

Uwaga: zainteresowani fizyką komputerową

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne,
Fundacja im. prof. Bronisława Dembińskiego,
Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego,
wspólnie wydały książkę **Ryszarda Kutnera**

Elementy mechaniki numerycznej

proponującą komputerowe podejście do uczenia się i nauczania fizyki, a ściślej mechaniki. Do książki dołączono 8 dyskietek 5,25" zawierających 26 programów w języku Turbo Pascal 6.0, na IBM PC. Książkę z dyskietkami można nabywać w księgarni WSiP, Warszawa pl. Dąbrowskiego 8.

SPIS TREŚCI

NUMERU 8(207)

Dwa zegarki i całkiem poważna fizyka <i>Paweł Krawczyk</i>	str. 1
Geometria czasoprzestrzeni <i>Marek Kordos</i>	str. 1
Ruch peryastronu (peryhelium) <i>Tadeusz Jarzębowski</i>	str. 4
Szybciej niż światło? <i>Stanisław Mrówczyński</i>	str. 7
Zadania	str.10
Teoria względności na Uniwersytecie Warszawskim <i>Stanisław Bazański</i>	str.11
Klub 44	str.14
Epsilon	str.16
Patrz w niebo	str.17

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Małowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stepień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Aniela Wolska
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Paweł Krawczyk – z-ca red. nac.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

Centrum Informatyczne UW
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa
tel. 20-03-81 wewn. 841
Adres poczty komputerowej
(E-mail address):
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 10 000 egz.
Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem \TeX
wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1992 r. wynosi 8 400,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora
 - odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
 - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,- zł od egzemplarza,
 - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał
 - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 2 800,-

W następnym numerze:

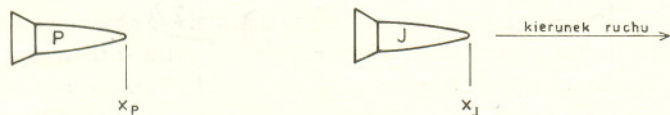
Wbrew zdrowemu rozsądkowi

Dwa zegarki i całkiem poważna fizyka

Paweł KRAWCZYK

Częstym elementem filmów sensacyjnych jest scena nastawiania zegarków na tę samą godzinę, czyli, jak mówimy fachowo, ich synchronizacji. Gdy wszyscy posiadacze zegarków znajdują się razem, jest to dziecinnie proste. Czy można jednak całkowicie zsynchronizować dwa zegarki odległe od siebie? Aby odpowiedzieć na to pytanie, wczujmy się w rolę pilotów kosmicznych, bliźniaków Jacka i Placka, siedzących za sterami swych raket, znajdujących się na przeciwległych krańcach rozległego kosmodromu. Dostali oni odpowiedzialne zadanie doświadczalnego sprawdzenia szczególnej teorii względności. Nasi piloci mają wystartować dokładnie w tym samym momencie i utrzymując cały czas sztywno liniowy (rakietę Jacka z przodu, rakietę Placka dokładnie za nią – patrz rysunek) i stałą odległość lecieć pełną mocą silników przez 24 godziny czasu pokładowego. Po wyłączeniu silników bracia mają porównać wskazania swych zegarków. Zakładamy, że ruch z włączonymi silnikami odbywa się z przyspieszeniem, po ich wyłączeniu zaś ze stałą prędkością. Zadanie wydawało się trywialne: cóż prostszego jak utrzymać stałą odległość, gdy dysponuje się, jak na bliźniaków przystało, identycznymi rakietami. Ale, o zgrozo, bracia wykryli podczas radiowej pogawędki tuż przed startem, że zegarek Jacka pokazuje 11:29, a Placka – 11:30.

- Nastaw swój zegarek na 11:30, Jacku – powiedział Placek – i wszystko będzie w porządku.
- To na nic – odpowiedział Jacek – nasza rozmowa przenoszona jest przez fale radiowe, które potrzebują trochę czasu, aby dotrzeć od ciebie do mnie. W ten sposób mój zegarek wskazywałby zawsze nieco wcześniejszą godzinę niż twój.
- Ech – westchnął Placek – gdyby było więcej czasu, po prostu przyszedłbym do ciebie i łatwo moglibyśmy zsynchronizować nasze zegarki.
- Zapominasz, że czas płynie inaczej w poruszających się układach odniesienia. Wracając do swojej rakiety popsułbyś synchronizację.



