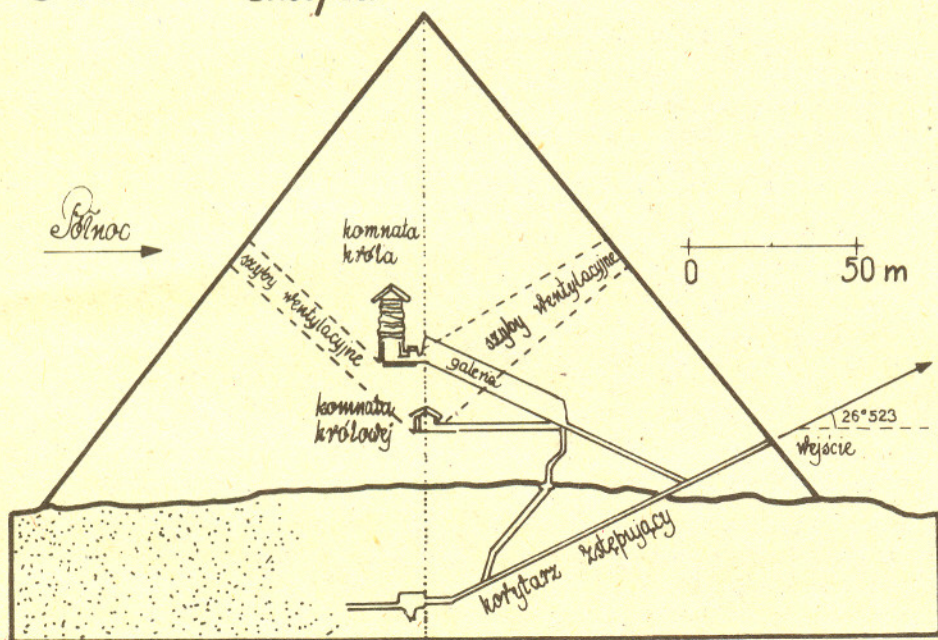




Tempo precesji jest zbyt małe, by zauważyć to zjawisko z dnia na dzień. Punkty równonocy przesuwały się o  $50''/26/\text{rok}$ , a więc ich pełny obieg po ekliptyce trwa 26 000 lat – jest to tzw. rok platoński. Tak więc na początku naszej ery punkty te znajdowały się w przybliżeniu o  $30^\circ$  od pozycji zajmowanych obecnie! Pamiętajmy, że wtedy astronomowie greccy wprowadzili pojęcie zodiaku i wtedy właśnie np. punkt równonocy wiosennej, czyli punkt Barana, leżał w gwiazdozbiornie Barana. Dziś natomiast punkt Barana leży w Rybach! Biegun świata z kolei dwa i pół tysiąca lat temu leżał w pobliżu najjaśniejszej gwiazdy Smoka,  $\alpha$  *Draconis*, czyli Thubanu.

Ten właśnie fakt zaczyna mieć związek z piramidami. Już John Herschel na początku XIX w. sugerował, że główny korytarz zstępujący w piramidzie Cheopsa został tak zaprojektowany, by w jego przedłużeniu widać było ówczesną „gwiazdę polarną”, czyli Thubana. Jednak Percival Lowell na początku XX w. doszedł do wniosku, że Thuban znajdował się w przedłużeniu tego korytarza wieśset lat przed i wieśset lat po zbudowaniu piramidy, co – jak wiemy z przekazów historycznych – nastąpiło około 2800 r.p.n.e.

## Piramida Cheopsa

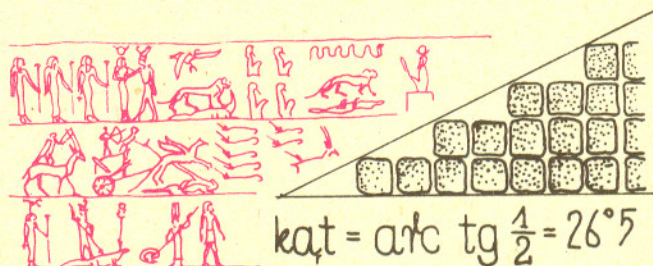


*Trzyda matka Horusa  
i matronka Ozyrysa,  
Wielka Pani Nebios*



Niedawno R.L.Walker z Naval Observatory jeszcze raz powtórzył obliczenia i doszedł do wniosku, że w czasach budowy piramidy główny korytarz nie celował w żadną jaśniejszą gwiazdę, a powód, dla którego jego nachylenie wynosi  $26^\circ 5'$ , jest według niego wręcz śmiesznie prosty. Mianowicie jeżeli układać sześciennie kamienne bloki w ten sposób, by wysokość stopnia (1 sześcienny blok) była połową jego szerokości (2 sześciennie bloki), to średnia pochyłość takich stopni wyjdzie właśnie taka. Za tym tłumaczeniem przemawia też fakt, że inne korytarze w piramidzie, z których nieba nie widać, również mają takie nachylenie.

Walker twierdzi też, że ani zainteresowanie astronomią, ani znajomość trygonometrii nie była u starożytnych Egipcjan tak wielka, by według jakichś „naukowych” planów prowadzić prace budowlane.



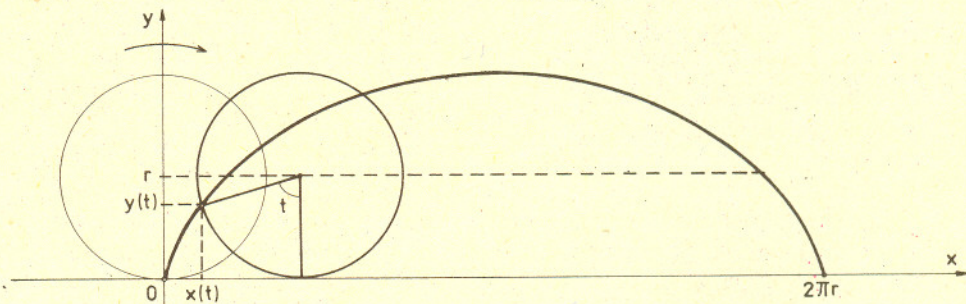
*Małą Deltę przygotował Tomasz KWAST*



# O toczeniu wielokąta

Mgr Jarosław GÓRNICKI

Gdy okrąg o promieniu  $r > 0$  toczymy po prostej  $l$ , to wybrany punkt tego okręgu zakreśla krzywą – cykloidę (rys.1). W prostokątnym układzie współrzędnych opisują ją równania parametryczne:  $x(t) = r(t - \sin t)$ ,  $y(t) = r(1 - \cos t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .



Rys.1. Arkada cykloidy.

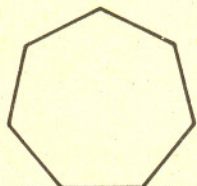
Już w XVII wieku wykazano, że:

- A. Pole figury ograniczonej jedną arkadą cykloidy i osią  $OX$  jest równe  $3 \cdot \pi r^2$  (Gilles Persone de Roberval, 1634);
- B. Długość jednej arkady cykloidy jest równa  $4 \cdot 2r$  (Christopher Wren, 1658).

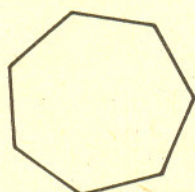
W tym artykule wykażemy analogiczne własności dla krzywej „wyznaczonej” przez toczący się po prostej wielokąt foremny. Dokonamy tego patrząc na płaszczyznę jako na zbiór liczb zespolonych.

