



SPIS TREŚCI

NUMERU 3(183)

Pozytonium <i>dr Stanisław Mrówczyński</i>	str. 1
Losowanie ze wspomaganiami <i>prof. dr Bolesław Kopocinski</i>	str. 3
O wielomianach przyjmujących wartości będące liczbami pierwszymi <i>prof. dr Jerzy Browkin</i>	str. 4
W poszukiwaniu pozasłonecznych układów planetarnych <i>prof. dr Mieczysław Subotowicz</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
O funkcjach arytmetycznych i splocie Dirichleta <i>dr Jerzy Rutkowski</i>	str.10
„Magiczna” Szkoła <i>dr Lidia Goettig</i>	str.12
Kącic prac uczniowskich	str.13
Zadania	str.13
Klub 44	str.14
Drobniaczki	str.16
Patrz w niebo	str.17

W następnym numerze:

Lustra



„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichocki
dr Antoni L. Dawidowicz
dr Alicja Derkowska
doc.dr Jan A. Gaj
doc.dr Bolesław Gleichgewicht
doc.dr Tomasz Hofmokr – v-przewodniczący
doc.dr Tadeusz Jarzębowski
doc.dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Plochocki
dr Jan Rempala
prof.dr Konrad Rudnicki
prof.dr Grzegorz Sitarski
prof.dr Józef I. Smak
prof.dr Kazimierz Stępień
prof.dr Mieczysław Subotowicz
doc.dr Andrzej Szymacha
doc.dr Aniela Wolska
prof.dr Andrzej Woszczyk
prof.dr Wojciech Żakowski –
przewodniczący

WARUNKI I CENY PRENUMERATY

Zgłoszenia na prenumeratę:
w terminie

- do dnia 10 listopada br. na pierwszy kwartał, pierwsze półrocze oraz cały rok,
- do dnia 1 każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty

przyjmują:

- Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” od osób prawnych – instytucji i zakładów pracy zlokalizowanych w miastach będących siedzibą tych Oddziałów,
- urzędy pocztowe nadawczo-odbiorcze właściwe dla miejsca zamieszkania prenumeratora – przyjmują zamówienia od indywidualnych prenumeratorów (osoby fizyczne), zamieszkałych w miastach, gdzie znajdują się siedziby Oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”,
- urzędy pocztowe i doręczyciele w miejscowościach, gdzie nie ma Oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich – przyjmują zgłoszenia zarówno od indywidualnych prenumeratorów (osoby fizyczne), jak i dla instytucji oraz zakładów pracy zamieszkałych i mieszkających się na tych terenach.

Ceny prenumeraty:

kwartalnej 210 zł
półrocznej 420 zł
rocznej 840 zł

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę – przyjmuje Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw RSW „Prasa-Książka-Ruch” ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, PKO BP XV Oddział w Warszawie Nr 1658-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Cena 1 egzemplarza zł 70,-

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Lidia Goettig
dr hab. Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos – sekr. red.
dr hab. Marek Kordos – red. nac.
dr Tomasz Kwast
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
Jacek Urbański – grafik

Adres Redakcji

ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. 25-56-39

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
Al. Jerozolimskie 125/127

02-017 Warszawa
tel. centr. 28-52-31

Biuro Reklamy Prasowej i Ogłoszeń
ul. Poznańska 38
00-689 Warszawa
tel. 28-23-09

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,
2,50 ark. druk.,

papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w Prasowych
Zakładach Graficznych

RSW „Prasa-Książka-Ruch”
w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28

Nr zam. 143/89, U-58.

Skład systemem TeX
wykonała redakcja.

Dr Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Najprostszy atom – atom wodoru, będący podstawowym składnikiem Wszechświata, tworzą ujemnie naładowany elektron i obdarzony dodatnim ładunkiem proton. Poznanie budowy atomu wodoru wymagało dokonania w fizyce wielkiego przewrotu, jakim było w latach dwudziestych sformułowanie mechaniki kwantowej rządzącej prawami mikroświata. Można śmiało powiedzieć, że atom wodoru jest obecnie najlepiej poznanym obiektem kwantowym. Obszerny fragment każdego podręcznika mechaniki kwantowej poświęcony jest analizie jego własności, które teoria z fantastyczną wprost dokładnością potrafi opisać.

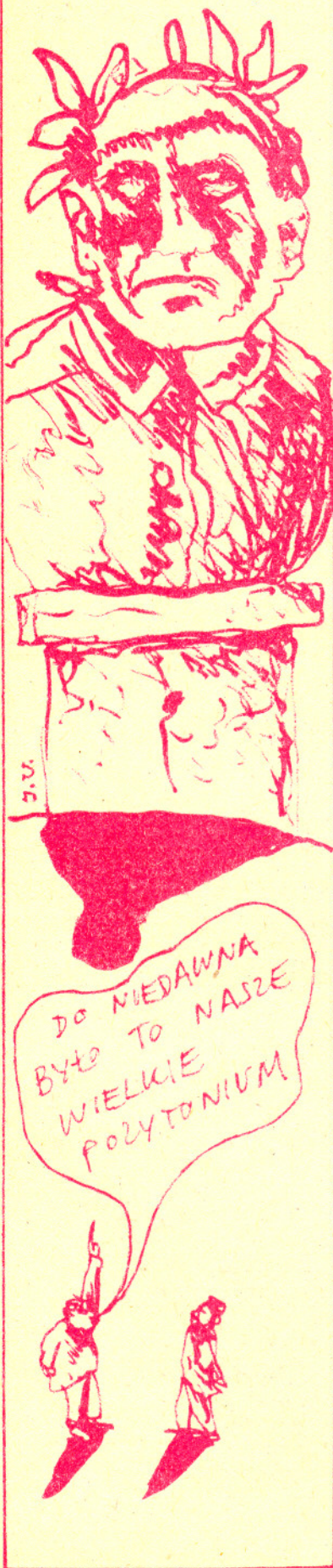
Istnienie atomu wodoru uwarunkowane jest występowaniem elektrostatycznego przyciągania między elektronem i protonem, które, jak pamiętamy, są cząstkami o przeciwnych ładunkach elektrycznych. W związku z tym można zadać naiwne pytanie, czy inne pary cząstek o przeciwnych ładunkach również tworzą atomy. Pytanie takie postawiono jeszcze w latach trzydziestych, wkrótce po odkryciu pozytonu – antycząstki elektronu, tzn. cząstki o masie i innych własnościach elektronu, lecz o przeciwnym ładunku elektrycznym. Wtedy właśnie zasugerowano możliwość istnienia pozytonium – układu związanego elektronu i pozytonu, który w końcu lat czterdziestych rzeczywiście zaobserwowano doświadczalnie.

Czym pozytonium różni się od atomu wodoru? Elektron jest cząstką stabilną, więc i pozyton nie ulega rozpadowi. Pomimo stabilności składników czas życia pozytonium jest bardzo krótki. Dzieje się tak dlatego, że elektron, jak każda cząstka, może anihilować ze swą antycząstką, w tym wypadku z pozytonem. Produktem anihilacji są fotony, czyli kwanty światła, albo ogólniej, kwanty pola elektromagnetycznego. Historię życia pozytonium można by opisać następująco. Elektron i pozyton znalazły się w niewielkiej odległości. Dzięki elektrostatycznemu przyciąganiu wiążą się i krążą wokół środka masy obu cząstek tworząc atom – pozytonium. Jak uczy nas mechanika kwantowa, względne położenie cząstek nie jest ściśle określone, więc elektron i pozyton mogą zbliżyć się na zerową odległość. Wówczas następuje anihilacja i pozytonium zamienia się w fotony. Tak więc, w przeciwieństwie do atomu wodoru, pozytonium jest niestabilne.

Ciekawą cechą pozytonium jest szczególna rola, jaką gra spin elektronu i pozytonu. Spin, będący wewnętrznym momentem pędu cząstki, dla elektronu, pozytonu, a również protonu wynosi $\frac{\hbar}{2}$, gdzie \hbar jest tzw. stałą Plancka, będącą jednostką momentu pędu w mikroświecie. Okazuje się, że spin układu dwóch cząstek o spinie $\frac{\hbar}{2}$ może wynosić 0 bądź $1\hbar$, tzn. spiny cząstek albo odejmują się i wówczas spin całości jest zerowy, albo dodają się do wartości $1\hbar$. Nie są możliwe stany pośrednie, co jest rezultatem tzw. kwantyzacji momentu pędu. Tak więc pozytonium, jak i atom wodoru, może występować w stanie ze spinem 0 i wówczas mówimy o parapozytonium, bądź ze spinem $1\hbar$ – jako ortopozytonium. Parawodor niczym prawie nie różni się od ortowodoru, podczas gdy różnica między parapozytonium i ortopozytonium jest zasadnicza. Ortopozytonium rozpada się na trzy fotony i żyje ponad tysiąc razy dłużej niż parapozytonium, które anihiluje w dwa fotony.

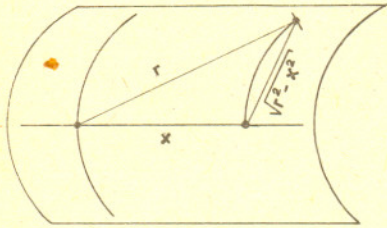
Dlaczego tak się dzieje? Problem jest dość skomplikowany, lecz ponieważ rozumowanie prowadzące do jego wyjaśnienia jest charakterystyczne dla całej fizyki cząstek elementarnych, spróbuję je naszkicować.

Mówimy, że oddziaływania elektromagnetyczne są niezmiennicze względem transformacji sprzężenia ładunkowego. Sprzężenie ładunkowe to operacja polegająca na zamianie cząstek na antycząstki. Niezmienniczość zaś polega na tym, że opis procesu, np. rozpraszania elektronu na protonie, nie ulegnie zmianie, jeśli wszystkie cząstki zamienimy na antycząstki. W naszym przykładzie mielibyśmy wówczas rozpraszanie pozytonu na antyprotonie. Istnieją jednak cząstki bądź ich układy, zwane istotnie obojętnymi, które pod wpływem transformacji sprzężenia ładunkowego przechodzą w siebie. Przykładem takiego układu jest właśnie pozytonium. Zamieniając elektron na pozyton, a pozyton na elektron znów mamy pozytonium. Foton, który nie niesie żadnego ładunku, jest również cząstką istotnie obojętną, bądź inaczej, foton i antyfoton są tą samą cząstką.





Rozwiązanie zadania M 535.



Przypuśćmy, że na papierze mamy układ współrzędnych z początkiem w miejscu wbięcia cyrkla i jedną z osi równoległą do osi walca. Niech R oznacza promień walca, zaś r – rozwartość cyrkla. Ponieważ łuk okręgu o promieniu R oparty na cięciwie c

ma długość $2R \arcsin \frac{c}{2R}$, punkty

na krzywej mają współrzędne postaci

$$\left(x, 2R \arcsin \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{2R}\right), \text{ gdzie } |x| \leq r.$$

Przypuśćmy teraz, że narysowana krzywa jest elipsą o półosiach a i b . Zatem byłoby

$$b^2 x^2 + a^2 \left(\arcsin \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{2R}\right)^2 = a^2 b^2,$$

czyli

$$a^2 \left(\arcsin \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{2R}\right)^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2.$$

To jest jednak niemożliwe: prawa strona jest wielomianem drugiego stopnia zmiennej x , a lewa nie – wystarczy np. zauważyć, że pochodna lewej strony nie jest postaci cx .

W przypadku cząstek i układów istotnie obojętnych można mówić o tzw. parzystości ładunkowej, a niezmienniczość względem transformacji sprzężenia ładunkowego prowadzi do zachowania parzystości ładunkowej w oddziaływaniach elektromagnetycznych. Parzystość ładunkowa jest $+1$ bądź -1 , a istnienie obu wartości wiąże się z faktem, że nawet cząstki istotnie obojętne zmieniają się w pewnym sensie pod wpływem operacji sprzężenia ładunkowego. Na czym ta zmiana polega? Wyobraźmy sobie, że obserwujemy kulę bezpośrednio i patrząc na jej obraz w lustrze. Jeśli kula spoczywa, to oba obrazy są zupełnie jednakowe i powiedzielibyśmy, że parzystość kuli przy transformacji odbicia w lustrze jest $+1$. Jeśli jednak kula wiruje, to obraz w lustrze przedstawia taką samą kulę, lecz wirującą w przeciwną stronę, więc wówczas stwierdzimy, że parzystość wirującej kuli jest -1 . Analogicznie jest z pozytonium, które w stanie podstawowym ma ładunkową parzystość $+1$ dla spinu 0 (parapozytonium) i -1 dla spinu $1\hbar$ (ortopozytonium). Parzystość ładunkowa fotonu jest -1 , gdyż znak pola elektromagnetycznego ulega zmianie, jeśli zamienić znaki ładunków wytwarzających to pole na przeciwne (jak to się dzieje przy transformacji sprzężenia ładunkowego). Dla układu n fotonów parzystość wynosi $(-1)^n$ i dochodzimy do wniosku, że zachowanie parzystości ładunkowej w procesie anihilacji pozytonium oznacza, że parapozytonium zamienia się w parzystą liczbę fotonów, ortopozytonium zaś w nieparzystą. Należy zaznaczyć, że pozytonium nie może rozpaść się na jeden foton, gdyż to gwałciłoby zasadę zachowania energii i pędu. Najłatwiej to zrozumieć rozpatrując pozytonium znajdujące się w spoczynku. Aby spełnić zasadę zachowania energii, energia fotonu powinna być równa energii pozytonium. Lecz foton o niezerowej energii niesie niezerowy pęd, podczas gdy pęd spoczywającego pozytonium jest zerowy.

