

SPIS TREŚCI

NUMERU 5(204)

Gwiazdy w pierścieniach <i>Danuta Dobrzycka</i>	str. 1
Harmonia	str. 1
Patrz w niebo	str. 3
Wielomiany czynnikowe i symbol Newtona <i>Tadeusz Gerstenkorn, Tadeusz Śródka</i>	str. 4
Z metodą Rungego-Kutty przez przestrzeń fazową <i>Ryszard Kutner</i>	str. 6
„Doktor Faustus” i fizyka powierzchni	str. 9
Jak lepiej oszacować logarytm naturalny? <i>Józef Banaś</i>	str.10
Zadania	str.11
Epsilon	str.12
Korespondencyjny Klub Fizyków	str.13
Klub 44	str.14
Optyczne metody pomiaru prędkości przepływu <i>Grzegorz Pakuła</i>	str.16

W następnym numerze:

Młodzieńcza praca Marka Kaca

KAZDY MOZE BYĆ KOLPORTEREM !!!

Delta tańsza o 25 %

Kupując 150 egzemplarzy *Delt*y płacisz tylko 2.100,- zł za numer.
Przesyłając pod adresem redakcji dowód wpłaty
wielokrotności sumy 315 tysięcy złotych
otrzymasz tyleż paczek po 150 egzemplarzy
najbliższego numeru *Delt*y.

Nasze konto:

PBK VIII OM Warszawa 370028-4170
Uniwersytet Warszawski, redakcja miesięcznika *Delta*

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Mąkowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Aniela Wolska
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Paweł Krawczyk – z-ca red. nac.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

Centrum Informatyczne UW
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa
tel. 20-03-81 wewn. 841

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 15 000 egz.

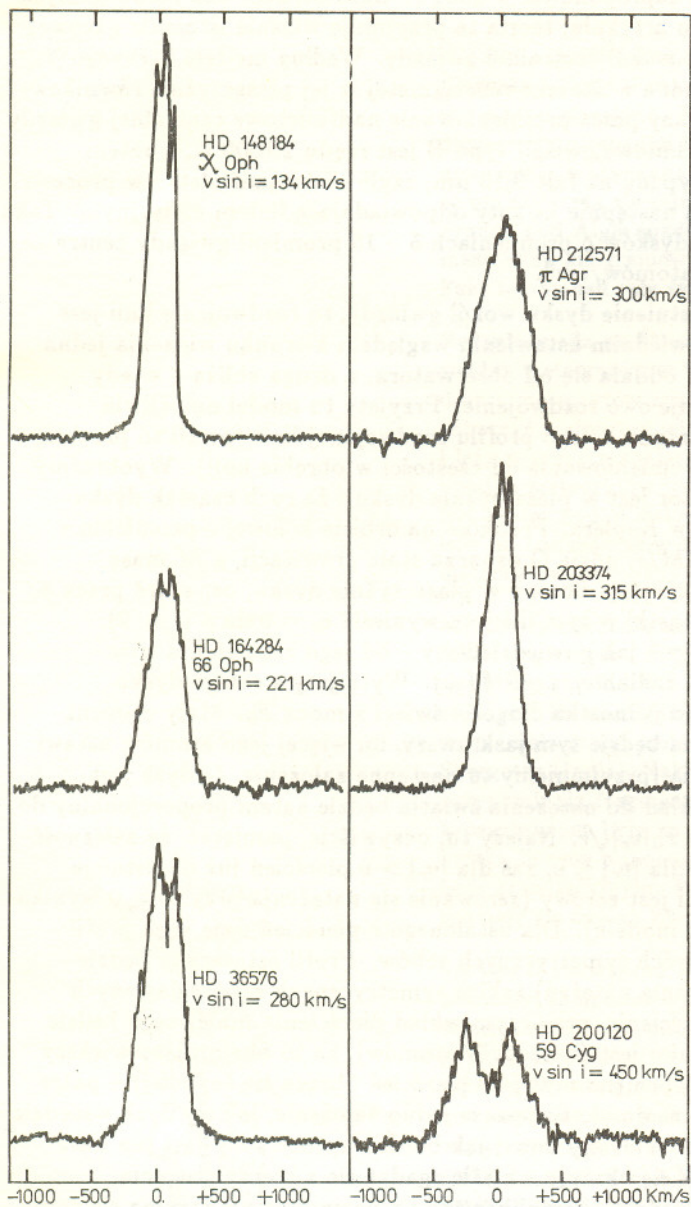
Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TeX
wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1991 r. wynosi 7 500,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora – odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
 - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,- zł od egzemplarza,
 - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał
 - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarsa zł 2 800,-



Rys. 1

O planetach z pierścieniami słyszeliśmy – w Układzie Słonecznym jest ich aż cztery, a Saturna z pierścieniami zapewne każdy widział. Okazuje się jednak, że pierścienie (czy dyski) wokół gwiazd są też obiektami bardzo często spotykanymi (pisaliśmy o tym w *Delcie* 8/1987). W bardzo nielicznych przypadkach te dyski, a właściwie bardzo rozległe płaskie obłoki pyłowe, są widoczne w podczerwieni, w ogromnej jednak większości są to małe dyski o rozmiarach niewiele większych niż sama gwiazda centralna, a o ich istnieniu dowiadujemy się na podstawie obserwacji spektroskopowych – i o tym trochę opowiemy.

Cała klasyfikacja widmowa gwiazd opiera się na wyglądzie ich widm absorpcyjnych. Doskonale tłumaczy je klasyczna teoria atmosfer gwiazdowych, według której – w ogromnym skrócie – ze światła fotosfery (o widmie ciągłym) przy przechodzeniu przez atmosferę wylapywane są fotony o pewnych wybranych częstościach, w wyniku czego w widmie objawia się ich brak, czyli linie absorpcyjne. Tymczasem w widmach wielu gwiazd obserwuje się też linie emisyjne. Pierwsze takie gwiazdy (typu B) zostały odkryte w 1886 r. przez A. Secchiego. W roku odkrycia znano ich zaledwie pięć, a w 1970 r. ukazał się katalog Wackerlinga zawierający ich już prawie 3000. Lista ta jest ciągle uzupełniana. Obiekty takie oznacza się symbolem Be, gdy stwierdzi się obecność linii emisyjnych wodoru, często w towarzystwie linii emisyjnych jednokrotnie zjonizowanych metali, głównie żelaza. Pewna liczba jaśniejszych gwiazd Be ma dodatkowo w swoim widmie wzbronione linie emisyjne. Nazywa się je dlatego niezwykłymi, osobliwymi i oznacza jako Bep (literka „p” pochodzi od angielskiego słowa *peculiar*, tzn. dziwny, osobliwy, szczególny). Jest ich jednak niewiele, natomiast szacuje się, że w ogóle gwiazdy Be stanowią 20 % wszystkich gwiazd typu B, przy czym najwięcej ich występuje w typach B2 – B3. Obecność linii emisyjnych coraz częściej zauważa się u gwiazd każdego właściwie typu widmowego. Co więcej, obserwuje się również podwójne linie emisyjne.



Harmonia była uznana przez pitagorejczyków za najważniejszą i najciekawszą własność świata.

Przez harmonię rozumieli oni coś, co powoduje, że najróżniejsze zjawiska tak materialne, jak intelektualne lub duchowe składają się na stabilną całość zwaną Wszechświatem. Pitagorejczycy wierzyli, że to, co dziś nazywamy matematyką, najlepiej może wyrazić harmonię świata.

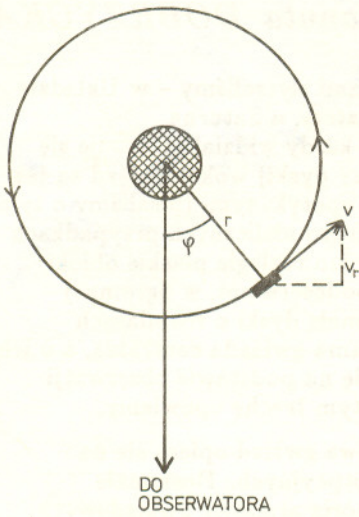
Dziś harmonia kojarzy się nam ze współbrzmieniem, z estetyką, z pięknem. Nie jest to w żadnej sprzeczności z poglądami pitagorejczyków. Jednym ze sposobów obejrzenia, jak dalece piękno bliskie jest matematyce, jest graficzne przedstawienie rozwiązań matematycznych równań i nierówności.

Na następnych stronach przedstawiamy wykonane przez Klub Komputerowy Zespołu Szkół Elektrycznych w Zamościu pod kierunkiem nauczyciela, **Eugeniusza Jakubasa** wykresy rozwiązań czterech dość skomplikowanych nierówności trygonometrycznych. Oczywiście, wykonać taki wykres może jedynie komputer. Dla tych, którzy mają dostęp do komputera, podajemy też program w PASCALU, który był użyty do uzyskania wykresów. Fragmenty, które mogą różnie wyglądać dla różnych komputerów, wydrukowaliśmy kursywą. Dla języka Turbo Pascal na komputerach IBM PC należy je zastąpić następującymi instrukcjami:

```

Użyj: uses CRT, GRAPH; var x, y, sx, sy: real; var
Driver, Mode: integer;
Zacznij: Driver := Detect; InitGraph(Driver, Mode,
''); SetBkColor(0); SetColor(7); ClearDevice;
RysujPunkt: PutPixel Jak: 7
Poczekaj: repeat until KeyPressed; CloseGraph;

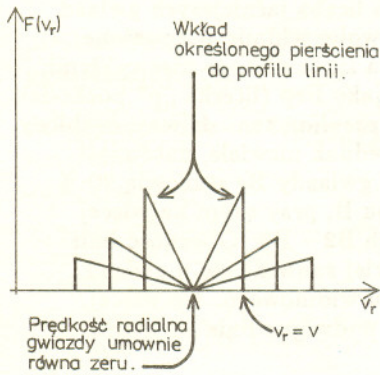
```



Rys. 2

Teorię tłumaczącą obecność charakterystycznych podwójnych linii emisyjnych w widmach gwiazd Be zaproponował w 1931 r. Otto Struve. Jak łatwo domyśleć się na podstawie tytułu artykułu, teoria ta przyjmuje właśnie istnienie gazowego dysku obracającego się wokół centralnej gwiazdy. Według modelu Struwego gwiazda byłaby zanurzona w otoczce rozciągniętej w jej płaszczyźnie równikowej. Taki dysk jest jonizowany przez promieniowanie nadfioletowe centralnej gwiazdy (temperatura powierzchniowa gwiazd typu B jest rzędu 20 000 K, a zatem maksimum energii przypada na fale 0,15 μm , czyli bliski nadfiolet) i w procesie rekombinacji wysiewa następnie kwanty odpowiadające liniom emisyjnym. Taka interpretacja wymaga dysków o promieniach 5 – 15 promieni gwiazdy centralnej i gęstości $10^{10} - 10^{12}$ atomów/ cm^3 .