Pozycję wielokąta z rysunku 2 będziemy nazywać stabilną.

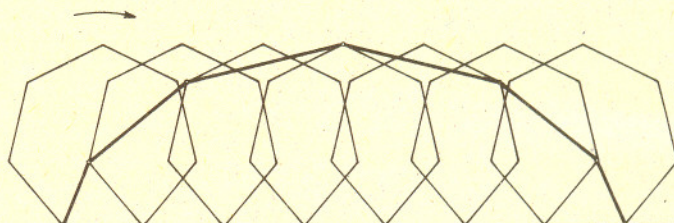
**Definicja.** Wielokątą odpowiadającą  $n$ -kątovi foremnemu to łamana, której wierzchołki wyznaczają ustalony wierzchołek  $n$ -kąta w kolejnych pozycjach stabilnych podczas toczenia wielokąta po prostej.



Rys.2. Pozycja „stabilna”.



Rys.3. Pozycja „niestabilna”.



Rys.4. Arkada wielokątnej odpowiadającej siedmiokątowi foremnemu.

**Twierdzenie 1.** Pole powierzchni ograniczone prostą i arkadą wielokątnej odpowiadającej  $n$ -kątovi foremnemu jest równe potrojonej powierzchni  $n$ -kąta.

**Dowód.** Z geometrii analitycznej wiemy, że pole powierzchni trójkąta o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  dane jest wzorem  $\frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ . Na płaszczyźnie zespolonej wzór ten ma postać  $|\frac{1}{2} \operatorname{Im} \bar{a}_1 a_2|$ , gdzie  $a_k = x_k + iy_k$  dla  $k = 1, 2$ . Zatem pole powierzchni  $n$ -kąta o wierzchołkach  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (przy dodatniej orientacji) zawierającego punkt 0 jest równe  $\frac{1}{2} \operatorname{Im} (\bar{a}_1 a_2 + \bar{a}_2 a_3 + \dots + \bar{a}_n a_1)$ . Rozważmy  $n$ -kąć foremny o wierzchołkach w punktach  $1, z, z^2, \dots, z^{n-1}$ , gdzie  $z = \exp(2\pi i/n)$ .

Jego pole powierzchni wynosi  $\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k z^{k+1} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} n z$ . Zauważmy, że tworząc wielokątą (rys.6) odpowiadającą temu  $n$ -kątovi, przesuujemy w kolejnej pozycji stabilnej „środek”  $n$ -kąta o wektor  $(\bar{z} - 1)$  (o długości boku  $n$ -kąta). Wtedy wierzchołki tworzące arkadę wielokątnej są postaci:

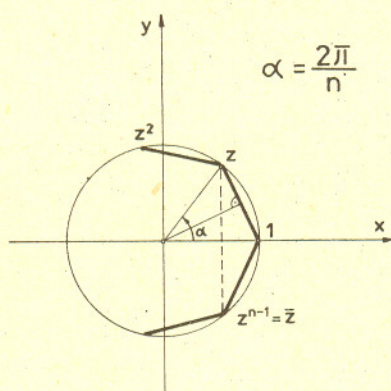
$$a_{j+1} = j \cdot (\bar{z} - 1) + z^j, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Wówczas pole powierzchni interesującej nas figury  $W$  (rys.6) jest równe sumie pól trójkątów  $\Delta a_1 a_2 a_3, \Delta a_1 a_3 a_4, \dots, \Delta a_1 a_{n-1} a_n$ , z których każde możemy wyrazić wzorem (rys.7)

$$|\Delta a_1 a_k a_{k+1}| = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \bar{a}_k a_{k+1} + \frac{1}{2} (\operatorname{Im} \bar{a}_{k+1} - \operatorname{Im} \bar{a}_k), \quad k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

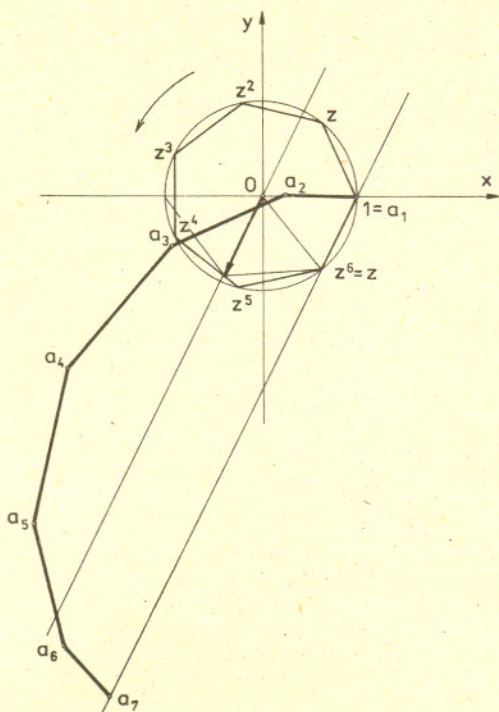
A teraz niezbędne rachunki:

$$\begin{aligned} |W| &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \bar{a}_k a_{k+1} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \sum_{k=1}^{n-1} (\bar{a}_{k+1} - \bar{a}_k) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \sum_{j=0}^{n-1} (j(z-1) + \bar{z}^j) \cdot ((j+1)(\bar{z}-1) + z^{j+1}) \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Im} (n(z-1) - 1) = \end{aligned}$$

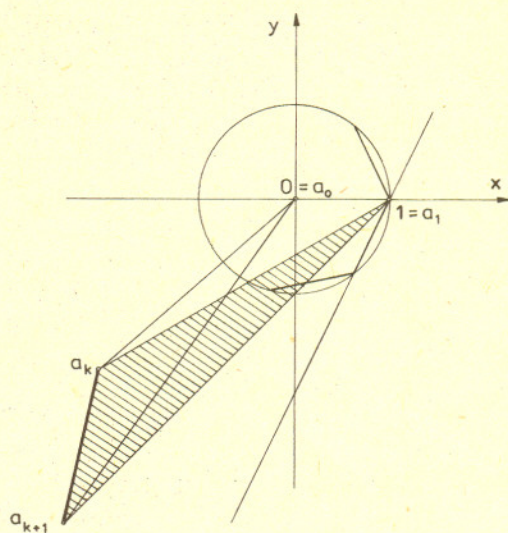


Rys.5





Rys.6



Rys.7.  $|\Delta a_1 a_k a_{k+1}| = |\Delta a_0 a_k a_{k+1}| + |\Delta a_0 a_{k+1} a_1| - |\Delta a_0 a_k a_1|$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \sum_{j=0}^{n-1} (j(z-1)z^{j+1} + (j+1)\bar{z}^j(\bar{z}-1) + z) \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Im} nz = \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( (z-1) \sum_{j=0}^{n-1} (jz^{j+1} - (j+1)z^j) \right) + \operatorname{Im} nz = \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} n(z-1) + \operatorname{Im} nz = 3 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Im} nz
 \end{aligned}$$

i dowód twierdzenia jest zakończony.

Oczywiście, dwa kąty ostre przy podstawie wielokątnej są równe i mają miarę  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})\pi$ . Można również sprawdzić, że miara każdego z pozostałych  $(n-2)$  rozwartych kątów wielokątnej jest równa  $(1 - \frac{1}{n})\pi$ .