Oddziaływania elektromagnetyczne są stosunkowo słabe, co w szczególności oznacza, że intensywność procesu emisji n fotonów jest zwykle dużo większa od intensywności emisji m fotonów, jeśli $m > n$. Tak więc parapozytonium anihiluje w dwa fotony i żyje dużo krócej niż ortopozytonium, które rozpada się na trzy fotony.

Kiedy pozytonium powstaje i jak je zarejestrować? Warunkiem koniecznym, choć niedostatecznym, jego uformowania jest zbliżenie się składników – elektronu i pozytonu – na odległość rzędu promienia pozytonium, który równy jest 10^{-8} cm, przy względnej prędkości rzędu względnej prędkości elektronu i pozytonu w pozytonium.

Okazuje się, że wytworzenie takiej sytuacji nie jest trudne, należy mieć jednak źródło pozytonów. Pozytony są obficie produkowane w procesach oddziaływania wysokoenergetycznych cząstek – fotonów, elektronów, pionów, protonów itd. – z jądrami atomowymi. Innym możliwym źródłem są pewne radioaktywne jądra atomowe, które podlegają samoistnej przemianie zwanej rozpadem β^+ , w rezultacie którego (dodatni) ładunek jądra ulega zmniejszeniu o jeden i następuje emisja pozytonu. Wyprodukowany pozyton trafia w materię, którą, jak pamiętamy, tworzą atomy zbudowane z jąder i elektronów, a znalazłszy odpowiedniego partnera tworzy pozytonium. Jeśli początkowa energia pozytonu, a więc i jego prędkość, jest dużo większa od energii elektronów w materii, to pozyton przed uchwyceniem elektronu musi wytracić ów nadmiar energii. Spowalnianie pozytonu odbywa się przez sam fakt podróżowania przez materię, gdyż pozyton na swej drodze emituje promieniowanie elektromagnetyczne i jonizuje atomy. Żywość pozytonium kończy się rozpadem na dwa lub trzy fotony, które są właśnie rejestrowane.

Pozytonium nie jest jedynym egzotycznym atomem. Doświadczalnie potwierdzono istnienie całego ich szeregu. Dobrze poznano własności stanu związanego mionu i protonu, pionu i protonu oraz wielu innych. Z dużą dozą pewności można powiedzieć, że każde dwie cząstki elementarne o przeciwnych ładunkach elektrycznych, żyjące dostatecznie długo, mogą tworzyć atom, z tym że wykrycie takiego atomu może przedstawiać poważne trudności doświadczalne.

Każda cząstka elementarna należąca do grupy mezonów zbudowana jest z kwarku i antykwarku, więc i tutaj można mówić o specyficznych układach atomowych. W tym przypadku za wiązanie kwarków odpowiedzialne są silne siły jądrowe, nie zaś elektromagnetyczne. Jeśli jednak za rozpad mezonu czy też, ogólniej, atomu egzotycznego, zbudowanego z cząstek elementarnych, odpowiedzialne są oddziaływania elektromagnetyczne, to przedstawione w tym artykule rozumowanie wykorzystujące zasadę zachowania parzystości ładunkowej może być również zastosowane do badania własności tych atomów.



Rozwiązanie zadania M 537. Nie. Na przykład $f(x) = x + \sin 2\pi x$ spełnia warunek zadania, a nie jest liniowa.

Prof. dr Bolesław KOPOCIŃSKI

WYDA SIĘ
TO PANU
NIEPRAWDOPO -
DOBNE, ALE
JA NAPRAWDĘ
SPRZEDAJĘ BONY
PO 2000 ZŁOTYCH
ZA SZTUKĘ



Podczas jednej z organizowanych w Polsce konferencji z teorii prawdopodobieństwa pojawiło się interesujące praktycznie zadanie wylosowania spośród uczestników konferencji ekipy na wycieczkę w ten wszakże sposób, żeby pewien Dostojny Gość znalazł się w ekipie na pewno. Wspomaganie bogini losu Tyche w czasie pracy budzi zawsze szczególne emocje. Tak było i w tym przypadku, bowiem część osób godziła się uprzejmie przyznać miejsce Dostojnemu, reszta zaś opowiadała się przeciwko uszczupleniu swoich szans.

Zadanie polegało na zaproponowaniu procedury losowania, która zadowolilaby wszystkich. Dodać należy, że liczba miejsc w ekipie była większa od liczby osób żądających pełni swoich szans. Jak powiedzieliśmy, Dostojny miał wejść do ekipy z prawdopodobieństwem jeden. Pozostaje pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo wejścia do ekipy dla pozostałych osób.

Przyjmijmy, że w zadaniu uczestniczy $n = k + l + 1$ osób: k czarnych, żądających pełni swoich szans, l białych, sprzyjających Dostojnemu i on sam. Do ekipy wchodzi m osób, z warunków zadania wynika, że $m > k$.

Naturalna wydaje się następująca procedura. Bierzymy urnę, w której jest n losów: m pełnych i $n - m$ pustych, z której każdy ciągnie swój los. Jeśli Dostojny wyciągnie los pełny, to postępowanie kończy się; w przeciwnym razie biali, dysponujący pełnymi losami, losują spośród siebie jednego, który ustąpi miejsca Dostojnemu.

W rezultacie każdy czarny ma prawdopodobieństwo m/n wejścia do ekipy, dokładnie tyle, ile może żądać. Dostojny otrzyma los pełny, bowiem $m > k$. Nieznane prawdopodobieństwo znalezienia się białego w ekipie oznaczmy przez p . Aby wyznaczyć p , ponumerujemy wszystkich liczbami od 1 do n biorąc najpierw czarnych, potem białych i na końcu Dostojnego. Zdefiniujmy zmienne losowe X_j , $j = 1, 2, \dots, n$, przyjmując $X_j = 1$, jeśli j -ta osoba wchodzi do ekipy i $X_j = 0$ w przeciwnym razie. Mamy

$$P(X_j = 1) = \begin{cases} m/n & \text{jeśli } j = 1, 2, \dots, k, \\ p & \text{jeśli } j = k + 1, \dots, k + l, \\ 1 & \text{jeśli } j = n, \end{cases}$$

a także zachodzi równość

$$m = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

bowiem liczebność ekipy jest z góry dana.

Posłużymy się pojęciem wartości oczekiwanej zmiennej losowej i, jak zwykle, ten operator oznaczmy literą E . Mamy

$$E X_j = P(X_j = 1), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Skorzystamy z tego, że wartość oczekiwana sumy zmiennych losowych jest równa sumie wartości oczekiwanych, oraz że $E m = m$. Zatem

$$m = E(X_1 + \dots + X_n) = E X_1 + \dots + E X_n = k \frac{m}{n} + l p + 1.$$

Stąd

$$p = \frac{1}{l} \left(m - 1 - \frac{km}{n} \right).$$

Jakkolwiek może się to wydać infantylne, porachujmy nieco na liczbach. Przypuśćmy, że mamy dwudziestu pięciu czarnych, pięćdziesięciu białych, Dostojnego, oraz że jest 38 miejsc w ekipie. Wówczas czarny ma prawdopodobieństwo 0,5 znalezienia się w ekipie, natomiast prawdopodobieństwo to dla białego wynosi 0,49. Można więc powiedzieć, że uprzejmość, gdy jest częsta, niewiele kosztuje.

Można wątpić w to, że proponowana procedura losowania zadowolilaby wszystkich, bowiem rozwiązań zadania, spełniających podane warunki, jest wiele, a kontrproponycje mogą być równie nęcące. Zaproponujemy teraz nowe rozwiązanie zadania, które można by nazwać „wszyscy czarni albo żaden z nich”.

Niech A będzie zdarzeniem losowym o prawdopodobieństwie m/n . Łatwo je zrealizujemy biorąc jeden los z poprzednio utworzonej urny. Niech teraz Dostojny wchodzi do ekipy pierwszy. Jeśli zdarzenie A zachodzi, to do ekipy zalicza się wszystkich czarnych i $m - k - 1$ białych wylosowanych osobno; w przeciwnym razie do ekipy losujemy $m - 1$ białych.

Zauważmy, że, jak poprzednio, prawdopodobieństwo znalezienia się w ekipie dla każdego czarnego jest równe $P(A) = m/n$, natomiast to prawdopodobieństwo dla białego obliczamy w następujący sposób:

$$p = P(A) \frac{m - k - 1}{l} + (1 - P(A)) \frac{m - 1}{l} = \frac{1}{l} \left(m - 1 - \frac{km}{n} \right).$$



Rozwiązanie zadania F 264.

Wybermy rozmiary materaca: długość $l \approx 2$ m, szerokość $h \approx 0,5$ m, grubość $d \approx 0,1$ m. Praca W siły zginającej na drodze $s = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{l}{2}$ w czasie zginania materaca jest równa w przybliżeniu $p \Delta V$, gdzie p jest ciśnieniem w materacu (przyjmujemy $p \approx 10^4$ Pa). Natomiast ΔV jest zmianą objętości wynikającą ze zmiany kształtu w obszarze zgięcia ($\Delta V \approx d^2 h$). Wynika stąd, że:

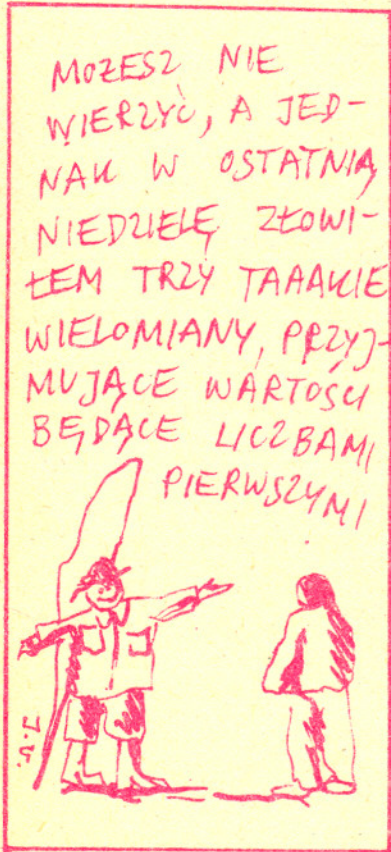
$$W = F \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{l}{2} \approx p d^2 h,$$

co daje

$$F \approx \frac{4 p d^2 h}{\pi \cdot l} \approx 30 \text{ N}.$$

O wielomianach przyjmujących wartości będące liczbami pierwszymi

Prof. dr Jerzy
BROWKIN



1. Weźmy wielomian $f(x) = x^2 + x + 5$. Mamy $f(0) = 5$, $f(1) = 7$, $f(2) = 11$, $f(3) = 17$. Są to liczby pierwsze. Ponieważ $f(x) = x \cdot (x + 1) + 5$, więc, oczywiście, $f(4)$ jest liczbą złożoną, podzielną przez 5.

Można sformułować pytanie ogólne: dla jakich liczb pierwszych p wielomian

$$f(x) = x^2 + x + p$$

dla $x = 0, 1, \dots, p - 2$ przyjmuje wartości będące liczbami pierwszymi (jasne jest, że dla $x = p - 1$ liczba $f(x)$ jest złożona, podzielna przez p)?

Już dla $p = 7$ tak nie jest: Liczba $f(1) = 1^2 + 1 + 7 = 9$ jest złożona.

L. Euler wiedział już w 1772 roku, że wielomiany

$$x^2 + x + 3, x^2 + x + 5, x^2 + x + 11, x^2 + x + 17 \text{ i } x^2 + x + 41$$

mają powyższą własność. Od tego czasu nie znaleziono żadnego innego. Od roku 1966 wiadomo, że innych takich wielomianów nie ma.

Omówię w dalszym ciągu, jak to udowodniono. Przecież badanie wszystkich liczb pierwszych p po kolei nie może prowadzić do celu!

2. Niech d będzie ustaloną liczbą naturalną, niepodzielną przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej od 1. Rozpatrzmy zbiór liczb A_d określony następująco:

$$A_d = \begin{cases} \{a + b\sqrt{-d} : a, b \in \mathbb{C}\}, & \text{jeżeli } 4 \nmid d + 1, \\ \{a + b\frac{1 + \sqrt{-d}}{2} : a, b \in \mathbb{C}\}, & \text{jeżeli } 4 \mid d + 1, \end{cases}$$

\mathbb{C} oznacza tu zbiór zwykłych liczb całkowitych.

Tak więc na przykład: $A_1 = \{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{C}\}$,

$$A_2 = \{a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbb{C}\},$$

ale

$$A_3 = \left\{ a + b\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} : a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

ponieważ $4 \mid 3 + 1$.

Można łatwo sprawdzić, że suma, różnica i iloczyn liczb należących do zbioru A_d też należy do tego zbioru. Zbiór ten ma wiele własności podobnych do odpowiednich własności zbioru liczb całkowitych \mathbb{C} . Na przykład każdą liczbę z \mathbb{C} można przedstawić w postaci iloczynu liczb nierozkładalnych na czynniki. Podobnie jest z liczbami każdego ze zbiorów A_d .