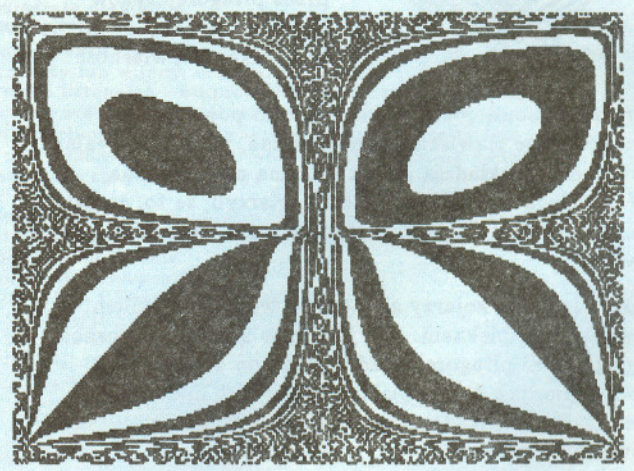
Skoro zapostulowano istnienie dysku wokół gwiazdy, to rozdwojenie linii jest zrozumiałe: przy odpowiednim ustawieniu względem kierunku widzenia jedna część rotującego dysku oddala się od obserwatora, a druga zbliża – wtedy efekt Dopplera powoduje owo rozdwojenie. Przyjęty tu model umożliwia jednak ponadto odtworzenie całego profilu rozdwojonej linii (profil to przebieg zależności natężenia promieniowania od częstości w obrębie linii). Wyobraźmy sobie więc, że obserwator jest w płaszczyźnie dysku i że ruch cząstek dysku odbywa się według praw Keplera. Prędkość na orbicie kołowej o promieniu r wynosi wtedy $v = \sqrt{GM/r}$, gdzie G oznacza stałą grawitacji, a M masę gwiazdy. Jeżeli kąt pozycyjny, liczony w płaszczyźnie dysku, oznaczyć przez ϕ , to prędkość radialna cząstki w tym miejscu wyniesie $v_r = v \sin \phi$ (rys. 2). Natężenie światła zależy – jak powiedzieliśmy – od jego częstości, a więc pośrednio od prędkości radialnej, czyli $F(v_r)$. Wytnijmy z całego dysku cienki pierścień, którego jednostka długości świeci z mocą F_0 . Mały element długości tego pierścienia będzie tym jaskrawszy, im więcej jego atomów ustawi się wzdłuż linii widzenia (przyjmujemy tu następane założenie, że dysk jest przezroczysty), jego wkład do natężenia światła będzie zatem proporcjonalny do $F_0 |\sin \phi| = F_0 |v_r|/v \sim F_0 |v_r| \sqrt{r}$. Należy tu, oczywiście, pamiętać, że zależność ta jest spełniona tylko dla $|v_r| \leq v$, zaś dla $|v_r| > v$ pierścień już nie istnieje i wkład do jasności linii jest zerowy (zerowanie się natężenia przy $v_r = 0$ wynika tylko z niedoskonałości modelu). Dla ustalonego r pierścień daje więc profil linii składający się z dwóch symetrycznych zębów. Profil ostateczny będzie sumą (w sensie sumowania natężeń) takich symetrycznych zębów dawanych przez poszczególne pierścienie, przy czym wkład pierścienia mniejszego będzie mniejszy (bo mniej w nim jest świecących atomów), za to obejmujący większy zakres prędkości radialnych (bo mniejszy pierścień obraca się szybciej) – patrz rysunek 3. Zauważmy, że doszło tu jeszcze jedno założenie, iż cały dysk wszędzie świeci z tą samą mocą. Widzimy teraz, jak bardzo uproszczony jest ten nasz model, a mimo to – jak się okazuje – niezłe zgadza się z rzeczywistością. Przyroda jest jednak bardziej skomplikowana i z pewnością nie trzyma się ściśle poczynionych tu założeń, za to ten sam model może pasować do przezroczystych dysków bez względu na to, czy są to, jak w tym artykule, fragmenty otoczek gwiazd Be, czy dysków akrecyjnych wokół czarnych dziur.



Rys. 3

```

program motyl;
  Użyj
begin
  Zaczynij
  sx := 80; sy := 27; x := -127/sx;
  while x < 126/sx do
  begin x := x+1/sx; y := -95/sy;
  while y < 95/sy do
  begin y := y+1/sy;
  if sin(y/(x*sin(y)))+x/(y*cos(x)) < 0
  then RysujPunkt(round(x*sx)+128,
  round(y*sy)+95,
  Jak);
  end;
  end;
  end;
  Poczekaj
end.
  
```





Notatki o spadku meteorytów spotykamy już w starożytnych kronikach chińskich. Zjawiska te były (i są) nie tak bardzo rzadkie, zdawałoby się więc, że ludzkość powinna być z nimi oswojona. Tymczasem do końca XVIII w. świat naukowy traktował doniesienia o „spadku kamieni z nieba” mniej więcej tak, jak my dziś traktujemy doniesienia o Marsjanach. Szacowna skądinąd paryska Akademia Nauk ogłosiła wręcz, że nie zamierza się zajmować w ogóle tymi sprawami. Trzeba trafiać, że właśnie we Francji pod Aigle spadł 26 IV 1803 r. deszcz kamienny, przy czym niektóre bryły miały masę kilku kilogramów, a całemu zdarzeniu towarzyszyły potężne efekty dźwiękowe. Fakt ten zmusił cały świat do uznania spadania kamieni z nieba za zjawisko przyrody.

Rocznie spada na Ziemię około 100 kg materii meteorytowej. Najefektowniejszy spadek meteorytów w Polsce nastąpił 30 I 1868 r. pod Pułtuskim. Drugi obfity deszcz meteorytów spadł pod Łowiczem 12 III 1935 r. W muzeach świata można zobaczyć meteoryty wielotonowe, a największy ze znalezionych ma masę około 60 t i leży w miejscu znalezienia pód Hoba w Południowej Afryce. Sama Ziemia nosi ślady upadku meteorytów jeszcze większych. Najlepiej zachowany (widocznie najmłodszy) jest krater pod Winslow w Arizonie (USA) o średnicy 1200 m. Największy ze znanych leży na Labradorze w Kanadzie i ma średnicę 3200 m. Kilka małych kraterów meteorytowych można obejrzeć w Morasku pod Poznaniem.

Meteoryty odróżnia się od ziemskich skał w wyniku dość subtelnych badań mineralogicznych. Za pozaziemskim pochodzeniem świadczy skład chemiczny oraz struktura krystaliczna ujawniająca się na szlifowanych płaszczynach trawionych następnie kwasami (tzw. figury Widmannstatten). W ten sposób została wyróżniona m.in. mała grupa meteorytów nazwana SNC od nazw trzech miejsc spadku: Shergotty (Indie), Nakhla (Egipt) i Chassigny (Francja). Meteoryty te zadziwiająco przypominają fragmenty gruntu Marsa i ich cechy mineralogiczne dowodzą, że wystawione były na działanie promieniowania kosmicznego przez czas stosunkowo krótki, liczony milionami lat, a sama krystalizacja ich materii nastąpiła w znacznym polu grawitacyjnym. Pozostawałoby jeszcze znaleźć wytłumaczenie, w jaki sposób znalazły się one na Ziemi.



Sprawę tę rozważano w California Institute of Technology. Symulacje komputerowe pokazały, że upadek masywnego ciała na powierzchnię Marsa może spowodować wystrzelenie fragmentów gruntu z prędkościami większymi od prędkości ucieczki (wynosi ona nieco ponad 5 km/s). Aby wystrzelone odłamki zachowały swoją tożsamość, tzn. nie uległy przy tym stopieniu lub odparowaniu, upadek masywnego meteorytu na Marsa musi nastąpić ukośnie. Część materii, oczywiście, ulega przy tym odparowaniu, a strumień gazów osiągający prędkość 20 km/s może być dostatecznie gęsty, by wystrzelić z Marsa nawet metrowe bryły na orbitę okołosłoneczną. Później bryły te mogą napotkać na swej drodze np. Ziemię. Jest zatem bardzo prawdopodobne, że mamy na Ziemi meteoryty osobliwe z dwóch powodów: są one meteorytami „drugiej generacji” oraz wiadomo, skąd pochodzą.

Tomasz KWAST

```

program motyl;
  Użyj
begin
  Zaczniij
  sx := 45; sy := 25; x := -127/sx;
  while x < 128/sx do
    begin x := x+1/sx; y := -95/sy;
    while y < 95/sy do
      begin y := y+1/sy;
      if sin((y-x)/((y-x)*cos(y-x*x))
        -(y+y-x)/(x*sin(1/(x*x-y)))) < 0
      then RysujPunkt(round(x*sx)+128,
        round(y*sy)+95, Jak);
      end;
    end;
  Poczekaj
end.
  
```



Wielomiany czynnikiowe i symbol Newtona

Tadeusz
GERSTENKORN,

Tadeusz
ŚRÓDKA

W niniejszym artykule proponuje się inne niż tradycyjne wprowadzenie symbolu Newtona, a mianowicie oparte na pojęciu wielomianu czynnikiowego. Pozwala to na pewne uogólnienie bez zwiększania trudności oraz łatwiejszy i bardziej zwięzły sposób notacji, zwłaszcza przy rozwiązywaniu zadań kombinatorycznych w rachunku prawdopodobieństwa. Stanowi również okazję do poszerzenia wiadomości z dziedziny wielomianów.

Definicja 1. Wielomian czynnikiowy (zwany także niekiedy **faktorialnym** lub **silniowym**, a także **uogólnioną potęgą**) stopnia r względem x z krokiem h określamy rekurencyjnie

$$(1) \quad x^{[0,h]} = 1, \quad x^{[r,h]} = x^{[r-1,h]}(x - (r-1)h), \quad r = 1, 2, 3, \dots,$$

przy czym h jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Z określenia wynika, że

$$x^{[r,h]} = x(x-h)(x-2h)\dots(x-(r-1)h), \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

W przypadku $h = 1$ będziemy pisać

$$x^{[r,1]} = x^{[r]}$$

i mówić o wielomianie czynnikiowym zstępującym, tj.

$$x^{[r]} = x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1), \quad r = 1, 2, 3, \dots,$$

przy czym uwzględniając (1) mamy

$$(2) \quad x^{[0]} = 1.$$

Jeżeli $h = 0$, to, oczywiście,

$$x^{[r,0]} = x^r,$$

tj. potęga x jest szczególnym przypadkiem wprowadzonego wielomianu.

Jeśli $h = -1$, stosujemy zapis

$$x^{[r,-1]} = x^{[-r]}$$

i mówimy o wielomianie czynnikiowym wstępującym. W tym przypadku mamy więc

$$x^{[-r]} = x(x+1)(x+2)\dots(x+r-1), \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Przykład 1. Obliczyć: a) $x^{[3,2]}$, b) $x^{[-3]}$.

Rozwiązanie.

$$a) \quad x^{[3,2]} = x(x-2)(x-4),$$

$$b) \quad x^{[-3]} = x(x+1)(x+2).$$

Przyjmujemy następującą definicję symbolu $\binom{p}{k}$ (czytaj: p nad k) zwanego symbolem Newtona.

Definicja 2. Dla dowolnej liczby rzeczywistej p

$$(3) \quad \binom{p}{k} = \frac{p^{[k]}}{k!} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{k!},$$

jeśli k jest liczbą naturalną; poza tym, wyjąwszy $k = 0$,

$$\binom{p}{k} = 0.$$



Rozwiązanie zadania F 306.