W tym momencie Jacek uświadomił sobie, że pomysł Placka ze spacerem nie był taki zły. Trzeba tylko, żeby Placek zostawił swój zegarek i w momencie wyjścia rzucił nań okiem.

- Podróż do mnie – pomyślał Jacek – zajęłaby mu czas Δt i z powrotem tyle samo. Wystarczyłoby, żeby będąc u mnie zapamiętał wskazanie mojego zegarka, a po powrocie do siebie sprawdził, ile czasu trwała ta wyprawa. Powinien natychmiast nastawić swój zegarek na zapamiętaną godzinę plus połowa czasu trwania wycieczki. Tak, to jest właśnie to.

Jacek natychmiast wyjaśnił swoje rozumowanie Plackowi:

- Wprawdzie nie ma czasu na spacer, ale możemy załatwić to za pomocą światła. Ma to tę dodatkową zaletę, że w dowolnym układzie odniesienia światło porusza się zawsze ze stałą prędkością i czas jego przejścia od ciebie do mnie i z powrotem będzie na pewno taki sam. Wyślij więc do mnie impuls światła, a ja go

Geometria czasoprzestrzeni

Marek KORDOS

Współcześni twierdzili, że Einstein był miernym, żeby nie powiedzieć marnym, matematykiem. Było to paradoksalne, albowiem od niego właśnie pochodzi koncepcja, że struktura fizyki teoretycznej, nowoczesnej fizyki teoretycznej, jest taka sama jak struktura matematyki. Pojęcia, jakimi zajęła się fizyka teoretyczna przełomu stuleci, mają matematyczny charakter, są bowiem niezmiennie – twierdził Einstein. Fizyka zaczęła zajmować się wtedy cząsteczkami, atomami, cząstkami elementarnymi. Cząsteczki, powiedzmy, wody są jednakowe tak bardzo, jak mogą jednakowe być tylko np. trójkąty równoboczne. Co więcej, po rozbiciu ich na części i ponownym połączeniu otrzymamy dokładnie to, co było na początku. Pozwala to na konstruowanie idealnie ścisłych (a nie tylko w przybliżeniu, jak było dotąd) modeli matematycznych. Einstein utożsamia model matematyczny z teorią fizyczną. Fizyka teoretyczna staje się tym samym specyficzną gałęzią matematyki.

Nic więc dziwnego, że gdy Einstein sformułował teorię oddziaływań ciał poruszających się, zwaną szczególną teorią względności, sprawę znalezienia dla niej odpowiedniego modelu matematycznego uznał za pierwszoplanową. Jednak różni, „pożyczani” przeważnie od Hilberta, młodzi asystenci-matematycy traktowali współpracę z Einsteinem jak pańszczyznę i nie należało się spodziewać po nich, że to oni potrzebny model skonstruują. W Getyndze, gdzie Einstein (pracujący w biurze patentowym w Zurichu) szukał partnerów naukowych, działał 15 lat starszy od Einsteina wybitny geometra Herman Minkowski. Einstein był zresztą studentem Minkowskiego na politechnice w Zurichu. I właśnie Minkowskiego potrafił Einstein pozyskać dla idei poszukiwania modelu matematycznego dla szczególnej teorii względności.

Kształt zaproponowanego przez Minkowskiego modelu matematycznego staje się bardziej zrozumiały, gdy przyjrzyć się koncepcjom, jakie poprzednio Minkowski lansował.

Największą popularność i znaczenie miały tzw. metryki Minkowskiego. Są to sposoby mierzenia odległości w przestrzeni afinicznej, to znaczy uogólnienia euklidesowego sposobu mierzenia odległości, ale takie, które nie powodują zmiany liniowej struktury przestrzeni: proste są nadal zwykłymi prostymi, płaszczyzny – zwykłymi płaszczyznami itd.

Otrzymane w ten sposób nowe geometrie zrobiły już około 1900 roku znaczną furorę w matematyce, choć nie wiadano wtedy dokładnie, jak dalekie są one od euklidesowego pierwowzoru (ostatecznie określili to w latach dwudziestych Radon) i jak bardzo są mu bliskie (tu ostateczny rezultat uzyskał w latach czterdziestych John). Nie było też jeszcze analizy funkcjonalnej (stworzonej w latach trzydziestych głównie za sprawą Banacha), w której geometrie Minkowskiego są bardzo ważnym narzędziem badawczym (tzw. ciała cechujące).

