

KAŻDY MOŻE BYĆ KOLPORTEREM !!!

Delta tańsza o 25 %

Kupując 150 egzemplarzy *Delty* płacisz tylko 1.500,- zł za numer.
 Przesyłając pod adresem redakcji dowód wpłaty
 wielokrotności sumy 225 tysięcy złotych
 otrzymasz tyleż paczek po 150 egzemplarzy
 najbliższego numeru *Delty*.

Nasze konto:

PBK VIII OM W-wa 370028-4170

Uniwersytet Warszawski, redakcja miesięcznika *Delta*

SPIS TREŚCI

NUMERU 7(194)

Ćwierć wieku najdziwniejszej cząstki elementarnej Ω^- <i>dr hab. Marek Szczekowski</i>	str. 1
Voyager 2 zrobił swoje <i>dr Tomasz Kwast</i>	str. 4
Zadania	str. 5
Schody do matematyki	str. 6
XX Międzynarodowa Olimpiada Fizyczna	str. 7
Mała Delta	str. 8
Patrz w niebo	str. 9
Jak odróżnić ciąg losowy od nielosowego <i>dr Rafał Sztencel</i>	str.10
Korespondencyjny Klub Fizyków	str.11
Klub 44	str.12
Kącik prac uczniowskich	str.16
Drobiazgi	str.17

W następnym numerze:

Rozmaitości – gazetka ścienna

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
 dr Bogdan Cichocki
 dr Antoni L. Dawidowicz
 dr Alicja Derkowska
 doc.dr Jan A. Gaj
 doc.dr Bolesław Gleichgewicht
 prof.dr Tomasz Hofmoki – v-przewodniczący
 doc.dr Tadeusz Jarzębowski
 doc.dr Marcin Kubiak
 mgr Andrzej Mąkowski
 dr Zbigniew Plochocki
 dr Jan Rempala
 prof.dr Konrad Rudnicki
 prof.dr Grzegorz Sitarski
 prof.dr Józef I. Smak
 prof.dr Kazimierz Stępień
 prof.dr Mieczysław Subotowicz
 doc.dr Andrzej Szymacha
 doc.dr Aniela Wolska
 prof.dr Andrzej Woszczyk
 prof.dr Wojciech Żakowski –
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
 dr Lidia Goettig – z-ca red. nac.
 mgr Maria Kapuścińska
 mgr Krystyna Kordos – sekr. red.
 dr hab. Marek Kordos – red. nac.
 dr Paweł Krawczyk
 dr Tomasz Kwast
 mgr Anna Rudnik
 dr Jerzy Ryll
 Katarzyna Słomka
 mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji

Centrum Informatyczne UW
 Krakowskie Przedmieście 26/28
 00-927 Warszawa
 tel. 20-03-81 wew. 841

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski
 Krakowskie Przedmieście 26/28
 00-927 Warszawa

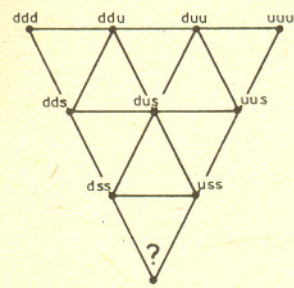
Nakład 18 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,
 2,50 ark. druk.,
 papier offsetowy V kl. 70 g.
 Wydrukowano w Prasowych
 Zakładach Graficznych
 w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28
 Nr zam. 87/90
 Skład systemem T_EX
 wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

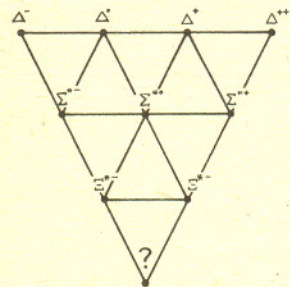
1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1990 r. wynosi 5 700,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora – odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
 - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 250,- zł od egzemplarza,
 - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział W-wa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
 do 20 II na II kwartał
 do 20 V na III kwartał
 do 20 VIII na IV kwartał
 - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
 oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarsa zł 2 000,-

Dr hab. Marek SZCZEKOWSKI



Rys. 1



Rys. 2

W lutym 1964 r. odkryto cząstkę elementarną, która okazała się być kluczem do zrozumienia własności i struktury cząstek elementarnych. Zanim przypomnimy, jak do tego doszło, rozwiążmy na początek prosty test podobny do tych, które stosuje się często w psychologicznych badaniach inteligencji. Na rysunku 1 przedstawiony jest trójkąt z 10 punktami oznaczonymi kombinacjami liter u, d i s. Należy wpisać w brakującym wierzchołku odpowiednią kombinację tych liter. Rozwiązanie testu nie jest trudne – brakującą kombinacją jest, oczywiście, sss. Znacznie trudniejsze było ułożenie tego testu w fizyce cząstek elementarnych. Okazuje się bowiem, że tym kombinacjom liter odpowiadają odkryte w przyrodzie cząstki elementarne oznaczone na rysunku 2 symbolami Δ , Σ^* i Ξ^* , a sam trójkąt przedstawia związki będące kluczem do zrozumienia ich struktury. Zanim przejdziemy do wyjaśnienia, w jaki sposób otrzymano trójkąt przedstawiony na rysunku 1 i jak powiązano go z cząstkami elementarnymi pokazanymi na rysunku 2, musimy się cofnąć jeszcze o 32 lata, do roku 1932. W lutym tego roku, po dwunastu latach poszukiwań J. Chadwick badając rozpraszanie cząstek α (czyli jąder atomów helu) na berylu stwierdził, że jako produkt końcowy w tej reakcji powstają neutralne cząstki o masie bardzo bliskiej masie protonu. W ten sposób odkryto trzecią w historii, po elektronie (e) i protonie (p), cząstkę elementarną – neutron (n). A cząstka taka była naprawdę potrzebna. Przed odkryciem neutronu próbowano składać znane jądra atomowe z protonów o ładunku +e i wewnętrznym momencie pędu (spinie) $\hbar/2$ (\hbar jest stałą Plancka) i elektronów o ładunku -e i spinie również $\hbar/2$. Nie dawało to jednak dobrych rezultatów. W wielu wypadkach kombinacje elektronów i protonów, dające prawidłowy ładunek, prowadziły do błędnego momentu pędu jądra. Założenie, że jądra składają się tylko z neutronów o zerowym ładunku elektrycznym i spinie $\hbar/2$ i z protonów pozwoliło poprawnie opisać obserwowane własności.

Na początku był izospin

W połowie lat trzydziestych znano więc trzy cząstki elementarne: elektron o masie, którą umownie przyjmiemy za jednostkę masy i oznaczymy przez m_e oraz znacznie cięższy proton o masie 1836 m_e i neutron o masie 1839 m_e . Zbliżone wartości ostatnich dwóch mas oraz kontrast ze znacznie lżejszym elektronem spowodowały, że szybko zaczęto się zastanawiać, czy protonu i neutronu nie można traktować w przybliżeniu jako dwóch stanów tej samej cząstki. Już w 1932 r. W. Heisenberg wprowadził do opisu sił jądrowych dwuwartościową zmienną, którą my oznaczymy przez I_3 przyjmując $I_3 = +1/2$ dla protonu i $I_3 = -1/2$ dla neutronu. Wkrótce pojawiły się pierwsze dane o związkach między siłami jądrowymi pp, nn i np wskazujące na niezależność sił jądrowych od wielkości ładunków elektrycznych p i n. Po „wyłączeniu” oddziaływań elektromagnetycznych protony i neutrony, zwane łącznie nukleonami, oddziałują tak samo. Siły jądrowe są więc niezależne od wartości I_3 . Do opisu tej sytuacji zastosowano taki sam formalizm matematyczny jak do opisu stanów spinowych cząstek, a wprowadzoną wielkość nazywa się obecnie izospinem i oznacza przez I . Dla nukleonów mamy $I = 1/2$, a proton i neutron tworzą tzw. izodublet.

W 1947 r. w trakcie badań promieni kosmicznych odkryto cząstki będące nośnikami sił jądrowych – naładowane mezony π^+ i π^- o masie ok. 273 m_e i spinie 0, a w roku 1950 w eksperymencie prowadzonym na akceleratorze w Berkeley znaleziono ich neutralnego partnera – mezon π^0 o masie 264 m_e . Również i tu mała różnica mas między π^\pm i π^0 sugeruje, że są to trzy stany tej samej cząstki tworzące izotryplet ($I = 1$) i tak samo zachowujące się w oddziaływaniach silnych. W następnych latach odkrycia nowych cząstek potoczyły się lawinowo. Liczba obecnie znanych hadronów, bo tak nazywa się silnie oddziałujące cząstki, przekroczyła już 200. Dzieli się je na dwie grupy: hadrony o spinie całkowitym nazywamy mezonami, a hadrony o spinie półokowym – barionami.

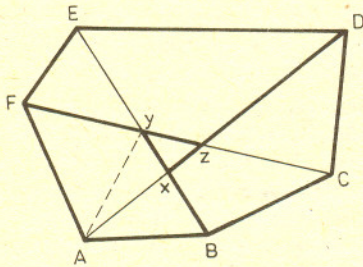
Korzystając z pojęcia izospinu można uporządkować hadrony grupując je w rodziny tak, jak nukleony i piony, ale liczba rodzin w dalszym ciągu pozostaje niepokojąco duża. Fakt, że różnych członków takich rodzin uważamy w przybliżeniu za te same cząstki, odbija się w stosowanych oznaczeniach: cząstki z tej samej rodziny izospinowej oznaczamy tą samą literą, a poszczególnych jej członków rozróżniamy podając ładunek.

Pojęcie izospinu wprowadza się matematycznie jako wektor w abstrakcyjnej przestrzeni trójwymiarowej $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$. Mechanika kwantowa mówi, że podobnie jak w przypadku spinu, jednocześnie możemy mierzyć tylko długość tego wektora równą $\sqrt{I(I+1)}$ oraz jeden z jego rzutów na wybraną oś, np. I_3 . Wektor opisywany przez I ma $2I+1$ dozwolonych wartości rzutu na oś I_3 : $-I, -I+1, \dots, I$ (patrz rysunek dla $I = 3/2$). Cząstki elementarne opisywać więc można przez podanie dwóch liczb kwantowych: I oraz I_3 . I charakteryzuje całą grupę (multiplet) $2I+1$ cząstek, a I_3 numeruje poszczególne cząstki w multiplicie. Cząstki o różnych wartościach I_3 mają różne wartości ładunku elektrycznego. Niezależność ładunkowa sił jądrowych oznacza w tym opisie, że oddziaływania nie zmieniają się przy obrotach wektora \vec{I} . Nie ma wyróżnionego kierunku w przestrzeni izospinu. Wszystkie cząstki z danego multipletu oddziałują tak samo. Wprowadzenie sił elektromagnetycznych łamie tę symetrię, ponieważ rozróżniając ładunki cząstek, wyróżnia oś I_3 .



Pojawia się dziwność

Rozwiązanie zadania M 569.
Podzielmy sześciokąt $ABCDEF$ przekątnymi głównymi następująco: na czworokąt $ABYF$, $CDXB$ oraz $EFZD$ i trójkąt XYZ (którego może nie być, gdy przekątne przecinają się w jednym punkcie).



Jeden z tych czworokątów, np. $ABYF$, ma pole nie większe niż $\frac{1}{3}$. Podzielmy go dalej na dwa trójkąty ABY oraz FAY . Jeden z nich, np. ABY , ma pole nie większe niż $\frac{1}{6}$. Pozostaje zauważyć, że trójkąty ABF i ABC mają tę samą podstawę AB co trójkąt ABY , a oba równocześnie nie mogą mieć większej wysokości opuszczonej na bok AB niż trójkąt ABY , stąd pole co najmniej jednego z nich jest nie większe niż pole trójkąta ABY .

Od roku 1947 wiadomo było, że niektóre z nowo odkrytych cząstek mają dziwną własność: powstają w oddziaływaniach jądrowych tylko parami. Obserwowano np. reakcję produkcji mezonu K^+ o masie $966 m_e$ razem z cząstką Σ^+ w zderzeniach mezonów π^+ z protonami



natomiast nie znaleziono przypadków reakcji



choć wszystkie znane wówczas zasady zachowania liczb kwantowych, takich jak np. ładunek elektryczny, pozwalały na istnienie takiego procesu. Ponieważ masa mezonu K^+ jest znacznie większa od masy mezonu π^+ , to reakcja (2) powinna zachodzić nawet częściej niż reakcja (1). Co więcej, nowe cząstki produkowane w oddziaływaniach jądrowych nie chciały rozpaść się na skutek tych samych oddziaływań. Zamiast bardzo szybkiego rozpadu np. mezonu K^+ na π^+ i π^0 obserwowano ten proces, ale przebiegający znacznie wolniej. Sugerowało to, że zachodzi on na skutek oddziaływań słabych – tych samych, które odpowiadają za rozpady β jąder atomowych.

W celu wyjaśnienia dziwnego zachowania się niektórych cząstek M. Gell-Mann, T. Nakano i K. Nishijima wprowadzili w 1953 r. pojęcie nowej własności materii, podobnej do ładunku elektrycznego, którą nazwali „dziwnością”. Tylko część cząstek elementarnych miałaby dziwność różną od zera, $S \neq 0$. Jeśli ta własność jest zachowywana w oddziaływaniach jądrowych, to cząstki dziwne mogą być wytwarzane w zderzeniach hadronów tylko w taki sposób, aby suma przypisanych cząstkom liczb kwantowych dziwności S była przed i po reakcji taka sama. Jeśli przyjmiemy $S(K^+) = +1$ i $S(\Sigma^+) = -1$, to wówczas reakcja (1) może zachodzić, a reakcja (2) jest zabroniona.

Zachowanie dziwności zabrania również rozpadów cząstek dziwnych na same cząstki niedziwne wskutek oddziaływań jądrowych. Rozpady ze zmianą dziwności mogą zachodzić tylko na skutek oddziaływań słabych, w których dziwność nie jest zachowywana i może zmieniać się o 1 ($|\Delta S| = 1$).

Pojęcie dziwności pozwoliło na wprowadzenie nowego schematu klasyfikacji cząstek. Można je podzielić na grupy w zależności od tego, jaką dziwność ma dana cząstka. Widać wyraźnie, że w miarę wzrostu S w każdej grupie spinowej rośnie masa cząstek. Obserwowane regularności sugerują rozszerzenie symetrii izospinowej oddziaływań jądrowych.