Niech R oznacza długość wielkiej półosi orbity ziemskiej, $R(1-e)$ jest odległością Ziemia - Słońce w peryhelium, a $R(1+e)$ w aphelium. Niech $T_a + \Delta T$, T_a oznaczają odpowiednio średnie temperatury Ziemi w peryhelium i aphelium. Dla ciała doskonale szarego moc wypromieniowywana jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury. Moc dostarczona przez Słońce jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości Ziemia - Słońce. Korzystając z bilansu energii dostarczonej i wypromieniowanej mamy:

$$T^4 \sim \frac{1}{r^2}$$

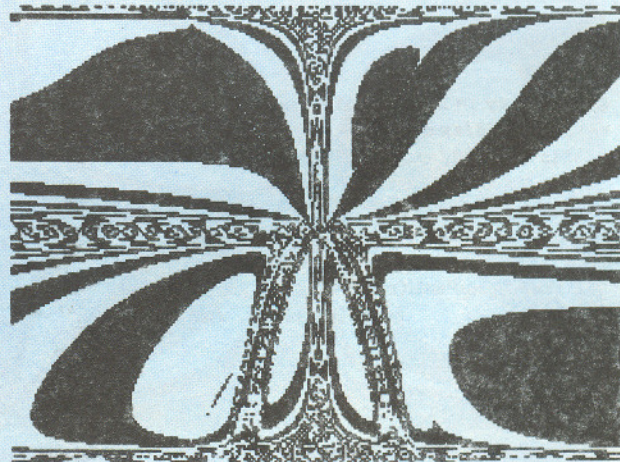
$$\frac{(T_a + \Delta T)^4}{T_a^4} = \frac{R^2(1+e)^2}{R^2(1-e)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T_a} = \sqrt[4]{\frac{1+e}{1-e}} - 1.$$

Szacując $T_a \approx 273$ K dostajemy $\Delta T \approx 5^\circ$ C.

program motyl:

```
Użyj
begin
  Zaczynaj
  sx := 18; sy := 27; x := -127/sx;
  while x < 126/sx do
    begin x := x+1/sx; y := -95/sy;
    while y < 95/sy do
      begin y := y+1/sy;
      if sin(y/(x*sin(y))-sqrt(abs(y*y-x*x)))
        -x/(y*cos(1/(x+y/x))) < 0
      then RysujPunkty(round(x*sx)+128,
        round(y*sy)+95, Jak);
      end;
    end;
  Poczekaj
end.
```





Z definicji silni dla $k = 0$ ($0! = 1$) oraz z (2) mamy

$$\binom{p}{k} = 1, \text{ jeśli } k = 0.$$

Z definicji 2 wynika, że gdy p i k są liczbami naturalnymi ($p = n$), to

$$(4) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ dla } 0 \leq k \leq n$$

oraz

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{dla } k > n.$$

Z (4) po prostych przekształceniach otrzymuje się często stosowane wzory:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Przykład 2. Obliczyć wartość wyrażień: a) $\binom{-7}{3}$, b) $\binom{3/2}{4}$.

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru (3) mamy

$$a) \quad \binom{-7}{3} = \frac{(-7)(-8)(-9)}{3!} = -84,$$

$$b) \quad \binom{3/2}{4} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{4!} = \frac{3}{128}.$$

Przykład 3. Wykazać, że dla $p > 0$ i k naturalnego zachodzi równość

$$\binom{-p}{k} = (-1)^k \binom{p+k-1}{k}.$$

Rozwiązanie. Ze wzoru (3) mamy

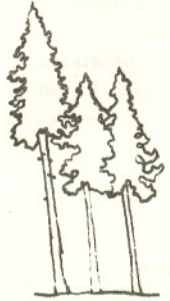
$$\begin{aligned} \binom{-p}{k} &= \frac{(-p)^{[k]}}{k!} = \frac{(-p)(-p-1)\dots(-p-k+1)}{k!} = \\ &= \frac{(-1)^k(p+k-1)(p+k-2)\dots p}{k!} = \\ &= \frac{(-1)^k(p+k-1)^{[k]}}{k!} = (-1)^k \binom{p+k-1}{k}. \end{aligned}$$

Przy okazji stwierdzamy, że zachodzi równość

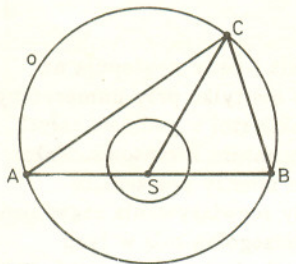
$$(-p)^{[k]} = (-1)^k p^{[-k]},$$

wyrażająca zależność między wielomianami czynnиковymi zstępującymi i wstępującymi.

Na powiązanie wielomianów czynnиковych zstępujących z rachunkiem różnicowym, na ciekawe własności wynikające z ustalenia relacji między nimi a wielomianami zwykłymi (liczby Stirlinga pierwszego rodzaju) wskazał R. Rabczuk (*Matematyka*, 5-6 (103), 1968, str. 196-199).



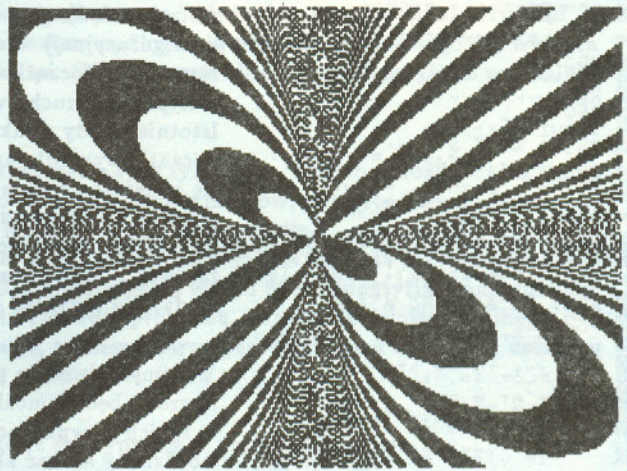
Rozwiązanie zadania M 599. Jest to okrąg będący obrazem okręgu o w jednokładności o skali $\frac{1}{2}$ względem środka S odcinka AB (bez przecięcia tego okręgu z AB).



Wystarczy zauważyć, że dla każdego położenia punktu C środek ciężkości trójkąta ABC leży w $\frac{1}{3}$ odległości SC od punktu S (środek ciężkości to punkt przecięcia środkowych, a te dzielą się w stosunku 2 : 1).

```

program motyl;
  Użyj
begin
  Zacznij
  sx := 15; sy := 10; x := -127/sx;
  while x < 126/sx do
    begin x := x+1/sx; y := -95/sy;
    while y < 95/sy do
      begin y := y+1/sy;
      if sin((x*x*x-y*y*y)/(x*y)) < 0
      then RysujPunkt(round(x*sx)+128,
        round(y*sy)+95,
        Jak);
      end;
    end;
  Poczekaj
end.
  
```

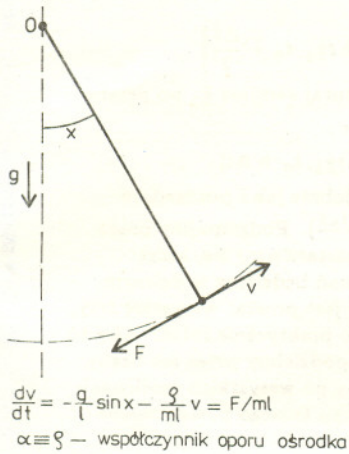




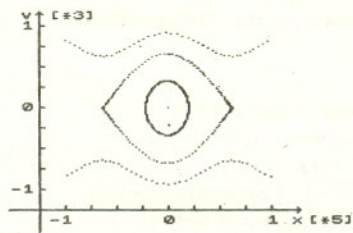
Na pierwszy rzut oka jest to dość łatwe. Ponieważ $\frac{d}{dt} \underline{u}(t_n) \simeq \frac{\Delta \underline{u}(t_{n+1})}{\Delta t} = \frac{\underline{u}(t_{n+1}) - \underline{u}(t_n)}{\Delta t}$, więc

$$(4) \quad \underline{u}(t_{n+1}) \simeq f[\underline{u}(t_n), t_n] \Delta t + \underline{u}(t_n).$$

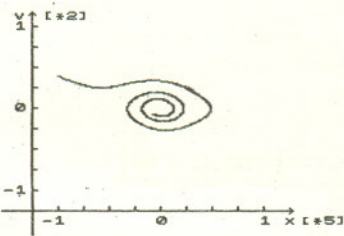
Niestety, takie proste rozwiązanie prowadzi do nieprzewidzianych kłopotów. Przy używaniu elementarnych algorytmów, takich jak opisany powyżej, obserwować można niefizyczny efekt samoczynnego numerycznego „studzenia się” lub „grzania”, co prowadzi do niestabilnego zachowania się układu przekreślając wiarygodność stosowanej metody. Efekt ten polega na tym, że całkowita energia układu maleje lub rośnie bez jakichkolwiek fizycznych przyczyn – sama z siebie. Powodem takiego niefizycznego zachowania się są kumulujące się błędy procedury numerycznej (szerzej zostało to opisane w książce D. Pottera *Metody obliczeniowe fizyki – fizyka komputerowa*, PWN, Warszawa 1982). Zwykle, aby temu zaradzić, w pierwszym odruchu zmniejszamy krok czasowy. Prowadzi to jednak do spowolnienia metody, a wspomniane efekty nadal się pojawiają, tyle że nieco później. Nie tędy więc droga. Należy raczej użyć bardziej wyrafinowanego algorytmu obarczonego mniejszym błędem i stabilnego ze względu na ten błąd. Algorytmem spełniającym te wymagania jest tzw. metoda Rungego–Kutty. Jej zwykłe wyprowadzenie jest dość zawiłe. Można ją jednak również otrzymać różnicując równanie różniczkowe (3) na trzy różne sposoby, a następnie – traktując każdy z nich jako równoprawny – uśrednić względem tych sposobów (patrz tekst w ramce na str. 8). Rezultatem jest w pełni profesjonalny algorytm o bardzo małym błędzie (rzędu $(\Delta t)^5$), stosowany z powodzeniem do rozwiązywania skomplikowanych zagadnień ewolucji. My jednak nie będziemy tak ambitni i zadowolimy się analizą przypadku najprostszego – jednowymiarowego ruchu pojedynczego punktu materialnego. Naszym wzorcowym układem będzie wahadło matematyczne (rys. 1). Aby jeszcze bardziej uprościć sobie życie, przyjmijmy, że masa punktu jest jednostkowa. Wówczas $p = v$ i mamy $\underline{u}(t) = [x(t), v(t)]$,



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

zawłączony program komputerowy znajduje trajektorie fazowe dla tego prostego układu. Został on napisany w BASICu na mikrokomputer ZX Spektrum 48 K (lub jemu pokrewne, jak Timex czy Elwro 800 Junior), a ze względu na jego prostotę można go także bez trudu przepisać na inne, popularne w kraju mikrokomputery. Po uruchomieniu program zapytuje o początkowe wartości położenia i prędkości oraz o czynniki skalujące poziomą oś x -ów i pionową oś v (zostają one następnie wydrukowane na wykresie – patrz rysunek 2 i 3). Po obliczeniu trajektorii fazowej pytanie o warunki początkowe zostaje ponowione (czynniki skali zmieniać już wtedy nie można).