Kolej teraz na następną własność.

**Twierdzenie 2.** Długość  $L$  wielokątnej odpowiadającej  $n$ -kąтови foremnemu wynosi  $4(r+R)$ , gdzie  $r$  i  $R$  oznaczają odpowiednio promień okręgu wpisanego i okręgu opisanego tego wielokąta.

**Dowód.** Dla  $n$ -kąta foremnego o wierzchołkach w punktach  $1, z, z^2, \dots, z^{n-1}$  (gdzie  $z = \exp(2\pi i/n)$ ) promień okręgu opisanego  $R$  jest równy 1, a promień okręgu wpisanego  $r = \cos \frac{\pi}{n}$  (rys.5),  $k$ -ty bok wielokątnej ma długość  $|b_k| = |a_{k+1} - a_k|$ , dla  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Krótkie rachunki pokazują, że  $b_k = (1 - \bar{z})(z^k - 1)$ . W szczególności  $|b_1| = |1 - \bar{z}| \cdot |z - 1| = 4 \sin^2 \frac{\pi}{n}$ . Niech  $s = \exp(\pi i/n)$ , czyli  $s^2 = z$ .

$$\text{Wówczas } \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{s^{2k+2} - 1}{s^{2k} - 1} = \frac{s^{2(k+1)} - \bar{s}^{k+1}s^{k+1}}{s^{2k} - \bar{s}^k s^k} = s \cdot \frac{\sin \frac{(k+1)\pi}{n}}{\sin \frac{k\pi}{n}},$$

$$\text{skąd } b_k = s^{k-1} \cdot b_1 \cdot \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}. \text{ Wobec tego } L = \sum_{k=1}^{n-1} |b_k| = 4 \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ponieważ } \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} &= \operatorname{Im} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \exp \left( \frac{k\pi i}{n} \right) \right) = \operatorname{Im} \frac{\exp \left( \frac{\pi i}{n} \right) + 1}{1 - \exp \left( \frac{\pi i}{n} \right)} = \\
 &= \operatorname{Im} \frac{(1 + \cos \frac{\pi}{n}) + i \cdot \sin \frac{\pi}{n}}{(1 - \cos \frac{\pi}{n}) - i \cdot \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 - \cos \frac{\pi}{n}} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}},
 \end{aligned}$$

więc  $L = 4(1 + \cos \frac{\pi}{n})$ , co należało wykazać.

Jeżeli teraz zauważymy, że  $n$ -kąty foremne wpisane w okrąg w miarę wzrostu liczby  $n$  aproksymują go, a kolejne wielokątne przybliżają arkadę cykloidy odpowiadającą okręgowi, to otrzymujemy fakty **A** i **B**.

$$\bar{z} \cdot z = 1$$

$$\bar{z} = z^{n-1}$$

$$\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)z^k = \frac{nz^{n+1} - (n+1)z^n + 1}{(1-z)^2}$$

$$\exp(2\pi i/n) = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$



NGUYEN CHUONG CHI

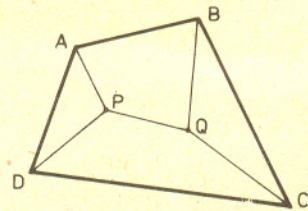
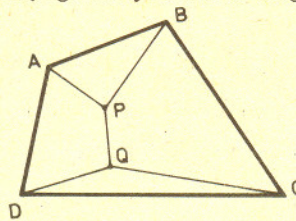
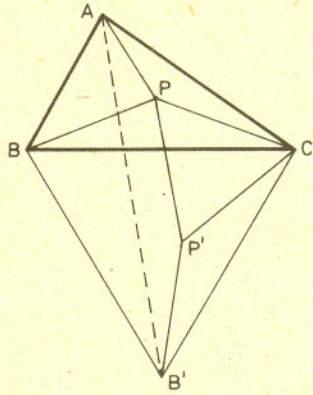
W ligowym zadaniu 151 w *Delcie* 5/1987 chodziło o zaprojektowanie sieci dróg o najmniejszej sumie długości łączących cztery miejscowości w wierzchołkach kwadratu. Chcę tu zaproponować czysto geometryczne rozwiązanie zadania ogólniejszego – kwadrat może być zastąpiony dowolnym czworokątem o kątach nie większych od  $120^\circ$  (nie jest to najszersza klasa czworokątów, do których „pasuje” moje rozwiązanie, ale ograniczymy się tylko do niej).

Rozwiązanie, które proponuję, jest analogiczne do rozwiązania problemu Fermata (patrz np. *Delta* 11/1986). Aby analogia była widoczna, przytoczę to rozwiązanie wraz z krótkim dowodem.

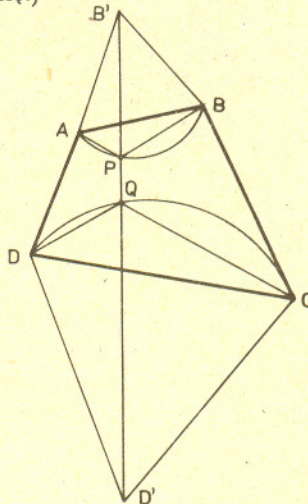
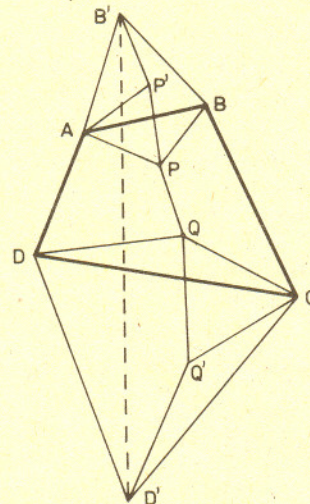
Dla dowolnego trójkąta o kątach nie większych od  $120^\circ$  suma odległości dowolnego punktu od wierzchołków tego trójkąta jest najmniejsza, gdy boki trójkąta są widoczne z tego punktu pod równymi kątami (a więc  $120^\circ$ ).

Dowód: Weźmy trójkąt  $ABC$  spełniający założenia twierdzenia i dowolny punkt  $P$ . Obróćmy punkty  $P$  i  $B$  o  $60^\circ$  wokół  $C$  otrzymując punkty  $P'$  i  $B'$ . Trójkąty  $CBB'$  i  $CPP'$  są zatem równoboczne. W szczególności  $PP' = PC$  i  $P'B' = PB$ . Stąd  $S = PA + PB + PC = AP + PP' + P'B'$ . Ponieważ punkty  $A$  i  $B'$  nie zależą od tego, jak wybraliśmy punkt  $P$ , więc  $S$  ma najmniejszą wartość, gdy łamana  $APP'B$  jest odcinkiem. Łatwo zauważyć, że tak jest, gdy kąty  $APC$  i  $B'P'C$  (równy kątowi  $BPC$ ) mają po  $120^\circ$ .

Przejdźmy teraz do czworokąta. Aby nie powtarzać części rozumowania zamieszczonego przy rozwiązaniu zadania 151 (*Delta* 9/1987), przyjmę, że wystarczy się ograniczyć do sieci dróg złożonych z pięciu odcinków – jak na rysunku poniżej.