Ogólna idea tych geometrii – struktura liniowa jak najbardziej „zwyčajna”, wzięta z geometrii euklidesowej i nie naruszająca tej struktury zaburzenie struktury metrycznej – jest idea, z której wywodzi się również i czasoprzestrzeń. Czasoprzestrzeń, czyli właśnie poszukiwany przez Einsteina model matematyczny szczególnej teorii względności.

Praca Minkowskiego wprowadzająca to pojęcie została napisana w 1908, a wydrukowana w 1909 roku – roku śmierci Minkowskiego. Stworzyło to zdumiewające zjawisko – geometria czasoprzestrzeni praktycznie nigdy nie stała się obiektem intensywnych badań matematyków, uprawiali ją właściwie wyłącznie fizycy i to pragmatycznie: badano tylko te jej własności, które mają klarowną interpretację fizyczną.

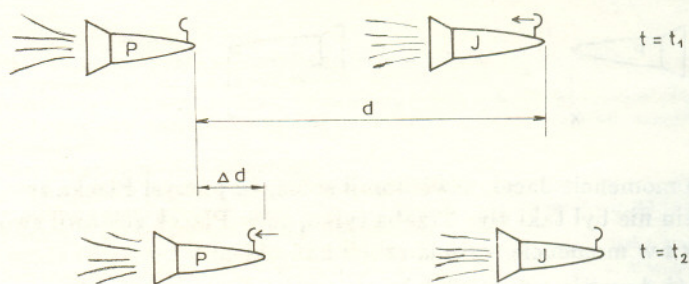
O tej części teorii czasoprzestrzeni jest mowa w innych artykułach w tym numerze *Delty*. Tu chciałbym przedstawić spojrzenie na nią jako na obiekt matematyczny. Aby uprościć sobie zadanie, będę mówił o „czasoprostej”, a więc przestrzeni dwuwymiarowej, której struktura liniowa jest identyczna jak płaszczyzny euklidesowej, ale stosunki metryczne są tu bardzo odmienne.

odbije za pomocą lustra. Gdy impuls dotrze do mnie, nastawię swój zegarek na punkt 11:50. Gdy ty zobaczysz odbity przeze mnie sygnał, nastaw swój zegarek na godzinę późniejszą o połowę czasu, jaki upłynął między wysłaniem a odbiorem sygnału. Wystartujemy, gdy nasze zegarki pokażą dokładnie 12:00!

Stało się tak, jak mówił Jacek. Zegary zostały doskonale zsynchronizowane i start nastąpił równocześnie.

– Uf, problem mamy z głowy – stwierdził Placek. – Świetnie to rozwiązałeś. Jak już jesteś taki sprytny, to powiedz mi jeszcze, jaki sens ma cały ten eksperyment. Nasze rakiety są identyczne. Cały czas poruszamy się z identycznymi prędkościami i podlegamy tym samym przyspieszeniom. W naszych sytuacjach nie ma żadnych różnic. Nasza podróż ma się zakończyć, gdy twój zegar i mój zegar wskażą ponownie dokładnie godzinę 12:00. Co więc mogą pokazywać, gdy je porównamy po zakończeniu? Oczywiście, zawsze tę samą godzinę. Szkoda paliwa i naszego wysiłku na takie eksperymenty.

– Nie masz racji, bracie – odpowiedział Jacek. – Gdy wysiądziemy z raket, ja, który znajduję się z przodu, będę starszy, a mój zegarek wskaże godzinę późniejszą niż twój. Popatrz na naszą sytuację z punktu widzenia obserwatora pozostającego na kosmodromie. Wyobraź też sobie, że aby porównać wskazania naszych zegarów, wysyłam do ciebie regularnie co sekundę impuls świetlny. Ustaliliśmy już przecież, że posługując się impulsami świetlnymi realizujemy najlepszy z istniejących sposobów porównywania zegarów. Ponieważ twoja raketa porusza się w kierunku mojej z przyspieszeniem, więc dla obserwatora na kosmodromie będzie oczywiste, że impuls świetlny zawsze przebędzie drogę krótszą niż ta, która dzieliła nasze rakiety w chwili jego wysłania. A zatem, będziesz odbierać moje impulsy świetlne w odstępach krótszych niż wtedy, gdybyśmy poruszali się bez przyspieszenia. Stosując naszą procedurę synchronizacji zegarków stwierdzisz, że w chwili przybycia każdego z impulsów musisz odrobinę posunąć swój zegarek do przodu. Oznacza to, że późni się on w stosunku do mojego zegara. Mówiąc jeszcze inaczej, czas w twojej rakiecie, Placku, płynie wolniej niż w mojej!