Rysunki 2 i 3 ilustrują wynik działania programu dla zagadnienia wahadła matematycznego, odpowiednio przy braku tłumienia i z uwzględnieniem siły tłumiącej – patrz rysunek 1. Otrzymany wzór przypomina nieco dywan, a nieco ścieżkę wirów powstającą za przeszkodą w płynącej wodzie (szczególnie rysunek 2). Górny „szlaczek” na rysunku 2, podobnie jak i dolny, to tzw. przypadek rotacyjny (zachodzący tylko wtedy, gdy $k = \frac{v_0 \omega}{g} > 1$, gdzie częstość $\omega = \sqrt{g/l}$), gdy wahadło wiruje wokół swojego punktu zawieszenia 0. Spoczynkowi wahadła odpowiada po prostu kropka zaznaczona na wykresie w punkcie (0,0). Następnie elipsa odpowiada przypadkowi oscylacyjnemu ($k < 1$). Wreszcie przypadek graniczny ($k = 1$) niezwykle trudny do wysymulowania, odpowiadający zatrzymaniu się wahadła w pozycji pionowej ($x = \pi$). Trudność numeryczna polega na tym, iż wahadło w swoim ruchu ma się zatrzymać dokładnie w zenicie i w takiej pozycji pozostać. Jednakże nawet najmniejszy błąd numeryczny (związany np. ze skończoną długością przedziału czasowego Δt) wytrąca je prędzej czy później z tego stanu. (Nieźłym przybliżeniem jest przyjęcie przedziału czasowego $\Delta t = 0, 1$.)

Proponujemy Czytelnikowi odtworzenie tych rysunków. Aby to umożliwić, jak również, by otworzyć drogę do własnych eksperymentów, potrzeba jeszcze kilku słów o strukturze programu. W linii 140 zdefiniowano siłę F , a w linii 100 przyjęto parametry ją charakteryzujące. Zasadniczy algorytm zawarty jest w (wydzielonej) pętli rozpoczynającej się w linii 290, a kończącej się w linii 540. Zidentyfikowanie metody Rungego–Kutty nie powinno tu stanowić problemu. Inne podstawowe parametry, charakteryzujące samą symulację, to elementarny przedział czasu Δt ($\equiv \Delta t$) ustalony w linii 160 oraz całkowity czas symulacji t_k (linia 170).

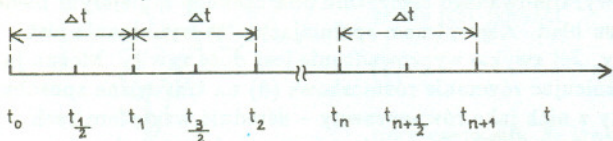
A zatem wszystko jest już gotowe do wyprawy w przestrzeń fazową. Szczęśliwej podróży!



Chcemy rozwiązać równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

$$\frac{d}{dt}u(t) = f[u(t), t].$$

W pierwszym kroku przybliżymy pochodną względem czasu $\frac{d}{dt}u(t)$ przez iloraz $\frac{\Delta u(t)}{\Delta t} \approx \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t}$, gdzie indeks $n = 0, 1, 2, \dots$, numeruje kolejne (w tym przypadku) równo odległe węzły czasowe, tak jak to pokazuje poniższy rysunek.



Będziemy poszukiwać rozwiązania właśnie w tych (głównych) węzłach czasowych. Kłopot jednak w tym, że iloraz $\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t}$ wyznacza pewną funkcję (prędkość) w połowie przedziału czasowego, czyli w węźle pomocniczym $t_{n+(1/2)}$. A zatem możemy wypisać następujące przybliżone równości:

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \{f[u(t_n), t_n] + f[u(t_{n+1}), t_{n+1}]\},$$

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t} \approx f[u(t_{n+(1/2)}), t_{n+(1/2)}],$$

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t} \approx f\left[\frac{u(t_n) + u(t_{n+1})}{2}, t_{n+(1/2)}\right].$$

Stanowią one równoprawne różnicowe wersje naszego wyjściowego równania różniczkowego. I nie ma nic zaskakującego w tym, że wiele różnych obrazów różnicowych przybliża jedno i to samo równanie różniczkowe. Do tego trzeba się po prostu przyzwyczaić. Przypomnijmy, że celem naszym jest sbudowanie algorytmu, który wyznacza rozwiązanie $u(t_{n+1})$ w następnym węźle czasowym t_{n+1} korzystając ze znajomości rozwiązania $u(t_n)$ w węźle poprzednim t_n . Narzuca się jednak pytanie: w jaki sposób poradzić sobie z prawymi stronami powyższych równań, skoro występuje tam zarówno poszukiwane rozwiązanie $u(t_{n+1})$ w węźle następnym, jak też nieznanne rozwiązanie $u(t_{n+(1/2)})$ w pomocniczym węźle czasowym? Aby rozwiązać ten problem, wprowadźmy następujące pomocnicze wielkości:

$$k_1 = f[u(t_n), t_n],$$

$$k_2 = f[u(t_{n+(1/2)}), t_{n+(1/2)}],$$

$$k_3 = f\left[\frac{u(t_n) + u(t_{n+1})}{2}, t_{n+(1/2)}\right],$$

$$k_4 = f[u(t_{n+1}), t_{n+1}],$$

z których, jak widać, jedynie k_1 możemy od razu wyznaczyć. Pozostałe będziemy teraz mozolnie obliczać. Po pierwsze, możemy napisać w przybliżeniu:

$$u(t_{n+(1/2)}) = u\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \approx u(t_n) + \frac{\Delta t}{2} f[u(t_n), t_n],$$

a co za tym idzie,

$$k_2 = f\left[u(t_n) + \frac{\Delta t}{2} k_1, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right].$$

Tym samym wielkość tę potrafimy już obliczyć, gdyż wiemy, jak funkcja f zależy od swoich argumentów.

W dalszym ciągu zauważmy, że

$$k_3 = f\left[u(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_2, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right]$$

(kto nie wierzy, niech podstawí tutaj zamiast k_2 po prostu iloraz $\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t}$). I wreszcie

$$k_4 = f[u(t_n) + \Delta t k_3, t_n + \Delta t]$$

(co widać po podstawieniu, podobnie jak i poprzednio w miejsce k_3 ilorazu $\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t}$). Podsumujmy pracę, jaką wykonaliśmy dotychczas i zastanówmy się, które spośród trzech wyjściowych równań będziemy w dalszym ciągu eksploatować? Odpowiedź jest prosta: wszystkie trzy, gdyż są jednakowo dobre. Jak to praktycznie robić? Ależ to proste – dodajmy je wszystkie i podzielmy przez ich liczbę, czyli, jak to się mówi, uśrednijmy po wszystkich możliwych sposobach (sytuacjach). W wyniku takiego postępowania otrzymujemy gotowy algorytm postaci:

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \frac{1}{6} \Delta t (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad n = 0, 1, \dots,$$

gdzie $k_j, j = 1, \dots, 4$, zostały już obliczone powyżej. Proszę zauważyć, że za pomocą tego algorytmu możemy znaleźć poszukiwane rozwiązanie w następnym węźle czasowym korzystając tylko ze znajomości rozwiązania w węźle poprzedzającym. Startując więc ze znanego warunku początkowego $u(t_0)$ możemy teraz kolejno, krok po kroku, wyznaczyć rozwiązanie w chwili $t_1, u(t_1)$, a stąd w chwili t_2 mamy $u(t_2)$, po czym $u(t_3)$ w chwili t_3 , itd. Osiągnęliśmy zatem postawiony cel.

Dla zagadnienia jednowymiarowego ruchu punktu materialnego o masie m pod wpływem działania siły $F(x, v; t)$ należy w równaniu (3) przyjąć $u(t) = [x(t), v(t)]$ oraz $f[u(t); t] = \left\{v(t), \frac{F[x(t), v(t); t]}{m}\right\}$. Pomocnicze funkcje $k_j, j = 1, \dots, 4$, konieczne przy zastosowaniu metody Rungego-Kutty, przyjmą postać:

$$k_1 = (k_1^x, k_1^v), \quad \text{gdzie}$$

$$k_1^x = v(t_n),$$

$$k_1^v = \frac{F[x(t_n), v(t_n); t_n]}{m},$$

$$k_2 = (k_2^x, k_2^v), \quad \text{gdzie}$$

$$k_2^x = v(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_1^v,$$

$$k_2^v = \frac{F\left[x(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_1^x, v(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_1^v, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right]}{m}$$

$$k_3 = (k_3^x, k_3^v), \quad \text{gdzie}$$

$$k_3^x = v(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_2^v,$$

$$k_3^v = \frac{F\left[x(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_2^x, v(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_2^v, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right]}{m}$$

$$k_4 = (k_4^x, k_4^v), \quad \text{gdzie}$$

$$k_4^x = v(t_n) + \Delta t k_3^v,$$

$$k_4^v = \frac{F\left[x(t_n) + \Delta t k_3^x, v(t_n) + \Delta t k_3^v, t_n + \Delta t\right]}{m}.$$

W wielkiej powieści Tomasza Manna znajdujemy następujący fragment:

Jeśli dobrze rozumiałem naszego gospodarza, to zajmowało go zagadnienie jedności ożywionej i owej tak zwanej nieożywionej przyrody oraz myśl, że wobec niej grzeszymy, przeciągając zbyt wyraźną granicę między tymi dwiema dziedzinami, gdyż w istocie jest ona przecież przenikalna i właściwie nie ma takiej elementarnej zdolności, która byłaby wyłącznie zastrzeżona dla stworzeń żywych i której biolog nie mógłby studiować również na nieożywionym modelu.

W jak zaskakujący sposób dziedziny te istotnie się zazębiają, nauczyła nas „pożerająca kropla”, której ojciec Leverkühn nie jeden raz w naszych oczach podawał pożywienie. Kropla, z czegokolwiek by się składała, z parafiny, oleju eterycznego – nie przypominam już sobie dokładnie, z czego składała się tamta, wydaje mi się jednak, że był to chloroform, – otóż kropla, powiadam, nie jest zwierzęciem, choćby najbardziej prymitywnym, nie jest nawet amebą, zakładamy więc, że nie może odczuwać apetytu na pożywienie ani zatrzymywać tego, co jej służy, a tego, co nie służy, wydalać. To wszystko jednak robiła właśnie nasza kropla. Wisiała odosobniona w szklance wody, gdzie Jonathan zapewne za pomocą cieniutkiej strzykawki był ją umieścił. Potem zaś robił, co następuje. Brał pincetą cieniutką szklaną sztabkę, właściwie tylko nitkę ze szkła, którą posmarował uprzednio szelakiem, i podsuwał w pobliże kropli. Robił jedynie to, reszty zaś dokonywała kropla. Wyrzucała na swą powierzchnię mały bąbelek, coś jakby wzgórek chłonny, przez który wchłaniała w siebie całą sztabkę, w całej jej długości. Sama rozciągała się przy tym wzdłuż, przybierała kształt gruszki, chcąc całkowicie pochłonąć swój łup, tak aby końce jego nie wystawały, i, dając na to słowo, zaczynała, znów się stopniowo zaokrąglać, przyjmować kształt jajowaty, zjadając ów szelak ze szklanej sztabki i zasilając nim swoje ciało. Dokonawszy tego, wyrzucała, powracając do kulistego kształtu, czysto wylizany sprzęt, w poprzek poza swoje brzegi, w otaczającą ją wodę.