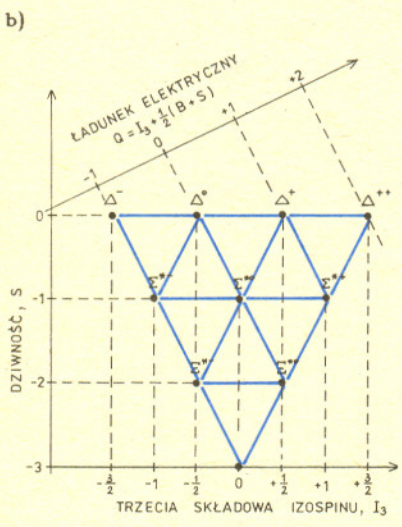
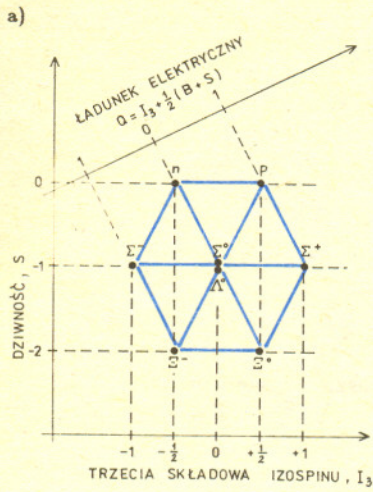
Rozwiązanie zadania M 570.
Wykażemy ogólnie, że spośród dowolnych $n+2$ wektorów $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n+2}$ w przestrzeni n -wymiarowej pewne dwa nie tworzą kąta rozwartego. Dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Przypuśćmy, że jest to prawda w przestrzeni $(n-1)$ -wymiarowej. Obierzmy układ współrzędnych w ten sposób, by wektor \vec{a}_1 miał kierunek wektora \vec{x}_1 . Wówczas albo któryś z wektorów $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n+1}$ tworzy z wektorem \vec{a}_1 kąt nierozwarty, albo pierwsza współrzędna każdego z tych wektorów jest ujemna. Dla wektora $\vec{a}_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$ oznaczmy $\tilde{a}_i = (a_i^2, \dots, a_i^n)$. Wówczas, na mocy założenia indukcyjnego, dla pewnych dwu spośród wektorów $\tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_{n+2}$, np. dla \tilde{a}_i oraz \tilde{a}_j mamy $\tilde{a}_i \cdot \tilde{a}_j \geq 0$. Również $a_i \cdot a_j = a_i^1 a_j^1 + \tilde{a}_i \cdot \tilde{a}_j \geq 0$, co oznacza, że kosinus kąta między tymi wektorami jest nieujemny, a więc kąt ten nie jest rozwarty.

	cząstki niedziwne		cząstki dziwne	
	$S = 0$	$S = -1$	$S = -1$	$S = -2$
cząstki o spinie 0	π^\pm (273) π^0 (264)	K^- (966) \bar{K}^0 (974)	-	-
cząstki o spinie 1/2	n (1839) p (1836)	Σ^+ (2328) Σ^0 (2334) Σ^- (2343) Λ^0 (2183)	Ξ^0 (2573) Ξ^- (2586)	
cząstki o spinie 3/2	Δ^{++} (2411) Δ^+ (2411) Δ^0 (2411) Δ^- (2411)	Σ^{*+} (2710) Σ^{*0} (2710) Σ^{*-} (2710)	Ξ^{*0} (2994) Ξ^{*-} (2994)	

Przykłady cząstek elementarnych z różnymi liczbami kwantowymi dziwności. W nawiasach podane są masy w jednostkach masy elektronu.

Wyższa symetria

Chcemy zebrać razem większą liczbę hadronów (o tym samym spinie) niż można to było zrobić tylko za pomocą pojęcia izospinu. Różnice mas są teraz znaczne, więc nie jest wcale oczywiste, które cząstki należy grupować razem. Próbowano to robić na wiele sposobów.



Rys.3. „Tablice Mendelejewa” dla cząstek elementarnych. Hadrony o tym samym spinie układają się w rodziny, przy czym miejsce cząstki w rodzinie wyznaczone jest przez jej ładunek elektryczny (lub związaną z nim trzecią składową izospinu I_3) i dziwność.
 a) ośmiokrotna rodzina barionów o spinie $1/2$,
 b) dziesięciokrotna rodzina barionów o spinie $3/2$.

Na początku 1961 roku zaproponowano, jak się wkrótce okazało, prawidłowy schemat. Cząstki o spinie $1/2$: n , p , Λ^0 , $\Sigma^{\pm 0}$ i Ξ^{0-} zebrano razem w ośmiokrotną rodzinę cząstek, przy czym przybliżone symetrie w tej rodzinie opisywane są matematycznie przez pewną grupę przekształceń liczb kwantowych izospinu i dziwności, tzw. grupę $SU(3)$. Jeśli na jednej osi odłożymy I_3 , a na drugiej dziwność, to cząstki ułożą się w diagram pokazany na rysunku 3a. Jeśli nowa symetria byłaby ścisła, to wszystkie prawidłowo pogrupowane hadrony miałyby w każdej rodzinie te same masy. Symetria ta jest więc w przyrodzie łamana, przy czym łamanie to jest znacznie silniejsze niż dla izospinu. Dla protonu i dziwnej cząstki Λ^0 różnica mas wynosi około 10%.

Inną grupą cząstek, tym razem ze spinem $3/2$, powinna być dziesięciokrotna rodzina barionów, z których znano dziewięć: Δ^{++} , Δ^+ , Δ^0 , Δ^- , Σ^{*+} , Σ^{*0} , Σ^{*-} oraz Ξ^{*0} , Ξ^{*-} . Diagram I_3 i S wygląda teraz tak jak na rysunku 3b. Przy pewnych dodatkowych założeniach dotyczących łamania symetrii można otrzymać związek między masami tych cząstek o różnej dziwności: $M = \alpha + \beta(B + S)$, gdzie α i β są pewnymi stałymi, a B jest liczbą barionową ($B = +1$ dla barionów, -1 dla antybarionów i 0 dla mezonów). Oznacza to równe odległości ΔM między średnimi masami multipletów Δ , Σ^* i Ξ^* . Doświadczalnie $\Delta M \approx 300 m_e$. Na podstawie tych danych można było określić własności dziesiątej, brakującej cząstki. W lipcu 1962 roku, na konferencji fizyki cząstek elementarnych w Genewie M.Gell-Mann przedstawił hipotezę istnienia nowej cząstki o spinie $3/2$ z $S = -3$ ($B = +1$) i $I = 0$, z masą około $3288 m_e$. Brakującą cząstkę nazwano Ω^- .

W styczniu 1964 roku po przeglądzie 50 000 zdjęć wykonanych w wodorowej komorze pęcherzykowej naświetlonej wiązką mezonów K^- w amerykańskim laboratorium w Brookhaven znaleziono pierwszy przypadek produkcji i rozpadu poszukiwanej cząstki Ω^- (tylna okładka). Tym samym zaproponowana klasyfikacja hadronów za pomocą grupy $SU(3)$ została potwierdzona. Odkrycie to można porównać z wcześniejszym o prawie 100 lat odkryciem układu okresowego pierwiastków, kiedy na podstawie znanych własności chemicznych i mas atomowych pierwiastków Mendelejew zaproponował pogrupowanie ich w rodziny. Pozwoliło mu to przewidzieć istnienie dalszych, nie odkrytych jeszcze pierwiastków. Pod regularnościami tablicy Mendelejewa kryła się nieznaną jeszcze wtedy atomowa struktura pierwiastków składających się z jąder atomowych i elektronów.

Nasuwa się od razu pytanie, czy grupa $SU(3)$ i jej regularne multiplety cząstek również nie wyrażają pewnej ukrytej struktury hadronów. Okazało się, że tak rzeczywiście jest. W 1964 r. M. Gell-Mann i niezależnie G. Zweig zaproponowali, że obserwowane własności hadronów można wyjaśnić zakładając, że nie są to cząstki naprawdę elementarne, lecz składają się z jeszcze mniejszych obiektów - kwarków (q). Bariony zbudowane są z trzech kwarków (qqq), a mezony z pary kwark-antkwark ($q\bar{q}$). Do zbudowania cząstek, o których mówiliśmy w tym artykule, potrzebne są trzy rodzaje kwarków, które nazwano górnym (u), dolnym (d) oraz dziwnym (s). Proton składa się z dwóch kwarków u i jednego d - uud , a neutron - z udd . Cząstki dziwne to po prostu takie, które zawierają kwarki dziwne - np. Λ^0 odpowiada kombinacji uds , Ξ^0 - uss . Obserwowana symetria jądrowych oddziaływań oznacza, że siły międzykwarkowe nie zależą od rodzaju oddziałujących kwarków u , d i s . Duże różnice mas dla cząstek z tej samej rodziny, ale o różnej dziwności, można wytłumaczyć zakładając, że kwark dziwny jest znacznie cięższy od dwóch pozostałych. Problem pochodzenia mas kwarków i wyjaśnienia tej różnicy pozostaje jednak nadal jedną z najbardziej fundamentalnych zagadek współczesnej fizyki.

I w ten sposób wracamy do naszego diagramu z testu na inteligencję. Kombinacje kwarków u , d i s na rysunku 1 odpowiadają hadronom pokazanym na rysunku 2. Cząstka Ω^- składa się z samych kwarków dziwnych - sss . Można powiedzieć żartem, że jest to cząstka najdziwniejsza.

Do początku lat siedemdziesiątych wszystkie znane hadrony można było złożyć z trzech rodzajów kwarków. W listopadzie 1974 roku odkryto pierwszą cząstkę z rodziny hadronów zbudowanych z nowych kwarków, które nazwano powabnymi, a w roku 1977 historia się powtórzyła - znaleziono cząstkę złożoną z kwarków pięknych. Opisany powyżej schemat pozostał prawdziwy, ale trzeba go było rozszerzyć tak, aby obejmował również te nowo odkryte cząstki.

Ale to już temat na inny artykuł.

Rozwiązanie zadania M 568. Jeśli $w(x)$ jest stały, to $u(x) = w(x) \geq 0$, w przeciwnym przypadku

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \infty.$$

Wystarczy wykazać, że wszystkie minima $u(x)$ są nieujemne. Jeśli minimum jest przyjmowane w punkcie x_0 , to $u'(x_0) = 0$. Mamy wtedy

$$u(x_0) = w(x_0) + u'(x_0) + \frac{1}{2}u''(x_0) + \dots = w(x_0) + u'(x_0) = w(x_0) \geq 0.$$

Nagroda Nobla z fizyki za rok 1989

Szwedzka Królewska Akademia Nauk Nagrodą Nobla z fizyki za rok 1989 uhonorowała Wolfganga Paula, Hansa Dehmelta (połowa nagrody) i Normana F. Ramseya (połowa). Wszyscy trzej laureaci wyróżnieni zostali za osiągnięcia w bardzo precyzyjnym badaniu struktury atomów, czyli w tzw. atomowej spektroskopii wysokiej rozdzielczości.

O istnieniu atomów świadczą wiele argumentów pośrednich. Bezpośrednia obserwacja pojedynczego zjonizowanego (pozbawionego jednego elektronu) atomu – jonu stała się możliwa dzięki pułapce jonowej zaprojektowanej przez Wolfganga Paula, a zrealizowanej przez Hansa Dehmelta. Idea pułapki Paula może być zilustrowana poprzez mechaniczną analogię. Wyobraźmy sobie, że mamy kulkę zsuwającą się po pochylej desce. Jeśli wprawimy deskę w szybki ruch obrotowy wokół osi pionowej, kulka przestanie się zsuwać. Podobny efekt można uzyskać dla jonu w zmiennym polu elektrycznym. Same jony wytwarzane są wewnątrz pułapki – strumień atomów bombardowany jest elektronami. Wynikiem zderzenia atomu z elektronem jest powstanie jonu, który, o ile nie porusza się zbyt szybko, zostanie uwieczniony. Stosując się w tym celu tzw. chłodzenie światłem laserowym. Jony poruszające się w kierunku światła ulegają spowolnieniu wskutek doznawanego odrzutu już po około 10 000 zaabsorbowanych fotonach. Emitowane fotony nie mają wyróżnionego kierunku, zatem efektywnie jony są spowalniane i mogą pozostawać w pułapce przez wiele godzin. Można je teraz badać za pomocą fal elektromagnetycznych. Można zauważyć pojedyncze przeskoki elektronu i zastanawiać się, po jak długim czasie to nastąpi, sięgając do podstaw mechaniki kwantowej i filozofii współczesnej fizyki. Można również zbudować bardzo dokładne wzorce czasu.

Drugą część nagrody otrzymał N.R. Ramsey. Jest on autorem metody doświadczalnej prowadzącej do dokładniejszego określenia częstości przejść elektromagnetycznych w cząstkach, atomach i cząsteczkach uformowanych w strumień. Dokładność wyznaczenia takiej częstości ograniczana jest przez szereg czynników, między innymi przez ruch termiczny atomów. By go uniknąć, tworzy się strumienie atomowe, w których ruch odbywa się w jednym kierunku. Atomy w strumieniu poddawane są oddziaływaniu z polami elektromagnetycznymi. Gdy pola te są rezonansowe (mają taką samą częstość) względem częstości przejść atomowych, obserwuje się wzbudzenie atomów. Dokładność wyznaczenia częstości wzbudzenia zależy od czasu przelotu atomu przez pole. Ramsey zaproponował wzbudzenie przez co najmniej dwa rozseparowane obszary pola. Otrzymuje się wtedy interferencje pomiędzy wzbudzeniem w poszczególnych obszarach, a co za tym idzie – prawdopodobieństwo wzbudzenia zachowuje się podobnie jak prąki interferencyjne – ma minima i maksima. Struktura interferencyjna pozwala na znacznie dokładniejsze wyznaczenie częstości własnych atomów, a więc dokładniejsze wzorce częstości i zegary.

Metoda separowanych pól nazwana została metodą prązków Ramsey'a. Autor tej techniki po prawie 40 latach od jej wymyślenia otrzymał nagrodę Nobla.

dr Krystyna KOLWAS

i doc. dr hab Maciej KOLWAS

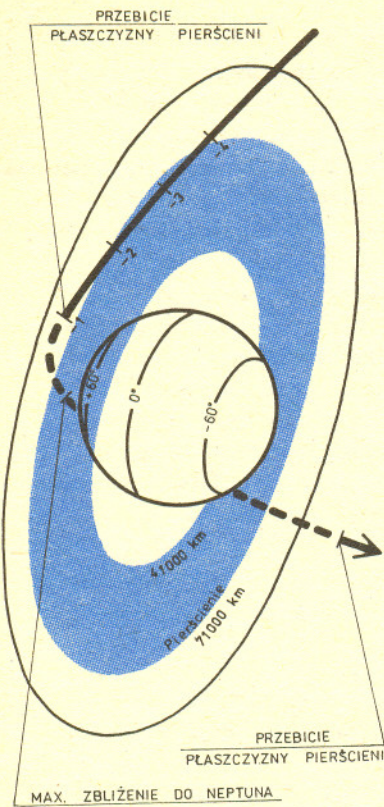
Wiemy już z codziennej prasy, że Voyager 2 minął 25 VIII 1989 Neptuna i przekazał stamtąd informacje dotyczące tej planety. W ten sposób jego misja zakończyła się pełnym sukcesem. Na opracowanie wyników obserwacji wykonanych przez Voyagera 2 trzeba będzie jeszcze jakiś czas poczekać, wypada chyba jednak uczcić sukces sondy choćby przypomnieniem, co i jak miała ona zdziałać przy Neptunie. Jest to bądź co bądź najdalsza w dziejach ludzkości wyprawa automatycznej stacji obserwacyjnej w głąb kosmosu. Nie bardzo wiadomo, czy pisać o niej w czasie teraźniejszym, czy przeszłym, ponieważ – aczkolwiek dalszych spotkań z planetami (Plutonem) nie będzie – sonda działa nadal mierząc własności ośrodka międzyplanetarnego. Parę słów o tym Czytelnik może znaleźć w *Patrz w niebo*.