3. Z każdym zbiorem A_d wiąże się pewną liczbę naturalną zwaną liczbą klas, którą oznaczamy przez h_d lub po prostu przez h . Z grubsza mówiąc, jeżeli $h_d = 1$, to własności zbioru A_d są bardzo podobne do własności zbioru liczb całkowitych \mathbb{C} , a im liczba h_d jest większa, tym zbiór A_d jest bardziej skomplikowany. Na przykład $h_d = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy w zbiorze A_d każda liczba daje się przedstawić jednoznacznie w postaci iloczynu czynników nierozkładalnych.

W 1935 r. C.L. Siegel udowodnił, że $\lim_{d \rightarrow \infty} h_d = \infty$. To znaczy, istnieje tylko skończona liczba takich liczb d , że $h_d = 1$, tylko skończona liczba takich liczb d , że $h_d = 2$, itd.

Już C.F. Gauss w 1801 r. udowodnił, że $h_d = 1$ dla $d = 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67$ i 163. Przypuszczano, że innych d o tej własności nie ma.

H. Heilbronn i E. Linfoot w 1934 r. udowodnili, że może być jeszcze co najwyżej jedna taka liczba d , że $h_d = 1$, tzw. hipotetyczna dziesiąta wartość d . Dopiero w 1967 r.

H.M. Stark wykazał, że tej dziesiątej liczby nie ma, tzn. mamy $h_d = 1$ tylko dla dziewięciu liczb d znanych już Gaussowi.

4. Jaki jest związek między tymi własnościami liczb h_d a zagadnieniem rozpatrywanym na początku dotyczącym wielomianów przyjmujących wartości będące liczbami pierwszymi?

Otóż, F.G. Frobenius w 1912 r. i C. Rabinowitsch w 1913 r. udowodnili następujące twierdzenie: Wielomian $f(x) = x^2 + x + p$ przyjmuje dla $x = 0, 1, 2, \dots, p - 2$ wartości będące liczbami pierwszymi wtedy i tylko wtedy, gdy dla $d = 4p - 1$ mamy $h_d = 1$.

Stąd na mocy twierdzenia Starka o liczbach d , dla których $h_d = 1$, od razu wynika, że wielomiany znane Eulerowi wyczerpują wszystkie wielomiany o interesującej nas własności.



Rozwiązanie zadania F 265.

Masa rozgrzanego do temperatury T powietrza wynosi $m = pV\mu/RT$. Siła wyporu działająca na balonik jest równa:

$$m_{og} = \frac{pV\mu g}{RT_0}$$

gdzie V jest objętością balonika,

T_0 - temperaturą otaczającego powietrza, μ jego masą molową.

Jeśli przez M oznaczymy teraz masę powłoki balonika, to stąd otrzymamy warunek wznoszenia się balonika:

$$m_{og} > (M + m)g.$$

Stąd

$$T > \frac{T_0}{1 - MRT_0/(pV\mu)}$$

Dla $M \approx 5g$, średnicy $\approx 0,35m$,

$T_0 \approx 300K$ i $p \approx 10^5 Pa$ otrzymujemy temperaturę graniczną

$$T \approx 500K \approx 200^\circ C,$$

powyżej której gorące powietrze uniesie balonik.

5. Wydawałoby się, że na tym problematyka ta została wyczerpana. A jednak nie! Można bowiem oczekiwać, iż z takimi liczbami d , że $h_d = 2$ lub $h_d = 3$ itd. można również związać pewne wielomiany kwadratowe, które dla $x = 0, 1, 2, \dots$? przyjmują tylko wartości będące liczbami pierwszymi.

d	przypadek	$f(x)$
5	II	$2x^2 + 2x + 3$
$6 = 2 \cdot 3$	I	$2x^2 + 3$
$10 = 2 \cdot 5$	I	$2x^2 + 5$
13	II	$2x^2 + 2x + 7$
$15 = 3 \cdot 5$	III	$3x^2 + 3x + 2$
$22 = 2 \cdot 11$	I	$2x^2 + 11$
$35 = 5 \cdot 7$	III	$5x^2 + 5x + 3$
37	II	$2x^2 + 2x + 19$
$51 = 3 \cdot 17$	III	$3x^2 + 3x + 5$
$58 = 2 \cdot 29$	I	$2x^2 + 29$
$91 = 7 \cdot 13$	III	$7x^2 + 7x + 5$
$115 = 5 \cdot 23$	III	$5x^2 + 5x + 7$
$123 = 3 \cdot 41$	III	$3x^2 + 3x + 11$
$187 = 11 \cdot 17$	III	$11x^2 + 11x + 7$
$235 = 5 \cdot 47$	III	$5x^2 + 5x + 13$
$267 = 3 \cdot 89$	III	$3x^2 + 3x + 23$
$403 = 13 \cdot 31$	III	$13x^2 + 13x + 11$
$427 = 7 \cdot 61$	III	$7x^2 + 7x + 17$

Istotnie, w 1974 r. M.D. Hendy uogólnił twierdzenie Frobeniusa-Rabinowitscha na przypadek $h = 2$. Wiadomo, że jeżeli $h_d = 2$, to liczba d musi być jednej z następujących postaci:

- I. $d = 2p$, gdzie p jest liczbą pierwszą nieparzystą,
- II. $d = q$ jest liczbą pierwszą spełniającą $4 \mid q - 1$,
- III. $d = rs$, gdzie r i s są liczbami pierwszymi spełniającymi $r < s$ oraz $4 \mid r + s$.

W tych przypadkach Hendy rozpatruje, odpowiednio, następujące wielomiany:

- I. $f(x) = 2x^2 + p$, $x = 0, 1, 2, \dots, p - 1$,
- II. $f(x) = 2x^2 + 2x + p$, $p = \frac{x+1}{2}$, $x = 0, 1, 2, \dots, p - 2$,
- III. $f(x) = rx^2 + rx + p$, $p = \frac{r+s}{4}$, $x = 0, 1, 2, \dots, p - 2$.

Hendy udowodnił, że $h_d = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiedni wielomian $f(x)$ dla wskazanych wartości x przyjmuje wartości będące liczbami pierwszymi.

W 1975 r. H.M. Stark wyznaczył wszystkie takie liczby d , że $h_d = 2$. Jest ich 18. W tabelce obok podane są te liczby i odpowiadające im wielomiany.

Tak więc z wyników Hendy'ego i Starka otrzymujemy na przykład, że tylko dla liczb pierwszych $p = 3, 5, 11$ i 29 wielomian $f(x) = 2x^2 + p$ ma tę własność, że dla $x = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ każda z liczb $f(x)$ jest pierwsza. Tę własność wielomianu $2x^2 + 29$ znał już L. Euler w 1772 r.

6. Ostatnio O. Radici znalazł kilka wielomianów postaci $kx^2 + kx + p$ oraz $2kx^2 + p$, które dla $x = 0, 1, 2, \dots, p - 2$ i odpowiednio dla $x = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ przyjmują wartości będące liczbami pierwszymi. Są wśród nich pewne z wielomianów wymienionych wyżej, a także pewne inne, na przykład $6x^2 + 7$.

Wydaje się więc, że trzeba szukać jakichś uogólnień twierdzeń Frobeniusa, Rabinowitscha i Hendy'ego dla $h \geq 3$. Rozpatrzmy przypadek $h = 4$.

Wiadomo, że jeżeli $h_d = 4$, to liczba d musi być jednej z następujących postaci:

- I. $d = 2pq$, gdzie p i q są różnymi liczbami pierwszymi,
- II. $d = 2p$, gdzie p jest liczbą pierwszą nieparzystą,
- III. $d = pq$, gdzie p i q są różnymi liczbami pierwszymi,
- IV. $d = p$, gdzie p jest liczbą pierwszą nieparzystą,
- V. $d = pqr$, gdzie p, q i r są różnymi liczbami pierwszymi.

Ograniczmy się do przypadku I. Z istniejących tablic liczb h_d dla $d \leq 500$ można wypisać wszystkie takie liczby d postaci I, że $h_d = 4$. Liczb takich jest 7. Zapewne innych takich liczb d nie ma, ale dotąd nikt tego nie udowodnił, tak jak to zrobił Stark dla $h = 1$ i $h = 2$.

Dla każdego takiego $d = 2pq$, gdzie $q < p$, rozpatrzmy wielomian $f(x) = 2qx^2 + p$. Okazuje się, że każdy z tych wielomianów $f(x)$ dla $x = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ przyjmuje wartości będące liczbami pierwszymi. Liczby d i odpowiadające im wielomiany podajemy w tabelce obok.

Dla $d = 42$ otrzymujemy wielomian podany przez Radicia. Równie dobrze można by tu rozpatrywać wielomiany $2px^2 + q$. Mają one analogiczną własność.

7. Co dalej? Oczywiście, można próbować zbadać analogicznie inne małe wartości h , choć dotąd nie zostały wyznaczone wszystkie takie liczby d , które odpowiadają danej wartości $h \geq 3$. Nie jest jednak jasne, jaki wielomian należy przyporządkować danej liczbie d . Jak widzieliśmy wyżej, budowa takiego wielomianu była różna w różnych przypadkach.

Interesujące, czy można pobić rekord Eulera, tzn. znaleźć wielomian postaci $kx^2 + kx + p$ lub $2kx^2 + p$, gdzie p jest liczbą pierwszą większą od 41, który dla $x = 0, 1, 2, \dots, p - 2$ lub odpowiednio $x = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ przyjmowałby tylko wartości będące liczbami pierwszymi. Z pewnej ogólnej hipotezy A. Schinzla o wielomianach, tzw. hipotezy H, wynika, że taki wielomian istnieje.

8. Czytelnik pragnący uzyskać dokładniejsze informacje na tematy omawiane wyżej może sięgnąć do książek:

- W. Narkiewicz, *Classical problems in number theory*, Warszawa 1986.
W. Sierpiński, *Elementary theory of numbers*, Warszawa 1987.



Prof. dr Mieczysław SUBOTOWICZ

Warunkiem koniecznym powstania życia jest istnienie planet krążących wokół gwiazdy (gwiazd?) centralnej. Dotąd nie znamy pozastłonecznych układów planetarnych. Jak wygląda problem ich poszukiwania i czy wykryto „układy planetarne” Węgi, Fomalhauta i innych gwiazd?

Zacznijmy od rozważenia, jakimi metodami próbuje się atakować ten problem. Metod jest kilka: astrometryczna (lub radiointerferometryczna dla zakresu radiowego), spektroskopowa, fotometryczna i metoda bezpośredniej detekcji optycznej.

Pierwszą historycznie i jedyną stosowaną do niedawna jest metoda astrometryczna, w której położenie gwiazdy jest wyznaczane przez wiele lat. Zaburzenia jej średniego ruchu interpretujemy jako wywołane przez jej niewidocznego towarzysza lub towarzyszy – jej ruch na tle nieba odbywa się wtedy po linii wężykowatej. Np. amerykański astronom Peter van de Kamp badając systematycznie gwiazdę Barnarda doszedł do wniosku, że za perturbacje w jej ruchu odpowiedzialny jest jej jeden lub więcej satelitów (planet) o masach porównywalnych z masą Jowisza. Wynik ten został otrzymany na granicy dokładności metody i nic dziwnego, że był później kwestionowany – bardzo mała amplituda zaburzeń pozwala stosować metodę astrometryczną jedynie do gwiazd najbliższych. Dalej można sięgnąć metodą radiointerferometryczną – wykorzystując bowiem bardzo dużą bazę (np. równą średnicy Ziemi) można uzyskać zdolność rozdzielczą $0,0001$.

Metoda spektroskopowa polega na obserwacji dopplerowskiego przesunięcia linii widmowych. Obserwacja układu Słońce – Jowisz wymagałaby pomiaru amplitudy zmian prędkości radialnej rzędu 10 m/s. Turbulencje i inne zmiany w atmosferze gwiazd dają przesunięcia często większe niż wymieniona tu wartość, zatem metoda ta mogłaby ewentualnie pozwolić na wykrywanie planet stosunkowo masywnych. Okazuje się, że dość znaczące wyniki uzyskali tą metodą B. Campbell, G.A.H. Walker i S. Yang z Kanady. Przez ostatnie 6 lat obserwowali oni 16 podobnych do Słońca gwiazd, przy czym zmierzone zmiany prędkości radialnej sięgały 65 m/s ze średnim błędem pomiaru 13 m/s, okresy zaś obiegu planetopodobnych towarzyszy gwiazd były rzędu 10 lat. W rezultacie badacze ci stwierdzili, że spośród 16 obserwowanych gwiazd 7 ma ciemnych towarzyszy o masach mieszczących się w zakresie od 1 do 8 mas Jowisza.

Gdyby kierunek obserwacji leżał w płaszczyźnie orbity domniemanej planety, można by w zasadzie dostrzec jej przejście przed tarczą gwiazdy. Przejście np. Jowisza przed tarczą Słońca powoduje spadek jego jasności o około 0,01 mag, a to można zarejestrować dzisiejszymi metodami

fotometrycznymi. Przy użyciu teleskopu o średnicy 125 m stosunek sygnału do szumu wynosiłby 0,1 dla planety ziemopodobnej obiegającej α Centauri oraz 0,01 dla r Ceti lub ϵ Eridani. Planety krążące wokół gwiazd zmiennych mogłyby też zostać wykryte przez rejestrację echa świetlnego, czyli odbicia błysku gwiazdy od powierzchni planety w innych warunkach niewidocznej.