Rozważmy pierwszy z nich. Obracając  $P$  i  $B$  wokół  $A$  oraz  $Q$  i  $D$  wokół  $C$  o kąt  $60^\circ$  otrzymujemy odpowiednio  $P'$  i  $B'$  oraz  $Q'$  i  $D'$ . Analogicznie jak w przypadku trójkąta  $S = PA + PB + PQ + QC + QD = B'P' + P'P + PQ + QQ' + Q'D'$ . Znow  $S$  ma najmniejszą wartość, gdy  $B'P'PQQ'D'$  jest odcinkiem, a więc gdy  $\angle APB = \angle BPQ = \angle QPA = \angle DQC = \angle CQP = \angle PQD = 120^\circ$ . Takie punkty  $P$  i  $Q$  łatwo znaleźć rysując na  $AB$  i na  $DC$  łuki, z których widać te odcinki pod kątem  $120^\circ$  (tzw. łuki Talesa). (Pominałem tu przypadek, gdy łuki te przecinają się.)



Powstaje tu następne pytanie. Jeśli podaną metodę zastosuję do boków  $AD$  i  $CB$  zamiast  $AB$  i  $CD$ , to również otrzymam minimalną długość sieci dróg. Które z otrzymanych minimów jest mniejsze? Czy można to ocenić „z góry”, przed wykreśleniem obu odcinków realizujących te minima?



## Rozwiązanie zadania F 254.

Na podstawie zasady zachowania pędu możemy zapisać, że w przybliżeniu

$$mv = Mu,$$

gdzie  $m$  jest masą wszystkich cząstek powietrza wewnątrz piłki,  $v$  ich średnią prędkością;  $M$  i  $u$  oznaczają masę i prędkość piłki po zderzeniu cząstek z jej wewnętrzną powierzchnią. Na podstawie zasady zachowania energii poszukiwana wysokość  $h$  wynosi

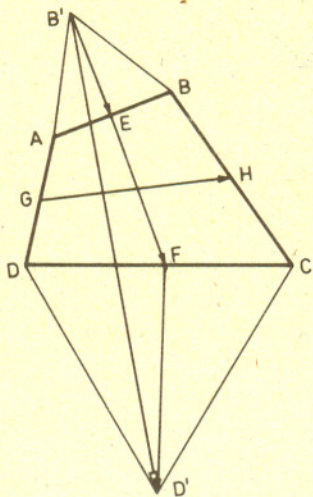
$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{m^2 v^2}{2M^2 g}$$

Masa  $m$  wszystkich cząstek powietrza jest równa

$$m = \frac{pV\mu}{RT} \approx 6 \text{ g},$$

przy objętości piłki  $V = (4/3)\pi r^3 \approx 4 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$  oraz średniej masie molowej powietrza  $\mu = 29 \text{ g/mol}$ . Prędkość  $v$  molekul powietrza  $v \approx 4 \cdot 10^2 \text{ m/s}$  otrzymamy ze wzoru  $E_{kin} = (3/2)kT$ , gdzie  $k$  jest stałą Boltzmanna. Przyjmując  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$  otrzymamy, że wysokość, na jaką wzniesie się piłka, wyniosłaby około 2 m.





Minimum  $S$  w rozpatrzonym szczegółowo przypadku to długość odcinka  $B'D'$ . Spróbujmy tę długość obliczyć. Oznaczmy przez  $E, F, G$  i  $H$  środki boków czworokąta (jak na rysunku). Wówczas  $B'E \perp AB$  i  $D'F \perp DC$ . Wygodnie nam będzie jeszcze posługiwać się operacją  $o$ , która każdemu wektorowi (swobodnemu)  $\vec{w}$  przyporządkowuje wektor (tej samej długości) obrócony o kąt  $-90^\circ$ . Mamy więc

$$\vec{B'E} = \frac{\sqrt{3}}{2} o(\vec{AB}), \quad \vec{D'F} = \frac{\sqrt{3}}{2} o(\vec{DC}).$$

Stąd

$$\vec{B'D'} = \vec{B'E} + \vec{EF} + \vec{FD'} = \vec{EF} + \sqrt{3} o(\vec{GH}),$$

gdyż  $\vec{B'E} + \vec{FD'} = \frac{\sqrt{3}}{2} (o(\vec{AB}) + o(\vec{DC})) = \sqrt{3} o(\frac{\vec{AB} + \vec{DC}}{2})$  oraz  $\vec{GH} = \frac{\vec{AB} + \vec{DC}}{2}$ .

Stąd kwadrat minimalnej sumy dróg jest

$$B'D'^2 = |\vec{B'D'}|^2 = (\vec{EF} + \sqrt{3} o(\vec{GH}))^2 = EF^2 + 3GH^2 + 2\sqrt{3} (\vec{EF} \cdot o(\vec{GH})),$$

ponieważ  $(o(\vec{GH}))^2 = |\vec{GH}|^2 = GH^2$ .

Jeśli teraz rozważymy drugi przypadek (wprowadzając analogicznie do  $B'$  i  $D'$  punkty  $A'$  i  $C'$ ), otrzymamy jako kwadrat drugiego minimum sumy długości dróg

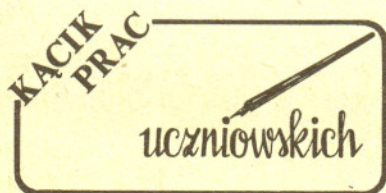
$$A'C'^2 = GH^2 + 3EF^2 + 2\sqrt{3} (\vec{GH} \cdot o(\vec{EF})).$$

Nietrudno przekonać się, że  $\vec{EF} \cdot o(\vec{GH}) = \vec{GH} \cdot o(\vec{EF})$ . Wobec tego

$$B'D' > A'C' \iff B'D'^2 > A'C'^2 \iff GH^2 > EF^2 \iff GH > EF.$$

Zatem minimalną sumę długości sieci dróg otrzymamy wykonując naszą konstrukcję dla tej pary przeciwległych boków czworokąta, której środki boków są bardziej oddalone.

A jak rozwiązać analogiczne zadanie dla pięcio- czy sześciokąta ?



### Rozwiązanie zadania M 520.

Mamy  $r_n = u_n + r_{n+1}$ . Zatem

$$\begin{aligned} \frac{r_{n+1}}{r_n} &= 1 - \frac{u_n}{r_n}, \\ \frac{r_{n+2}}{r_n} &= \left(1 - \frac{u_n}{r_n}\right) \left(1 - \frac{u_{n+1}}{r_{n+1}}\right) > \\ &> 1 - \frac{u_n}{r_n} - \frac{u_{n+1}}{r_{n+1}} \end{aligned}$$

i podobnie

$$\frac{r_{n+p}}{r_n} > 1 - \frac{u_n}{r_n} - \frac{u_{n+1}}{r_{n+1}} - \dots - \frac{u_{n+p}}{r_{n+p}}$$

Jednakże  $r_{n+p} \rightarrow 0$ , gdy  $p \rightarrow \infty$ , a stąd wynika, że dla każdego  $n$  istnieje takie  $p$ , że

$$\frac{u_n}{r_n} + \dots + \frac{u_{n+p}}{r_{n+p}} > \frac{1}{2},$$

zatem szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{r_n}$  jest rozbieżny.