Voyager 2 wystartował 20 VIII 1977, co zabawniejsze – wcześniej niż Voyager 1 (5 IX 1977), ale jego trasa została zaplanowana tak, że przy kolejnych planetach zjawiał się później – stąd jego numer „2”. I tak, lecąc niemal śladem swojego bliźniaka dotarł 9 VII 1979 do Jowisza, 25 VIII 1981 do Saturna i 24 I 1986 do Urana. Jego podróż do Neptuna trwała więc 12 lat i już sam fakt, że aparat działa po takim czasie, jest godny uwagi. Oczywiście, sonda została wysłana nie po żadne rekordy, tylko po informacje naukowe, ale jej sprawność techniczna jest warunkiem niezbędnym, by cała impreza mogła odnieść sukces naukowy.

Neptun obiega Słońce w odległości 30 j.a., czyli 4,5 mld km (4 godziny świetlne). By bez przeszkód odbierać sygnały sondy z takiej odległości, NASA postanowiła powiększyć anteny swoich odbiorczych radioteleskopów z 64 do 70 m. Sieć tych anten, stanowiąca tzw. Deep Space Network, pokrywa całą Ziemię, dzięki czemu bez względu na obrót Ziemi zawsze któraś z anten może sygnały sondy odebrać. Do współpracy wciągnięto też szereg niezależnych obserwatoriów radioastronomicznych. Dzięki tym ulepszeniom cały system mógł pracować przy nie zmienionym tempie przekazywania informacji z sondy, sięgającym 21 600 bit/s.

Drugi kłopot wynikający z wielkiej odległości Neptuna od Słońca to oświetlenie, które jest tam $30^2 = 900$ razy słabsze niż na Ziemi. Dlatego uzyskanie jednego obrazu telewizyjnego przy Neptunie wymaga odpowiednio długiego czasu ekspozycji – typowo 15 s. Należało zatem zapewnić zarówno dobrą stabilizację sondy, jak i sposób kompensowania skutków jej ruchu względem obserwowanego obiektu. O precyzji, jaka musiała tu być osiągnięta, świadczy chyba najlepiej fakt, że włączanie i wyłączenie magnetofonu (magnetowidu?), służącego do chwilowego przechowywania wyników obserwacji, powodowało zauważalne drgania sondy, które należało równoważyć za pomocą silników korekcyjnych, pracujących w razie potrzeby impulsami o czasie trwania 0,005 s. W ten sposób dało się uzyskać taki efekt, że Voyager 2 obracał się 25 razy wolniej niż godzinowa wskazówka zegara.

Kompensowanie zaś ruchu sondy uzyskiwano na trzy sposoby. Po pierwsze: cały aparat mógł śledzić cel obracając się dzięki stosownie programowanym żyroskopom. Wtedy jednak antena nadawcza przestawała celować w Ziemię, a zatem informacje musiały być utrwalane na taśmie magnetycznej i przekazywane na Ziemię dopiero po zakończeniu serii obserwacji. Drugi sposób to spowodowanie wahadłowych ruchów sondy tak, by podczas każdego wahnięcia przez 15 s obraz w kamerze był nieruchomy. W tym trybie pracy łączność z Ziemią nie była przerywana i zapis magnetyczny nie był potrzebny. Wreszcie trzeci sposób to obracanie platformy mieszczącej kamery. Ten sposób mógł być użyty jedynie przy obserwacjach nie wymagających wysokiej rozdzielczości kątowej, ponieważ platforma ta może być obracana tylko skokami.



Przelot Voyagera 2 koło Neptuna (widziany z Ziemi).

Aby sonda przeżyła spotkanie z Neptunem, musiała przelecieć dostatecznie daleko poza spodziewaną atmosferą i pierścieniami planety. Promień Neptuna określony przez poziom, na którym ciśnienie atmosferyczne jest zbliżone do 1 atmosfery, wynosi 24 230 km, natomiast Voyager 2 miał przelecieć (i przeleciał) około 5 000 km wyżej. Z kolei zewnętrzny promień domniemyanych pierścieni wynosi około 71 000 km, a sonda przeleciała około 7 000 km dalej. Trzeba przyznać, że samo istnienie pierścieni nie było całkiem pewne; naziemne obserwacje nie dawały jednoznacznego wyniku. Za to z naziemnych obserwacji radiowych wiadomo było z góry, że magnetosfera Neptuna nie będzie niebezpieczna dla sondy; jest ona zdecydowanie słabsza niż jowiszowa.

Same badania układu Neptuna obejmowały cztery główne tematy: atmosfera planety, magnetosfera, pierścienie, satelity. Pierwsze dwa obiekty były obserwowane metodami dość tradycyjnymi, wypróbowanymi podczas wcześniejszych spotkań z innymi planetami (obrazy w świetle widzialnym, nadfiolecie i podczerwieni, „prześwietlenie” atmosfery falami radiowymi w trakcie przesłaniania sondy przez planetę, pomiary pola magnetycznego, pomiary gęstości cząstek). Co do ostatnich dwóch to, jak wspomnieliśmy, nawet ich istnienie było problematyczne. Co prawda znane są od dawna dwa satelity Neptuna (Tryton i Nereida), ale znajomość ta jest bardzo słaba – nawet ich rozmiary wyznaczone z obserwacji naziemnych są wysoce niepewne. Albo też, wiadomo było, że Tryton ma atmosferę, ale nic więcej o tej atmosferze nie można było powiedzieć. Zgodnie z planami Voyager 2 „obejrzał” Nereidę z odległości około 4,7 mln km oraz Trytona z 40 tys. km. W tym ostatnim przypadku na powierzchni satelity powinny być rozróżnialne szczegóły o rozmiarach rzędu 800 m.

Wielka podróż dobiegła właściwie końca. Teraz przez dłuższy czas, nie wiadomo zresztą jak długi, nie należy się spodziewać żadnych rewelacyjnych informacji. Rewelacje nastąpią, gdy Voyager 2 lub któryś z jego trzech poprzedników dotrze tak daleko od Słońca, gdzie nie sięga już wiatr słoneczny. Jest to jednak wielka niewiadoma i myślę, że nie należy mieć sondom za złe, jeśli zamilkną wcześniej. Swoje najważniejsze zadania i tak wykonały.



Zadania

Redaguje mgr Michał WOJCIECHOWSKI

M 568. Przypuśćmy, że $w(x)$ jest wielomianem takim, że $w(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że

$$u(x) = w(x) + w'(x) + w''(x) + \dots \geq 0.$$

Rozwiązanie na str. 3

M 569. Udowodnić, że w dowolnym sześciokącie wypukłym o polu 1 można za pomocą pewnej przekątnej odciąć część o polu nie większym niż $\frac{1}{6}$.

Rozwiązanie na str. 2

M 570. Udowodnić, że spośród dowolnych pięciu wektorów w przestrzeni trójwymiarowej pewne dwa nie tworzą kąta rozwartego.

Rozwiązanie na str. 2

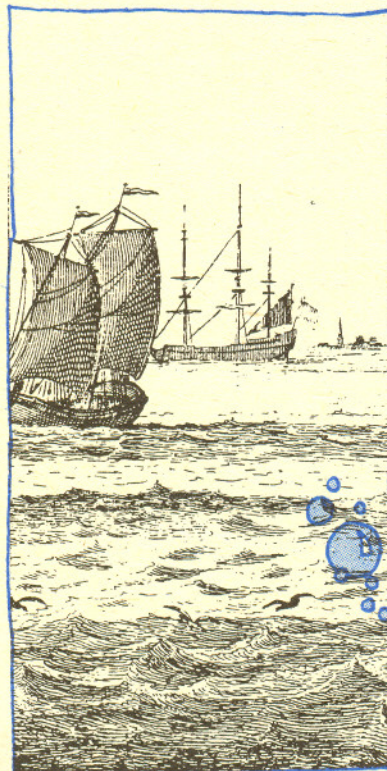
Redaguje dr Lidia GOETTIG

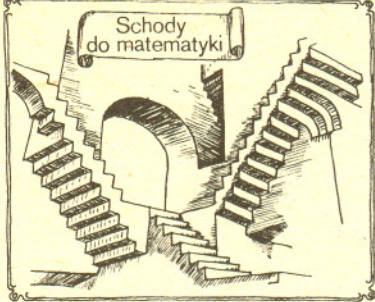
F 286. Wodę w czajniku doprowadzamy do ustalonego stanu „delikatnego” wrzenia – czajnik „śpiewa”, a z jego dziobka spokojnie wylatuje strumyczek pary. Oczywiście jest, że zwiększenie dopływu ciepła do czajnika zwiększy intensywność wydobywania się pary, ochłodzenie – zmniejszy. W celu ochłodzenia wnętrza czajnika odkrywamy więc na chwilę pokrywkę. A jednak po ponownym zakryciu czajnika para buchnie z dziobka dużo mocniej niż na początku. W dalszym ciągu, w miarę nagrzewania się wnętrza, intensywność uchodzenia pary z dziobka zmniejsza się wracając do stanu wyjściowego. Jakie jest wytłumaczenie tego pozornego paradoksu czajnikowego? (Zaproponował Piotr KANIAK z Uniegoszcza.)

Rozwiązanie na str. 6

F 287. Duży kieliszek w kształcie stożka o średnicy otworu około 9 cm napełniono wodą na równi z brzegiem. Zgadnij, ile szpilek można jeszcze włożyć do tego kieliszka tak, by woda nie zaczęła się z niego wylewać. Wykonaj odpowiednie rachunki i sprawdź je doświadczalnie.

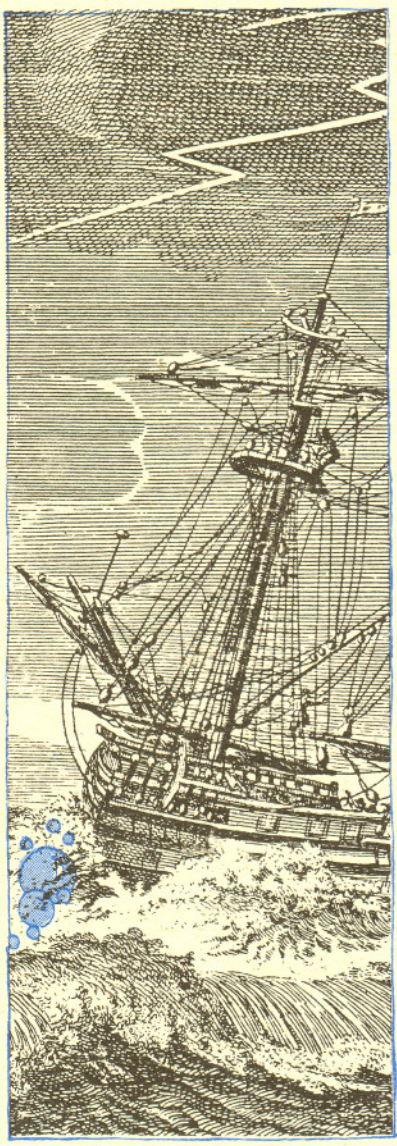
Rozwiązanie na str. 9





Po co myśleć – eksperymentuj, mawiał Tomasz Edison.

Było w tym wiele racji: największe wynalazki techniki wzięły się z wytrwałych prób i teoretycznych opracowań tych doświadczeń. Po tym następowały kolejne doświadczenia i kolejne poprawki teorii. Wreszcie, niejako metodą kolejnych przybliżeń, uzyskiwano zadowalający produkt końcowy: lampę żarową, fonograf, automobil, aeroplan czy wreszcie mózg elektronowy. Przedstawiciele nauk przyrodniczych też bazowali na doświadczeniach, a w najgorszym razie na obserwacjach (astronomowie). Jakikolwiek prace teoretyczne były prędzej czy później weryfikowane w Eksperymentcie. I tylko matematyka pozostawała domeną czystego myślenia – do powszechnie badanych w geometrii, analizie i algebrze wielowymiarowych przestrzeni, nierzadko złożonych nie z punktów, lecz z funkcji albo i bardziej skomplikowanych obiektów, nie można było dobrać się inaczej niż za pomocą kartki i ołówka, no i własnej, specyficznie matematycznej wyobraźni. I oto dzięki komputerom i matematyka staje się trochę nauką „doświadczalną”: oglądanie skomplikowanych, wielowymiarowych tworów geometrycznych staje się możliwe dzięki grafice komputerowej, a bariery typu „to się nie da obliczyć, bo trwałoby latami” pękają jedna po drugiej. Mniej zauważalnym aspektem powszechnej dostępności komputerów jest to, że praca z nimi wymaga nieco innego myślenia. I tylko od *nauczającego* zależy, czy komputer ogłupi *uczącego się*, czy nie.



Chciałbym na bardzo prostym przykładzie pokazać, co to za „inne” myślenie. Dziękuję tu mojemu kuzynowi, profesorowi prawa na UJ, za wypowiedź, która skłoniła mnie do napisania tego (i jeszcze jednego) artykułu. Powiedział on mianowicie; że jego zdaniem każda maszyna ogłupia, a komputer to już do kwadratu.

Gdy moja córka była w ósmej klasie, „rozwiązała” kiedyś równanie kwadratowe $x^2 - 7x + 10 = 0$ tak: napisała $x = \sqrt{7x - 10}$ i uważała, że to koniec rozwiązania. Na moje pretensje, że przecież, z grubsza rzecz biorąc, wyraziła x przez x , odpowiedziała rozsądnie: „a, to ja zaraz poprawię” i wstawiła zamiast x pod pierwiastkiem to, czemu owo x się równa, tj. dostała $x = \sqrt{7\sqrt{7x - 10} - 10}$ i chciała potem, nieco bezmyślnie, *iterować* postępowanie: $x = \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7x - 10} - 10} - 10}$ i tak dalej.

Przerwałem te obiecujące próby i zmusiłem ją do pójścia bardziej tradycyjną drogą (*be kwadrat minus cztery ace* i tak dalej). Nieprzemysłana metoda mojej córki nie jest jednak taka zła. Wystarczy napisać program, choćby i taki

```

10 PRINT "ROZWIAZYWANIE ROWNANIA X^2-7*X+10"
20 INPUT "WARTOSC POCZATKOWA X0=";X
30 X=SQR(7*X-10)
40 PRINT "OTO PRZYBLIZONE ROZWIAZANIE:";X
50 INPUT "ZADOWOLONY Z PRZYBLIZENIA";T$
60 IF T$="N" THEN 30
99 END

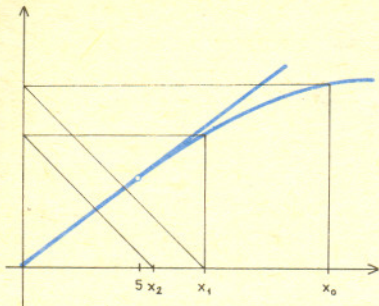
```

i „zapućić” go na dowolnym komputerze lub programowanym kalkulatorze. Teraz możemy (a nawet musimy) zacząć myśleć. Oto pytania, jakie w tej i podobnej sytuacji powinny nam przyjść do głowy:

1. Czy nasz algorytm zawsze doprowadza do rozwiązania? A jeśli nie, to kiedy?
2. Czy daje wszystkie rozwiązania? Jeżeli nie wszystkie, to *które*?
3. Czy jest dostatecznie szybko zbieżny do rozwiązania, a może moglibyśmy znaleźć szybszy?