Nie mogę twierdzić, że oglądałem to chętnie, ale przyznaję, że porywało mnie to.

Tomasz Mann, *Doktor Faustus*, tłum. M. Kurecka i W. Wirpsza, Czytelnik, Warszawa, 1962.

Tomasz Mann znany był ze swej wielkiej rzetelności i skrupulatności w przedstawianiu realiów w swoich powieściach. Należy więc sądzić, że opisane doświadczenie nie jest tworem jego fantazji. Spróbujmy je zatem zrozumieć i wyjaśnić. Kluczem jest fizyka powierzchni z powszechnie znanymi meniskami: wklęsłym i wypukłym.

W pierwszej części doświadczenia kropla wchłania szklaną sztabkę posmarowaną szelakiem. Dzieje się tak dlatego, że ciecz tworząca kroplę zwilża powierzchnię sztabki. Odpowiada to sytuacji, kiedy w naczyniu z cieczą powstaje menisk wklęsły. Zjawisko zwilżania następuje wtedy, gdy energia oddziaływania między cząsteczkami cieczy i materiału, z którego zbudowane jest naczynie, bądź, jak w rozważanym eksperymencie, powierzchnia sztabki, jest mniejsza (bardziej ujemna) niż energia oddziaływania między cząsteczkami cieczy. Wówczas ciecz dąży do powiększenia powierzchni kontaktu cieczy ze sztabką czy naczyniem, by w ten sposób zmniejszyć całkowitą energię układu. Brak zwilżania następuje wtedy, gdy relacja między wspomnianymi energiami oddziaływania jest odwrotna. W konsekwencji ciecz dąży do zminimalizowania powierzchni kontaktu z danym materiałem. Menisk wypukły pojawia się właśnie wtedy, gdy ciecz nie zwilża naczynia.

Wróćmy jednak do „pożerającej kropli”. Gdy sztabka znalazła się już w kropli, szelak, którym sztabka była nasmarowana, zaczyna mieszać się z cieczą, być może następują reakcje chemiczne. Ważne jest, że zostaje on usunięty z powierzchni sztabki. Wtedy ciecz nie zwilża już tej powierzchni, więc kropla wyrzuca z siebie sztabkę, by sprowadzić do zera wielkość powierzchni kontaktu cieczy ze szkłem.

Na tym kończy się wyjaśnienie. A może któremuś z Czytelników uda się wykonać opisane przez Manna doświadczenie ?



Jak lepiej oszacować logarytm naturalny?

Józef BANAS

Bardzo wygodną sytuacją w wielu zastosowaniach jest możliwość rozwinięcia pewnej funkcji w szereg potęgowy, zwany szeregiem Taylora tej funkcji. Zastanówmy się, jak rozwinąć w taki szereg niezwykle ważną funkcję, jaką jest logarytm naturalny, tzn. funkcję $f(x) = \ln x$. Wiedząc, że $\ln x$ jest całką funkcji $1/x$, wystarczy w tym celu rozwinąć najpierw w szereg potęgowy tę funkcję. Robimy to bardzo prosto. Mianowicie

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1 - (1-x)} = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \dots$$

Jest to szereg geometryczny o ilorazie równym $1-x$, zatem szereg ten jest zbieżny bezwzględnie dla $|1-x| < 1$, tzn. w przedziale $(0, 2)$. Całkując w tym przedziale powyższy szereg otrzymujemy

$$\ln x + C = x - \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} - \frac{(1-x)^4}{4} - \dots$$

Aby wyliczyć stałą całkowania C , najwygodniej będzie podstawić $x = 1$. Wtedy otrzymujemy $C = 1$. Zatem ostatecznie

$$\ln x = -(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} - \frac{(1-x)^4}{4} - \dots$$

Oczywiście, wzór ten jest prawdziwy tylko dla $x \in (0, 2)$, co też nie w pełni nas zadowala. Tracimy więc szansę na przybliżanie logarytmu wielomianem na półosi $(0, \infty) = \mathbb{R}_+$.

Spróbujmy teraz pójść inną drogą. Z elementarnego kursu rachunku różniczkowego znana jest następująca nierówność

$$(1) \quad \ln x \leq x - 1,$$

która jest prawdziwa dla wszystkich dopuszczalnych x , a więc dla $x \in \mathbb{R}_+$. Wykres prawej strony tej nierówności to po prostu styczna $y = x - 1$ do wykresu funkcji $f(x) = \ln x$ w punkcie $(1, 0)$ (por. rysunek).

Przypomnijmy, że nierówność (1) najprościej udowodnić w następujący sposób. Weźmy funkcję $g(x) = x - 1 - \ln x$, dla $x \in \mathbb{R}_+$. Oczywiście, $g(1) = 0$. Dalej mamy: $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, skąd widać, że $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ oraz $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$. Zatem funkcja g maleje na przedziale $(0, 1)$ i rośnie na przedziale $(1, \infty)$, co oznacza, że w punkcie $x = 1$ osiąga ona minimum globalne równe 0. Stąd $g(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}_+$, a to oznacza, że spełniona jest nierówność (1).

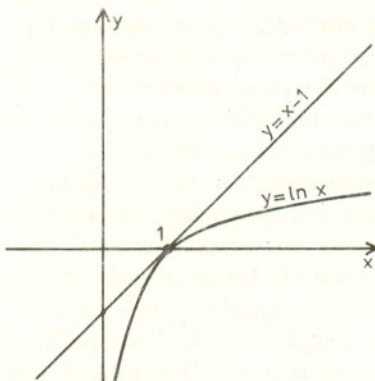
Jeżeli chcielibyśmy posłużyć się funkcją $x - 1$ jako przybliżeniem funkcji $\ln x$, to już z rysunku widać, że to przybliżenie jest dobre tylko dla x „bliskich” liczby 1, bowiem dla x dążących do nieskończoności lub do zera „rozstęp” między $x - 1$ oraz $\ln x$ wzrasta nieograniczenie. Można to sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Istotnie, poprzez proste zastosowanie reguły de l'Hospitala mamy, że $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, więc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$$

Powstaje więc pytanie: Czy nie można funkcji $\ln x$ przybliżać lepiej w inny sposób? Okazuje się, że tak i w tym celu wystarczy posłużyć się właśnie małą modyfikacją nierówności (1). Weźmy bowiem dowolnie ustaloną liczbę naturalną n i w miejsce x w nierówności (1) podstawmy $x^{1/n}$. Wtedy, wykorzystując tylko twierdzenie o logarytmowaniu potęgi otrzymamy

$$(2) \quad \ln x \leq n (\sqrt[n]{x} - 1)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ oraz dla każdego $n = 1, 2, \dots$. Czy oszacowanie podyktowane nierównością (2) jest istotnie lepsze? Aby odpowiedzieć na to pytanie, rozważmy na \mathbb{R}_+ ciąg funkcyjny $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$. Potraktujmy x jako ustalone i obliczmy granicę ciągu liczbowego $\{f_n(x)\}$. W tym celu zauważmy, że wystarczy umieć obliczyć granicę $\lim_{a \rightarrow +\infty} a(x^{1/a} - 1)$. Zapisując ją w postaci $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{x^{1/a} - 1}{\frac{1}{a}}$ (symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$) widać, że znowu pomoże nam twierdzenie de l'Hospitala. Mamy bowiem $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{(x^{1/a} - 1)'}{(\frac{1}{a})'} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{x^{1/a} \cdot (-1/a^2) \ln x}{-1/a^2} = \ln x$ (tutaj a jest zmienną!). Stąd wnioskujemy, że $\lim_{a \rightarrow +\infty} a(x^{1/a} - 1) = \ln x$, a więc także $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \ln x$ dla każdego $x > 0$. Fakt ten wyrażamy mówiąc, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo do funkcji $f(x)$ (czyli $\ln x$) na zbiorze \mathbb{R}_+ .



Nie jest to jednak w pełni zadowolające, bowiem najlepiej byłoby, gdyby ciąg $\{f_n\}$ był zbieżny jednostajnie do f na \mathbf{R}_+ . Tak jednakże nie jest, bo biorąc ciąg $x_n = e^n$ i wstawiając do (2) x_n w miejsce x widzimy, że odstęp $f_n(x) - f(x)$ „ucieka” do nieskończoności na tym ciągu, ponieważ $f_n(x_n) - f(x_n) = n(e - 2)$, a zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = +\infty$. Tym samym tracimy i tutaj nadzieję na to najlepsze oszacowanie logarytmu. Niemniej jednak nie jest aż tak źle, bo oznaczając $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ mamy

$$g'_n(x) = \frac{1}{x} (x^{1/n} - 1),$$

skąd widać, że $g'_n(x) > 0$ dla $x > 1$ oraz $g'_n(x) < 0$ dla $x \in (0, 1)$. Zatem, biorąc dowolnie ustalony przedział $I = [a, b] \subset \mathbf{R}_+$ widzimy, że funkcja g_n osiąga maksimum w którymś z końców tego przedziału, tzn.

$$\max_{x \in I} g_n(x) = \max\{g_n(a), g_n(b)\}.$$

Ponieważ jednak, jak pokazaliśmy wcześniej, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(b) = 0$, więc oznacza to, że na przedziale I ciąg funkcyjny $\{g_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do zera, a więc ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest na I zbieżny jednostajnie do funkcji f . Fakt ten wyrażamy mówiąc, że ciąg funkcyjny $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$ jest zbieżny do funkcji $f(x) = \ln x$ niemal jednostajnie na \mathbf{R}_+ . Praktyczny „wydźwięk” wypowiedzianego powyżej faktu jest następujący: funkcję $\ln x$ można dowolnie dobrze przybliżać funkcjami $n(x^{1/n} - 1)$ na każdym przedziale domkniętym i ograniczonym, zawartym w \mathbf{R}_+ .

Jako ćwiczenie pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie faktu, że dla dowolnego $x \in \mathbf{R}_+$ oraz dla dowolnego n naturalnego zachodzi $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. Oznacza to, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji f w sposób monotonicznie malejący. Pozwala to jednocześnie wywnioskować zbieżność niemal jednostajną ciągu $\{f_n\}$ do funkcji f poprzez twierdzenie Diniego.



Zadania

M 598. Na okręgu o dane są dwa punkty A i B . Wskazać zbiór środków okręgów wpisanych w trójkąt ABC , gdy C przebiega okrąg o .
Rozwiązanie na str. 16

M 599. Na okręgu o dane są dwa punkty A i B . Wskazać zbiór środków ciężkości trójkątów ABC , gdy C przebiega okrąg o .
Rozwiązanie na str. 5

M 600. Na okręgu o dane są dwa punkty A i B . Wskazać zbiór ortocentrow (punktów przecięcia wysokości) trójkątów ABC , gdy C przebiega okrąg o .
Rozwiązanie na str. 17

Zadania matematyczne zostały zaczerpnięte z programu zajęć z geometrii na Trzyletnim Studium Zawodowym nauczycieli matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.