## Zespolone układy pozycyjne

Do układu dziesiętkowego przywykliśmy od urodzenia. Niektórzy słyszeli co nieco o innych układach pozycyjnych: dwójkowym, trójkowym, piątkowym itd. W układzie o podstawie  $p$  występuje  $p$  cyfr:  $0, 1, 2, \dots, p-1$ , a liczbę  $c_n c_{n-1} \dots c_0$  ( $p$ ) interpretujemy jako  $c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_0$ . Jeśli  $p$  jest liczbą naturalną większą od 1, to w układzie pozycyjnym o podstawie  $p$  możemy zapisać dowolną liczbę całkowitą, o ile dopuścimy użycie znaku „-” dla oznaczenia liczb ujemnych. Stosuje się też układy o ujemnej podstawie. Jeśli  $p < -1$ , to używamy takich samych cyfr jak w układzie o podstawie  $-p$ , a liczby interpretujemy według tego samego wzoru. Teraz możemy wszystkie liczby całkowite zapisać bez używania minusa. Na przykład  $-1$  w układzie minusdwójkowym zapisuje się jako  $(11)_{-2} = -2 + 1 = -1$ .

A teraz przejdźmy do liczb zespolonych. Interesować nas będą liczby postaci  $a + bi$ , gdzie  $a, b$  są liczbami całkowitymi. Jeśli  $p = a + bi$ ,  $b \neq 0$ , to w układzie o podstawie  $p$  będziemy używać  $a^2 + b^2$  cyfr:  $0, 1, 2, \dots, a^2 + b^2 - 1$ , a interpretacja zapisu liczby będzie odbywała się według tego samego wzoru. Jeśli np.  $p = 2i$ , to używamy cyfr  $0, 1, 2, 3$  i liczbę  $(c_n c_{n-1} \dots c_0)_{2i}$  interpretujemy jako  $c_n (2i)^n + c_{n-1} (2i)^{n-1} + \dots + c_0$ , np.  $2i = (10)_{2i}$ ,  $-3 - 4i = (1121)_{2i} = (2i)^3 + (2i)^2 + 2 \cdot 2i + 1 = -8i - 4 + 4i + 1$ . Zauważamy jednak, że liczby  $i$  nie możemy zapisać w tym układzie bez użycia przecinka. Mamy natomiast  $(10, 2)_{2i} = 2i + 2 \left(\frac{1}{2i}\right) = 2i - i = i$ , czyli  $i$  wygląda w tym układzie jak ułamek.

A jak będzie w innych układach? Jakie liczby dadzą się w nich zapisać bez przecinka? Warto byłoby też przedstawić graficznie na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb  $2, 3, 4, \dots$ -cyfrowych w różnych układach pozycyjnych. Wydaje się, że dla podstawy  $p = a + bi$ , gdzie  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , takie zbiory powinny mieć przedstawienia o dosyć kapryśnych kształtach.



W poprzednim numerze *Delt*y zachęcaliśmy Czytelników do obserwacji gwiazd zmiennych metodą Argelandera. Teraz – zgodnie z zapowiedzią – przedstawiamy sposób opracowania danych obserwacyjnych.

Wykreślenie krzywej blasku polega na zaznaczeniu w układzie współrzędnych obserwowanej jasności gwiazdy zmiennej (oś pionowa) w określonych momentach (oś pozioma).

Na podstawie uzyskanego materiału obserwacyjnego należy więc przede wszystkim wyznaczyć jasność gwiazdy zmiennej ( $m_v$ ) w jednostkach powszechnie stosowanych w astronomii – wielkościach gwiazdowych. W tym celu dla każdej dwustronnej obserwacji *akvlb* stosujemy wzór

$$m_v = \frac{m_a k + m_b l}{k + l},$$

gdzie  $m_a$  i  $m_b$  są jasnościami gwiazd porównania wyrażonymi w wielkościach gwiazdowych.

Poprawne wyznaczenie momentów obserwacji, choć z pozoru łatwiejsze, jest w istocie bardziej skomplikowane. Odłożenie wprost na osi czasu odczytanych na zegarku i zanotowanych podczas obserwacji momentów nie jest dobrym wyjściem. Wątpliwą wartość miałyby obserwacje wykonane w różnych miejscach na Ziemi i odniesione do czasu strefowego odpowiadającego tym miejscom, choćby dlatego, że nie nadawałyby się do porównywania z innymi obserwacjami. Aby więc ujednoczyć sposób podawania czasu, wszystkie momenty wyraża się w czasie uniwersalnym (UT – czas południka przechodzącego przez Greenwich)

$$UT = T_{stref} - N,$$

gdzie  $T_{stref}$  jest czasem strefowym odczytanym na zegarku,  $N = 1$  dla czasu zimowego (środkowoeuropejskiego),  $N = 2$  dla czasu letniego (wschodnioeuropejskiego).

Osoby, które przy opracowywaniu programu obserwacyjnego korzystały z zamieszczonych w *Roczniku Astronomicznym Obserwatorium Krakowskiego* efemeryd gwiazd zmiennych, wiedzą, że są one podawane w tzw. dniach juliańskich. Dla wygody właśnie w dobach juliańskich (i ich ułamkach) wyraża się momenty rozmaitych zjawisk astronomicznych – w szczególności momenty odpowiadające obserwacjom gwiazd zmiennych. Wyznaczenie daty juliańskiej nie jest zbyt skomplikowane – należy odczytać z tablic, np. w *Poradniku miłośnika astronomii* P. Kulikowskiego lub wyznaczyć za pomocą programu komputerowego opisanego w *Delt*cie 9/1987, jaki dzień juliański przypada na daną datę, a następnie dodać do niego godziny i minuty (po zamienieniu ich na ułamek doby) odpowiadające wyznaczanemu momentowi. Trzeba przy tym pamiętać, że doby juliańskie rozpoczynają się w południe czasu uniwersalnego – np. południe czasu uniwersalnego pierwszego listopada bieżącego roku jest oznaczone w juliańskiej rachubie dni jako 2 447 467,0.

Teraz można już przystąpić do wykreślenia krzywej blasku, a ściślej – do odłożenia w układzie współrzędnych poszczególnych punktów odpowiadających obserwacjom. Określenie „krzywa” jest tu w pewnym stopniu mylące – na wykresie nie powinno się łączyć punktów odcinkami, gdyż fałszuje to rzeczywisty obraz przebiegu zmian blasku. Dopiero po naniesieniu wszystkich punktów, gdy jest ich na tyle dużo, że „na oko” widać, jak wygląda „średnia” krzywa najlepiej do nich pasująca, można ją narysować.

Jeśli obserwacje były przeprowadzone w okolicy minimum blasku gwiazdy zmiennej, można wyznaczyć jego moment. Powinien on wypadać na osi symetrii fragmentu krzywej w otoczeniu minimum. Składając kartkę (albo jeszcze lepiej – kalkę) z wykresem tak, by obie gałęzie – malejącego i rosnącego blasku – pokryły się jak najdokładniej, na przecięciu złożenia z osią czasu odczytujemy zaobserwowany moment minimum blasku. Dla gwiazd długookresowych wyznaczenie minimum z taką dokładnością jest wystarczające. Uzyskany wynik nadaje się już do porównywania z efemerydami.