Rozwiązanie zadania F 286.
Z chwilą uniesienia pokrywy do wnętrza czajnika dostaje się chłodniejsze powietrze, które po zamknięciu otworu pokrywką nagrzewa się i zwiększa swoją objętość uchodząc przez dzióbek.



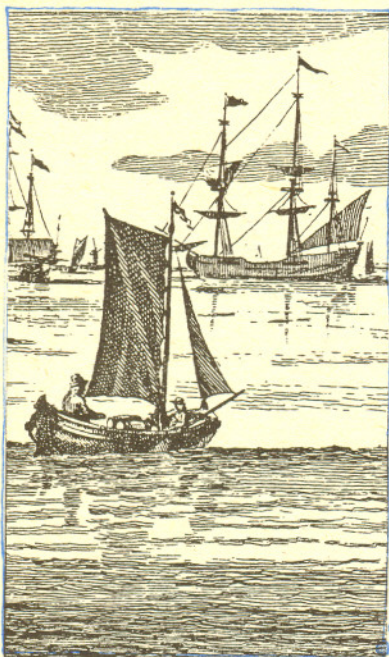
Wróćmy do naszego przykładu. Łatwo zobaczyć, że niezależnie od punktu startowego $x_0 > 2$ ciąg rozwiązań jest zawsze zbieżny do 5 (na niektórych kalkulatorach może to być 5,00001 albo 4,99999). Start z $x_0 = 2$ daje, oczywiście, ciąg stale równy 2, a gdy weźmiemy $x_0 < 2$, liczba podpierwiastkowa w instrukcji 30 szybko staje się ujemna. Można powiedzieć, że pierwiastek 5 *przyciąga* przybliżenia, a 2 – *odpycha*. Dlaczego? Czym *piątka* jest lepsza od *dwójki*? Odpowiedź można zgadnąć, analizując zamieszczony obok rysunek. Czy potraficie sformułować twierdzenie wyjaśniające, dla jakich równań uogólniona metoda MC (Mojej Córki) daje dobre (i co to znaczy *dobre*) rezultaty? Jakie własności funkcji decydują o tym, że algorytm oparty na podobnej, jak wyżej, metodzie: $x = \frac{1}{7}(x^2 + 10)$; $x = \frac{1}{7}(\frac{1}{7}(x^2 + 10)^2 + 10)$,...; nie jest dobry: ciąg „przybliżeń” jest szybko rozbieżny.

Gdy umiemy już odpowiedzieć na powyżej postawione pytania, możemy stosować bezpiecznie naszą metodę do innych równań, nie dających się szybko (albo i w ogóle) rozwiązać szkolnymi metodami. Do najładniejszych zastosowań takiej metody należy użycie jej w zadaniu o kozie.

Do brzegu kolistego pastwiska przywiązana jest koza. Jak długi musi być sznurek, by mogła zżreć dokładnie połowę trawy?

A na koniec znów trochę uwag ogólnych. W podobny do opisanego sposób można by „skomputeryzować” znaczną część matematyki szkolnej. W czasie dyskusji nad programami prywatnych liceów (wiosna 1989) ze strony niektórych pracowników Uniwersytetu Warszawskiego padały bardzo radykalne projekty, np. żeby nie wprowadzać w ogóle pojęcia pochodnej, bo wszystkie zadania, w których ona występuje, da się rozwiązać pisząc odpowiedni program i w ten sposób skierujemy wysiłek intelektualny uczniów w zupełnie inną, bardziej współczesną stronę. Trudno takie projekty brać całkiem na serio i ja też ani nie postuluję nauczania rozwiązywania równań kwadratowych tylko opisaną wyżej metodą, ani nie popieram wyeliminowania pochodnej przez jej komputerowe aproksymacje. Wciąż jednak hasło „komputeryzacja w szkole” zbyt często sprowadza się do szkolnego kółka (jeśli w ogóle), na którym uczniowie grają w bushido czy strzelają do nieprzyjacielskich statków kosmicznych.

Dr Michał SZUREK



XX Międzynarodowa Olimpiada Fizyczna

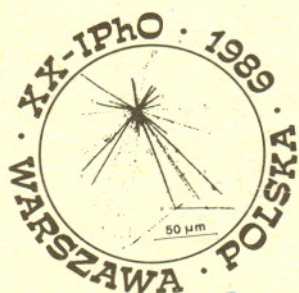
W dniach 16–24 lipca 1989 r. odbyła się w Warszawie XX Międzynarodowa Olimpiada Fizyczna. Uczestniczyło w niej 30 drużyn – liczących po pięciu uczniów szkół średnich i dwóch opiekunów – z pięciu kontynentów. Przez dwa dni zawodnicy rozwiązywali trzy zadania teoretyczne oraz zadanie doświadczalne (zadania te postaramy się przedstawić w najbliższych numerach).

Pozostały czas wypełniał bogaty program towarzyszący, obejmujący m.in. zwiedzanie Warszawy, Żelazowej Woli i Nieborowa oraz wycieczkę na Mazury (w czasie gdy młodzież odpoczywała na wycieczce, opiekunowie sprawdzali rozwiązania swych zawodników i uzgadniali oceny z zespołami oceniającymi).

Najlepsi uczestnicy Olimpiady otrzymali medale, dyplomy i nagrody rzeczowe. Dziesięć złotych medali przypadło w udziale reprezentantom Stanów Zjednoczonych, Węgier, Rumunii, RFN (dwa medale), W. Brytanii, Singapuru, ZSRR, Bułgarii i Holandii.

Trójka Polaków (Cezary Śliwa, Piotr Kossacki i Tomasz Motylewski) znalazła się na czele dwudziestosześcio-osobowej listy srebrnych medalistów, czwarty (Romuald Janik) – wśród trzydziestu zdobywców brązowych medali. Przyznano też trzydzięści trzy wyróżnienia (z Polaków otrzymał je Leszek Mencnarowski) oraz kilka nagród specjalnych.

W organizacji Olimpiady brali udział fizycy z Uniwersytetu Warszawskiego oraz Instytutu Fizyki Polskiej Akademii Nauk.



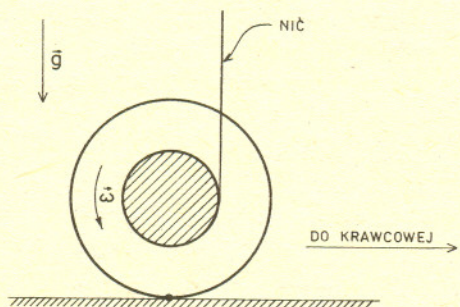


mała delta

Krawcowa i jej szpulka nici a fizyka

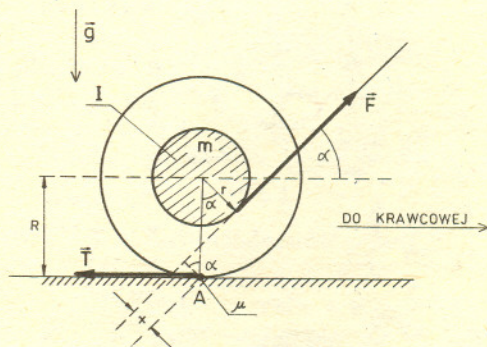
W każdym domu, gdzie ktokolwiek zna się cokolwiek na krawiectwie, obecne są szpulki nici. Te małe, ruchliwe przedmiociki potrafią płatać figle spieszącej się krawcowej. Jak? Choćby gdy spadną na podłogę i zaczną się toczyć. Toczyć od niej, do niej, albo w bok. Krawcowa w takiej sytuacji chce jak najszybciej „opanować” szpulkę i dalej pracować. Na ogół musi w tym celu wstać (bo szyje się najczęściej siedząc), podbiec do szpulki, chwycić ją i wrócić do pracy. Czy mogłaby ponownie wejść w posiadanie szpulki nie wstając? Jak?

Chcąc pomóc krawcowej spojrzymy na upuszczoną szpulkę oczyma fizyka.



Szпульka po upadku na podłogę. Zaznaczono kierunek obrotu wynikający z kierunku ustawienia nici (jeśli pociągnęlibyśmy za nią).

Gdy pociągnąć nitkę pionowo, szpulka odtoczy się dalej. Może więc pociągnąć nitkę nie pionowo, lecz pod jakimś mniejszym kątem do poziomu? Czy może to zmienić sytuację? Przyjrzyjmy się temu.



Gdy nitka jest nachylona, w opisie sytuacji przydaje się cały szereg wielkości fizycznych:

- F – siła, z jaką ciągniemy,
- T – siła tarcia,
- r – promień wewnętrzny,
- R – promień zewnętrzny,
- m – masa szpulki,
- I, I_A – moment bezwładności względem osi szpulki i względem punktu A ,
- μ – współczynnik tarcia,
- g – przyspieszenie grawitacyjne,
- α – kąt nachylenia nici do poziomu

Teraz obrót szpulki odbywa się względem chwilowej osi obrotu w punkcie A . Możemy też powiedzieć, że szpulka obraca się wokół osi i jednocześnie porusza się prostoliniowo.



Tradycyjnie oznaczmy przez ϵ i a przyspieszenia obu tych ruchów. Rozwiązując proste równania wiążące oba te ruchy (dla amatorów podajemy je dalej) dochodzimy do wyniku: szpulka będzie się toczyła ku krawcowej, gdy a i ϵ będą większe od zera, co można osiągnąć ciągnąc nitkę tak, by $r/R < \cos \alpha$. Oczywiście, gdy $r/R > \cos \alpha$, szpulka będzie uciekać, a gdy przypadkiem będzie $r/R = \cos \alpha$ – pozostanie na miejscu. Tak wynika z teorii, ale czy można to sprawdzić doświadczalnie?

Oto propozycja. Ponieważ zdobyć dzisiaj szpulkę z niciami lub choćby po niciach jest bardzo trudno, proponuję zastosować opakowanie po *adhesive plaster* (popularny przyklepiec produkcji chińskiej) i kawałek nitki. Pozwoli to otrzymać wyniki również dla pominiętego przypadku toczenia się szpulki w bok.

Mała Deltę przygotował Kazimierz MIKULSKI

A oto obiecane rachunki dla miłośników takich rzeczy.

Równania ruchu obrotowego względem punktu A : ramię siły tarcia i siły grawitacji wynosi zero, zatem równania ruchu względem chwilowej osi obrotu nie zawierają tych sił i mają postać

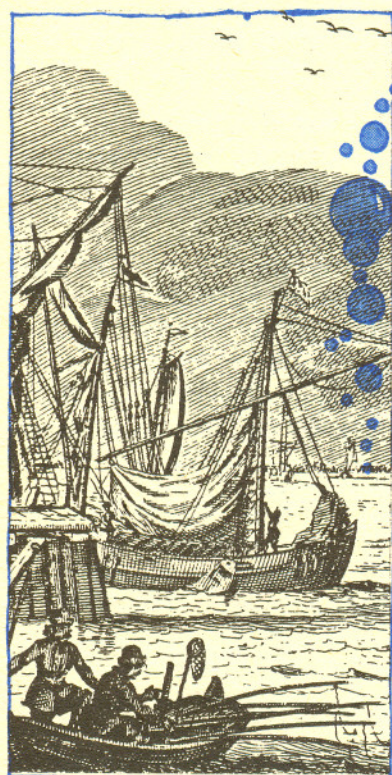
$$F_x = I_A \cdot \epsilon, \quad I_A = I + mR^2.$$

Równania ruchu obrotowego i postępowego względem osi szpulki mają postać

$$F \cos \alpha - T = ma, \quad -Fr + TR = I\epsilon;$$

w przypadku ruchu bez poślizgu mamy

$$a = \epsilon R, \quad T \leq \mu N = \mu(mg - F \sin \alpha).$$



Patrz w niebo

Jak daleko sięga Układ Słoneczny? Każdy zapewne odpowie, że kończy się na Plutonie – i będzie miał rację, pomimo że obecnie Pluton jest bliżej Słońca niż Neptun. Ostatecznie jednak orbita Plutona jest najobszerniejsza. No, ale, być może, dalej też obiegają Słońce jeszcze jakieś ciała? Tego nie wiemy, nie ma w tej chwili żadnych dowodów na istnienie jakiegoś „Transplutona”, aczkolwiek poszukiwania trwają. Chodzi jednak o to, czy bez względu na obecność lub nieobecność pozaplutonowych planet można jakoś sensownie określić fizyczną granicę Układu Słonecznego. Grawitacja się do tego, oczywiście, nie nadaje – przyciąganie Słońca przejawia się właściwie dowolnie daleko od niego, nigdzie się nie urywa.

Jest jednak taka granica, a przynajmniej astronomowie uważają, że być musi. Mianowicie przewidujemy, że istnieje ostra granica między ośrodkiem wokółsłonecznym a międzygwiazdowym.

Ośrodek wokółsłoneczny to nic innego jak wiatr słoneczny, czyli strumień cząstek (głównie protonów) emitowanych radialnie ze Słońca i rozbiegających się z prędkością kilkuset kilometrów na sekundę. Zarazem Słońce porusza się względem otaczających gwiazd, a więc i poprzez ośrodek międzygwiazdowy, z prędkością 20 km/s w kierunku gwiazdozbioru Herkulesa. Musi więc gdzieś dochodzić do zderzenia wiatru słonecznego z zewnętrznym „wiatrem międzygwiazdowym”. Na podstawie danych dotyczących tych dwóch ośrodków szacuje się, że ta granica tzw. heliosfery znajduje się około 90 j.a. od Słońca, zapewne plus minus kilka jednostek w zależności od natężenia aktywności Słońca.

Bliżej, bo w odległości około 50 j.a., powinna występować w wietrze słonecznym fala uderzeniowa, tzn. tam właśnie prędkość wiatru słonecznego z naddźwiękowej ma przechodzić raptownie w poddźwiękową. Jej znalezienie byłoby niecierpliwie oczekiwanym dowodem, że nasze przewidywania są słuszne. A niewykluczone, że rychło to się stanie. Ku fali uderzeniowej, w kierunku w przybliżeniu „pod wiatr” międzygwiazdowy, lecą trzy sondy: oba Voyagery i Pioneer 11 (Pioneer 10 leci akurat w stronę przeciwną, więc chyba nie ma co liczyć na sensacyjne informacje z jego pokładu) i, być może, niedługo nadeślą oczekiwane sygnały. Podobno Voyagery mają prawo działać jeszcze przez 25 lat, więc szansa bezpośredniego zaobserwowania przynajmniej fali uderzeniowej jest duża. A może sondy zdążą wydostać się nawet poza granicę heliosfery – dostalibyśmy wtedy autentyczne dane o ośrodku prawdziwie międzygwiazdowym, nie skażonym obecnością Słońca. A więc czekajmy cierpliwie.

dr Tomasz KWAST



Roswiązanie zadania F 287.

Woda w kieliszku ma menisk wypukły. Zakładając, że wysokość, na którą woda może wystawać ponad brzeg kieliszka, wynosi 1 mm, otrzymamy objętość „dodatkową” około 6400 mm³. Przyjmując rozmiary szpilki: długość – około 25 mm, grubość – 0,5 mm, otrzymujemy objętość szpilki w przybliżeniu 5 mm³. Razem z główką – nie więcej niż 5,5 mm³. Ten prosty rachunek pokazuje, że w kieliszku wypełnionym po brzegi zmieści się jeszcze około 1200 szpilek.