Stosowanie metody bezpośredniej detekcji optycznej, czyli po prostu zobaczenie planety, jest niezmiernie trudne ze względu na olbrzymią różnicę jasności gwiazdy i planety. Ujrzenie Jowisza z odległości 5 pc, gdy jego kątowa odległość od Słońca wynosiłaby $1''$, a więc wielokrotnie więcej niż teoretyczne rozmiary dyfrakcyjnego obrazu gwiazdy w dużym teleskopie, wymagałoby teleskopu o średnicy około 30 m. W celu wyeliminowania światła gwiazdy można by przed teleskopem umieścić dysk zaćmieniowy (jak w koronografie). Obliczono, że przesłona ustawiona w odległości 10 000 km od teleskopu o średnicy 2,8 m umożliwiłaby wykrycie Jowisza z odległości 5 pc, zaś dla wykrycia Ziemi potrzebny byłby przy tych założeniach teleskop o średnicy 30 m. Trudności technicznych związanych z takim przedsięwzięciem nie trzeba chyba podkreślać i nikt jeszcze obserwacji z użyciem takich „kosmicznych” przesłon nie przeprowadził. Niemniej jednak w 1984 r. D.W.McCarthy Jr i F.J.Low z Uniwersytetu Arizona oraz R.G.Probst z National Optical Observatories w USA donieśli o zaobserwowaniu „brązowego karła” obiegającego słabą gwiazdę Van Biesbroeck 8 położoną w odległości 21 lat świetlnych od Ziemi. Brązowe karły można traktować jako ciała pośrednie między gwiazdami i planetami. Odkrycie to nie zostało jednak potwierdzone przez innych obserwatorów – wypowiedano wręcz opinie, że grupa z Arizony widziała, być może, nowy rodzaj mgławicy albo jakiś artefakt.

Jednak dzięki technice kosmicznej dokonano wreszcie niedawno niewątpliwego odkrycia w tej dziedzinie. Otóż 25 I 1983 r. umieszczony został na orbicie sztuczny satelita astronomiczny IRAS przeznaczony do obserwacji nieba w podczerwieni (InfraRed Astronomical Satellite). IRAS obserwował niebo na falach 12, 25, 60 i 100 μm i w ciągu 10 miesięcy dostarczył informacji o ponad 200 tysiącach punktowych źródeł promieniowania podczerwonego. Wśród tych danych znajduje się bodaj najbardziej spektakularne odkrycie „układu planetarnego” wokół Węgi (α Lyrae). Byłoby to pierwsze odkrycie o istotnym znaczeniu dla szukających życia poza Ziemią oraz dla kosmogonii planetarnej. Bowiem odkrycie IRASa stanowi pierwszy dowód istnienia zestalonej materii w pobliżu innej gwiazdy.

Wega znajduje się w odległości 8 pc od Słońca, jest piątą co do jasności gwiazdą na niebie, jest 58-krotnie jaśniejsza od Słońca, ma od niego 3-krotnie większą masę i 2,5-krotnie większą średnicę.

Uzyskany przez IRASa sygnał był 10 do 20 razy silniejszy niż sygnał od samej gwiazdy o temperaturze 9 700 K. Obraz Wegi w podczerwieni ma średnicę kątową 20", czemu odpowiada 160 j.a., czyli dwukrotnie więcej niż rozmiary Układu Słonecznego. Obraz jest przy tym symetryczny, co oznacza, że mamy do czynienia albo z pierścieniem widzianym „z góry”, albo ze sferycznym obłokiem pyłowym. Pierścień ma temperaturę 90 K, a jego cząstki rozmiary co najmniej 1 mm.

Nie wiadomo, czy z okruchami i pyłami krążą dookoła Wegi planety. Aparaturą IRASa nie dałoby się wykryć planet nawet o rozmiarach Jowisza z powodu zbyt małej powierzchni promieniującej. Prócz tego czas istnienia Wegi (jej wiek prawdopodobnie nie przekracza miliarda lat) jest za krótki na uformowanie się planet. Przebadano 9 tys. gwiazd i stwierdzono, że zaledwie 50 z nich może mieć własne, zapewne pyłowe „układy planetarne”. Oznacza to, że układy typu Wegi są rzadkie, a trudności wykrycia pierścienia pyłowego wokół gwiazdy są znaczne – aparaturą

IRASa nie dałoby się wykryć układu planetarnego typu słonecznego z odległości około 30 lat świetlnych. Współodkrywca pierścieni Wegi, H.H. Aumann, stwierdził, że wokół 10% jasnych gwiazd ciągu głównego położonych w promieniu 75 lat świetlnych od Słońca wykryto nadmiar promieniowania podczerwonego. Wierzymy, że jest to przejaw obecności pierścieni pyłowych, które kondensując się tworzyłyby z czasem układy planetarne. Dowodziłoby to, że powstawanie układów planetarnych jest zjawiskiem dość typowym we Wszechświecie. Większość gwiazd otoczonych układami protoplanetarnymi należy do typu widmowego F i G o czasie życia ponad 10 mld lat, aczkolwiek są wśród nich także młode masywne gwiazdy jak Wega czy Fomalhaut (α *Piscis Austrini*), których wiek nie przekracza miliarda lat. Nie wiadomo, czy zwiększona emisja w podczerwieni może zachodzić w układzie wielu gwiazd, które stanowią około 50% całej populacji gwiazdowej. Nie wiadomo też, czy emisja podczerwieni zależy jakoś od wieku gwiazd, albo jakiego rzeczywistego kształtu są ich pyłowe otoczki.



Dysk pyłowy wokół β *Pictoris* – prawdopodobnie wczesne stadium formowania się układu planetarnego. Zdjęcie wykonali w 1985 r. Richard Terrile i Bradford Smith w Obserwatorium Las Campanas (Chile) za pomocą 2,5 m teleskopu i kamery CCD zaopatrzonej w „koronograf”. Dysk widać na odległość 25" od gwiazdy, czemu odpowiada 60 mld km.

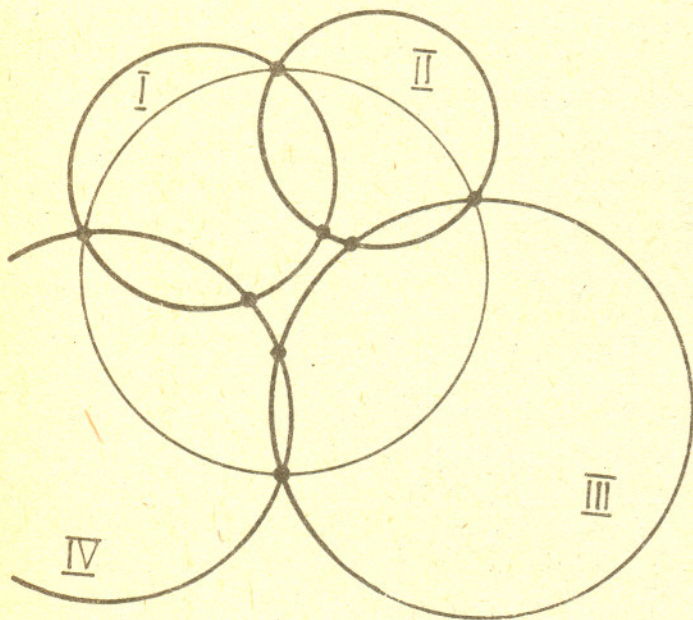
W połowie 1989 roku ma zostać umieszczony na orbicie za pomocą promu kosmicznego Wielki Teleskop Kosmiczny (WTK) Hubble'a. Opóźnienie tego przedsięwzięcia spowodowane było katastrofą *Challenger*a. Średnica WTK wynosić będzie 2,4 m. Ma to być satelitarne obserwatorium astronomiczne na najbliższe 15 lat. Wśród wielorakich zastosowań możliwe będzie użycie WTK do wykrywania pozasłonecznych planet. Umieszczając dysk zaćmieniowy w odległości 10 000 km przed teleskopem można będzie z odległości 17 lat świetlnych wykryć planetę typu jowiszowego przy stosunku sygnału do szumu równym 1 (dla planety typu ziemskiego stosunek ten wynosi 0,024). Rolę elementu zaćmieniowego mógłby w pewnych przypadkach pełnić nawet Księżyc.

Z innych urządzeń planowanych do bezpośredniego wykrywania planet w ciągu najbliższego dziesięciolecia wymienimy przede wszystkim satelitarne obserwatorium w podczerwieni (ISO – Infrared Satellite Observatory),

które ma zostać wystrzelone przez ESA (Europejską Agencję Kosmiczną) w 1992 r. Ponadto przygotowywane jest przez NASA do wysłania na orbitę w 1993 r. „kosmiczne urządzenie teleskopowe na podczerwień” (SITF – Space Infrared Telescope Facility), które będzie pracować w szerokim zakresie spektralnym od 2 μ m do 200 μ m przy zdolności rozdzielczej 6". Wreszcie do końca naszego stulecia mają być wysłane dwa wielkie radioteleskopy kosmiczne na daleką podczerwień aż do obszaru fal submilimetrowych, jeden przez ESA (FIRST – Far InfraRed Space Telescope), drugi przez NASA (LDR – Large Deployable Reflector), o średnicy 20 m każdy. Jeżeli LDR będzie pracować w układzie interferometrycznym z innym teleskopem (naziemnym lub kosmicznym), to będzie można badać szczegóły budowy układów planetarnych. Znacznych postępów można oczekiwać po wykorzystaniu detektorów fotoelektrycznych, kiedy położenie gwiazdy lub planety będzie można określić z dokładnością do 0,004 po 10-minutowej obserwacji.

5 mata delta

Sformułuj i udowodnij

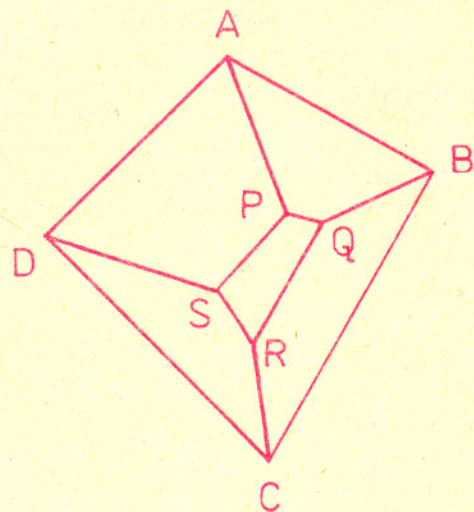
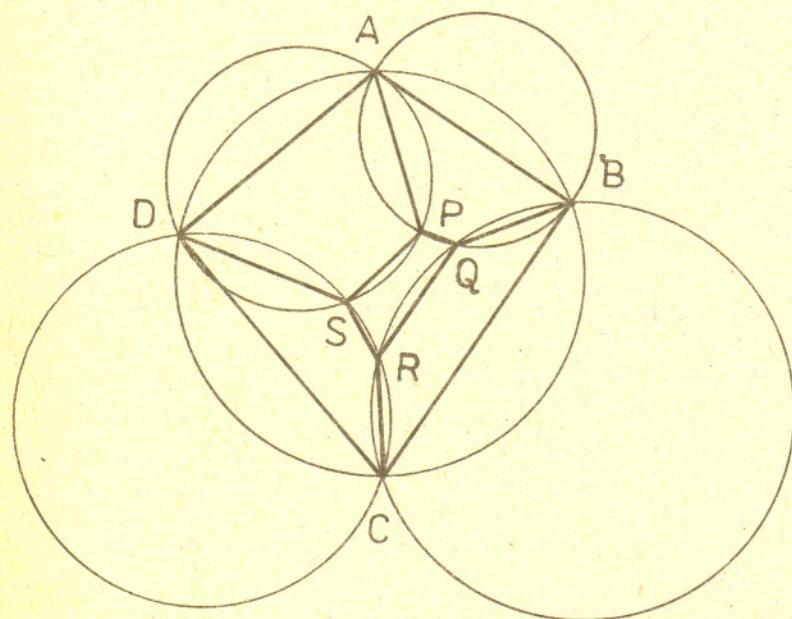


Zanim matematyk weźmie się do dowodu, musi mieć sformułowaną hipotezę – przypuszczenie, że jakieś zdanie jest twierdzeniem, czyli że jest prawdziwe. Często sformułowanie hipotezy jest zadaniem trudniejszym od samego dowodu.

Zaczyna się od tego, że trzeba coś zauważyć. Np. na rysunku obok mamy cztery grube okręgi i jeden cienki. Oznaczmy przez A, B, C, D punkty przecięcia okręgów I i II, II i III, III i IV oraz IV i I leżące na cienkim okręgu. Można podejrzewać, że pozostałe punkty przecięć tych okręgów (P, Q, R, S) też leżą na jakimś okręgu.

Spróbujmy to udowodnić. Dla jasności przerysujmy te punkty już bez okręgów i połączmy je jak na rysunku poniżej. Skorzystamy z twierdzenia:

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy suma jego przeciwległych kątów jest równa 180° .