W przypadku gwiazd szybkozmiennych, dla których momenty poszczególnych faz wyznacza się z dokładnością do minut, sprawa komplikuje się przez fakt, że ... Ziemia krąży wokół Słońca. W ciągu roku znajdujemy się w różnych położeniach na orbicie – czasem bliżej obserwowanej gwiazdy, a czasem dalej. Docierające od niej światło przebywa więc różne odległości, co, rzecz jasna, znajduje swoje odbicie w momentach obserwowanych zjawisk. Różnice są niebagatelne – dochodzą do  $\pm 8$  minut – w takim bowiem czasie światło przebywa średnią odległość Ziemia–Słońce. Ten właśnie efekt posłużył Olafowi Römerowi do wyznaczenia prędkości fali elektromagnetycznej na podstawie obserwacji zaćmień księżyców Jowisza. Jednak do procedury określania dokładnego momentu minimum gwiazdy zmiennej wprowadza on, niestety, dość istotne komplikacje. Aby wyeliminować wpływ różnych położeni Ziemi na obserwowane momenty, dokonuje się tzw. redukcji obserwacji na Słońce. Poprawka  $\Delta t$  (zwana równaniem światła), którą należy dodać do momentów geocentrycznych (związanych z Ziemią), jest, co prawda, łatwa do obliczenia

$$\Delta t = -0,0058 \cos \beta \cos (L_{\odot} - \lambda),$$

jednak dane występujące w tym wzorze są na ogół trudno dostępne dla miłośników astronomii. Można je wszystkie obliczyć samemu, choć – nie ukrywajmy – dość dużym nakładem pracy. Związek między współrzędnymi ekliptycznymi gwiazdy ( $\lambda$ ,  $\beta$ ) i jej współrzędnymi równikowymi ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) określały wzory trygonometrii sferycznej:

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha,$$

$$\cos \beta \sin \lambda = \cos \delta \sin \alpha \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon,$$

$$\sin \beta = -\cos \delta \sin \alpha \sin \varepsilon + \sin \delta \cos \varepsilon,$$

gdzie  $\varepsilon = 23^{\circ} 27'$  jest nachyleniem ekliptyki do równika. Z kolei do wyznaczenia długości ekliptycznej Słońca ( $L_{\odot}$ ) stosuje się przybliżony wzór

$$L_{\odot} = 279^{\circ} 41' 48,04 + 129602768,13T + 1,089T^2,$$

$$T = \frac{JD - 2415020}{36525},$$

gdzie JD oznacza datę juliańską.

Przytoczone wyżej związki nie wyglądają zbyt zachęcająco. Jednak, aby uzyskać dokładny moment minimum – nie ma rady – trzeba pracowicie wykonać wszystkie rachunki. Obserwacje zredukowane na Słońce nadają się już do porównywania z efemerydami. Życzymy cierpliwości przy wykonywaniu rachunków.

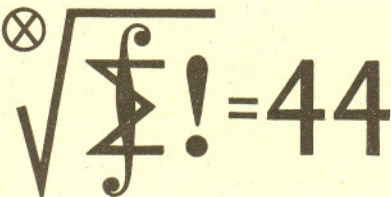
mgr Joanna UDALSKA



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 XII 1988 Skróć regulaminu

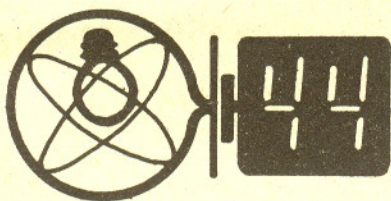
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.



Czołówka ligi sędziowskiej „Klub 44 M”  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 167 (WT=1,97) i 168 (WT=2,76)  
z numeru 3/1988

Tadeusz Józefczyk	- Poznań	44,53pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	43,15pkt
Adam Ruszel	- Kromno	42,55pkt
Henryk Kasprzak	- Żary	41,30pkt
Andrzej Pawłowski	- Zabrze	40,85pkt
Adam Przędziński	- Warszawa	38,50pkt

Pan Józefczyk - po ras drugi.



Czołówka ligi sędziowskiej „Klub 44 F”  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 65 (WT=3,16) i 66 (WT=1,75)  
z numeru 3/1988

Bogusław Mikielwicz	- Brodnica	42,96pkt
Piotr Bala	- Toruń	37,85pkt
Roman Musiał	- Katowice	30,38pkt
Wiesław Kasprzak	- Kraków	27,01pkt
Piotr Koczyński	- Warszawa	26,80pkt
Paweł Perkowski	- Szczecin	26,68pkt
Aleksander Surma	- Mysłków	22,24pkt
Adam Sikorski	- Lublin	22,06pkt

### Zadania z matematyki nr 177, 178

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

177. Wyznaczyć wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , które są ściśle rosnące i spełniają równanie

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$$

(dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$ ).

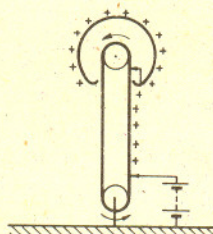
178. Dla dowolnej (ustalonej) liczby naturalnej  $n \geq 2$  znaleźć kres górny sumy długości wszystkich cięciw wyznaczonych przez  $n$  (zmiennych) punktów okręgu o promieniu 1.

Zadanie 178 zaproponowali niezależnie pan Henryk Kornacki z Augustowa i pan Arkadiusz Goetz z Wrocławia.

### Zadania z fizyki nr 75, 76

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

75. Na szczycie równi pochyłej o długości  $l = 1,5$  m, nachylonej pod kątem  $\alpha = 30^\circ$  względem poziomu, umieszczono nieruchomo i puszczono mały klocek. Współczynnik tarcia między klockiem a równią rośnie liniowo wzdłuż równi od wartości 0 na szczycie do wartości 1 na jej dolnym krańcu. Obliczyć prędkość klocka na dolnym krańcu równi.



76. W generatorze van de Graaffa (rysunek) ładunki przenoszone przez taśmę z dielektryka o szerokości  $d = 1$  m, poruszającą się z prędkością  $v = 20$  m/s, ładują metalową, sferyczną elektrodę o promieniu  $r = 1,5$  m. Oszacować maksymalne wartości uzyskiwanego w tym generatorze napięcia oraz natężenia prądu stałego, który można z niego czerpać. Graniczna wartość natężenia pola elektrycznego, powyżej której powstaje przebiecie w powietrzu, wynosi  $E_p = 3 \cdot 10^6$  V/m.



#### Rozwiązanie zadania F 255.

Praca gazów wyrzucających pocisk jest w przybliżeniu równa  $W = Fl$ , gdzie  $l$  jest długością części pocisku znajdującej się w lufce.

Ponieważ

$$W = \frac{p^2}{2} \left( \frac{1}{m_g} + \frac{1}{m_p} \right)$$

( $p$  oznacza tu pęd pocisku), więc prędkość pocisku wyniesie

$$v = \frac{p}{m_p} = \frac{1}{m_p} \sqrt{2W \frac{m_p m_g}{m_g + m_p}}$$

W przypadku wystrzału ze strzelby praca gazów wynosi  $W_0 = FL$ , gdzie  $L$  jest długością, na jakiej pocisk jest przyspieszany w lufce strzelby.

Prędkość wylatującego pocisku bez uwzględnienia odrzutu strzelby wynosi  $v_0 \approx (1/m_p) \sqrt{2W_0 m_p}$ . Uwzględniając odrzut otrzymamy prędkość pocisku równą w przybliżeniu

$$v = v_0 \sqrt{\frac{W/W_0}{m_g/(m_g + m_p)}}$$

Przyjmując, że siła ciśnienia gazów  $F$  jest taka sama w obu przypadkach, otrzymujemy dla  $l/L \approx 10^2$

$$v = v_0 \sqrt{\frac{l}{L(1 + m_p/m_g)}} \approx 40 \text{ m/s.}$$

co jest wielkością mniejszą niż w przypadku strzału ze strzelby, ale nadal niebezpieczną.