Jak odróżnić ciąg losowy od nielosowego?

Dr Rafał SZTENCEL

Słowo „losowy” będzie tu miało znaczenie „powstały w wyniku niezależnych rzutów symetryczną monetą”. Przypatrzmy się poniższym trzem ciągom orłów i reszek:

(1) RRRORRROO OORRRORRR OOORRRRROO RORROROORO
RRRORROORO OROORROOOR OROOROROR RRORORROOO
ORRRORRROR RORORORRO.

(2) RRORORORRR RORRORORRO RRORROOOOR ORROORORRR
ORORORRORO OOORRORRR RROROROORR OROOORROOR
OROORRRRO ROOORORRR.

(3) OORORRROR OROOOOROO OROROROORO RORRORROR
OOORRROOO OOOORRROR ROORRORROR OORRRORROR
OOORROOOOR RROOORRRRO.

Dwa z nich zostały napisane przez człowieka, jeden powstał w wyniku komputerowej symulacji rzutów symetryczną monetą. Czy można go rozpoznać?

Istnieje zaskakująco prosty sposób. Znajdźmy w każdym ciągu najdłuższą serię jednakowych symboli. Pierwszy ciąg zawiera serię pięciu reszek (w trzeciej dziesiątce), drugi – czterech reszek (pierwsza i druga dziesiątka), wreszcie trzeci – aż ośmiu orłów (piąta i szósta dziesiątka). Otóż człowiek będzie miał pewne opory przed umieszczeniem w ciągu długiej serii orłów czy reszek. Natura takich oporów nie ma, bo nie ma pamięci. Dlatego całkiem niezły test losowości dla ciągów o długości 100 polega na uznaniu za losowe ciągów z najdłuższą serią liczącą 6 lub więcej symboli. Ciąg (3) zostanie wtedy słusznie zakwalifikowany jako losowy.

Podany sposób nie jest, oczywiście, doskonały. Może się zdarzyć, że ciąg losowy zostanie uznany za nielosowy i odwrotnie: ciąg nielosowy uznany za losowy. Jak zobaczymy, można nietrudno oszacować prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju. Z błędem drugiego rodzaju jest nieco gorzej – trzeba by znać probabilistyczną charakterystykę źródła. W każdym razie niechęć do pisania długich serii gwarantuje, że błąd drugiego rodzaju zdarza się rzadko.

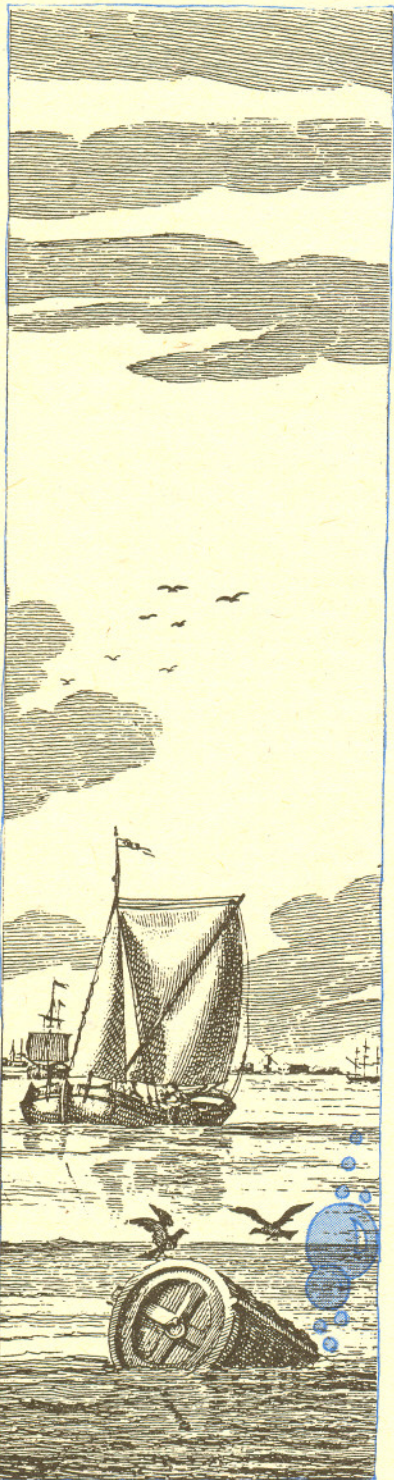
Teraz zastąpimy trudne rachunki symulacją komputerową. Jeśli ktoś wykona 10 000 eksperymentów, polegających na 100-krotnym rzucie monetą, to otrzyma pewnie wyniki zbliżone do poniższych:

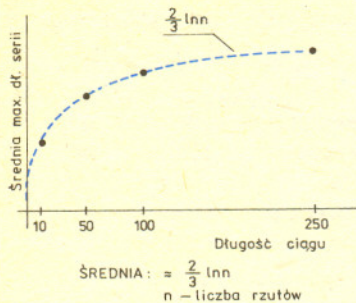
maksymalna długość serii	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
liczba eksperymentów	1	255	1658	2629	2221	1517	837	443	239	92	52	28	17	7	1	2	0	1

Widać teraz, że błąd pierwszego rodzaju zdarza się w około 19% przypadków (dla maksymalnej długości serii nie przekraczającej 5). Można by zmniejszyć o 1 krytyczną wartość długości serii – szansa błędu pierwszego rodzaju zmalałaby do 2,5%, ale wzrosłaby znacznie szansa błędu drugiego rodzaju.

Popatrzmy teraz na sytuację bardziej ogólnie. Mówiąc uczenie, mamy hipotezę dotyczącą rozkładu prawdopodobieństwa na przestrzeni próbek. Mówi ona, że szanse otrzymania każdego z 2^{100} możliwych ciągów orłów i reszek są równe.

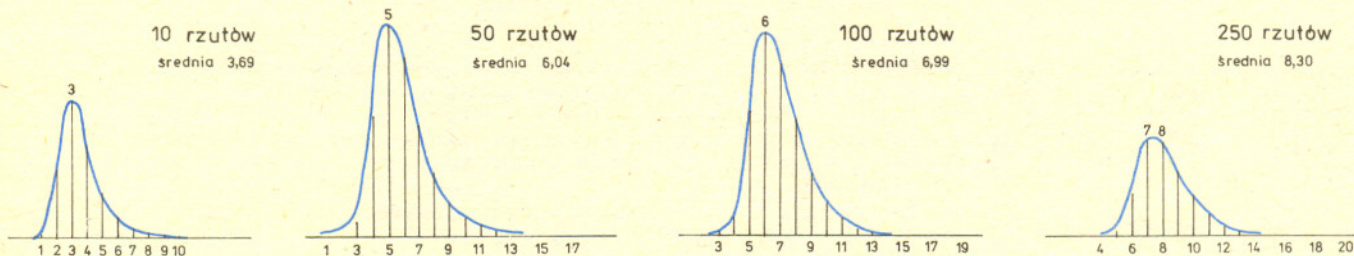
Eksperyment może obalić hipotezę, może też nie być podstaw do jej odrzucenia. Prowadzi to do podziału przestrzeni próbek na dwa zbiory. W naszym przypadku podział nastąpił ze względu na maksymalną długość serii; należało przy tym zadbać o to, by prawdopodobieństwo błędu nie było zbyt duże.





Jest teraz oczywiste, że testów losowości można wymyślić mnóstwo. Pierwszy z brzegu przykład to test oparty na liczbie serii. Za mała lub za duża liczba serii jest podejrzana i świadczy o braku losowości. Trzeba by ułożyć tabelę analogiczną do zamieszczonej wyżej (tu zresztą można się obejść bez komputera).

Interesujące byłoby zbadanie rozkładu maksymalnej długości serii w zależności od długości ciągu. Na rysunkach pokazano wyniki symulacji dla ciągów o długościach 10, 50, 100, 250. Widać, że średnie są z grubsza proporcjonalne do logarytmu długości ciągu. Jak to uzasadnić teoretycznie? A z jakim typem rozkładu prawdopodobieństwa mamy do czynienia?



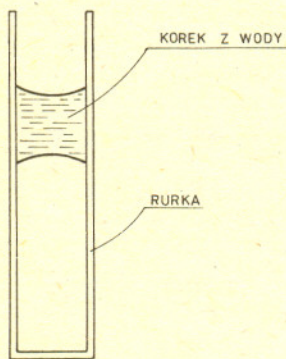
Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

KORRESPONDENCYJNY KLUB FIZYKÓW

Drodzy Członkowie i Sympatycy Klubu!

Przypominamy, że co miesiąc przyznajemy nagrodę książkową dla autora najciekawiej opracowanego rozwiązania postawionych zagadnień. A oto nowa seria propozycji:

Zbadaj, jak zależy objętość gazu od ciśnienia, pod jakim gaz się znajduje, i od jego temperatury. Badania wykonaj ustalając temperaturę i zmieniając ciśnienie, a następnie ustalając ciśnienie i zmieniając temperaturę. W tym celu musisz zaopatrzyć się w szklaną rurkę o średnicy wewnętrznej kilku milimetrów. Jeden koniec rurki należy zatkać (korkiem, plasteliną itp.). Do drugiego końca wprowadź ostrożnie nieco wody, może być zabarwiona, tak, aby tworzyła ruchomy korek zamykający słup powietrza w rurce. Rurkę można ustawiać w różnych położeniach: słupek wody jest u góry i ciśnienie na słup powietrza, słupek wody jest u dołu i zmniejsza ciśnienie wywierane na słup powietrza lub w położeniach pośrednich. Znając długość słupka wody i jego położenie możemy obliczyć, jakie ciśnienie panuje w rurce: ciśnienie atmosferyczne + ciśnienie słupa wody, ciśnienie atmosferyczne - ciśnienie słupa itd. Długość słupa powietrza pozwala wyznaczyć objętość powietrza zamkniętego ruchomym słupkiem wody. Dokonując pomiarów przy różnych położeniach rurki możemy wykreślić zależność objętości gazu od ciśnienia, pod jakim gaz się znajduje. Narysuj wykres. Jak nazywa się prawo, którego ilustracją jest otrzymany wykres?



Podobne pomiary możesz wykonać wstawiając rurkę do naczynia z wodą, do której wstawiono również termometr. Podgrzewaj wodę notując temperaturę i wysokość słupa powietrza. Powietrze jest pod stałym ciśnieniem. Będziesz mógł wykreślić zależność objętości gazu pod stałym ciśnieniem od temperatury. Jak nazywa się prawo, którego ilustracją jest otrzymany wykres?

Redagując doc. dr Tomasz HOFMOKL

Listy prosimy przysyłać pod adresem:
Korespondencyjny Klub Fizyków
Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego
ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 X 1990

Lista uczestników ligi zadaniowej

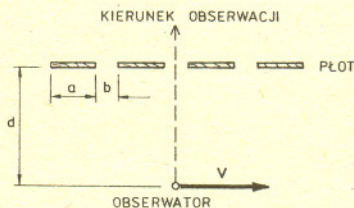
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań

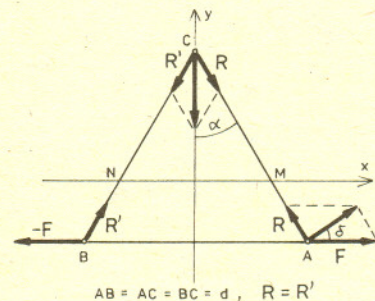
zadań 89 (WT=2,48) i 90 (WT=2,59)

Tomasz Wietecha	-Tarnów	45,45
Aleksander Surma	-Myszków	1-43,85
Piotr Koczyński	-Warszawa	39,57
Wojciech Pelsert	-Wrocław	35,32
Piotr Bała	-Toruń	3-35,27
Zbigniew Gallas	-Kraków	32,46
Andrzej Borowski	-Aleksandrów Kuj.	30,84
Przemysław Gworys	-Częstochowa	30,19
Jacek Stelmach	-Zabrze	1-29,44
Marek Karas	-Tarnów	29,30
Mariusz Bogacz	-Piąćców	28,86
Janusz Osada	-Legnica	24,07
Adam Sikorski	-Lublin	1-23,79
Paweł Rogocis	-Legnica	23,63
Andrzej Bonk	-Chelmia	23,22
Anna Glusa	-Toruń	1-23,16
Bogusław Mikielewicz	-Brodnica	1-21,99
Tomasz Rusin	-Warszawa	21,15
Andrzej Bilmes	-Gorlice	20,82
Robert Repucha	-Goidap	1-20,68
Wojciech Klimala	-Bielesko-Biała	19,44
Maciej Stasiak	-Cieluchów	18,73
Andrzej Kondracki	-Białystok	16,37
Leszek Motyka	-Kraków	16,13
Mirosław Semla	-Opole	15,20
Piotr Wach	-Katowice	1-12,33
Paweł Perkowski	-Szczecin	1- 9,36
Leszek Szalast	-Radzyń Podl.	1- 6,58
Tomasz Rawlik	-Gliwice	1- 6,22
Dzierżysław Lipniacki	-Lublin	3- 4,49
Roman Musiał	-Katowice	1- 4,40
Wiesław Kacprzak	-Kraków	1- 2,47
Jerzy Lipkowski	-Elbląg	2- 1,50

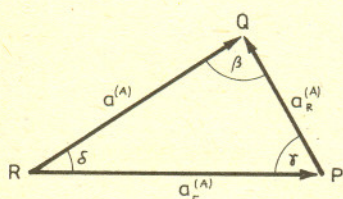
Fan Wietecha został szesnastym członkiem Klubu 44F. Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 15 punktów oraz członków Klubu 44F niezależnie od ich aktualnego stanu konta. Cyfra przed kreską oznacza, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

103. Angielska moneta pięćdziesięciopensowa ma kształt zbliżony do graniastosłupa o podstawie siedmiokąta foremego, z tym że podstawa ograniczona jest nie odcinkami prostych, lecz łukami okręgów, których środki leżą w przeciwległych wierzchołkach. Promienie tych okręgów mają długość 3 cm. Obliczyć w sposób przybliżony, z jaką prędkością moneta ta może się toczyć po poziomej płaszczyźnie, aby nie traciła kontaktu z podłożem. Przyjąć, że dopóki występuje kontakt z podłożem, nie ma poślizgu.

104. Dlaczego refleksy światła lamp ulicznych obserwowane na mokrej jezdni mają kształt podłużnych smug? Jaki jest kierunek tych smug?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1989

Przypominamy treść zadań:

95. Płot składający się z pionowych desek o szerokości a , między którymi występują szczeliny o szerokości b , zasłania odległy obiekt. Obserwator porusza się równoległe do płotu, z odległości d od niego, ze stałą prędkością v . Jaka powinna być ta prędkość, aby obserwator mógł widzieć cały obiekt w sposób możliwie niezakłócony? Przyjmujemy, że kierunek obserwacji jest prostopadły do płotu, a rozmiary katowe obiektu są znacznie większe od stosunku b/d .