Impuls świetlny wysłany przez Jacka w chwili $t = t_1$ i odebrany przez Placka w chwili $t = t_2$ przebył dystans mniejszy niż odległość d między raketami. Różnica Δd równa jest drodze przebytej przez raketę Placka w czasie $t_2 - t_1$. Gdyby prędkości były znacznie mniejsze niż prędkość światła c , a przyspieszenie stałe i wynosiło a , moglibyśmy napisać

$$c(t_2 - t_1) \simeq d - \frac{a}{2}(t_2 - t_1)^2,$$

czyli

$$t_2 - t_1 \simeq \frac{1}{c} \left(d - \frac{ad^2}{2c^2} \right).$$

Wzór ten pokazuje, że różne tempo upływu czasu w raketach Jacka i Placka pojawia się tylko, gdy $a \neq 0$.

- Nie, to niemożliwe! Warunki naszego lotu są takie same.

A zatem i czas musi płynąć w takim samym tempie. Twoje rozumowanie ...

Zostawmy naszych sprzeczących się bliźniaków i spróbujmy sami rozstrzygnąć ich spór. Nasza decyzja będzie zgoła salomonowa: obaj mają rację. Chociaż od chwili uruchomienia silników do chwili ich zgaszenia obydwaj bracia odmierzą ten sam czas, to jednak w ostatecznym rozrachunku Jacek okaże się starszy. To sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem, zawoła może Czytelnik. Otóż nie, bowiem może się zdarzyć - i właśnie zdarzy się - że koniec pracy silników nie będzie równoczesny. Jacek wyłączy silniki i jeszcze przez chwilę będzie miał okazję obserwować pracę silników w rakiecie swego brata - bliźniaka. Do takiego rozwiązania przekonuje nas zastosowanie transformacji Lorentza. Transformacja ta, będąca podstawą sformułowania szczególnej teorii względności, wiąże położenie i czas (x, t) , mierzone w pewnym układzie inercjalnym (np. związanym z kosmodromem) z położeniem i czasem (x', t') mierzonymi w innym układzie inercjalnym (np. w układzie, w którym rakiety bliźniaków znajdują się w spoczynku po zakończeniu pracy silników), poruszającym się względem układu wyjściowego z prędkością v w kierunku osi x :

$$(1) \quad x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right).$$

Tutaj c jest prędkością światła, a

$$(2) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Stosując transformację Lorentza do chwil t_J i t_P zatrzymania się silników Jacka i Placka dostaniemy

$$(3) \quad t'_J = \gamma\left(t_J - \frac{v}{c^2}x_J\right), \quad t'_P = \gamma\left(t_P - \frac{v}{c^2}x_P\right).$$

Odejmując stronami te równości i korzystając z tego, że dla obserwatora związanego z kosmodromem obaj bracia wyłączają silniki w tym samym czasie ($t_J = t_P$), a odległość ich raket jest stała i wynosi $d = x_J - x_P$, dostaniemy

$$(4) \quad t'_P - t'_J = \gamma \frac{v}{c^2} d.$$

A zatem rzeczywiście - w końcowym układzie inercjalnym Jacek zatrzymał się o $\gamma \frac{v}{c^2} d$ wcześniej niż Placek. O tyle też będzie starszy Jacek od swego brata.