„Matematykiem jest ten, dla kogo wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

jest tak oczywisty jak dla innych dwa razy dwa równa się cztery. Liouville był matematykiem.” Powyższy tekst został wypowiedziany przez Lorda Kelvina.

Zarówno nasza Galaktyka, jak i liczne inne galaktyki są otoczone rojem „własnych” gromad kulistych gwiazd. Wszystko jednak wskazuje na to, że galaktyki w gromadach galaktyk (a takich jest większość) wymieniają się gromadami kulistymi, przy czym galaktyki masywne chętniej chwytają nowe gromady kuliste niż pozbywają się swoich. O tym świadczą zarówno obliczenia modelowe, jak i obserwacje: wielka galaktyka eliptyczna M87 będąca członkiem bliskiej gromady *Virgo*, ma „świętę” składającą się z wieluset gromad kulistych – jest ona chyba najlepszą ilustracją wspomnianego zjawiska.

Tradycja na opak wywrócona. Klasyczne doświadczenie z dyfrakcją światła na kryształach dowodzi falowej natury światła. W MIT sytuację odwrócono: wiązkę atomów sodu rozpraszano dyfrakcyjnie na stojącej fali świetlnej zmieniając kąt padania wiązki atomowej oraz kształt i długość stojącej fali świetlnej. Zaobserwowano, że rozpraszanie może zachodzić tylko w ściśle określonych kierunkach. „Nierealność” teorii kwantowej staje się coraz bardziej realna.

Jeśli wybierzemy losowo liczbę naturalną (leżącą blisko  $x$ ), to prawdopodobieństwo tego, że liczba ta jest pierwsza, jest w przybliżeniu równe  $\frac{1}{\ln x}$ . Tak więc prawdopodobieństwo, że losowo wybrana para liczb składa się z liczb pierwszych, wynosi w przybliżeniu  $\frac{1}{\ln^2 x}$ . Gdyby zdarzenia *n* jest liczbą pierwszą i *n* + 2 jest liczbą pierwszą były niezależne, to w przedziale  $[x, x + a]$  (gdzie *a* duże, ale małe w porównaniu z *x*) byłoby około  $\frac{a}{\ln^2 x}$  par liczb pierwszych bliźniaczych. Nieco dokładniejsze rozważania heurystyczne (np. jeśli *n* jest liczbą pierwszą, to *n* + 2 nie jest podzielne przez 2) pokazują, że w tym przedziale należałoby oczekiwać około  $\frac{Ca}{\ln^2 x}$  par liczb bliźniaczych, gdzie

$$C = 2 \cdot \prod_{p>2} \frac{p^2 - 2p}{p^2 - 2p + 1} \approx 1,3203 \dots$$

p liczba pierwsza

Wzór ten zgadza się doskonale ze znanym rozkładem liczb bliźniaczych. Np. w przedziale  $[10^{15}, 10^{15} + 150\,000]$  jest 161 par, a nasz wzór przewiduje 166 par. Tak więc sugerowałyby to, że par liczb bliźniaczych jest nieskończenie wiele. Tego ostatniego faktu nie udało się jednak dotychczas udowodnić.

W 1890 r. odkryto dwie komety praktycznie w tym samym punkcie na niebie. Mianowicie komety 1890 VII odkrył 16 XI 1890 r. Spitaler w Wiedniu, gdy skierował lunetę w miejsce, gdzie poprzedniego dnia odkryto komety 1890 IV. Spitaler sądził początkowo, że obserwuje komety już odkrytą. Natomiast w 1975 r. odkryto dwie komety niemal w tej samej chwili. 5 X tego roku w odstępnie 50 minut odkryto komety 1975j (Mori-Sato-Fujikawa) i 1975k (Suzuki-Saigusa-Mori). Jak widać, pan Mori uczestniczył w obu odkryciach i on po raz pierwszy komety te zaobserwował w odstępnie 65 minut.

Dwadzieścia osiem lat temu H. von Foerster, P. M. Mora i L. W. Amiot opublikowali w *Science* artykuł pt: *Sądny dzień: piątek 19 listopada 2026 roku*. Na podstawie dokładnej analizy wzrostu zaludnienia autorzy artykułu stwierdzili, że zależność liczby ludzi na Ziemi od czasu znakomicie opisuje wzór:

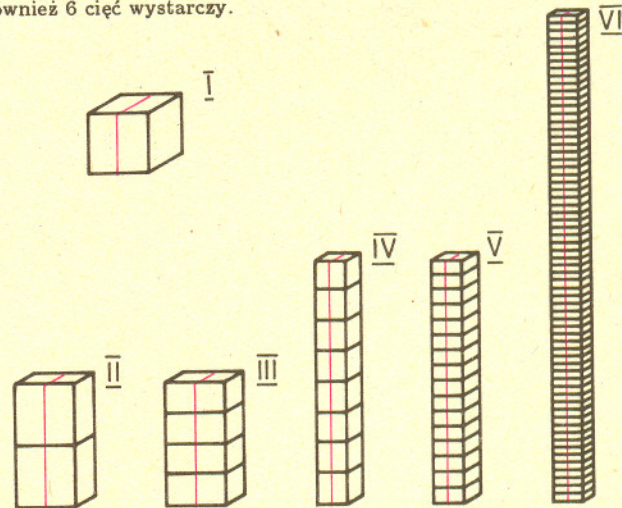
$$\text{liczba ludzi} = \frac{1,79 \cdot 10^{11}}{(2026,87 - \text{czas (w latach)})^{0,99}}$$

Utrzymanie się takiej zależności oznaczałoby, że liczba ludzi wzrośnie do nieskończoności w 2026 roku. W ostatnich latach światowa populacja wyprzedza przepowiednie artykułu z *Science*: w 1980 roku na Ziemi żyło 4 414 milionów ludzi wobec „przepowiedzianych” 3 969 milionów, a w połowie 1987 było ponad 5 miliardów, podczas gdy wzór przewidywał osiągnięcie tej liczby na rok 1989.

Poszukiwanie szczególnie odległych kwazarów odbywa się np. w ten sposób, że wpier przegląda się zdjęcia widm otrzymane za pomocą kamery Schmidta z pryzmatem obiektywowym, a następnie obiekty podejrzane obserwuje się ponownie dużym teleskopem. W ten sposób w sierpniu 1987 r. za pomocą 3,9-metrowego teleskopu anglo-australijskiego stwierdzono, że kwazar Q 0000-26 ma przesunięcie widma  $z = 4,11$ . Ale już na przełomie lat 1987/88 tym samym teleskopem zmierzono nowy rekord: kwazar Q 0051-279 (leżący w Rzeźbiarzu i o jasności 19,97 mag) ma przesunięcie ku czerwieni  $z = 4,43$ . Odpowiada to prędkości ucieczki  $v = 0,934 c$ .