96. Trzy punkty materialne o masie m , obdarzone ładunkiem elektrycznym q , są połączone nieważkimi nici o jednakowej długości d . W stanie równowagi, w warunkach bezgrawitacyjnych, nici tworzą trójkąt równoboczny. Wyznaczyć przyspieszenie każdego z punktów materialnych w chwili przecięcia jednej z nici.

95. Przy prostopadłym do płotu kierunku obserwacji (rys. 1) częstotliwość „migania” desek i szczelin płotu wynosi $\nu = v/(a + b)$. Aby miganie to nie było odczuwane przez wzrok, powinno zachodzić $\nu \geq 20 \text{ s}^{-1}$ (cecha ludzkiego wzroku), czyli $v \geq (a+b) \cdot 20 \text{ s}^{-1}$. Oczywiście, uśrednione natężenie światła dochodzącego od obiektu do obserwatora będzie zmniejszone w stosunku $b/(a + b)$.

Należy jeszcze zwrócić uwagę na to, że przy $d \gg 1 \text{ m}$ płot znajduje się w strefie ostrego widzenia wzroku akomodowanego na „nieskończenie” odległy przedmiot. Zachodzi wówczas niebezpieczeństwo (zależne od prędkości katowej v/d oraz od stosunku $(a + b)/d$) mimowolnego wodzenia wzrokiem za przesuwającym się płotem, co istotnie utrudnia obserwację obiektu.

96. Wprowadźmy układ współrzędnych jak na rysunku 2, o początku w środku masy układu (w środku trójkąta) i osi x równoległej do przecinanej nici. W chwili przecięcia nici na punkty materialne A i B działają nierównoważone siły elektrostatyczne F oraz $-F$ wzajemnego odpychania o wartości

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

(ϵ_0 – stała dielektryczna próżni) i kierunku równoległym do osi x oraz siły R i R' , które są wypadkowymi sił napięcia nici oraz sił odpychania elektrostatycznego przez ładunek w punkcie C . Z warunku nierozciągliwości nici oraz z faktu, że środek masy układu pozostaje w spoczynku (w środku układu współrzędnych), wynika określony tor ruchu każdego z punktów materialnych. Punkt C porusza się wzdłuż osi y , natomiast odpowiednie punkty M i N przecięcia odcinków AC i BC z osią x ($CM = 2MA$, $CN = 2NB$) pozostają na osi x . Wyrażając współrzędne punktu A przez kąt α , jaki tworzy odcinek AC z osią y , mamy:

$$x = d \sin \alpha, \quad y = -(1/3)d \cos \alpha.$$

W chwili, gdy zaczyna się ruch punktu A , wektor przyspieszenia tego punktu $a^{(A)}$ jest styczny do toru. Kąt δ , jaki wektor ten tworzy z osią x , spełnia związek:

$$\text{tg } \delta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{dy}{dx} : \frac{dx}{d\alpha} = \frac{d \sin \alpha}{3d \cos \alpha} = \frac{1}{3} \text{tg } \alpha.$$

Ponieważ $\alpha = \pi/6$, więc $\text{tg } \alpha = 1/\sqrt{3}$, a zatem $\text{tg } \delta = 1/3\sqrt{3}$.

Dla wyznaczenia wartości $a^{(A)} = |a^{(A)}|$ skorzystamy z rysunku 3, wyrażającego równość wektorową $a^{(A)} = a_F^{(A)} + a_R^{(A)}$, w której $a_F^{(A)} = F/m$, $a_R^{(A)} = R/m$ oraz z równości $\gamma = \pi/3$, $\delta = \text{arctg } 1/3\sqrt{3}$, $\beta = (2/3)\pi - \delta$. Na podstawie twierdzenia sinusów dla trójkąta PRQ mamy

$$a^{(A)} = \frac{\sin \gamma}{\sin \frac{2}{3}\pi - \delta} a_F = \frac{\sqrt{21}}{5} a_F.$$

Teraz można z łatwością wyznaczyć współrzędne wektora

$$a_x^{(A)} = a^{(A)} \cos \delta = \frac{9}{10} a_F, \quad a_y^{(A)} = a^{(A)} \sin \delta = \frac{\sqrt{3}}{10} a_F.$$

Dla punktów B i C odpowiednie wartości wynoszą:

$$a_x^{(B)} = -\frac{9}{10} a_F, \quad a_y^{(B)} = \frac{\sqrt{3}}{10} a_F, \quad a_x^{(C)} = 0, \quad a_y^{(C)} = -\frac{\sqrt{3}}{5} a_F.$$

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 191 (WT=2,11) i 192 (WT=2,27)

Edward Orzechowski	-Warszawa	2-43,68
Marian Roman	-Błk	1-43,09
Adam Przędziecki	-Warszawa	42,85
Kazimierz Serbin	-Sanok	2-42,72
Andrzej Sudol	-Nowy Sącz	42,56
Jerzy Janowicz	-Bolesławiec	6-41,95
Krzysztof Zawislawski	-Warszawa	1-41,45
Józef Siwy	-Baziska Grn.	1-40,89
Jerzy Malopolski	-Kraków	1-40,86
Adam Czornik	-Bytom	40,37
Dariusz Rybacki	-Krafnik	40,18
Grzegorz Kuś	-Kraków	39,93
Andrzej Krzysztofowicz	-Gdańsk	39,01
Andrzej Szymczak	-Gdańsk	37,73
Henryk Kornacki	-Augustów	36,95
Konrad Pióro	-Warszawa	1-36,78
Marek Galecki	-Milanówek	5-36,70
Dzierżysław Lipniacki	-Lublin	36,66
Zygmunt Bartkowski	-Warszawa	36,49
Wojciech Krzyżański	-Żywiec	34,45
Artur Smolczyk	-Tarnów Op.	1-33,68
Jerzy Tyszkiewicz	-Warszawa	33,28
Paweł Kubit	-Krosno	33,11
Tomasz Rawlik	-Gliwice	3-33,03
Mariusz Bopusiewicz	-Legnica	32,15
Piotr Figurny	-Lubartów	1-31,39
Krzysztof Jakubczak	-Kudowa Zdrój	31,00
Dariusz Kowalczyk	-Warszawa	29,81
Zbigniew Gallas	-Kraków	1-29,51
Władysław Wasiak	-Toruń	28,92
Anna Gluza	-Toruń	1-28,86
Mirosław Matlega	-Skoczów	28,50
Jarosław Kaczyński	-Starogard Gd.	28,31
Tomasz Grzebiak	-Kraków	28,19
Stanisław Dorosz	-Kraków	28,06
Maciej Głuszek	-Wrocław	27,85
Janusz Prajs	-Opole	27,57
Piotr Jędrzejewicz	-Toruń	2-27,33
Tomasz Komorowski	-Świdnik	2-26,82
Adrian Langer	-Nisko	26,65
Jerzy Cisło	-Wrocław	26,56
Radosław Zapert	-Kielce	26,51
Krystyna Witke	-Ostrów Maz.	1-26,29
Ryszard Pagacz	-Zawadzkie	2-25,72
Tomasz Więtecha	-Tarnów	25,11
Andrzej Kondracki	-Białystok	25,03
Krzysztof Zygán	-Lublin	24,98
Adam Stadler	-Rzeszów	24,94
Zbigniew Krylow	-Sopot	24,93
Henryk Mikołajczyk	-Wałbrzych	1-24,81
Marek Karaś	-Tarnów	24,50
Jerzy Mikuta	-Zielona Góra	2-24,46
Tomasz Masłowski	-Toruń	24,40
Krzysztof Trautman	-Warszawa	1-24,31
Andrzej Bonk	-Chelmża	3-23,95
Adam Wyrwa	-Nowy Wiśnicz	1-23,43
Lech Bartłomiejczyk	-Gliwice	22,50
Wojciech Skut	-Warszawa	22,43
Tomasz Szymczyk	-Bielsko-Biała	1-21,83
Mariusz Zając	-Pruszków	21,54
Małgorzata Czerniakowska	-Gdańsk	1-20,54

Legenda (przykładowo): stan konta 6-41,95 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 41,95 p.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 20 punktów. Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie) (cyfra w nawiasie wskazuje, ile razy uczestnik przekroczył barierę 44 punktów):

Z. Bartold (2), T. Biegański (1), W. Boratyński (1), J. Ciach (2), M. Flisser (1), K. Hryniewiecki (1), K. Jachacy (1), K. Jedziński (2), T. Józefczyk (2), P. Kamiński (5), H. Kasprzak (2), Z. Koza (2), P. Kumor (2), D. Kurpiel (2), R. Latała (1), J. Mańdziuk (1), M. Marczak (1), M. Mazur (3), R. Mazurek (1), M. Mikucki (1), J. Milczarek (1), R. Mitraszewski (1), W. Olaszewski (1), A. Pawłowski (4), M. Prauza (2), A. Ruszel (1), S. Solecki (2), D. Sowidzkał (3), Z. Surduka (1), W. Szymczyk (1), J. Uryga (4), P. Wach (1), G. Zakrzewski (2), Z. Zaus (1).

205. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg Ω . AK, BL, CM są trzema równoległymi cięciwami okręgu Ω . Punkty P, Q, R są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów K, L, M na proste BC, CA, AB . Udowodnić, że:
a) proste KP, LQ, MR przecinają się w punkcie leżącym na Ω ;
b) punkty P, Q, R leżą na prostej równoległej do trzech danych cięciw.

206. Wyznaczyć najmniejszy wykładnik naturalny $n \geq 2$, dla którego zapis dziesiętny liczby 44^n rozpoczyna się i kończy grupą cyfr 44.

Zadanie 206 zaproponował pan Tadeusz Józefczyk z Poznania.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1989

Przypominamy treść zadań:

197. Dana jest liczba pierwsza p oraz liczby całkowite a_i, b_i ($i = 1, \dots, p-1$), $a_i \not\equiv b_i \pmod{p}$.

Dowieść istnienia liczb $x_i \in \{a_i, b_i\}$ takich, że $x_1 + \dots + x_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$.

198. Rozwiązać nierówność $(x-1)^{x+1} > (x+1)^{x-1}$ przyjmując za dziedzinę funkcji $(u, v) \mapsto u^v$ zbiór $\{(u, v) : (u > 0) \text{ lub } (u = 0 \leq v) \text{ lub } (u < 0, v \text{ całkowite})\}$.

197. Dla dowolnej liczby całkowitej z oznaczmy przez $r(z)$ resztę z dzielenia z przez p . Dla dowolnego niepustego zbioru $X \subset \{0, 1, \dots, p-1\}$ i dla dowolnej liczby całkowitej a przyjmijmy

$$r(X+a) = \{r(x+a) : x \in X\}$$

- jest to więc zbiór wszystkich możliwych reszt \pmod{p} liczb postaci $x+a$, gdzie $x \in X$. Oczywiście $|r(X+a)| = |X|$ (symbolem $|\cdot|$ oznaczamy liczbę elementów zbioru).

Lemat. Dla dowolnych liczb całkowitych a, b oraz zbioru $X \subset \{0, 1, \dots, p-1\}$, $X \neq \emptyset$, zachodzi równość

$$|r(X+a) \cup r(X+b)| \geq |X|.$$

Jeśli przy tym $a \not\equiv b \pmod{p}$ oraz $|X| < p$, to nierówność jest ostra.

Dowód. Oznaczmy dla wygody: $X' = r(X+a)$, $X'' = r(X+b)$. Ponieważ $|X'| = |X''| = |X|$, zatem $|X' \cup X''| \geq |X|$. Pozostaje przedyskutować, kiedy zachodzi równość.

Równość w tej relacji znaczy, że zbiory X' i X'' są identyczne. Wybierzmy dowolny element $z \in X'$. Zauważmy, że $X'' = f(X')$, gdzie $f(j) = r(j+b-a)$. Jeśli więc $X' = X''$, to $f(z) \in X'$ i dalej, przez indukcję, $f^k(z) \in X'$ dla wszystkich k naturalnych (górnym wskaźnikiem oznacza iterowanie). Wyrazy ciągu $(f^k(z) : k = 0, 1, \dots)$ przybierają nie więcej niż $|X|$ wartości. Znajdą się więc takie numery k, l , że $0 < l-k \leq |X|$, $f^k(z) = f^l(z)$. Ostatnia równość znaczy tyle, że $z + k(b-a) \equiv z + l(b-a) \pmod{p}$, czyli że $(b-a)(l-k) \equiv 0 \pmod{p}$ - a więc albo $a \equiv b \pmod{p}$, albo $l-k = p$, skąd $|X| = p$.

Dowód tezy zadania. Rozpatrujemy zbiory

$$X_k = \{r(x_1 + \dots + x_k) : x_i \in \{a_i, b_i\}, i = 1, \dots, k\}$$

dla $k = 1, \dots, p-1$. Zbiór X_1 to para $\{a_1, b_1\}$; tak więc $|X_1| = 2$. Zbiór X_k powstaje ze zbioru X_{k-1} następująco:

$$X_k = \{r(x + x_k) : x \in X_{k-1}, x_k \in \{a_k, b_k\}\} = r(X_{k-1} + a_k) \cup r(X_{k-1} + b_k).$$

Na mocy lematu mamy nierówności $2 = |X_1| \leq |X_2| \leq \dots \leq |X_{p-1}|$, przy czym jeśli $|X_{k-1}| < p$, to zachodzi ostra nierówność $|X_{k-1}| < |X_k|$. Stąd przez łatwą indukcję $|X_k| \geq \min(p, k+1)$. Dla $k = p-1$ daje to: $|X_{p-1}| \geq p$. Zatem X_{p-1} jest całym zbiorem $\{0, 1, \dots, p-1\}$; w szczególności $0 \in X_{p-1}$. A to jest właśnie dowiedziona teza.

198. W myśl przyjętej umowy, aby obie strony miały sens, musimy przyjąć, że $1^\circ x > 1$, lub $2^\circ x$ jest liczbą całkowitą ≤ 1 , różną od -1 .

Rozważmy kolejno oba przypadki.

$1^\circ x \in (1; \infty)$. Nierówność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) < 0$, gdzie

$$f(x) = \ln \frac{(x+1)^{x-1}}{(x-1)^{x+1}} = (x-1) \ln(x+1) - (x+1) \ln(x-1).$$

Różniczkujemy:

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} - \ln(x-1) - \frac{x+1}{x-1} = \ln t + \frac{1}{t} - t =: g(t),$$

gdzie $t = (x+1)/(x-1)$ przebiega przedział $(1; \infty)$.

Ponieważ $g'(t) = -t^{-2}(t^2 - t + 1) < 0$, $g(1) = 0$, zatem $g(t) < 0$ dla $t \in (1; \infty)$, skąd $f'(x) < 0$ dla $x \in (1; \infty)$. Przy tym $f(3) = 0$. Wobec tego $f(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x > 3$.

2° Ten przypadek rozbijamy na podprzypadki:

$2.0^\circ x = 0$ lub $x = 1$; żadna z tych liczb nie spełnia danej nierówności.