Dziwne, prawda? Ale najdziwniejsze jest to, że eksperyment, jaki przypadł w udziale naszym bliźniakom, został już właściwie zrealizowany i to 30 lat temu. No, oczywiście, nie za pomocą raket. Skorzystano z zasady równoważności, która głosi, że efekty pól grawitacyjnych i sił bezwładności są lokalnie nierozróżnialne. Przyspieszające rakiety zastąpiono więc ziemskim polem grawitacyjnym, a zamiast porównywania wskazań zegarów mierzono częstości tej samej wiązki świetlnej w dwóch różnych punktach, których wysokości różniły się o d . Pozostawiam Czytelnikowi w charakterze prostej łamigłówki wykazanie, że w tym przypadku wzór (4) - r należy interpretować jako prędkość spadku swobodnego z wysokości d - można przepisać w postaci

$$\frac{\nu_d}{\nu_0} \simeq 1 - \frac{gd}{c^2},$$

gdzie ν_h oznacza częstość światła mierzona na wysokości h , a g jest przyspieszeniem grawitacyjnym. W doświadczeniu, o którym mowa, czynnik $\frac{gd}{c^2}$ wynosił około 10^{-15} . Technika pozwalająca na pomiar tak fantastycznie małych różnic częstości jest równie interesująca jak opisany powyżej problem. Ale to, niestety, już zupełnie odrębna historia.

Stosunki metryczne określa się często przez podanie tzw. iloczynu skalarnego, tj. wyrażenia przypisującego parze wektorów $\mathbf{v} = [x_1, x_2]$ i $\mathbf{w} = [y_1, y_2]$ liczbę rzeczywistą według przepisu

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{w} =$$

$$= \alpha_{11}x_1y_1 + \alpha_{12}x_1y_2 + \alpha_{21}x_2y_1 + \alpha_{22}x_2y_2.$$

Widać więc, że konkretny wzór otrzymujemy przez określenie współczynników α_{ij} . Taki iloczyn skalarny wiąże się z długością za pomocą definicji

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \\ &= \sqrt{\alpha_{11}x_1^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2} = \\ &= \sqrt{\mathbf{v} \circ \mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że dla $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$ i $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$ otrzymujemy zwykły, euklidesowy iloczyn skalarny i zwykłą, euklidesową długość. Również łatwo wymyślić takie współczynniki α_{ij} , by dla nich niektóre wektory nie miały długości (bo pod pierwiastkiem znajdzie się liczba ujemna).

Ci Czytelnicy, którzy pamiętają szkolną geometrię analityczną, nie zdziwią się, że za pomocą iloczynu skalarnego określa się kąt między wektorami wzorem

$$\cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v} \circ \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|},$$

co w szczególności pociąga za sobą warunek

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \mathbf{v} \circ \mathbf{w} = 0,$$

który to warunek ma sens również, gdy długości wektorów \mathbf{v} i \mathbf{w} nie są liczbami rzeczywistymi lub są równe zero.

W tej konwencji czasoprostą Minkowskiego będzie opisana przez ustalenie, że $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{22} = -1$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$.

W przestrzeni o większej liczbie wymiarów odpowiedni wybór to $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \dots = \alpha_{n-1, n-1} = 1$, $\alpha_{nn} = -1$, a pozostałe α_{ij} równe zero.

Pierwsze ważne spostrzeżenie to fakt, że istnieją wektory (a w konsekwencji i proste mające ich kierunek), które są same do siebie prostopadłe - w matematyce nazywa się je izotropowymi. Istotnie: takimi są wektory $[a, a]$ i $[a, -a]$. Sprawdźmy. Skoro

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = x_1y_1 - x_2y_2,$$

więc

$$\begin{aligned} [a, a] \circ [a, a] &= a^2 - a^2 = 0 = \\ &= a^2 - (-a)^2 = [a, -a] \circ [a, -a]. \end{aligned}$$

A proste izotropowe to wszystkie proste o równaniach

$$x + y = b \quad \text{lub} \quad x - y = b,$$

dla dowolnego b .