Skoro tak, to

$$\begin{aligned} \angle PAD &= 180^\circ - \angle PSD, \text{ bo } APSD \text{ jest wpisany w I,} \\ \angle RCD &= 180^\circ - \angle RSD, \text{ bo } CRSD \text{ jest wpisany w IV,} \end{aligned}$$

a więc

$$\angle PSR = 360^\circ - (\angle PSD + \angle RSD) = \angle PAD + \angle RCD.$$

Korzystając z okręgu II i III podobnie otrzymujemy

$$\angle PQR = 360^\circ - (\angle PQB + \angle RQB) = (180^\circ - \angle PQB) + (180^\circ - \angle RQB) = \angle PAB + \angle RCB.$$

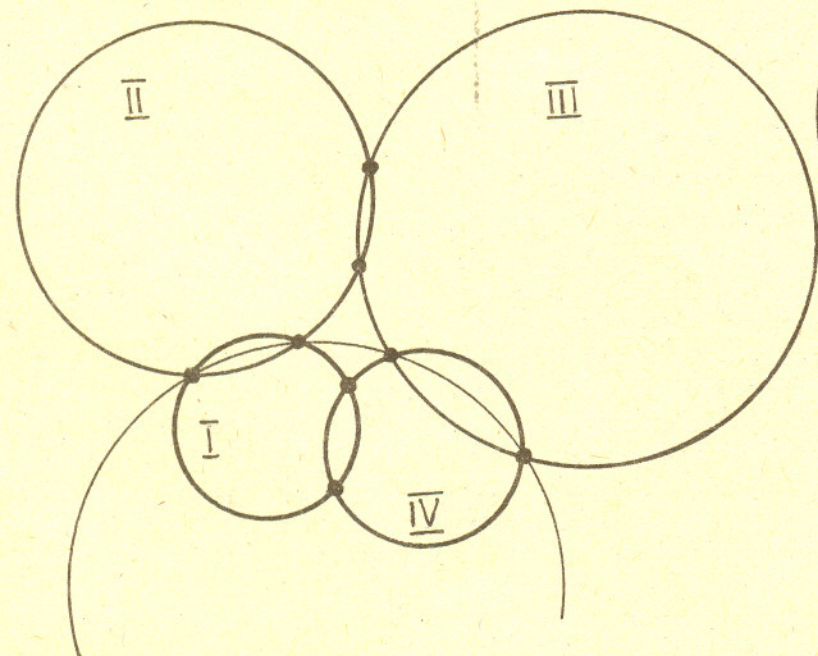
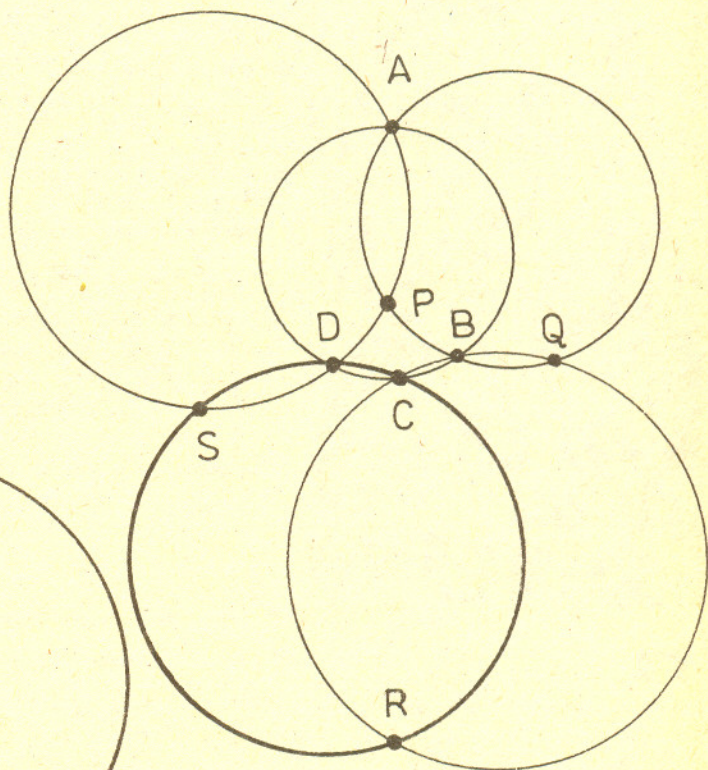
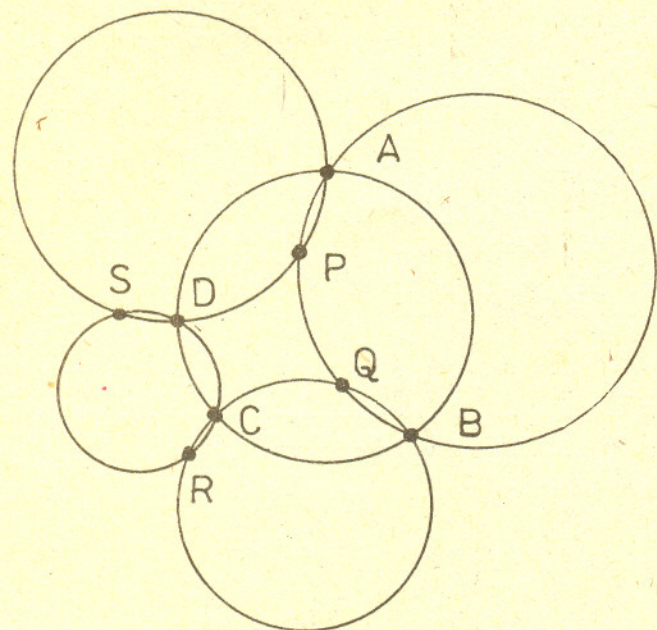
Łącznie mamy

$$\begin{aligned} \angle PSR + \angle PQR &= \angle PAD + \angle RCD + \angle PAB + \angle RCB = \\ &= (\angle PAD + \angle PAB) + (\angle RCD + \angle RCB) = \angle DAB + \angle DCB = 180^\circ, \end{aligned}$$

bo $ABCD$ jest wpisany w tenki okrąg. Udało się: na $PQRS$ można opisać okrąg. Stąd

Hipoteza: Jeżeli okręgi I i II, II i III, III i IV oraz IV i I przecinają się w dwóch punktach i cztery z tych ośmiu punktów – po jednym z każdej pary – leżą na jakimś okręgu, to pozostałe z tych punktów też leżą na okręgu.

A dlaczego to ma być hipoteza, a nie już twierdzenie? Przecież przeprowadziliśmy dowód. Na to odpowiadają kolejne dwa rysunki. Widać z nich, że dowiedliśmy tylko jednego z przypadków. Proszę spróbować dowieść pozostałych (czy jest ich tylko dwa?).



A na zakończenie propozycja sformułowania hipotezy i przeprowadzenia jej dowodu dla sytuacji przedstawionej na rysunku obok.

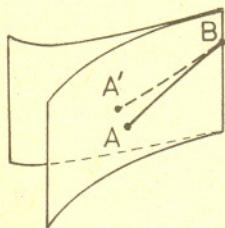
O funkcjach arytmetycznych i splocie Dirichleta

Dr Jerzy

RUTKOWSKI



Rozwiązanie zadania M 536.



Rozpatrzmy punkty A i A' , które pokrywają się po zgięciu kartki oraz dowolny punkt B na zgięciu. Widać, że linia zgięcia składa się z punktów równo odległych od A i A' ; jest zatem prosta.

Jednym z działów teorii liczb jest teoria funkcji arytmetycznych, tj. funkcji o wartościach liczbowych określonych na zbiorze \mathbb{N} liczb naturalnych. A oto kilka przykładów funkcji arytmetycznych.

Przykład 1. Suma dzielników $-\sigma$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ określamy $\sigma(n)$ jako sumę dzielników naturalnych liczby n . Mamy $\sigma(1) = 1$. Jeśli $n > 1$, to możemy n przedstawić w postaci iloczynu potęg różnych liczb pierwszych $n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$, gdzie $r, k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ (jest to tzw. rozkład kanoniczny liczby n). Rozpatrzmy następujący iloczyn sum

$$(*) \quad (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{k_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{k_2}) \cdot \dots \cdot (1 + p_r + p_r^2 + \dots + p_r^{k_r}).$$

Po wykonaniu mnożeń otrzymamy sumę $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_r + 1)$ różnych iloczynów, przy czym każdy z tych iloczynów jest dzielnikiem liczby n i na odwrót – każdy dzielnik liczby n jest jednym z tych iloczynów. Zatem wyrażenie $(*)$ jest sumą wszystkich dzielników naturalnych liczby n . Korzystając ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego otrzymujemy, że

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}.$$

Np. dla $n = 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ mamy

$$\sigma(600) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^3 - 1}{5 - 1} = 15 \cdot 4 \cdot 31 = 1860.$$

Przykład 2. Liczba dzielników $-\tau$.

Liczbę dzielników naturalnych liczby n oznaczamy przez $\tau(n)$. Oczywiście, $\tau(1) = 1$. Jeśli $n > 1$ i $n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$ jest rozkładem kanonicznym liczby n , to z rozważań w przykładzie 1 wynika, że

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_r + 1).$$

Np. mamy $\tau(600) = \tau(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

Przykład 3. Funkcja Eulera $-\varphi$.

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ określamy $\varphi(n)$ jako liczbę takich liczb naturalnych k , że $k \leq n$ i $(k, n) = 1$ (tzn. nie mają innych wspólnych dzielników niż 1, czyli są względnie pierwsze). Np. $\varphi(10) = 4$, ponieważ istnieją dokładnie 4 liczby naturalne nie większe od 10 i względnie pierwsze z 10 (są to 1, 3, 7 i 9). Mamy też $\varphi(1) = 1$. Jeśli p jest liczbą pierwszą i $k \in \mathbb{N}$, to $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, ponieważ wśród liczb $1, 2, \dots, p^k$ co p -ta nie jest względnie pierwsza z p^k . Dowodzi się, że jeśli $n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$ jest rozkładem kanonicznym liczby n , to

$$\varphi(n) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1})(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}) \cdot \dots \cdot (p_r^{k_r} - p_r^{k_r-1}).$$

Przykład 4. Funkcja Möbiusa $-\mu$.

Funkcja ta określona jest wzorem

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } n = 1; \\ (-1)^r, & \text{jeśli } n = p_1 \cdot \dots \cdot p_r, \text{ gdzie } p_1, \dots, p_r \text{ są różnymi liczbami pierwszymi;} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

W szczególności mamy $\mu(2) = \mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$.

Przykład 5. Funkcja e określona wzorem

$$e(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1; \\ 0 & \text{dla } n > 1. \end{cases}$$

Przykład 6. Funkcja I , gdzie $I(n) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 7. Funkcja T , gdzie $T(n) = n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zwróćmy uwagę, że jeśli f jest którąkolwiek z siedmiu powyższych funkcji arytmetycznych, to $f(1) = 1$ oraz

$$f(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}) = f(p_1^{k_1})f(p_2^{k_2}) \cdot \dots \cdot f(p_r^{k_r})$$

dla dowolnych $r, k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ i dowolnych liczb pierwszych p_1, \dots, p_r . Funkcję arytmetyczną o takich własnościach nazywamy moltiplicatywną.

Funkcje arytmetyczne można w zwykły sposób dodawać i mnożyć. Mamy np. $(\tau + \sigma)(600) = 24 + 1860 = 1884$, $(\tau \cdot \sigma)(600) = 24 \cdot 1860 = 44640$.

Jednakże w zbiorze funkcji arytmetycznych można określić jeszcze inne działanie, które jest niezmiernie użyteczne w teorii tych funkcji. Działanie to, zwane splocem Dirichleta, oznaczamy symbolem $*$ i określamy je następująco: dla dowolnych funkcji arytmetycznych f i g oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Symbol $\sum_{d|n}$ czytamy: „suma po d dzielących n ”, a jego znaczenie niech wyjaśnią przykłady.