Redaguje Jarosław KULPA

F 306. Oszacuj, o ile średnio Ziemia ma wyższą temperaturę w styczniu, gdy znajduje się w peryhelium, niż w lipcu, gdy znajduje się w aphelium. Załóż, że Ziemia jest ciałem doskonale szarym. Mimośród orbity ziemskiej wynosi $e = 0,0167$.
Rozwiązanie na str. 4

F 307. Pewien kraj chciał skonstruować działo kosmiczne mogące wystrzeliwać pociski z pierwszą prędkością kosmiczną. Oblicz, po jakim czasie spadłby na Ziemię pocisk wystrzelony z takiego działka pionowo do góry. Zaniedbaj opór powietrza.
Rozwiązanie na str. 13



Ciało doskonale szare –
– ciało, które zawsze pochłania
ten sam ułamek padającego nań
promieniowania, niezależnie od długości
jego fali.



Szereg – niespodzianka

Czy z tego, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, wynika, że zbieżny jest też szereg $\sum a_n^3$?

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ dąży do zera, to ciąg $\{a_n^2\}$ zmierza do zera „szybciej”. Początkujący matematyk mógłby na podstawie tej własności wysnuć wniosek, że zbieżność szeregu $\sum a_n$ pociąga za sobą zbieżność szeregu $\sum a_n^2$. Oczywiście, nie jest to prawda; najlepiej chyba znanym przykładem jest szereg $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, którego zbieżność wynika z kryterium Leibniza. Szereg kwadratów jest natomiast rozbieżnym szeregiem harmonicznym $\sum \frac{1}{n}$. Ciąg $\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\}$ zdąża do zera wprawdzie „wolniej” niż $\{\frac{1}{n}\}$, jego wyrazy jednak zmieniają swój znak w zależności od parzystości n .

W sposób naturalny rodzi się pytanie, czy z tego, że szereg jest zbieżny, wynika, że zbieżny jest także szereg sześciątów. Wydawałoby się, że skoro sześciątą dąży do zera jeszcze szybciej niż kwadraty, znak liczby zaś i jej trzeciej potęgi są takie same, to tu odpowiedź powinna być pozytywna.

Tak jednak nie jest, co można zobaczyć na przedstawionym poniżej przykładzie. Przez S_n oznaczamy $\sum_{i=1}^n a_i$, przez T_n zaś $\sum_{i=1}^n a_i^3$.

Konstrukcja wyrazów szeregu jest następująca: pierwszy wyraz to $\frac{1}{\sqrt[3]{1}}$, gdy zaś pewnym wyrazem jest $\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$, to każdym z następných k wyrazów jest $\frac{-1}{\sqrt[3]{k^4}}$, a kolejnym $\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}$. Możemy zapisać:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4^4}} + \dots$$

Wówczas, jak łatwo sprawdzić,

$$S_2 = 0,$$

$$S_5 = S_2 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} = 0 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2^4}} = 0,$$

$$S_9 = S_5 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} = 0 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{3}{\sqrt[3]{3^4}} = 0,$$

i ogólnie dla $n \geq 2$

$$S_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1} = S_{\frac{n(n+1)}{2}-1} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}}_{n \text{ razy}} = 0 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{n}{\sqrt[3]{n^4}} = 0.$$

Z kolei dla $\frac{n(n+1)}{2} - 1 < k < \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ mamy

$$0 = S_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1} = S_{\frac{n(n+1)}{2}-1} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}}_{n \text{ razy}} < S_{\frac{n(n+1)}{2}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = S_k < S_{\frac{n(n+1)}{2}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach $S_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), więc szereg $\sum a_n$ jest zbieżny; co więcej – jego suma wynosi 0.

Natomiast szereg sześciątów ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4^4} - \frac{1}{4^4} - \frac{1}{4^4} + \dots$$

Zauważmy, że w przypadku tego szeregu

$$T_2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^3},$$

$$T_5 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3},$$

$$T_9 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3}$$

i ogólnie dla $n \geq 1$

$$T_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3},$$

a zatem

$$T_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3}\right).$$

Ponieważ szereg $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, a szereg $\sum \frac{1}{n^3}$ zbieżny, więc ciąg $\{T_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1}\}$ nie ma granicy. Zatem granicy nie ma też ciąg $\{T_n\}$, a więc $\sum a_n^3$ jest rozbieżny.

W podobny sposób można skonstruować szereg $\sum a_n$ zbieżny, taki, by szereg $\sum a_n^{2k+1}$ (przy ustalonym $k \geq 1$) był rozbieżny. Konstrukcję tę pozostawiam Czytelnikowi.

Włodzimierz ZWONEK

I. Stewart i D. Tall w książce „Complex Analysis” piszą, że studenci często mają problemy w odróżnieniu ciągu od szeregu. By im pomóc, przytaczają następujący dowcip:

Dwaj kowboje kupili sobie po koniu. Mieli jednak problemy, jak je rozpoznać; w związku z tym jeden kowboj zaproponował, że utnie swojemu koniowi ogon. Tak też zrobił; niestety, w nocy ktoś zakradł się do stajni i uciął drugiemu koniowi ogon.

W tej sytuacji drugi kowboj uciął swojemu koniowi lewe ucho.

Niestety w nocy ... Po dwóch tygodniach, gdy oba konie były w tragicznym stanie, pierwszy kowboj powiedział:

– Wiesz, tak to nic z tego nie będzie. Lepiej zapamiętajmy,

że mój koń jest czarny, a twój biały.

I tak samo jest z ciągiem i szeregiem: przed szeregiem stoi znak sumy.

EPSILON – niezależny dodatek *Delty*. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelný), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmichowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem *ε*.

Historijka całkiem abstrakcyjna? Posłuchajmy opowieści pewnego matematyka:

Byliśmy z kolegą na uniwersytecie za granicą, dojechał do nas trzeci matematyk. Podczas rozmowy opowiadaliśmy m.in. o innych gościach instytutu. W pewnym momencie wyjrzałem przez okno i powiedziałem: „O, patrz, właśnie idzie Jean-Claude”. „Który to?” – zapytał przyjezdny, gdyż w stronę wejścia zmierzali dwaj panowie. „Ten pierwszy” – odparłem. Niestety, właśnie jeden z nadchodzących wyprzedził drugiego, nie było więc to określenie jednoznaczne. „Ten z kręconymi włosami” – uściśliłem, jednakże włosy obu można było uznać za kręcone. I być może trwałoby to jeszcze długo, ale na szczęście przypomniałem sobie niedawno przeczytany dowcip o koniach i rzekłem: „Ten, który nie jest Murzynem”.

Dzisiaj będziemy próbowali zbadać zachowanie bardzo specjalnego obiektu fizycznego. Będzie to

Jon w roztworze

Interesuje nas, co robi jon pod wpływem przyłożonej do niego stałej siły. Zadanie wydaje się na pierwszy rzut oka bardzo trudne ze względu na małe rozmiary obiektu. Spróbujmy jednak nie zrażać się i zaatakować kolejno dwie pojawiające się trudności:

1. Jak przyłożyć do jonu siłę?

Przypomnijmy, że jon jest naładowanym elektrycznie atomem lub grupą atomów. Na przykład cząsteczki chlorku sodu, czyli zwykłej soli kuchennej, rozpadają się w wodzie na dodatnie jony sodu i ujemne - chloru:



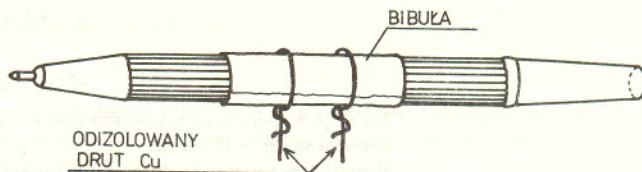
Dwa kierunki strzałki oznaczają, że cząsteczki nieustannie rozpadają się, a pary jonów łączą się ponownie, gdy się spotkają. Wytwórzmy teraz w roztworze zawierającym jony pole elektryczne. Jak wiadomo, w polu elektrycznym o natężeniu E na każde ciało naładowane elektrycznie ładunkiem q działa siła $F = qE$. A więc aby przyłożyć siłę do jonu, wystarczy umieścić go w polu elektrycznym. Spodziewamy się, że wprawi to nasz jon w ruch. Pozostaje jeszcze jedna trudność:

2. Jak obserwować ruch jonu?

Z jednym byłoby trudno, ale jeśli będzie ich wiele, to powinno się udać. Są na to dwa sposoby. Pierwszy, najłatwiejszy - bezpośrednia obserwacja - jest możliwy w przypadku jonów kolorowych. Takimi jonami są na przykład jony miedzi Cu^+ oraz Cu^{++} , a jeszcze lepiej jony MnO_4^- powstające przy rozpuszczaniu w wodzie nadmanganianu potasu KMnO_4 (dostępnego w aptece). Drugi sposób, bardziej skomplikowany, polega na obserwacji zmian stężenia jonów wodorowych za pomocą odpowiedniego barwnika, na przykład fenoloftaleiny lub barwnika z czerwonej kapusty. Opiszę tu wersję z bezpośrednią obserwacją, ale można próbować dowolnej metody, byle byłaby skuteczna.

Wykonanie doświadczenia

Zużyty długopis owijamy kawałkiem bibuły i związujemy go dwoma kawałkami drutu miedzianego (odizolowanego!) jak na rysunku



Opaski z drutu umieszczamy w odległości 5 - 10 mm. Następnie bibułę nasączamy roztworem elektrolitu (soli kuchennej) i łączymy z drucianymi opaskami źródło prądu elektrycznego: jedną lub dwie (połączone szeregowo) baterie płaskie. Napięcie U baterii podzielone przez odległość d między drucikami da nam natężenie pola elektrycznego, jakie powstanie w roztworze: $E = U/d$.

Przy anodzie (biegunie dodatnim) atomy miedzi będą przechodziły do roztworu stając się jonami. Po pewnym czasie (parę minut) zauważymy białozielony obszar przesuwany się powoli w stronę katody.

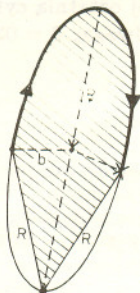
Jeżeli zależy nam na obserwacji jonów o intensywniejszym kolorze, należy położyć na zwilżonej elektrolitem bibule między drucikami maleńki kryształek KMnO_4 . Po pewnym czasie zauważymy, że kolorowy roztwór tworzy smugę wyciągającą się w stronę jednej z elektrod (której?). Dodatkowe efekty można uzyskać dodając do roztworu elektrolitu nieco barwnika z czerwonej kapusty. W ten sposób można zaobserwować ruch jonów w roztworze i wyznaczyć ich prędkość. Będzie ona z czasem malała na skutek wysychania roztworu.

Życzę pomyślnych doświadczeń i oczekuję na wyniki (z opisem wszelkich warunków doświadczenia!). Na autora najlepszego opisu czeka nagroda książkowa.

Redaguje Jan GAJ



Rozwiązanie zadania F 307. Niech $R = 6371$ km oznacza promień Ziemi, $g = \frac{GM}{R^2}$ przyspieszenie ziemskie, m - masę pocisku, M - masę Ziemi. Pierwsza prędkość kosmiczna wynosi $v = \sqrt{gR} \approx 7,9$ km/s. Z uwagi na ruch obrotowy Ziemi pocisk, choć wyrzeczony pionowo, będzie miał niezzerową poziomą składową prędkości (chyba że strzelamy na biegunie). Będzie zatem poruszał się po elipsie o ognisku pokrywającym się ze środkiem Ziemi (I prawo Keplera zastosowane do układu Ziemia - pocisk).