Ruch peryastronu (peryhelium)

Tadeusz JARZĘBOWSKI

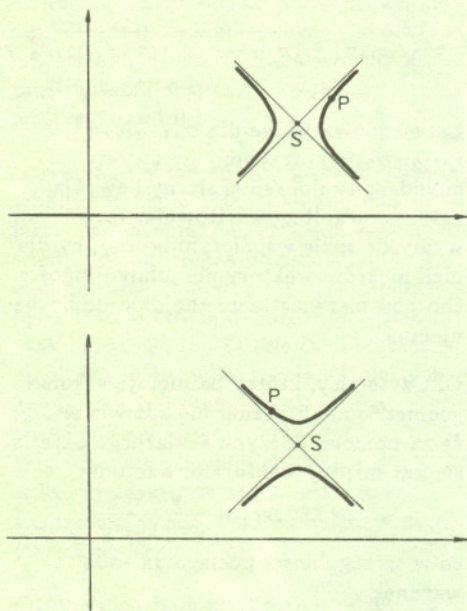
Następne spostrzeżenie dotyczy wyglądu okręgów. Okrąg to zbiór punktów jednakowo oddalonych od danego punktu. Ma więc równanie

$$\|x - s\| = \|p - s\|.$$

Rozpisując to na współrzędne mamy

$$(x_1 - s_1)^2 - (x_2 - s_2)^2 = \\ = (p_1 - s_1)^2 - (p_2 - s_2)^2 = \lambda.$$

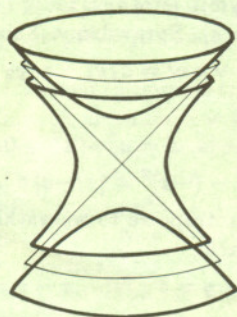
Równanie to na ogół opisuje hiperbole.



Nie otrzymujemy hiperboli, gdy $p = s$ lub odcinek ps jest izotropowy – wtedy jest to para prostych izotropowych.

Widać, że przez środek każdego okręgu przechodzi bardzo wiele prostych nie przecinających go. Morał stąd taki, że dany odcinek można odkładać tylko na niektórych prostych – na innych się nie da.

W artykule *Szybciej niż światło można znaleźć* rysunek bardzo podobny do powyższego. Warto jednak pamiętać, że różne okręgi tylko na czasoprzestrzeni są tego samego rodzaju. Czytelnik zechce sprawdzić, że już na czasopłaszczyźnie wygląd okręgu zależy od znaku λ . Jedne są hiperboloidami dwupowłokowymi, inne jednopowłokowymi.



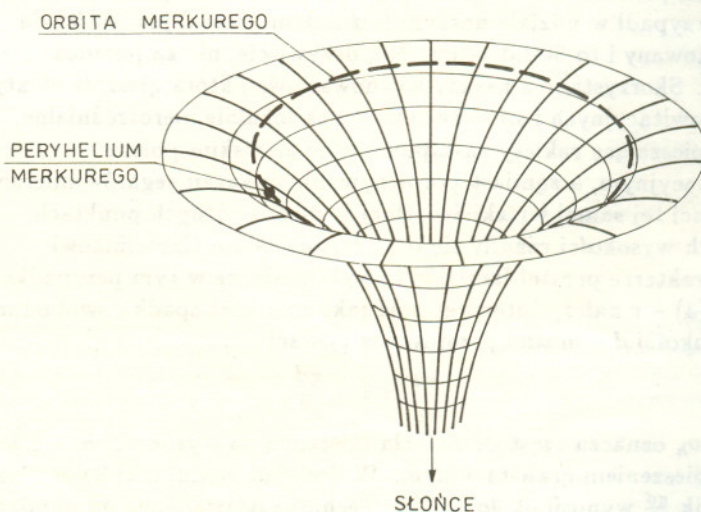
Jeszcze w latach sześćdziesiątych ogólną teorią względności Einsteina, czyli teorią grawitacji, zajmowali się raczej matematycy; dziś tematyka ta pojawia się w pracach eksperymentalnych, interesują się nią astrofizycy obserwatorzy. Odkrywa się w kosmosie obiekty, stanowiące wspaniałe „laboratoria grawitacyjne” (patrz artykuł pod takim tytułem w *Delcie* 10/1990), które stwarzają możliwości obserwowania przewidywanych przez teorię zjawisk.

W tym artykule bliżej o jednym z tych zjawisk, o przesuwanie się punktu peryhelium (w stosunku do którego, w przypadku krążenia wokół gwiazdy, używane jest określenie: peryastron).

To, że ciała niebieskie wzajemnie się obiegają po orbitach eliptycznych, wiemy od czasów Keplera, tj. od już blisko czterech stuleci. Zdawałoby się, że jeżeli nie działają żadne siły zewnętrzne, to w takim odosobnionym układzie orbita powinna być niezmienna zarówno pod względem kształtu, rozmiarów jak i orientacji. Tak przynajmniej wyobrażał to sobie odkrywca prawa ciążenia powszechnego – Newton; do takiego wniosku prowadziłoby też zresztą elementarne rozumowanie.