Aby obliczyć np. $(\varphi * \tau)(21)$, znajdujemy wpieryw wszystkie dzielniki liczby 21, czyli 1, 3, 7 i 21. Następnie obliczamy

$$(\varphi * \tau)(21) = \sum_{d|21} \varphi(d) \tau\left(\frac{21}{d}\right) = \varphi(1)\tau(21) + \varphi(3)\tau(7) + \varphi(7)\tau(3) + \varphi(21)\tau(1) = \\ = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 32.$$

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$(I * I)(n) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n)$$

oraz

$$(T * I)(n) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Wykażemy, że $\varphi * I = T$, czyli że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

MROŻONE ATOMY

Czy atomy można mrozić? Okazuje się, że w pewnym sensie tak. Co ciekawe, rolę lodówki pełni wiązka światła laserowego. Już pod koniec lat siedemdziesiątych stwierdzono, że podobnie jak kulka ping-pongowa wrzucona do pudełka traci pęd i energię kinetyczną przez zderzenia ze ściankami, tak odpowiednio dobrane światło lasera może pełnić rolę "ściany" i chłodzić atomy. Skupienie wiązki światła z kilku laserów ustawionych z różnych stron jest więc w stanie stworzyć takie "pudełko" (nazywane w tym przypadku pułapką), w którym uwieszone atomy można chłodzić. Zmiana pędu atomu po absorpcji fotonu jest, oczywiście, niewielka i nie może przekroczyć h/λ , gdzie h jest stałą Plancka a λ długością fali światła lasera. Na przykład atomy sodu (używane w większości eksperymentów) mają w temperaturze pokojowej prędkość około 1000 m/s. Przy absorpcji złotego fotonu prędkość ta maleje o 3 cm/s. Oznacza to, że dopiero po zaabsorbowaniu i wyemitowaniu ponad trzydziestu tysięcy fotonów temperatura atomu sodu może obniżyć się do rejonu zera bezwzględnej. Jeżeli odpowiednio dobierzemy energię fotonów ($h\nu$) tworzących pułapkę (ze względu na efekt Dopplera energia ta musi być minimalnie mniejsza niż różnica energii stanów elektronowych w atomie), to atom poruszający się w stronę danego lasera będzie przez niego hamowany. W ten sposób można w niewielkiej objętości (rzędu 10^{-4} cm^3) utrzymywać przez minuty ochłodzone atomy. Początkowo tę technikę zastosowano do jonów, później udało się schłodzić atomy. W jednym z ostatnich eksperymentów grupa fizyków z National Bureau of Standards (stan Maryland, USA), przy zastosowaniu sześcioro skupionych w jednym punkcie wiązek laserowych, zdołała ochłodzić gaz złożony z atomów sodu do rekordowej temperatury 0,000043 K, czyli 43 μK . Tak schłodzone atomy zachowują się jak bardzo gęsta ciecz, stąd pułapkowane atomy są czasem nazywane "optyczną melasą". Szalenie zabawny jest fakt, iż teoretycznie przewidywany limit dla tej metody chłodzenia wynosił około 240 μK . W związku z tymi przewidywaniami grupa z Bell Laboratories (stan New Jersey, USA), która przed kilku laty uzyskiwała dokładnie wartość 240 μK , była przekonana, że osiągnęła już granicę możliwości. Tymczasem okazało się, że przesunięcie częstotliwości laserów o 20 MHz poniżej częstotliwości rezonansowej (w porównaniu z 5 MHz stosowanymi przez grupę z Bell Laboratories) dało znakomite rezultaty. Teoretycy muszą więc na nowo wziąć się do pracy, zwłaszcza że ostatnie rezultaty grupy z Maryland zdają się wskazywać na możliwość osiągnięcia jeszcze niższych temperatur w laserowych pułapkach.

Rozpatrzmy n ułamków: $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$. Doprowadzając każdy z nich do postaci nieskracalnej otrzymamy nowy układ n ułamków o mianownikach będących dzielnikami n , przy czym dla każdego d dzielącego n dokładnie $\varphi(d)$ ułamków o mianowniku d występuje w tym nowym układzie. Stąd nasza równość.

Udowodnimy jeszcze, że $\mu * I = e$. Jeśli $n = 1$, to $(\mu * I)(1) = \mu(1)I(1) = 1 = e(1)$. Niech teraz n będzie liczbą naturalną większą od 1 o rozkładzie kanonicznym $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$. Każdy dzielnik d liczby n jest postaci $p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$, gdzie $0 \leq m_i \leq k_i$ dla $i = 1, \dots, r$. Jeśli dla pewnego i jest $m_i > 1$, to wtedy $\mu(d) = 0$. Wobec tego

$$(\mu * I)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|p_1 \dots p_r} \mu(d) = (1 + \mu(p_1))(1 + \mu(p_2)) \dots (1 + \mu(p_r)) = \\ = 0 \cdot 0 \dots 0 = 0.$$

Zatem istotnie $\mu * I = e$.

Funkcja e zachowuje się całkiem ciekawie. Dla dowolnej funkcji arytmetycznej f i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy bowiem, że

$$(f * e)(n) = \sum_{d|n} f(d) e\left(\frac{n}{d}\right) = f(n),$$

ponieważ dla $d < n$ mamy $e(n/d) = 0$. Zatem $f * e = f$. Czytelnik może sprawdzić, że również $e * f = f$ dla dowolnej funkcji f .

Udowodniliśmy więc następujące równości splotowe:

$$I * I = \tau, \quad T * I = \sigma, \quad \varphi * I = T, \quad \mu * I = e \quad \text{i} \quad f * e = f.$$

Równości takie są ciekawe same w sobie, ale na tym ich rola się nie kończy. Ich znaczenie ilustruje następujące twierdzenie:

Jeśli w równości $f * g = h$ którejkolwiek dwie funkcje są mnożymy, to i trzecia jest mnożymy.

Z twierdzenia tego natychmiast wynika, że np. funkcja Eulera jest mnożymy, bowiem $\varphi * I = T$ i funkcje I oraz T są w sposób oczywisty mnożymy.

Działanie $*$ ma szereg pożądanych własności. Jest ono przemienne, łączne i rozdzielne względem zwykłego dodawania funkcji. Ponadto, jak to już wykazaliśmy, funkcja e zachowuje się tak jak liczba 1 przy mnożeniu liczb.

Wykorzystanie tych algebraicznych własności splotu Dirichleta zilustrujemy dowodząc w sposób czysto algebraiczny, że jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$,

to dla każdego n jest też $f(n) = \sum_{d|n} F(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$. Mamy

$$F = f * I \iff F * \mu = (f * I) * \mu \iff F * \mu = f * (I * \mu) \iff \\ \iff F * \mu = f * e \iff F * \mu = f \iff f = F * \mu.$$

Dowód został zakończony.

Niech Czytelnik, wzorując się na nim, spróbuje wykazać twierdzenie odwrotne do dopiero co udowodnionego.

Wyprowadzimy jeszcze równość splotową $\varphi * \tau = \sigma$ wiążącą ważne funkcje φ , τ i σ . Mamy

$$\varphi * \tau = \varphi * (I * I) = (\varphi * I) * I = T * I = \sigma.$$

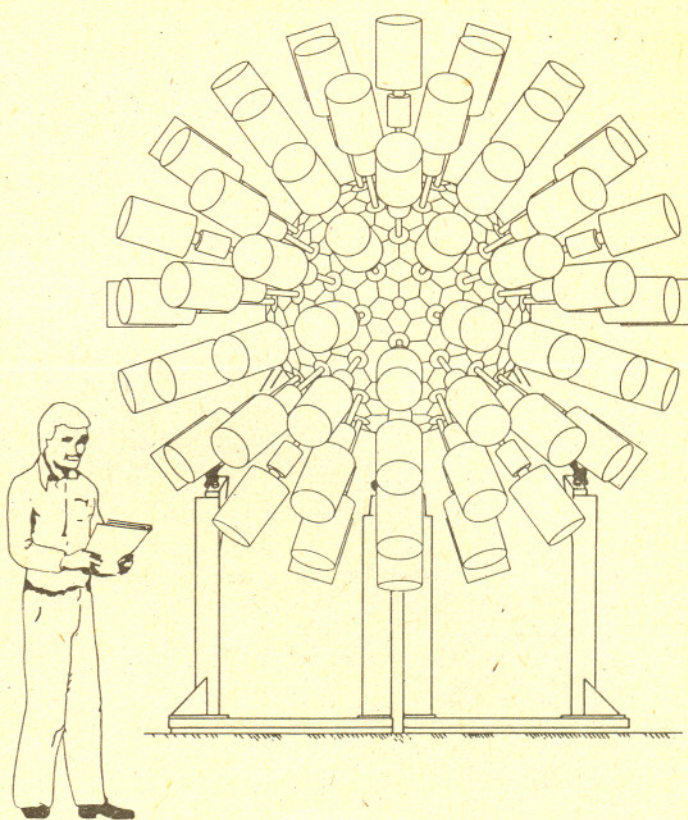
Na zakończenie ćwiczenie dla Czytelnika: udowodnić, że jeśli $f \neq 0$ i $g \neq 0$, to również $f * g \neq 0$ (symbol „0” oznacza tu funkcję zerową).

Dr Lidia GOETTIG

To już ustalona tradycja w polskiej i światowej fizyce jądrowej. U schyłku lata, gdy odleca już znad mazurskich jezior kormorany, do Mikołajek zjeżdżają uczestnicy Międzynarodowej Szkoły Fizyki Jądrowej. Ta ostatnia, w ubiegłym roku (1988), była wyjątkowo uroczysta, bowiem dwudziesta. Wszak liczby 2,8,20,28,50,82,126 są wyróżnione i uprzywilejowane w przyrodzie. Fizyk jądrowy nazywa je magicznymi, a jądra mające taką liczbę protonów lub neutronów są szczególnie silnie związane. Ponieważ liczby magiczne odpowiadają zamkniętym powłokom nukleonowym, więc jądra magiczne wyróżniają się symetrią sferyczną na tle mniej lub bardziej zdeformowanych innych jąder. Ma zatem swój ukryty sens powiedzenie, że następną okrągłą rocznicę Szkoła obchodzić będzie nie za 10, lecz już za 8 lat. Na „magiczną” dwudziestą Szkołę przyjechało około 140 fizyków z 14 krajów i przez 10 dni, na łądzie i na wodzie, uczyli się oni, dyskutowali i bawili. Na wodzie – też, bowiem Szkołę tę nazywają często Szkołą Pod Żaglami. Żeglowanie i udział w regatach należą niemalże do obowiązku towarzyskiego uczestnika Szkoły i nadają temu spotkaniu niepowtarzalny, urokliwy charakter.

Tematem Szkoły była fizyka ciężkich jonów, a więc zagadnienia związane z tym, w jaki sposób zachodzą reakcje jądrowe (wywołane przez rozpędzone w akceleratorze ciężkie jony, czyli zjonizowane atomy), co powstaje w ich wyniku oraz jak się zachowują i jaka jest struktura wewnętrzna produktów reakcji. A trzeba podkreślić, że jądro atomowe to wspaniałe laboratorium do wszechstronnych badań nad kwantowymi układami wielu ciał. W jądrze możemy bowiem obserwować i badać zarówno stany jednocząstkowe nukleonów, jak i wzbudzenia kolektywne (np. ruchy rotacyjne i wibracyjne wielu nukleonów), a przy wysokich energiach wzbudzenia – również i kwantowy chaos.

Wykładowcy zaproszeni z najlepszych na świecie ośrodków fizyki jądrowej, m.in. z Berkeley (USA), Daresbury (Wielka Brytania), Filadelfii (USA), Grenoble (Francja), Kolonii (RFN), Livermore (USA) i Warszawy, opowiadali o najnowszych badaniach, zarówno doświadczalnych, jak i teoretycznych, rozciągających się na nowe, coraz trudniej dostępne w eksperymencie zakresy momentu pędu, energii wzbudzenia i izospinu (trzecia składowa izospinu jądra równa jest połowie różnicy liczby znajdujących się w nim protonów i neutronów). Wielkie nadzieje związane są z budową nowych urządzeń detekcyjnych. Jednym z ciekawszych projektów jest przedstawiony na rysunku układ pomiarowy do rejestracji promieniowania gamma, który ma powstać w USA do roku 1992. Przewidywany koszt bldowy wynosi około 15 milionów dolarów. Urządzenie będzie się składać ze 110 detektorów germanowych w antykomptonowskich (tj. obniżających tło pochodzące od rozpraszania komptonowskiego) osłonach z kryształów scyntylacyjnych o nazwie BGO.



Ze względu na swój kształt (choć każdy się zgodzi, że bardziej przypomina jeża) nazwany został gammakulą (ang. gammasphere). Będzie to układ detekcyjny idealnie nadający się do badań wysokospinowych stanów wzbudzonych oraz badań jąder „egzotycznych”, tj. jąder o stosunku liczby protonów i neutronów bardzo dalekim od obserwowanego w jądrach stabilnych, występujących w przyrodzie. Najlepsze obecnie istniejące układy złożone są z 20 do 30 detektorów germanowych, a ich zastosowanie doprowadziło niedawno do odkrycia zjawiska tzw. superdeformacji w jądrze ^{152}Dy , a później i w paru innych, sąsiednich jądrach Gd, Tb i Dy. Oprócz „typowych” stanów wzbudzonych obserwuje się w tych jądrach bardzo regularne pasma stanów odpowiadające rotacjom przy niezwykle dużej deformacji. W tych stanach jądro ma kształt wydłużonej elipsoidy (cygara) o dwóch równych krótszych półosiach i jednej dłuższej (jądro obraca się wokół krótszej półosi), przy czym stosunek dłuższej do krótszej półosi wynosi 2:1. Ocenia się, że gammakula stworzy szanse „zobaczenia” tzw. hiperdeformacji odpowiadających stosunkowi półosi jądra 3:1.

Tymczasem w Polsce czekamy ciągle na nasz warszawski cyklotron, a żart przekręcający jego nazwę z U-200 na U-2000 staje się coraz mniej zabawny. Budynek przy ul. Pasteura, mający pomieścić cyklotron, już prawie gotowy, ale jakże rozpaczliwie powoli przedziera się ta inwestycja przez szpony kryzysu gospodarczego. A może to po prostu krótkowzroczność decydentów, zaniedbujących badania podstawowe...

Zakończenie optymistyczne: puchar w szkolnych Regatach '88 przypadł znanemu naszym Czytelnikom z publikowanych w *Delcie* artykułów polskiemu fizykowi jądrowemu – Markowi Pfütznerowi.

Gratulujemy!