Elipsa ta będzie bardzo wyciągnięta, gdyż składowa pozioma prędkości pocisku nie przewyższa prędkości równikowej Ziemi, $v_R = \frac{2\pi R}{24h} \approx 0,46$ km/s $\approx 0,06v$. Odległość h pocisku w apogeum od powierzchni Ziemi możemy znaleźć z dobrym przybliżeniem z zasady zachowania energii zaniedbując składową poziomą prędkości:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} \approx -\frac{GMm}{R+h}$$

skąd $h = R$. Ze względu na wydłużenie elipsy z podobną dokładnością możemy przyjąć, że środek Ziemi pokrywa się z perygeum. Zatem długość wielkiej półosi jest równa R . Korzystając z III prawa Keplera

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

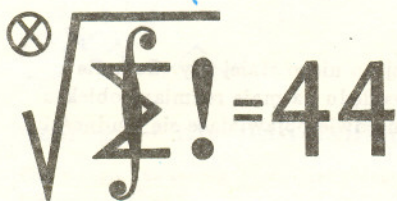
łatwo obliczamy okres T ruchu po elipsie

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Zgodnie z II prawem Keplera czas ruchu pocisku wyraża się wzorem $t = kT$, gdzie k jest stosunkiem pola zakreślonego przez promień wodzący pocisku do pola elipsy. Korzystając z rysunku znajdujemy

$$k \approx \frac{\frac{1}{2}\pi Rb + Rb}{\pi Rb} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$$

skąd $t \approx (2 + \pi)\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 1$ godz. 9 min.



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać na oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.



Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 207 ($WT=1,23$) i 208 ($WT=3,16$) z numeru 8/1990

Kazimierz Serbin - Sanok	44,59
Mariusz Zajac - Pruszków	42,95
Konrad Pióro - Warszawa	42,84
Paweł Kubit - Krosno	39,68
Tomasz Grzesiak - Kraków	37,64

Po niedługim milczeniu (ostatnie notowanie w numerze 1/1991) wrócił do nas pan Serbin, aby samknąć trzeci cykl „44”, zostając dziesiątym Weteranem matematycznego Klubu 44.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 1991

Zadania z matematyki nr 221, 222

Redaguje Marcin E. KUCZMA

221. Ograniczony zbiór wypukły (płaski lub przestrzenny) nazywamy *ściśle wypukłym*, jeśli jego brzeg nie zawiera żadnego odcinka dodatniej długości.

- (a) W ściśle wypukły środkowo-symetryczny zbiór na płaszczyźnie wpisano wielokąt; również środkowo-symetryczny. Dowieść, że środki symetrii obu figur pokrywają się.
- (b) Dać przykład ściśle wypukłego środkowo-symetrycznego zbioru w przestrzeni oraz wpisanego weń środkowo-symetrycznego wielościanu (nie zdegenerowanego do wielokąta) tak, by środki symetrii obu figur nie pokrywały się.

222. Wyznaczyć wszystkie co najwyżej dwucyfrowe (w układzie dziesiętnym) liczby n o następującej własności: dla dowolnej liczby naturalnej m , której ostatnią cyfrą jest jedynek, dwucyfrowa końcówka liczby n^m jest identyczna z n . (Uwaga: $3 = 03$ itp.) Zadanie 222 zaproponował pan Mirosław Matłega ze Skoczowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1991

Przypominamy treść zadań:

213. Czy dla każdej pary funkcji różniczkowalnych $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje funkcja różniczkowalna $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $h' = f'g'$?

214. Obliczyć sumę $\sum |A \cup B|$, w której sumowanie przebiega po wszystkich parach uporządkowanych (A, B) podzbiorów zbioru $\{1, \dots, n\}$.

215. Odpowiedź: nie. Przykład: weźmy pod uwagę funkcje

$$u(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad v(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

$$w(x) = xv(x) \text{ dla } x \in \mathbb{R}$$

i zauważmy, że

$$w'(x) = 2v(x) - u(x) \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Funkcja v , jako ciągła, posiada pierwotną; z ostatniej równości wynika więc, że u ma pierwotną: $u = f'$ na \mathbb{R} .

Przypuśćmy teraz, że dla pewnej funkcji różniczkowalnej $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi równość $h' = f' \cdot f' = u^2$ na \mathbb{R} . Przyjmijmy $k(x) = h(x) - f(x/2)$. Wówczas

$$k'(x) = u(x)^2 - \frac{1}{2}u\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} (\cos \frac{1}{x})^2 - \frac{1}{2} \cos \frac{2}{x} = \frac{1}{2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wynikałoby stąd, że funkcja $l(x) = k(x) - \frac{x}{2}$ jest stała na przedziałach $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$; musiałaby więc (wobec ciągłości) być funkcją stałą na \mathbb{R} - wbrew temu, że $l'(0) = -1/2$. Zatem h nie istnieje.

214. Ustalmy liczbę naturalną $k \leq n$ i wybierzmy k -elementowy podzbiór K zbioru $\{1, \dots, n\}$; można to uczynić na $\binom{n}{k}$ sposobów. Ile jest par zbiorów A, B takich, że $A \cup B = K$? Każdy element zbioru K może należeć albo tylko do A , albo tylko do B , albo i tu, i tu. Przyporządkowanie każdemu z k elementów zbioru K jednej z tych trzech możliwości wyznacza przedstawienie K w postaci sumy $A \cup B$. Jest więc 3^k takich par (A, B) . To zaś pokazuje, że w danej do obliczenia sumie jest $\binom{n}{k} 3^k$ składników równych k . Suma ta (oznaczymy ją przez s) równa się zatem

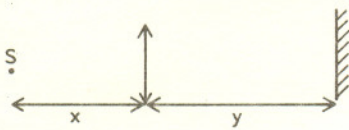
$$s = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k.$$

Aby ją „zwinąć”, różniczkujemy stronami tożsamość

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

i w otrzymanej równości podstawiamy $x = 3$. Po krótkim przekształceniu dostajemy wynik: $s = 3n \cdot 4^{n-1}$.

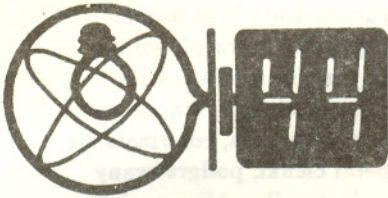




119. Źródło punktowe S o światłości I znajduje się w odległości x od soczewki skupiającej o ogniskowej f , za którą w odległości y leży ekran prostopadły do osi optycznej (rysunek). Znaleźć natężenie oświetlenia powierzchni ekranu (jej oświetlonej części). Rozważyć przypadki:

- a) obraz pozorny ($x < f$),
- b) obraz rzeczywisty przed ekranem,
- c) obraz rzeczywisty za ekranem.

Należy pominąć straty światła przy przejściu przez soczewkę i przyjąć, że jej rozmiary są małe w porównaniu z x , y i f .



120. Dana jest gęstość cieczy ρ , jej napięcie powierzchniowe σ i masa kropli m . Oznaczmy przez ω_m maksymalną prędkość kątową, jaką można nadać tej kropli w powietrzu w stanie nieważkości, aby nie rozleciała się.

- a) Wykazać, że ω_m jest proporcjonalna do $\sqrt{\frac{\sigma}{m}}$ i nie zależy od ρ .
- b) Obliczyć lub co najmniej ocenić stałą proporcjonalności w powyższej zależności.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1991

Przypominamy treść zadań:

111. W odległości l od leżącej na ziemi piłki znajduje się płot o wysokości h . Jaką minimalną prędkość trzeba nadać piłce, aby mogła przelecieć ponad płotem?

112. Opisz wady obrazu dyfrakcyjnego wynikające z następujących wad siatki dyfrakcyjnej.

- a) Rysy nierówno odległe. Rozważ przypadek, gdy na przemian występuje nieco większa i nieco mniejsza odległość, ewentualnie także przypadek, gdy co trzecia odległość jest nieco inna od dwóch poprzednich.
- b) Rysy nierówno głębokie. Rozważ podobne przypadki, jak poprzednio. Czy istnieje doświadczalna możliwość rozróżnienia, która z ewentualności a) i b) jest przyczyną obserwowanej wady obrazu?

111. Niech α będzie kątem nachylenia prędkości początkowej do poziomu. Czas lotu piłki do plotu wynosi $t = \frac{l}{v \cos \alpha}$, a osiągnięta po tym czasie wysokość

$$y = vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = l \operatorname{tg} \alpha - \frac{gl^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}$$

Szukamy maksimum tej wielkości, jako funkcji kąta α

$$0 = \frac{dy}{d\alpha} = \frac{l}{\cos^2 \alpha} - \frac{gl^2 \sin \alpha}{v^2 \cos^3 \alpha}$$

skąd $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{gl}$. Podstawienie daje wartość y

$$y_{max} = \frac{v^2}{g} - \frac{gl^2}{2v^2} \left(1 + \frac{v^4}{g^2 l^2} \right) = \frac{v^2}{2g} - \frac{gl^2}{2v^2}$$

Przyrównując y_{max} do h znajdujemy v

$$v = \sqrt{g(h + \sqrt{h^2 + l^2})}$$

Uwaga: Zadanie jest dość proste i można je znaleźć w niektórych zbiorach zadań. Niestety, na ogół z błędnym rozwiązaniem (zakłada się, że piłka przelatuje nad płotem w wierzchołku paraboli).

112. Posługując się metodą graficzną, w której drgania harmoniczne są reprezentowane jako wektory na płaszczyźnie xy , o długości równej amplitudzie drgań i nachylone do osi x pod kątem równym fazie. Rysunki przedstawiają wypadkową amplitudę fali ugiętej w określonym kierunku, uzyskaną przez złożenie fal ugiętych na poszczególnych rysach. Dla siatki bez wad maksimum odpowiada rysunkowi



Gdy odległości rys są na przemian (nieco) różne, rysunek wygląda tak



(zmiana odległości rys prowadzi do zmiany faz składowych). Najistotniejsza jest jednak nie zmiana tego rysunku, lecz to, że w połowie odległości między prążkami, tam gdzie dla siatki bez wad kolejne przesunięcia fazy wyniosły π i interferencja była destrukcyjna



dla siatki o nierównych odległościach wystąpi niezerowa amplituda wypadkowa



Zatem w środku między rzędami widma wystąpią dodatkowe, słabsze prążki. (Gdy co trzecia odległość jest inna, wystąpią dwa dodatkowe prążki.)

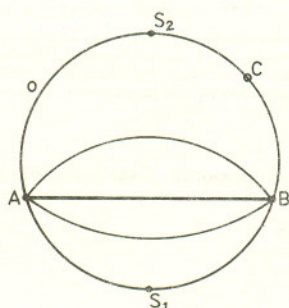
Dla siatki z niejednakową głębokością rys (czyli niejednakową amplitudą fal cząstkowych) wygląda to niemal tak samo, przy czym ostatni rysunek należy zastąpić takim:



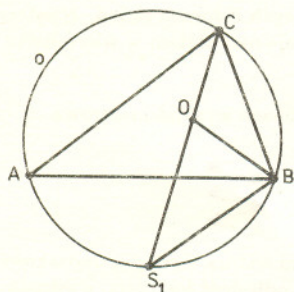
(Strzałki w zasadzie leżą na jednej linii, przesunięcie ich w dół służy większej czytelności rysunku.) Zakłócenie obrazu będzie więc identyczne, jak poprzednio, ALE teraz faza dodatkowych prążków jest taka sama, jak zasadniczych, a poprzednio była przesunięta o $\frac{\pi}{2}$. Zatem przypadki a) i b) można rozróżnić podając interferencji światło z różnych prążków – takie doświadczenie jest czułe na fazę.