40 lat temu autorzy fantastyki naukowej marzyli o samochodach i samolotach napędzanych energią jądrową. Ze względu na duże wymiary reaktorów udało się, jak dotąd, skonstruować jedynie statki o takim napędzie. Ostatnio w Los Alamos zbudowano „mały” reaktor o wymiarach 2 m wysokości, 2 m średnicy i o masie „tylko” 6 ton. Pozwala uzyskać moc 20 kW. Jest to reaktor grafitowy ze wzbogaconym paliwem uranowym, w którym koncentracja  $U^{235}$  jest wyższa niż w tradycyjnym paliwie reaktorowym. Do zrealizowania marzeń fantastów wciąż jeszcze daleko.

Sześcienne kostkę (np. plasteliny czy mydła) można przeciąć na osiem jednakowych sześcianów za pomocą trzech cięć nożem. Jeśli chcemy kostkę przeciąć na 27 jednakowych sześcianów – cięcie musi być co najmniej sześć. Ale jeśli części ma być 64, to również 6 cięć wystarczy.



Jak obliczyć, ile cięć jest potrzebnych przy cięciu kostki na  $n^3$  jednakowych sześcianów? Czy stosując takie metody, jak na rysunku, nie można zmniejszyć liczby 6 przy cięciu na 27 sześcianów?

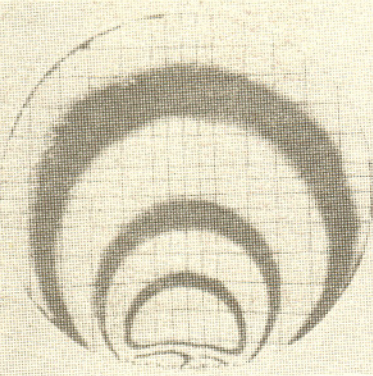


Ciała optycznie izotropowe (prędkość rozchodzenia się światła nie zależy od kierunku promienia i polaryzacji) poddane działaniu zewnętrznych sił lub umieszczone w zewnętrznym polu magnetycznym czy elektrycznym zachowują się jak kryształy jednoosiowe. Różnica współczynnika załamania dla światła spolaryzowanego równoległe i prostopadle do osi optycznej (promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego) jest na ogół niewielka i zależy od wartości działających sił lub natężeń pól.

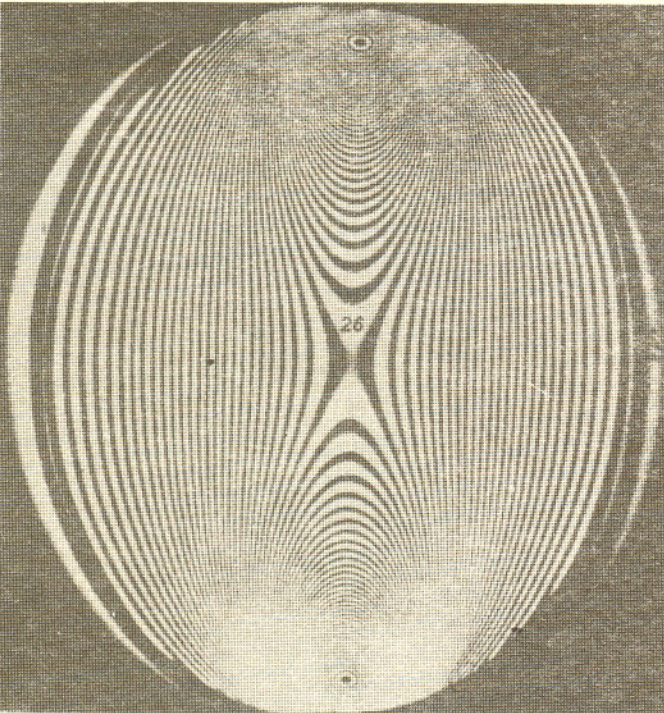
W przypadku ściskania próbki różnica ta jest proporcjonalna do długości padającej fali i wartości ciśnienia

$$\Delta n = k \lambda p$$

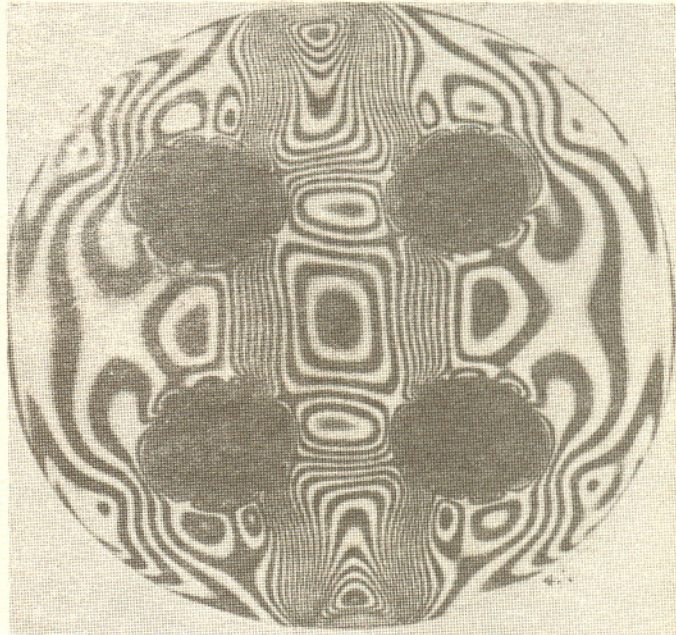
(dla szkła współczynnik  $k$  jest rzędu  $0,5 \text{ mm/N}$ ), a oś optyczna jest równoległa do kierunku ściskania. Droga optyczna wewnątrz próbki jest więc różna dla składowych o różnych polaryzacjach – obserwowane prążki interferencyjne pozwalają odtworzyć rozkład naprężeń (ciśnień) w próbce. Piękny przykład wykorzystania metody został opisany w artykule *Statyka katedr*. Tu zamieszczamy fotografie próbki o kształcie nieco prostszym niż konstrukcja katedry. Poszczególne zdjęcia obrazują rozkład naprężeń powstających w krążku pod wpływem (a) własnego ciężaru, (b) ściskania wzdłuż średnicy (krążek jest obrócony o kąt  $35^\circ$  względem osi pionowej) oraz (c) naprężeń powstających w ściskanym wzdłuż średnicy „guziku” – krążku z otworami. Podobnie można badać naprężenia elementów maszyn, w tym także naprężenia powstające przy wzbudzeniu w nich drgań lub niejednorodnym ogrzewaniu, a więc w warunkach zbliżonych do warunków pracy. Oczywiście, badać można tylko przezroczyste modele wykonane najczęściej z tworzyw sztucznych. Dobór odpowiednich własności materiału i przeskalowywanie mierzonych naprężeń jest skomplikowaną sztuką.



a



b



c

Ostatnia strona okładki przedstawia schematy konstrukcji oraz zdjęcia „fotoelastycznych” modeli katedry Notre Dame w Paryżu oraz katedr w Laon i Bourges. Modele poddano obciążeniom takim, jakie występują podczas silnych wiatrów. Otrzymane wzory interferencyjne pozwalają odczytać rozkład naprężeń w konstrukcji – każdemu kolorowi odpowiada inna wartość naprężenia. Szczególnie narażone na pęknięcie były obszary odpowiadające zagęszczeniu prążków. Pęknięcie zaprawy murarskiej w łukach przyporowych katedry Notre Dame wymagało prawdopodobnie częstych napraw, aż do momentu przebudowy w XIII wieku (na ilustracji konstrukcja pierwotna).