Jedną z podstawowych własności współczynników rozwinięcia potęgi dwumianu jest równość $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$, która daje prosty wzór na sumę liczb występujących w n -tym wierszu trójkąta Pascala. A jaka będzie suma co drugiej liczby w n -tym wierszu? Okazuje się, że

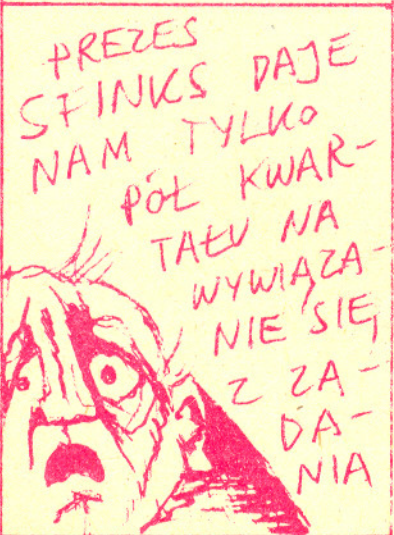
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1} = \frac{2^n}{2},$$

czyli sumując co drugą liczbę otrzymamy wynik niezależny od tego, czy rozpoczynamy dodawanie od $\binom{n}{0}$, czy od $\binom{n}{1}$. Dowód powyższych faktów jest prosty: wystarczy przedstawić w postaci sumy liczby $(1+1)^n$ i $(1-1)^n$. A ile wynosi suma co trzeciego wyrazu: $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$? Czyżby $\frac{2^n}{3}$? Niestety, nie. To musi być liczba całkowita! I oto mamy problem do zbadania: Obliczyć sumę $\binom{n}{l} + \binom{n}{l+k} + \binom{n}{l+2k} + \dots$, gdzie $l < k$. Zagadnienie to wiąże się ściśle z następującym pytaniem: Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po n rzutach monetą liczba orłów będzie podzielna przez k z resztą l ? Można też rozważać sumy kwadratów wyrazów trójkąta Pascala. Wiadomo bowiem, że

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

A jeśli wziąć w tej sumie co drugi (lub co k -ty) składnik?

J.W.



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 535. Oto przepis na elipsę z poradnika dla majsterkowiczów: owijamy walec papierem i rysujemy cyrklem „okrąg”. Po rozprostowaniu papieru otrzymamy elipsę. Czy rzeczywiście?

Rozwiązanie na str. 2

M 536. Ogólnie znany przepis na prostą: zgiąć kartkę papieru. Linia zgięcia jest prosta – dlaczego?

Rozwiązanie na str. 10

M 537. Funkcja ciągła f ma następującą własność: jeśli $x - y = 1$, to $f(x) - f(y) = 1$. Czy f musi być liniowa?

Rozwiązanie na str. 2

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 264. Ocenić siłę, jaką należy przyłożyć do krawędzi nadmuchiwanego materaca tak, aby zgiąć go pod kątem 90° . Zakładamy, że materac składa się z jednej części i nie ma poprzecznych szwów oraz jest dobrze napompowany.

Rozwiązanie na str. 3

F 265. Dziecięcy balonik napęczniony jest gorącym powietrzem. Przy jakiej temperaturze powietrza w baloniku będzie mógł się on unieść?

Temperatura T_0 otoczenia wynosi około 300 K.

Rozwiązanie na str. 4

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

Zadania z matematyki nr 187, 188

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

187. Na płaszczyźnie z kartezjańskim układem współrzędnych łączymy punkty $(0, 0)$ i $(1, 1)$ krzywą o parametryzacji $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$; $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(1) = \psi(1) = 1$; zakładamy, że φ i ψ są niemalejącymi ciągłymi funkcjami zmiennej $t \in (0; 1)$. Czy każdą taką krzywą da się pokryć 10 prostokątami o bokach równoległych do osi układu tak, by pole każdego z nich było nie większe niż $1/100$?

188. Rozważamy ciąg (x_n) określony wzorem rekurencyjnym $x_{n+1} = |x_n - 2^{-n}|$. Przedyskutować (w zależności od wartości początkowego wyrazu $x_0 \in \mathbb{R}$) zbieżność ciągu (x_n) ; w razie zbieżności - znaleźć granicę.

Zadanie 188 zaproponował pan Henryk Kornacki z Augustowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1988

Przypominamy treść zadań:

179. Rozwiązać w liczbach nieujemnych równanie

$$\left(\frac{x + (xy)^{1/2} + y}{3}\right)^{1/3} = \left(\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{2}\right)^{1/2}$$

180. Wykazać, że szachownicę $2^n \times 2^n$, z której wycięto jedno pole, można pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami „trimino” (tj. mającymi kształt litery L złożonej z trzech kwadratów jednostkowych).

179. Wszystkie pary (x, y) takie, że $x = y$, są rozwiązaniami równania. Pokażemy, że innych rozwiązań nie ma. Przypuśćmy, że równanie jest spełnione przez liczby $x, y \geq 0$ nie równe jednocześnie zeru. Przyjmijmy oznaczenia: $c = x^{2/3} + y^{2/3}$, $u = x^{1/3}c^{-1/2}$, $v = y^{1/3}c^{-1/2}$. Liczby u i v związane są zależnością $u^2 + v^2 = 1$, a równanie przybiera po prostych przekształceniach postać

$$u^3 + (uv)^{3/2} + v^3 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Skoro $u^2 + v^2 = 1$ ($u, v \geq 0$), istnieje liczba $t_0 \in (0; \frac{\pi}{2})$ taka, że $u = \cos t_0$, $v = \sin t_0$. Tak więc funkcja

$$f(t) = (\cos t)^3 + (\sin t)^3 + (\cos t \sin t)^{3/2},$$

rozważana na przedziale $(0; \frac{\pi}{2})$, przyjmuje dla $t = t_0$ wartość $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. Jej pochodna

$$f'(t) = \frac{3}{2}(\cos t \sin t)^{1/2}(\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t - 2(\cos t \sin t)^{1/2})$$

jest dodatnia w przedziale $(0; \frac{\pi}{4})$, a ujemna w $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$. Zatem f przyjmuje w punkcie $\frac{\pi}{4}$ (i tylko tam) swą wartość maksymalną $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Wobec tego $t_0 = \frac{\pi}{4}$, a to znaczy, że $u = v$, czyli $x = y$. [Inne rozwiązanie: Można przyjąć, że $x > 0$. Przez podstawienie $y/x = t^6$ sprowadzamy równanie do postaci $8(1 + t^3 + t^6)^2 = 9(1 + t^4)^3$. Różnica między prawą a lewą stroną daje się następnie (pomijamy szczegóły przekształceń) wyrazić jako iloczyn

$$(t-1)^4 (t^4(t+2)^2(t^2+1) + (2t+1)^2(t^2+1) + 5t^2(t^2-1)^2);$$

jest więc zerem tylko dla $t = 1$, co odpowiada temu, że w wyjściowym równaniu musi być $x = y$.]

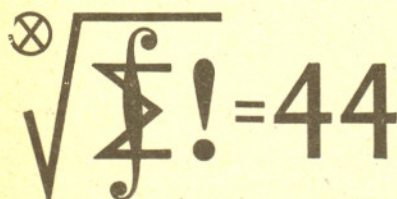
180. Indukcja. Szachownica $2^1 \times 2^1$ bez pola - to pojedyncze trimino. Załóżmy prawdziwość tezy dla pewnego n i weźmy szachownicę $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ bez jednego pola. Dzielimy ją na cztery szachownice A, B, C, D o wymiarach $2^n \times 2^n$. Powiedzmy, że brakujące pole P znajdowało się w kwadracie A . Z każdego z kwadratów B, C, D usuwamy pole mające wierzchołek w punkcie środkowym dużego kwadratu. W myśl założenia indukcyjnego możemy pokryć płytkami trimino zarówno kwadrat A bez pola P , jak i kwadraty B, C, D (każdy bez jednego pola) - a trzy pola usunięte z tych trzech kwadratów dają się nakryć jeszcze jedną płytką. Stąd słuszność tezy dla $n + 1$, więc i - przez indukcję - dla wszystkich n .

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 173 ($WT=3,09$) i 174 ($WT=1,26$)
z numeru 8/1988

Krzysztof Jedziniak	- Katowice	44,86pkt
Adam Ruszel	- Krosno	43,81pkt
Adam Przedziecki	- Warszawa	42,85pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	42,03pkt
Kazimierz Serbin	- Sanok	40,12pkt
Andrzej Bonk	- Chełmża	39,99pkt

Pan Jedziniak po raz wtóry zgromadził
44 punkty



Zadania z fizyki nr 85, 86

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

85. W płaskim kondensatorze jedna z dwu poziomych okładek o powierzchni S jest zawieszona na czterech jednakowych sprężynkach o współczynniku sprężystości k nad drugą, nieruchomą okładką. W stanie nie naładowanym odległość między okładkami wynosi d_0 . Kondensator ładujemy impulsowo (zaniedbywalny czas ładowania) do napięcia U . Przy jakiej wartości U nastąpi zetknięcie się okładek?

86. Rozpatrzmy gejzer mający duży, podziemny zbiornik wody nagrzewany ciepłem Ziemi oraz wąski kanał łączący ten zbiornik z powierzchnią Ziemi (rys. 1). Aktywność gejzera ma charakter okresowy. Podczas okresu spokojnego zbiornik oraz kanał są w całości wypełnione wodą. Z chwili, gdy woda w podziemnym zbiorniku osiągnie temperaturę wrzenia, zaczyna się aktywny okres gejzera. Przyjmując, że podczas trwania okresu aktywnego – który jest znacznie krótszy od okresu spokojnego – cały kanał wypełnia uchodząca na zewnątrz para wodna, oszacować, jaka część wody zawartej początkowo w zbiorniku gejzera ulega wyrzuceniu w postaci pary, jeśli kanał sięga na głębokość $h = 100$ m.

Przybliżone wartości ciepła parowania oraz ciepła właściwego wody wynoszą odpowiednio $r = 2 \cdot 10^6$ J/kg oraz $c = 4 \cdot 10^3$ J/kgK. Na rysunku 2 przedstawiono zależność ciśnienia nasyconej pary wodnej od temperatury.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1988

Przypominamy treść zadań:

77. Jaką co najmniej siłą F trzeba działać na tłok strzykawki, aby wylatujący z niej przez otworek w górnej ściance strumień wody wznosił się na wysokość $h = 5$ m? Średnica tłoka $d_1 = 30$ mm, średnica otworu w ściance – $d_2 = 1$ mm. Czy zaopatrzenie otworu w dyszkę jak na rysunku 3 będzie miało wpływ na siłę F oraz na prędkość przesuwu tłoka?

78. Obliczyć stosunek ilości ciepła pobranego przez jednoatomowy gaz doskonały w dwóch wariantach przemiany (rys. 4): 1) $A \rightarrow B \rightarrow C$, 2) $A \rightarrow D \rightarrow C$.

77. Gdyby nie było żadnych strat energii (na tarcie tłoka o ścianki, opór powietrza itp.), przyrost energii potencjalnej porcji wody o masie Δm , wyrzuconej na wysokość h , $\Delta E = \Delta mgh$ (g – przyspieszenie ziemskie) byłby równy pracy tłoka nad wyciśnięciem tej ilości wody ze strzykawki $\Delta L = F\Delta l$, gdzie $\Delta l = 4\Delta m/\rho\pi d_1^2$ jest odpowiednim przesunięciem tłoka (ρ – gęstość wody).

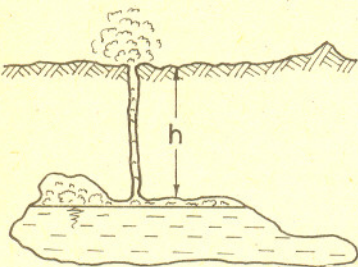
Z przyrównania $\Delta E = \Delta L$ wynika $F = \pi d_1^2 \rho gh/4 = 34$ N. Wobec występowania różnych oporów wzór ten określa dolną granicę rzeczywiście wymaganej siły. Zastosowanie dyszy nie ma wpływu na powyższe rozumowanie, a więc i na jego wynik dotyczący siły (wynik ten jest niezależny od średnicy d_2). Wpływa natomiast na wielkość strumienia wypływającej wody. O ile bowiem struga cieczy wypływającej z otworu w cienkiej ściance, ze względu na zachodzące w strudze przyspieszanie cieczy, ma kształt zwężający się (jej średnica w miejscu maksymalnej prędkości jest mniejsza od średnicy otworu), o tyle w przypadku dyszy o podanym kształcie przyspieszenie cieczy nastąpi wewnątrz samej dyszy i wylatująca struga będzie miała kształt walca o średnicy otworu wylotowego. Zaopatrzenie otworu w strzykawce w dyszkę zwiększy więc wielkość strumienia wypływającej wody, a zatem także prędkość przesuwu tłoka.

78. Z praw przemian gazowych – izobarycznej i izochorycznej – wynikają związki między temperaturami odpowiadającymi punktowi A, B, C i D : $T_B = 3T_A$, $T_D = 3T_A$, $T_C = 9T_A$. Ilości ciepła pobrane przez gaz w poszczególnych przemianach cząstkowych wynoszą zatem odpowiednio: $Q_{AB} = 2nC_P T_A$, $Q_{BC} = 6nC_V T_A$, $Q_{AD} = 2nC_V T_A$, $Q_{DC} = 6nC_P T_A$, gdzie n – liczba moli gazu, C_P – molowe ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, C_V – molowe ciepło właściwe przy stałej objętości.