Rozwiązanie zadania M 598. Są to zawarte w kole o brzegu o luki okręgów przechodzących przez A i B i mających środki w środkach łuków, na jakie A i B dzieli okrąg o (bez A i B).



A oto dowód. Środek O okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na przecięciu dwusiecznych kątów tego trójkąta. Dwusieczna kąta ACB połowi łuk AB (bo równe kąty wpisane są oparte na równych łukach) – oznaczmy punkt przecięcia tej dwusiecznej z o przez S_1 .



Wystarczy wykazać, że trójkąt OS_1B jest równoramienny (a dokładniej, że $OS_1 = BS_1$). Mamy $\angle S_1OB = \angle OCB + \angle OBC = \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle ABC$, bo kąt S_1OB jest kątem zewnętrznym trójkąta OCB oraz $\angle OBS_1 = \angle OBA + \angle ABS_1 = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB$, bo kąty ABS_1 i ACS_1 są oparte na tym samym łuku. Zatem $\angle S_1OB = \angle OBS_1$, skąd $OS_1 = BS_1$.

W technice często zachodzi potrzeba pomiaru prędkości przepływającej cieczy bądź gazu. Ta dziedzina badań ma nawet swoją nazwę – anemometria. Najstarszą, historycznie rzecz biorąc, metodą było użycie sond aerodynamicznych, które pozwalają określić prędkości przepływu na podstawie pomiaru różnicy między ciśnieniem statycznym a ciśnieniem całkowitym – większym od statycznego o wartość powstałą z wytrącenia energii kinetycznej płynu. Później, w połowie naszego stulecia, rozwinęła się termoanemometria. Rolę sondy w tej metodzie pełni cienki, podgrzewany drucik. Płyn opływający sondę powoduje chłodzenie drucika. Mierząc jego oporność można wyznaczyć prędkość przepływu, która decyduje o intensywności chłodzenia. Obie wspomniane metody mają wspólną wadę – wymagają mianowicie wprowadzenia sondy w obręb przepływającego płynu. Sonda zaś powoduje zakłócenia mierzonego pola prędkości. W niektórych przypadkach sonda może być narażona na oddziaływanie ekstremalnie niekorzystnych warunków, na przykład w pomiarach przepływu cieczy żrących bądź w komorach spalania. Tych trudności możemy uniknąć stosując metody optyczne, które wymagają wprowadzenia jedynie wiązki światła w obszar przepływu. Źródłem informacji jest w tym przypadku światło rozproszone na drobnych cząstkach (zanieczyszczeniach) unoszonych przez płyn. Wiele płynów spotykanych w technice z natury zawiera takie cząstki; jeśli nie, można je wprowadzić sztucznie, na przykład w postaci dymu (gdy mierzy się prędkość gazu).

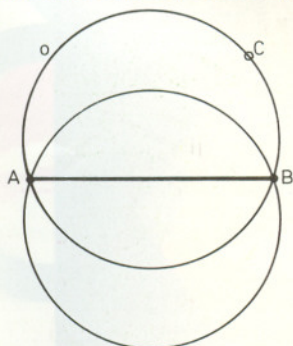
Aby zrozumieć zasadę laserowej anemometrii optycznej, należy przypomnieć sobie trzy podstawowe fakty. Po pierwsze – światło jest falą elektromagnetyczną, czyli jego rozchodzenie się polega na zmianie natężenia pola elektromagnetycznego w czasie i przestrzeni zgodnie z przebiegiem sinusoidalnym. Po drugie – dwie fale mogą interferować. W efekcie interferencji dwóch fal o bliskich częstościach otrzymujemy pewien przebieg okresowy o podstawowej częstotliwości zależnej od częstotliwości fal składowych. Po trzecie – częstotliwość fali mierzona przez obserwatora zależy od prędkości względnej źródła fali i obserwatora. Jest to tzw. efekt Dopplera, tłumaczony zazwyczaj na przykładzie fal akustycznych. Obserwator, do którego zbliża się motocykl, słyszy inną częstotliwość pracy silnika, niż obserwator, od którego pojazd się oddala. Analogiczne zjawisko zachodzi dla fal świetlnych. Jeśli oświetlimy poruszającą się cząstkę, to światło przez nią rozproszone będzie miało inną częstotliwość (a więc i barwę) w zależności od tego, czy cząstka przybliża się czy oddala od obserwatora. Teoretycznie, w celu pomiaru prędkości wystarczy więc oświetlić cząstkę unoszoną przez płyn, a następnie dokonać pomiaru częstotliwości światła przez nią rozproszonego w dwu kierunkach. Praktycznie jest to jednak niewykonalne, gdyż częstotliwość światła jest tak duża, że bezpośredni jej pomiar byłby technicznie niezmiernie skomplikowany, o ile w ogóle możliwy. Aby ominąć tę trudność, w anemometrii dopplerowskiej zawsze dokonuje się interferencji (nałożenia) dwu fal. W efekcie otrzymuje się sygnał, którego podstawowa częstotliwość jest równa różnicy częstotliwości dwu fal składowych, a więc zazwyczaj jest ona znacznie niższa od częstotliwości fali świetlnej i możliwa do zmierzenia.

Źródłem światła oświetlającego cząstkę jest zawsze laser, ze względu na możliwości precyzyjnego określenia częstotliwości oraz łatwości koncentracji wiązki w przestrzeni. Istnieje kilka wariantów metody w zależności od tego, jakie fale są na siebie nakładane. Można oświetlić poruszającą się cząstkę pojedynczą wiązką laserową, a następnie, przy użyciu odpowiedniego układu optycznego, doprowadzić do nałożenia wiązek światła rozproszonego w dwu różnych kierunkach. Można oświetlić cząstkę pojedynczą wiązką, a następnie

dokonać interferencji światła rozproszonego z niezakłóconą wiązką laserową. Można wreszcie oświetlić poruszającą się cząstkę dwiema wiązkami laserowymi z różnych kierunków, a następnie mierzyć częstotliwości nałożonych dwu fal rozproszonych w tym samym kierunku pochodzących od obu wiązek. W tym ostatnim przypadku możliwe jest nieco inne, prostsze, objaśnienie zjawiska. Dwie wiązki laserowe przecinając się w przestrzeni interferują, dając w pewnym obszarze prążki interferencyjne. Cząstka przelatując przez ten obszar wysyła impuls świetlny w momencie, gdy przelatuje przez każdy jasny prążek. Mierząc czas między poszczególnymi rozbłyskami oraz znając odległość prążków, zależną od długości fali i kąta przecięcia wiązek, można wyznaczyć prędkość cząstki. Ścisłej rzecz biorąc, składową prędkości leżącą w płaszczyźnie przecięcia dwu wiązek laserowych i prostopadłą do dwusiecznej kąta między nimi. Chcąc zmierzyć drugą (prostopadłą) składową prędkości należy krzyżujące się wiązki obrócić o 90° wokół dwusiecznej.



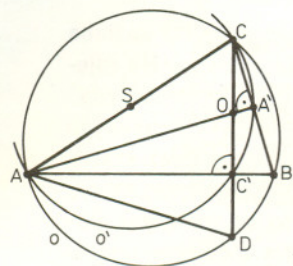
Rozwiązanie zadania M 600. Jest to okrąg będący obrazem o w symetrii względem prostej AB (bez A i B).



A oto dowód. Niech AA' i CC' będą wysokościami trójkąta ABC . Ortocentrum oznaczmy przez O . Wysokość CC' przecina o w punkcie D . Mamy

$$\angle DCB = \angle DAB,$$

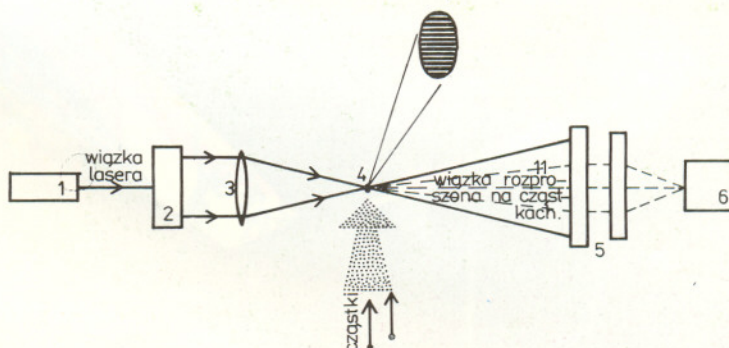
bo są to kąty wpisane w o i oparte na tym samym łuku.



Okrąg o' o środku w środku odcinka AC i przechodzący przez A i C przechodzi także przez A' i C' (bo z obu tych punktów widać AC pod kątem prostym). Zatem

$$\angle C'AA' = \angle C'CA',$$

bo są to kąty wpisane w o' i oparte na tym samym łuku. Wynika stąd, że $\angle DAC' = \angle OAC'$, a więc trójkąty DAC' i OAC' są przystające (bo mają wspólny bok i równe odpowiednio przyległe do niego kąty). Zatem $DC' = C'O$ i O jest obrazem D w symetrii względem prostej AB .



Schemat układu pomiarowego z podwójną wiązką laserową.

1. Laser
2. Układ rozdziálu wiązki
3. Układ skupiający wiązki
4. Przestrzeń pomiarowa wypełniona prążkami
5. Układ optyczny pomiaru sygnału
6. Fotodetektor

Dużą zaletą anemometrii laserowej jest to, że (jak wynika z analizy teoretycznej) różnica częstotliwości nałożonych wiązek jest wprost proporcjonalna do prędkości cząstek. Pewną wadą jest natomiast to, że de facto nie mierzymy prędkości płynu, lecz prędkości zawieszonych w nim cząstek. Na szczęście dla odpowiednio drobnych cząstek prędkości te praktycznie się pokrywają. Dokładność metody jest wysoka i zależy w pierwszym rzędzie od precyzji w określeniu kąta między krzyżującymi się wiązkami. Błąd pomiaru nie powinien przekraczać 2 – 3%, co może wydawać się wartością znaczną, lecz w dziedzinie pomiaru prędkości jest to spore osiągnięcie. Anemometria laserowa nadaje się do pomiarów prędkości szybko zmiennych. Reakcja układu pomiarowego na zmianę prędkości jest w praktyce natychmiastowa, w odróżnieniu od metod klasycznych charakteryzujących się pewną bezwładnością. Jedynym ograniczeniem jest gęstość rozmieszczenia cząstek w płynie, gdyż oczywiście jest, że nie da się dokonać pomiaru w mniejszym odstępzie czasu niż ten, który oddziela pojawienie się dwu kolejnych cząstek w przestrzeni pomiarowej. W każdym razie, metoda nadaje się do mierzenia szybko zmieniających się tzw. składowych fluktuacyjnych w ruchu turbulentnym płynu. Zdjęcie na tylnej okładce przedstawia przykład zastosowania anemometrii laserowej do badania opływu wokół kadłuba statku.

Autor pragnie wyrazić podziękowanie dr A.K. Lewkowiczowi i dr S. Cheah z Uniwersytetu w Liverpoolu za życzliwą pomoc w przygotowaniu tekstu.