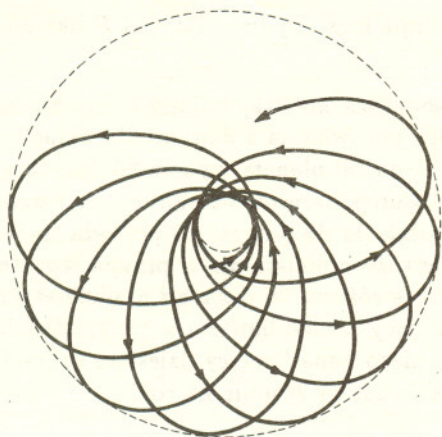
Tę niezmienną zakwestionował jednak Einstein. Dla ilustracji problemu weźmy pod uwagę wynikający ze szczególnej teorii względności fakt wzrostu masy wraz z prędkością. A wiadomo, że prędkość ciała na orbicie eliptycznej jest zmienna. W przypadku Ziemi oscyluje ona między 29,3 a 30,3 km/s. Z tą największą prędkością biegnie Ziemia, gdy jest najbliżej Słońca, tj. w peryhelium (co ma miejsce około 3 stycznia). A zatem w styczniu masa Ziemi byłaby większa! Czegoś takiego Newton nie przewidywał.

Właściwa interpretacja zjawiska, o którym chcemy mówić, opiera się na ogólnej teorii względności. Występuje tam pojęcie krzywizny przestrzeni. W sąsiedztwie dużych mas czasoprzestrzeń ulega zakrzywieniu. Ilustruje to rysunek 1, gdzie tym masywnym ciałem jest Słońce, wokół którego krąży planeta. Otóż z teorii tej wynika, że oś orbity nie zachowuje stałego położenia, lecz powinna obracać się w kierunku obiegu planety (rys. 2). Pociąga to, oczywiście, za sobą jednoczesne przesuwanie się punktu peryhelium.



Rys. 1. W myśl ogólnej teorii względności przestrzeń w sąsiedztwie obiektów o dużych masach ulega zakrzywieniu. Ten fakt tłumaczyłby systematyczne skracanie osi orbity obiegającego ciała – jak to ukazuje rysunek 2.

Zjawisko to powinno wystąpić najwyraźniej w przypadku Merkurego, jako że planeta ta znajduje się najbliżej Słońca i elipsa, po jakiej biegnie dość wyraźnie różni się od okręgu. Teoria wskazuje, że w ciągu stu lat peryhelium Merkurego zmieni swe położenie o $43''$. Dla Wenus, Ziemi i Marsa otrzymamy tu odpowiednio liczby $9''$, $4''$ i $1''$, zaś dla planet dalszych będą to już tylko niemierzalne ułamki sekund.



Rys. 2. Oś keplerowskiej elipsy nie zachowuje stałego położenia, lecz obraca się z wolna w swej płaszczyźnie. Planeta nie biegnie zatem po elipsie, lecz po krzywej otwartej, wypełniającej obszar zawarty między dwoma okręgami, których promienie odpowiadają najmniejszemu i największemu oddaleniu od Słońca.

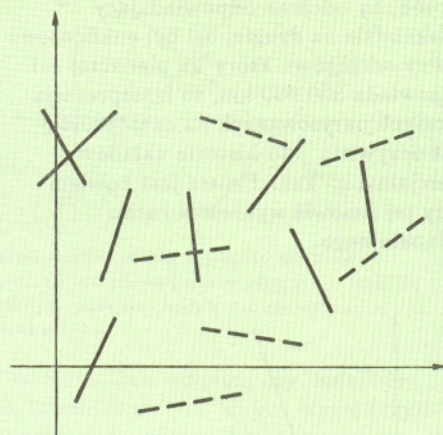
Merkury jest więc w tym aspekcie najciekawszy. Problem „peryhelium Merkurego” był jednym z najważniejszych tematów naszego stulecia.