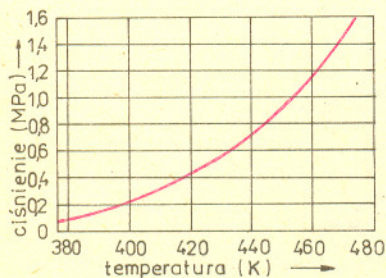
Poszukiwany stosunek jest równy

$$k = \frac{Q_{AB} + Q_{BC}}{Q_{AD} + Q_{DC}} = \frac{6 + 2\kappa}{2 + 6\kappa}, \quad \text{gdzie } \kappa = \frac{C_P}{C_V}.$$

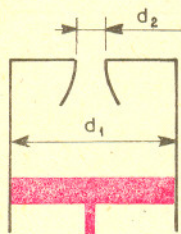
Dla jednoatomowego gazu doskonałego $\kappa = 5/3$, zatem $k = 7/9$. Wynik nie zależy, oczywiście, od ilości użytego gazu.



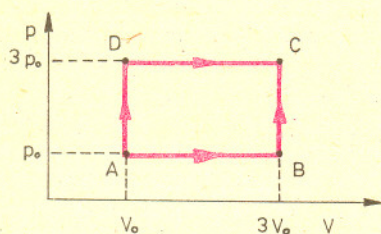
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



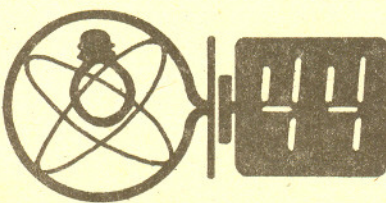
Rys. 4

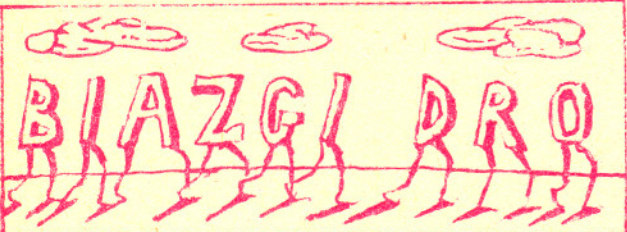
Bliższe omówienie problemu wpływu cieczy przez otwór oraz rurki o różnych kształtach można znaleźć w książce A. Nadolny, K. Pniewska: *Olimpiady Fizyczne XXIX-XXXI*, WSiP, Warszawa 1986, str. 173-175.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 71 (WT=2,01) i 72 (WT=1,58)
z numeru 8/1988

Roman Musiał	- Katowice	34,79	pkt
Adam Sikorski	- Lublin	32,75	pkt
Paweł Perkowski	- Szczecin	32,26	pkt
Wiesław Kacprzak	- Kraków	31,42	pkt
Piotr Koczyński	- Warszawa	31,31	pkt





Napiszcie słowami dowolną liczbę. Następnie napiszcie słowo określające liczbę liter w poprzednim napisie i kontynuujcie tę procedurę. Jeśli wykonacie powyższe czynności w języku angielskim, szybko zaczniecie otrzymywać wyłącznie liczbę 4 (np. THE CUBE ROOT OF PI, FIFTEEN, SEVEN, FIVE, FOUR, FOUR, FOUR, ...). A jak będzie po polsku?



Niemal w rok po odkryciu nadprzewodnictwa w temperaturze około 90 K w $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ odkryto nowe materiały przechodzące w stan nadprzewodzący w 120 K. Są to $Tl_2Ca_{1.5}BaCu_3O_{8.5+x}$ oraz $Tl_{1.86}CaBaCu_3O_{7.8+x}$. Oba nowe materiały nie zawierają pierwiastków ziem rzadkich (La, Y, Eu, ...), co różni je od poprzednio odkrytych nadprzewodników wysokotemperaturowych.



Jednym z obrazowych porównań pozwalających unacznic różnicę między zbiorami skończonymi i nieskończonymi jest tzw. hotel Hilberta. Łóżka w tym hotelu są ponumerowane 1, 2, ..., różnymi, ale też wszystkimi liczbami naturalnymi. W odróżnieniu od zwykłego hotelu, w hotelu Hilberta, nawet jeśli wszystkie łóżka są zajęte, można zawsze znaleźć łóżko dla nowego gościa. Wystarczy bowiem przenieść każdego z gości do łóżka o numerze o jeden większym, a łóżko nr 1 przeznaczyć dla przybysza. Podobną metodę można zastosować, gdy chcemy, by każdy pokój został posprzątany do, powiedzmy, południa. O godzinie 11⁰⁰ prosimy gości, by przeszli do następnego pokoju, o 11²⁰ jeszcze raz, o 11³⁰ - znów, potem o 11³⁵ itd., i w końcu o 11⁴⁰ wszystkie pokoje są wolne i mogą wejść do nich sprzątaczkii. No dobrze, ale gdzie są goście?



W niektórych urządzeniach do pomiaru mocy wiązki laserowej używane są „siatki dyfrakcyjne” w postaci stojącej fali ultradźwiękowej. Rozrzedzenia i zgęszczenia powietrza w takiej stojącej fali odgrywają rolę szczelin i przesłon w tradycyjnej siatce dyfrakcyjnej. Pomiar mocy rozproszonej dyfrakcyjnie wiązki m -tego rzędu pozwala ocenić całkowitą moc wiązki laserowej.



Dwie grupy mające tyle samo elementów mogą nie być izomorficzne, czyli może nie istnieć przekształcenie jednej z nich na drugą, przy którym działania będą zachowane. Najmniejszą liczbą elementów, dla której może się to zdarzyć, jest 4. Odpowiednie grupy to obroty wokół ustalonego punktu o wielokrotności kąta prostego i grupa złożona z dwóch symetrii osiowych o osiach prostopadłych, z symetrii względem punktu przecięcia tych osi i (oczywiście) identyeczności.

Oświetlenie powierzchni Marsa promieniami słonecznymi jest w przybliżeniu dwukrotnie słabsze niż oświetlenie powierzchni Ziemi - Mars znajduje się 1,52 raza dalej od Słońca. Wystarczy to jednak, by wywołać dość gwałtowne ruchy jego rzadkiej atmosfery. Wiatry o prędkości rzędu 200 km/h nie są tam rzadkością. Ale ponadto na zdjęciach wykonanych za pomocą kamer Vikingów zauważono trąby powietrzne, tj. sięgające nieraz 6 km wysokości słupy pyłu. Podobnie jak na Ziemi, tak i na Marsie tornada występują tylko na niektórych obszarach, np. obserwowano je na granicy Amazonii i Arkadii oraz w pobliżu Utopii.



James Prescott Joule nigdy nie pełnił funkcji akademickiej. Urodzony w 1818 r. w Salford w rodzinie piwowarów musiał troszczyć się o sprawę rodzinnej firmy browarskiej. Pomimo tych obowiązków przez ponad 10 lat prowadził badania ciepła wytwarzanego we wszystkich możliwych procesach. Pierwsze jego prace nie zyskały uznania i zostały odrzucone przez wydawców czasopism naukowych i Królewskie Towarzystwo Naukowe. W 1846 r. Joule odkrył magnetostrykcję (zmiana kształtu i wymiarów magnetyku podczas magnesowania), a badania nad rozszerzalnością gazów, prowadzone w latach pięćdziesiątych wspólnie z Williamem Thomsonem, doprowadziły do odkrycia zjawiska Joule'a-Thomsona (zmiana temperatury gazu podczas powolnego adiabatycznego przenikania przez porowatą przegrodę).



Aby wyprodukować kostkę pamięci RAM o pojemności 256 kilobajtów, powietrze w procesie produkcji musi być niesłychanie czyste. Nie może zawierać więcej niż średnio 300 cząsteczek kurzu o rozmiarach przekraczających 0,5 μm w każdym metrze sześciennym. Z tego powodu palacze papierosów nie mogą pracować przy produkcji takich kostek.



Zjawisko „seeingu” (polskiej nazwy nie ma) polega na tym, że wskutek przemieszczania się niejednorodności atmosfery obraz gwiazdy w teleskopie nieustannie drga i pełza. W wyniku tego na kliszy fotograficznej zamiast punktu o rozmiarach określonych przez falowe własności światła otrzymuje się plamę o rozmiarach kilku lub nawet kilkunastu sekund łuku. Przy fotografowaniu obiektów rozciągniętych seeing powoduje ogólne pogorszenie ostrości zdjęcia. Wydawałoby się, że jedynym wyjściem jest umieszczenie teleskopu poza atmosferą. Tymczasem już ponad 30 lat temu Robert B. Leighton z California Institute of Technology zbudował urządzenie kompensujące chaotyczne ruchy obrazu gwiazdy, zaś w połowie lat 70. inżynierowie z Bell Laboratories oraz Lockheed Research Laboratory przeprowadzili udane doświadczenia z elastycznymi i segmentowymi lustrami teleskopów. W obu przypadkach walka z seeingiem polega na ustawicznym modyfikowaniu kształtu lustra, co odbywa się dzięki komputerowi sterowanemu przez czujniki śledzące seeing na bieżąco. Urządzenia te są, oczywiście, tylko prototypowe, a szczegóły techniczne nie do końca jawne.



To zdanie zawiera trzy błędy.
(Douglas R. Hofstadter - tłumaczenie anonimowe)

Wyobraźmy sobie, że aparatem unieruchomionym przez rok fotografujemy na tej samej kliszy Słońce codziennie, np. w samo południe (według zegara!). Obrazy Słońca utworzą na kliszy charakterystyczną „ósemkę”, tzw. analemmę. Zdjęcie (na tylnej okładce) jest nawet dość efektowne, może jednak nie każdy wie, jaką kryje treść przyrodniczą. Spróbujmy ją z tej „ósemki” wydobyć.

Przyjmijmy na początek, że niebo obraca się ze stałą prędkością. Gdyby Słońce wędrowało po tym niebie również jednostajnie, a ponadto po równiku niebieskim (jest to wielkie koło opasujące niebo w tej samej płaszczyźnie, w której leży równik ziemski), to, rzecz jasna, codziennie w południe (według zegara) jego obraz w nieruchomym aparacie fotograficznym wypadłby w tym samym miejscu kliszy. Inaczej mówiąc, analemma byłaby punktem.

Ale tak nie jest, gdyż przyjęte tu założenia nie są spełnione. Naprawdę Słońce porusza się po tzw. ekliptyce, czyli wielkim kole nachylonym do równika pod kątem $23^{\circ}5'$ (ponieważ oś ziemską tworzy z płaszczyzną orbity kąt $66^{\circ}5'$). W ciągu roku zatem deklinacja Słońca (kąt między płaszczyzną równika a kierunkiem na Słońce) zmienia się pomiędzy wartościami $23^{\circ}5'$ latem a $-23^{\circ}5'$ zimą. Właśnie dzięki temu nachyleniu mamy w ogóle pory roku. Tak czy inaczej można sobie wyobrazić taki ruch Słońca, podczas którego jego „rzut” na równik niebieski poruszałyby się jednostajnie. Wtedy w każde południe (zegarowe) Słońce znajdowałoby się zawsze dokładnie w kierunku południowym i tylko wyżej lub niżej w zależności od pory roku. Analemma byłaby odcinkiem (łukiem) rozciągającym się $23^{\circ}5'$ w obie strony prostopadle do równika niebieskiego.

Ale tak też nie jest, ponieważ Słońce porusza się po ekliptyce wcale nie w tak specjalny sposób. Gdyby poruszało się po niej ze stałą prędkością, to jego „rzut” na równik musiałby się już poruszać niejednostajnie i w kolejne południe zegarowe Słońce znajdowałoby się albo w lewo, albo w prawo (no i oczywiście w górę lub w dół) względem pozycji z dnia poprzedniego. Inaczej też: w południe zegarowe Słońce prawdziwe znajdowałoby się rozmaicie w lewo lub w prawo od kierunku południowego, czyli prawdziwe południe słoneczne spóźniałoby się lub wyprzedzałoby południe zegarowe. Różnicę między czasem prawdziwym słonecznym a zegarowym nazywamy równaniem czasu. W rezultacie analemma byłaby w pełni symetryczną ósemką. Centralne skrzyżowanie odpowiadałoby datom obu równonocy (wiosennej około 21 III i jesiennej 23 IX), a wierzchołki usytuowane dokładnie nad tym skrzyżowaniem datom przesilen (letniego 22 VI i zimowego 22 XII).

Jednak nawet po ekliptyce Słońce porusza się niejednostajnie – Ziemia wszak obiega Słońce po elipsie, i zimą, gdy jest bliżej Słońca, porusza się szybciej niż latem. W wyniku tego zima pętla analemmy jest obszerniejsza od letniej. Wyraźnie widoczna ponadto „lewo-prawa” asymetria analemmy jest skutkiem tego, że chwila przesilenia zimowego (22 XII) nie pokrywa się z chwilą przejścia Ziemi przez najbliższy Słońcu punkt orbity (około 4 I).

Wszystko to widzimy na rysunku, który oprócz tego, że jest schematem autentycznej analemmy, może służyć za nomogram do przybliżonego określania deklinacji Słońca (oś pionowa) i równania czasu (oś pozioma).