$2.1^\circ x = -2k - 1$, $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Nierówność przybiera postać

$$(2k+2)^{-2k} > (2k)^{-2k-2}, \text{ czyli równoważnie: } \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < 2k, \text{ co jest prawdą dla } k \geq 2.$$

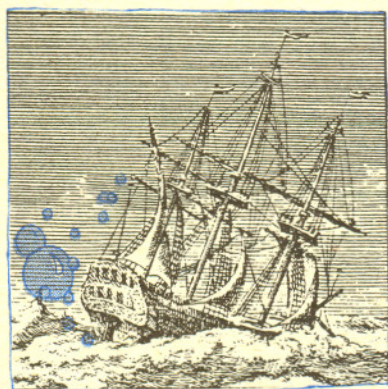
$2.2^\circ x = -2k$, $k \in \mathbb{N}$. Nierówność przybiera postać $-(2k+1)^{-2k+1} > -(2k-1)^{-2k-1}$, czyli równoważnie: $(2k+1)^{2k-1} > (2k-1)^{2k+1}$. Jesteśmy w sytuacji z przypadkiem 1° , z zastąpieniem przez $2k$ i z odwróconym zwrotem nierówności. Zgodnie z konkluzją, z przypadku 1° ta nierówność będzie spełniona, gdy $2k < 3$, czyli tylko dla $k = 1$.

Reasumując: Zbiór rozwiązań rozważanej nierówności ma postać:
 $(3; \infty) \cup \{-2\} \cup \{-5, -7, -9, \dots\}$.

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą Klub 44.
2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).
3. Uczestnikiem ligi może być każdy.
4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.
5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.
6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n + 3$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1989 upływa 28 lutego 1990). W numerze $n + 4$ podane są szkicowe rozwiązania.
7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: Klub 44 M lub Klub 44 F.
8. Prace powinny być samodzielne. Jednoznaczne rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.
9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.
10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przysłał zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).
12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.
13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. 10, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy 44 punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem Klubu 44.
14. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem Klubu 44) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.
15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa Klubu 44 daje tytuł Weterana Klubu 44.
16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy zbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.
17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy wykona ruch w górę.
18. Raz do roku, w numerze lutym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka (kilkadziesiąt nazwisk).
19. Członkowie Klubu 44 są zapraszani na coroczne spotkania Klubu 44.
20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.

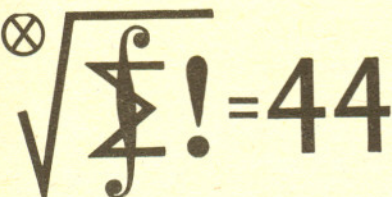


Zwierzył nam się ktoś z Czytelników, że co roku biorąc do ręki numer *Delty* z omówieniem kolejnego sezonu ligi zadaniowej i towarzyszącym mu regulaminem tejże ligi, podanym w pełnym brzmieniu – patrzy z zaciekawieniem: jakie też zmiany w kolejnym regulaminie wylówi. Tym razem nie znajduje wiele: zmiana dotyczy terminów, i podyktowało ją życie: zadania z numeru n rozwiązujemy do końca miesiąca $n + 3$, a nie $n + 2$, jak było do niedawna.

Gdy liga zaczynała żywot, formuła $n \mapsto n + 2$ gwarantowała co najmniej jeden miesiąc na myślenie nad zadaniami, i taka właśnie zasada była nam aksjomatem wyjściowym. Potem przyszła pamiętna zima 81/82 i poważniejsze zmartwienia. Nie było jasne, czy *Delta*, a wraz z nią setka innych czasopism, ujrzy jeszcze światło dzienne. Gdy w czerwcu zezwolono na druk tekstów złożonych jeszcze przed grudniem i ukazały się kolejne numery *Delty*, uczestnicy ligi stwierdzili z niejakim zdziwieniem, że podanych terminów jako żywo dotrzymać nie mogą. („Ludzie! – pisał nasz Czytelnik – miejcież świadomość, że nawet w stanie wojennym strzala czasu biegnie od września do października, a nie odwrotnie!”) Otóż aktualne (lato '89), niby nie-wojenne, warunki drukowania czasopism znów spowodowały taniec na osi czasu. Lokalny rekord pobila „trójka” (3/1989) ukazując się w kioskach z końcem maja. „Sprinterzy” zrobili zadania w trzy dni; inni przysyłali rozwiązania jeszcze przez następny miesiąc licząc na nasz zdrowy rozsądek. No cóż; zostały te rozwiązania przyjęte i ocenione, a „ $n + 2$ ” przeszło na „ $n + 3$ ”.

Rok 1990 jest dla *Delty* jeszcze bardziej nietypowy od innych, zdawałoby się tak burzliwych, lat. Byliśmy zawieszani, „wypadło” kilka numerów i, oczywiście, ma to swoje odbicie w przebiegu zmagani ligowych. W bieżącym roku przerwa ligowa będzie, nie tak jak każe Regulamin, w listopadzie i grudniu. Ze względu na „krótszy” rok w roczniku 1991 nie będzie omówienia. Nie jesteśmy też w stanie powiedzieć, czy wywiążemy się z dziewiętnastego punktu Regulaminu. Mamy jednak nadzieję, że kiedyś, również w *Delcie*, nastąpi spokój i będzie się przestrzegać wszelkich regulaminów i terminów.

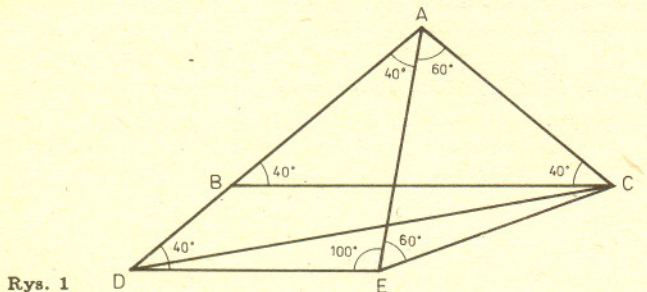
Przechodzimy teraz do zadań z sezonu 88/89: kto zrobił je zgrabniej od nas, kto uogólnił lub interesująco skomentował; które zadania okazały się najtrudniejsze ($WT > 3$). Widać wyraźnie (z tego, jak i z zeszlenczonego omówienia), że klasą dla siebie wśród uczestników jest pan Henryk Kasprzak z Żar.



Redakcja *Delty* przeprosza za to, że w roku 1989, ze względu na trudności finansowe, nie zorganizowała spotkania Członków Klubu 44.

Zadanie 178 [Konstrukcja rozbieżnego szeregu $\sum \epsilon_n n^{-1}$, gdzie $\epsilon_n = \pm 1$, $\lim(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)n^{-1} = 0$] (współczynnik trudności WT = 3,09; liczba poprawnych rozwiązań LPR = 14). Prawie wszystkie rozwiązania polegają na modyfikacji szeregu anharmonicznego na ciągu numerów o zerowej gęstości, wykorzystując przy tym rozbieżność szeregu $\sum (n \ln n)^{-1}$. Autorami poprawnych rozwiązań byli: **A. Bonk, H. Kasprzak, H. Kornacki, P. Kumor, A. Langer, M. Mazur, K. Pióro, A. Prześdziecki, A. Szymczak, K. Parol, M. Zajac, K. Zawislowski, R. Latała, Z. Surduka.**

Zadanie 175 [Rysunek 1: $|\angle ABC| = |\angle BCA| = 40^\circ$, $|AD| = |BC|$; $|\angle ADC| = ?$] (WT = 1,65; LPR = 26). Większość rozwiązań, w tym i nasze, sprowadza się do mniej lub bardziej zgrabnych rachunków trygonometrycznych (nasze – raczej mniej...). Zwracają więc uwagę ładne rozwiązania geometryczne (**K. Burnicka i H. Kasprzak**; a dość podobnie **P. Jędrzejewicz, D. Rybacki**): Budujemy trójkąt EAD przystający do ABC (rysunek 1); powstaje trójkąt równoboczny AEC oraz trójkąt równoramienny ECD , w którym $|\angle CED| = 160^\circ$; zatem $|\angle EDC| = 10^\circ$, skąd $|\angle ADC| = 30^\circ$.



Zadanie 176 [Dowieść: $(x^2 + x + \frac{n}{2})^n > \frac{1}{2}(x^{2n} + (x+1)^{2n})$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $x \in \mathbb{R}$] (WT = 3,09; LPR = 10). **A. Bonk, H. Kasprzak, H. Kornacki, K. Surduka, G. Zakrzewski, M. Zajac** – rozwiązania nie różniące się istotnie od naszego; **D. Rybacki** – podobnie; **R. Latała** – indukcyjnie; **P. Kumor, K. Pióro** – dowody analityczne, dość zawiłe.

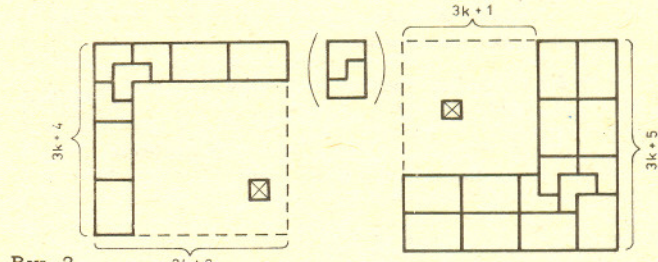
Zadanie 177 [$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ściśle rosnąca; wyznaczyć f] (WT = 1,47; LPR = 33). **H. Kasprzak** podaje uwagi dotyczące rozwiązań danego równania funkcyjnego bez założenia różnowartościowości: Jeżeli $f(x) \neq x + 1$ spełnia równanie, to jest funkcją okresową, nieograniczoną, $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$; rozwiązania takie istnieją (przy założeniu pewnika wyboru).

Zadanie 178 [sup \sum (długości cięwiw wyznaczonych przez n punktów okręgu jednostkowego) = ?] (WT = 3,18; LPR = 10). Kres ten jest osiąganym, gdy punkty są rozmieszczone równomiernie; dowody opierają się w większości na nierówności Jensena dla funkcji sinus. **A. Bonk, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, A. Langer, M. Zajac, G. Zakrzewski, P. Kumor, R. Latała, W. Skut, M. Karas.**

Zadanie 179 [$x, y \geq 0$; $(\frac{1}{3}(x + (xy)^{1/2} + y))^{1/3} = (\frac{1}{2}(x^{2/3} + y^{2/3}))^{1/2} \Rightarrow x = y$] (WT = 2,58; LPR = 23). Eleganckie rozwiązanie **H. Kasprzaka**: Podstawienie $x/y = e^{6t}$.

prowodzi do równania $f(t) = 0$, gdzie $f(t) = \cosh 6t - 16 \cosh 3t + 27 \cosh 2t - 12$. Sprawdzamy, że $f^{(k)}(0) = 0$ dla $k = 0, 1, 2, 3$ oraz $f^{(4)}(t) > 0$ dla $t \neq 0$. Na mocy wzoru Taylora $f(t) > 0$ dla $t \neq 0$. Zatem: $f(t) = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = y$.

Zadanie 180 [Szachownicę $m \times m$ (gdzie $m = 2^n$) bez jednego pola da się pokryć kostkami „trimino”] (WT = 1,60; LPR = 35). Teza jest słuszna także dla wielu innych liczb naturalnych m (niekoniecznie postaci 2^n). Niech M będzie zbiorem wszystkich tych liczb. Zachodzą implikacje: $3k + 2 \in M \Rightarrow 3k + 4 \in M$; $3k + 1 \in M \Rightarrow 3k + 5 \in M$. Tę uwagę wraz z prostym dowodem (rysunek 2) przekazał nam prof. dr hab. **Jerzy Browkin** (U.W.). Ponieważ $\forall k: 3k \notin M$ oraz $1 \notin M$, $2 \in M$, $5 \in M$, $7 \in M$ (sprawdzenie łatwe), wynika stąd, że $M = \{m \in \mathbb{N} : 3 \nmid m\} - \{1, 5\}$.



Zadanie 182 [Rozbijanie ciągu $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots)$ na podciągi o zadanych sumach] (WT = 2,01; LPR = 18). Treść zadania była sformułowana nieprecyzyjnie. Nie było jasne, czy do rozważań dopuszcza się ciągi długości skończonej (ewentualnie wręcz puste), czy nie, a od tego zależała odpowiedź. Nasza wina – przepraszamy. Oczywiście, akceptowaliśmy wszystkie rozwiązania, które były poprawne przy którymkolwiek rozumieniu treści.

Zadanie 183 [Sześciokąt wypukły o polu $> \frac{2}{3}$ kwadratu średnicy] (WT = 3,27; LPR = 5). Istnienie takiego sześciokąta było nieco zaskakujące, zważywszy, że sześciokąt foremny nie jest tu dobry. Prawdopodobną konstrukcję, identyczną lub bardzo zbliżoną do naszej, podali: **H. Kasprzak, L. Krawczyk, P. Kumor, K. Surduka, K. Jedziniak.**

Zadanie 186 [Warunek konieczny i dostateczny istnienia czworoscianu o zadanych polach ścian] (WT = 2,65; LPR = 4). Już się zaczęły duże opóźnienia numerów powodujące spadek liczby uczestników. Stąd niezbyt wysoki WT, jak na zadanie o tej trudności. Rozwiązania nie różniące się istotnie od naszego przysłali: **H. Kasprzak, L. Krawczyk, R. Latała**. Interesujące rozwiązanie (z usterekami, na szczęście usuwalnymi) oparte na rachunku wektorowym podał **A. Kondracki**.

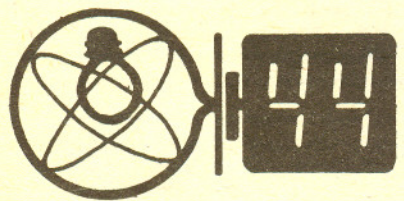
Zadanie 190 [$m, n \in \mathbb{N}$, m nieparzyste $\Rightarrow \Rightarrow NWD(2^m - 1, 2^n + 1) = 1$] (WT = 2,25; LPR = 15). Nietrudne, a poza tym, jak się okazuje znane. **J. Ciach** proponuje wobec tego dalszy ciąg: zauważa, że teza przestaje być prawdziwa, gdy m jest liczbą parzystą, a n nieparzystą (bo wówczas $1 + 2^{NWD(m,n)}$ jest wspólnym dzielnikiem liczb $2^m - 1$, $2^n + 1$) i stawia problem charakteryzacji tych par liczb parzystych m, n , na które teza zadania się przenosi. Przekazujemy problem naszym Czytelnikom.

W lidze fizycznej, poczynając od numeru 9/1989, niektóre zadania są przewidziane do rozwiązywania metodami numerycznymi. Z pomocą rządowego programu badawczego-rozwojowego RR I.14 jako sponsora postanowiliśmy zająć się popularyzacją tych metod, które we współczesnej fizyce odgrywają coraz większą rolę.

Komputerów też mamy coraz więcej – w szkołach, uczelniach, zakładach pracy, klubach, a także w domach. Zachęcamy więc do spróbowania... Jeśli ktoś nie ma dostępu do komputera, może te zadania rozwiązywać (może trochę mniej dokładnie) np. posługując się kalkulatorem z funkcjami.

Za wszelkie uwagi Czytelników na temat tych zadań, ale również i pozostałych, będziemy bardzo wdzięczni. A teraz omówienie wybranych zadań z minionego roku.

Najładniejsze rozwiązania przysłali **G. Buchcie, T. Rusin, P. Wójtowicz, A. Borowski, W. Kacprzak, W. Peisert, A. Sikorski i A. Wróński**. Posłużono się w nich trygonometrią. Jeśli nawet zamieszczono rysunki takie, jak w rozwiązaniu opublikowanym w *Delcie* (nr 12/1988), miały one charakter tylko ilustracyjny.



Zadanie 71 [Przeplnięcie rzeki] (WT = 2,01; LPR = 21). Większość rozwiązujących przyjęła znany stosunek prędkości pływaka i wody i przy takim założeniu minimalizowała odległość zniesienia pływaka przez nurt rzeki. Widać nie wczuli się oni w sytuację człowieka, który musi skakać do wody nie znając szybkości nurtu. A był to właśnie ważny element zadania.

Zadanie 73 [Kula zsuwająca się ze stołu] ($WT = 1,88$; $LPR = 11$). Większość nadesłanych rozwiązań była poprawna. Najlepsze rozwiązania przysłali **P. Bała, R. Musiał, A. Sikorski, P. Wójtowicz**. Za to do rozwiązania w numerze 1/1989 *Delty* zakradł się błąd: powinno być $\alpha_0 = \arccos(2/3)$ oraz $Z = (4\sqrt{3}/9)\sqrt{RH}$.

Zadanie 75 [Równia pochyła ze zmiennym współczynnikiem tarcia] ($WT = 1,46$, $LPR = 25$). Większość rozwiązujących (m. in. **M. Krystian, P. Jungiewicz, G. Lewandowski, P. Perkowski, A. Sikorski**) zastosowała metodę „energetyczną” – podobnie jak w *Delcie*. Kilka osób (**A. Bonk, A. Gluza, R. Musiał**) rozwiązywało równanie ruchu klocka. **J. Lipkowski** i **Dz. Lipniacki** wykorzystali obydwie metody.

Zadanie 77 [Strumień wody ze strzykawki] ($WT = 2,50$; $LPR = 15$). Jedynie **A. Kondracki** opisał prawidłowo wpływ dyszki na zjawisko wypływu wody.

Zadanie 79 [Połączenie żarówek w żyrandolu] ($WT = 1,27$; $LPR = 18$). Zadanie to wypadło dobrze (najniższa wartość WT). Tylko niektórzy autorzy poprawnych rozwiązań (**A. Borowski** – sprawdził doświadczalnie, **J. Lipkowski, B. Mikieliewicz, R. Musiał, A. Sikorski**) wspomnieli o zależności oporu żarników od temperatury.

Zadanie 81 [Wyznaczanie stężenia kwasu] ($WT = 1,65$; $LPR = 19$). **W. Peisert** i **Dz. Lipniacki** przedyskutowali wpływ bezwładności cieczy na ruch pływaka (**Dz. Lipniacki** wykonał doświadczenie). **A. Sikorski** zwrócił uwagę na to, że zależność gęstości kwasu od stężenia nie jest ściśle liniowa. W rozwiązaniach występują różne określenia stężenia; większość osób brała stosunek masy kwasu do masy roztworu.

Zadanie 82 [Światło przechodzące przez szklany półwałec] ($WT = 2,47$; $LPR = 10$). W niektórych rozwiązaniach (**A. Sikorskiego, T. Wietecha, J. Lipkowskiego, B. Musiała, R. Musiała**) podano wyrażenia określające stosunek powierzchni bocznej, z jakiej światło wychodzi,

do całej powierzchni bocznej półwałca, jako funkcję współczynnika załamania. **T. Wietecha** dołączył nawet program komputerowy sporządzający wykres tej funkcji.

Zadanie 83 [Napelnianie dziurawej beczki] ($WT = 2,40$; $LPR = 10$). Dobre rozwiązania nadesłali **T. Wietecha, P. Bała, A. Borowski, P. Jungiewicz, B. Mikieliewicz, B. Musiał, P. Gworys, J. Lipkowski, L. Motyka** i **A. Sikorski**. **A. Gluza** zauważyła, że identyczne zadanie było już w *Delcie* (nr 1/1976, zad. F 25). Niestety, zamieszczone tam rozwiązanie jest obciążone błędem rachunkowym i prowadzi do mylnego wyniku.

Zadanie 84 [Rzut piłką ponad ścianą] ($WT = 3,00$; $LPR = 8$). Zadanie to miało najwyższy współczynnik trudności. Spośród autorów dobrych rozwiązań (**P. Bała, J. Lipkowski, Dz. Lipniacki, A. Borowski, B. Musiał, A. Sikorski, T. Wietecha, L. Motyka**) nikt nie zauważył występowania drugiego „obszaru cienia” w większej odległości od ściany.

Zadanie 85 [Kondensator na sprężynkach] ($WT = 1,87$, $LPR = 13$). W większości rozwiązań przyrównano energię naładowanego kondensatora $E_k = \frac{\epsilon \epsilon_0 U^2}{2}$ (ϵ – przenikalność elektryczna powietrza) do energii rozciągniętych sprężyn $E_s = 4k \frac{d_0^2}{2}$. Najlepsze rozwiązania tego typu przysłali **M. Karas, A. Borowski, B. Mikieliewicz** i **P. Perkowski**.

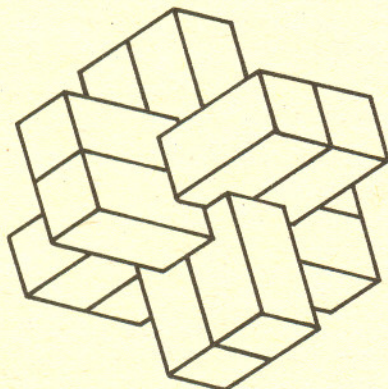
Zadanie 87 [Obrót kosmonauty] ($WT = 2,27$, $LPR = 8$). Autorzy prawidłowych rozwiązań (**K. Osipowicz, P. Bała, L. Motyka, W. Peisert, A. Sikorski, R. Wencel, A. Borowski, A. Surma**) na ogół proponują okrężne ruchy rękoma.

Zadanie 89 [Zawieszanie szafki] ($WT = 2,48$, $LPR = 7$). Zaledwie 7 dobrych rozwiązań (**Zb. Kapaly, A. Sikorskiego, Dz. Lipniackiego, R. Musiała, M. Karasia, J. Lipkowskiego, A. Wrońskiego**) wiąże się z małą liczbą nadesłanych prac, na co miało wpływ poważne opóźnienie się majowego numeru *Delty*.

Krzyżak

Litewscy i łotewscy drwale w chwilach wolnych od pracy wycinali z drewniek sześć patyczków takich jak na rysunku obok, a następnie dawali je dzieciom, by te złożyły z nich nierozpadający się krzyżak. A nie jest to łatwe. Proszę samemu wyciąć i złożyć.

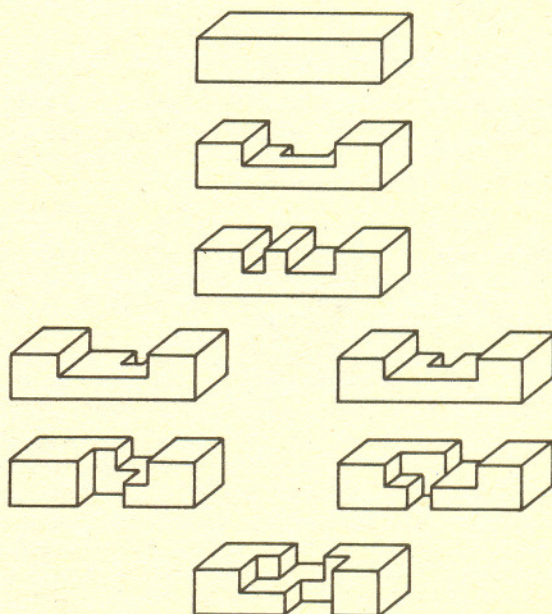
Potem podobną zabawkę (wykonaną z plastyku) sprzedawano u nas w kioskach Ruchu. Kiedy porównaliśmy oryginalną drewnianą zabawkę z jej plastikowym odpowiednikiem, okazało się, że nie są one jednakowe. Różnią się kształtem dwóch patyczków. Powstaje zatem pytanie, czy istnieje może jeszcze więcej wersji?



Dokładniej: na ile sposobów można wyciąć 6 patyczków w taki sposób, by można z nich było złożyć nierozpadający się krzyżak nie mający luk we wnętrzu?

Opracował **M. K.**

Propozycje ewentualnych tematów prac na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki zamieszczamy od numeru 3/1988 (z pominięciem numerów 6 i 12 z 1988 roku oraz 1, 6, 7 i 8 z roku 1989). Oczywiście, chętnie widzimy prace również na inne tematy.



Drobiazgi

W gałce ocznej gadów i ptaków obecny jest dziwny narząd – grzebień. Jest to pofalowana, czworoboczna, bogato unaczyniona płytka przymocowana do dna oka tuż obok nerwu wzrokowego i sięgająca daleko w głąb ciała szklistego. Jest to narząd dziwny, bo do dziś nie wiadomo, jakie pełni funkcje.

Czasem trudno jest zauważyć rzeczy oczywiste, szczególnie gdy dyscyplina jest młoda, czyli gdy grunt jest niepewny. Od odkrycia przez de Morgana wzoru

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

do odkrycia przez Pierce'a wzoru

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

upłynęło 9 lat.

Jeszcze większy dystans dzieli twierdzenie Pascala:

proste zawierające boki sześciokąta wpisanego w stożkową przecinają się w punktach współliniowych

od dualnego do niego twierdzenia Brianchona:

przekątne sześciokąta opisanego na stożkowej przecinają się w jednym punkcie

– oddziela je 152 lata.

Howard T. Kerr z Oak Ridge Nat. Lab. opracował miniaturowy nadajnik podczerwony, który można przykleić do grzbietu pszczoły. Nadajnik zasilany jest miniaturowymi bateriami słonecznymi, a jego sygnały można odbierać z odległości do 1 km. Nadajniki mają umożliwić śledzenie królowych i trutni tzw. afrykańskiej pszczoły atakującej południowe stany USA. Poznanie zwyczajów tych pszczół umożliwi opracowanie strategii blokującej ich szybki rozwój.

By nastąpiło zaćmienie, Księżyc musi być w pełni lub w nowiu oraz znajdować się dostatecznie blisko któregoś z węzłów swojej orbity (punktu przecięcia się rzutu orbity na niebo z ekliptyką). Warunki te są spełnione bynajmniej nie co dwa tygodnie, w rezultacie zaćmienia następują z częstością bardzo różną. Skrupulatne rozważenie całej geometrii zaćmień prowadzi do wniosku, że w roku muszą wystąpić przynajmniej dwa zaćmienia Słońca (a maksymalnie pięć), natomiast zaćmienie Księżyca może nie nastąpić wcale (natomiast maksymalnie może ich być trzy). Ale w sumie może być w roku zaćmień co najwyżej siedem (a nie osiem): cztery Słońca i trzy Księżyca albo pięć Słońca i dwa Księżyca. Średnio w ciągu 1000 lat bywa 1543 zaćmienia Księżyca i 2375 Słońca.

Ponieważ ostatnią cyfrą kwadratu liczby naturalnej może być tylko 0, 1, 4, 5, 6 lub 9, więc spośród dowolnych siedmiu liczb naturalnych można wybrać takie dwie, a i b , że $a^2 - b^2$ dzieli się przez 10. Żeby mieć pewność, że spośród przypadkowo wybranych liczb naturalnych można będzie wybrać takie dwie, a i b , by $a^3 - b^3$ dzieliło się przez 10, musielibyśmy wziąć ich aż jedenaście – bowiem każda cyfra może być ostatnią cyfrą trzeciej potęgi liczby naturalnej.

Firma Microsoft Corp. w oryginalny sposób testowała kompilator języka C o nazwie QuickC. W październiku 1988 roku w kilku uniwersytetach w Stanach Zjednoczonych przeprowadzono kilkudniowe sesje. W dużych salach ustawiono komputery, zapewniono darmową pizzę, kanapki i piwo oraz zaproszono studentów, aby wykrywali błędy w kompilatorze QuickC. Za każdy wykryty błąd płacono 20 dolarów. Studenci wykryli 181 błędów.

Temperatura powierzchni Słońca (około 5770 K) jest dostatecznie wysoka, by uniemożliwić istnienie tam jakichkolwiek związków chemicznych. Niemniej jednak w atmosferze słonecznej znajdują się niemałe ilości ujemnych jonów wodorowych. Otóż dzięki znacznej liczbie elektronów swobodnych od czasu do czasu któryś z nich przyłącza się do neutralnego atomu wodoru. Taki stan związany żyje bardzo krótko, ponieważ jego energia wiązania wynosi zaledwie 0,75 eV. Drugi elektron może więc zostać oderwany np. przez każdy kwant promieniowania widzialnego, dlatego obecność ujemnych jonów wodorowych w atmosferach gwiazd podobnych do Słońca jest odpowiedzialna za absorpcję światła w widmie ciągłym.

Laboratorium w Gran Sasso rozpoczęło normalną pracę. Mieści się ono w trzech halach wydrążonych w górze Gran Sasso przy okazji budowy autostrady przez Apeniny około 150 km od Rzymu. Hale mają wymiary 100 m długości, 18 m szerokości i 20 m wysokości każda. Skąły o grubości 1,4 km ponad laboratorium są doskonałą osłoną przed promieniowaniem kosmicznym. Z tego powodu w Gran Sasso będą prowadzone głównie eksperymenty z tzw. fizyki podziemnej. W hali A przygotowywane są dwa doświadczenia: Gallex – do obserwacji neutrin słonecznych za pomocą detektora zawierającego 30 t galu, i LVD (*Large Volume Detector*) – do obserwacji neutrin astrofizycznych. W hali B znajduje się Macro – obserwatorium monopoli, promieni kosmicznych i neutrin astrofizycznych. Trzy z sześciu modułów Macro rozpoczęły już normalną pracę. W hali C prowadzone są prace przy Icarus-ie – detektorze argonowym do obserwacji rzadkich przypadków wywołanych promieniami kosmicznymi. W Gran Sasso zainstalowano również antenę grawitacyjną z aluminium o masie 2440 kg. Ochłodzona do temperatury 0,1 K jest czuła na oscylacje o amplitudzie rzędu ułamka rozmiarów jądra atomowego.

Wśród różnych dziwolągów, jakich jest pełna matematyka, są i funkcje ciągłe, które w żadnym przedziale nie są monotoniczne. Co więcej – jest ich więcej od tych „innych”. A trudno sobie wyobrazić, by mogły się do czegoś, poza szokowaniem laików, przydać.

Ekliptyka tworzy z równikiem niebieskim kąt $23^{\circ}27'$, orbita Księżyca kąt $5^{\circ}9'$ z ekliptyką. Księżyc może zatem osiągnąć deklinację $\pm 28^{\circ}36'$, a więc w zasadzie może przesłaniać centrum Galaktyki (jego deklinacja wynosi $-28^{\circ}55'$), jednak nie stale, bowiem jego orbita wykonuje z okresem 18,6 lat precesję. To właśnie teraz mamy kilkuletni okres, gdy zakrycia są możliwe. Ale i tak zakrycia centrum Galaktyki przez Księżyc można obserwować tylko z północnej półkuli Ziemi – z rozmiarów Ziemi i odległości Księżyca wynika, że nawet przy jego najbardziej ujemnej deklinacji zakrycie to dla półkuli południowej nigdy nie zajdzie.