Z obserwacyjną weryfikacją zjawiska są tu jednak trudności. Skoro układ Słońce – Merkury nie jest odosobniony, należy uwzględnić zaburzenia wywoływane przez inne planety. Otóż po dokonaniu tego typu obliczeń – opartych na mechanice Newtona – okazuje się, że po uwzględnieniu wszelkich wpływów innych obiektów pozostaje rozbieżność: właśnie o owe 43 sekundy na setkę lat. Chciałoby się tylko przyklasnąć Einsteinowi, gdyby nie pewne ale. Szkopuł bowiem w tym, że takie skręcanie osi orbity planety mogłoby też być następstwem spłaszczenia Słońca (pojawiłby się w takim przypadku tzw. grawitacyjny moment kwadrupolowy). Niestety, stopnia spłaszczenia naszej gwiazdy nie można, jak dotąd, wyznaczyć z wystarczającą dokładnością. Nie ma więc do dziś stuprocentowej pewności, że przewidywana przez Einsteina wędrówka peryhelium Merkurego została potwierdzona.

I oto w atmosferze takiej rozterki, *Anno Domini* 1974, pojawia się na arenie astronomicznych sensacji inny układ dwóch ciał niebieskich, gdzie dyskutowany tu efekt występuje w całej krasie i gdzie nie ma już wątpliwości co do einsteinowskiego rodowodu zjawiska. Nazwa nowo odkrytego beniaminka brzmi trochę niezbyt swojsko: PSR 1913+16. To parka gwiazd znajdujących się w gwiazdozbiore Orła – ale niech nikt nie próbuje szukać ich na niebie. Swą obecność ujawniają one w zakresie fal radiowych i to bardzo skromniutko, jako że dzieli nas od nich odległość aż około piętnastu tysięcy lat świetlnych.

Są to dwie gwiazdy neutronowe, z których jedna jest pulsarem o okresie rotacji 0,06 sekundy. Obiegają się nawzajem (mówiąc poprawnie: obiegają wspólny środek masy) w ciągu 7 godzin i 45 minut po mocno eliptycznych orbitach (mimośród $e = 0,617$). Powinniśmy zdawać sobie sprawę, iż tak krótki okres, zwłaszcza

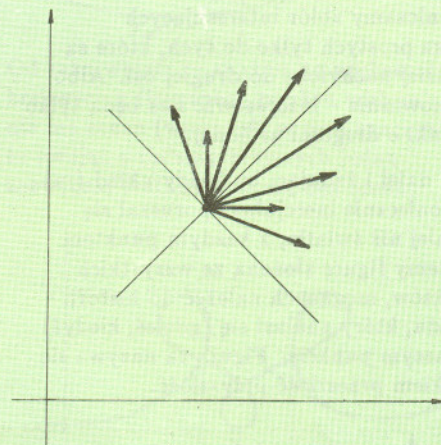
Odcinki zatem podzieliły się nam na trzy klasy: odcinki izotropowe (każdy z nich ma długość zero!), odcinki bardziej nachylone do pierwszej osi (i dające się między sobą porównywać) i odcinki bardziej nachylone do drugiej osi (też porównywalne, lecz nie porównywalne z poprzednimi).



Przyjrzyjmy się jeszcze kątom prostym. Wzór na prostopadłość ma postać

$$x_1 y_1 = x_2 y_2,$$

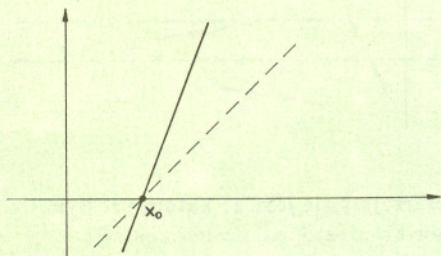
z czego wynika, że wektorem prostopadłym do $[a, b]$ jest wektor $[b, a]$ i wszystkie równoległe do niego. Oznacza to, że na euklidesowym obrazku dwie proste na czasoprostej są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne utworzonego przez nie kąta są izotropowe. A więc jeden kąt prosty może zawierać mniejszy od niego kąt prosty o tym samym wierzchołku.



Wektory, które zostały narysowane równej długości, są prostopadłe.

Odnosząc to do sławnej aksjomatyki Euklidesa można powiedzieć, że tym razem skonstruowano geometrię, w której nie piąty aksjomat, lecz czwarty (głoszący, że dowolne dwa kąty proste są równe) został naruszony.

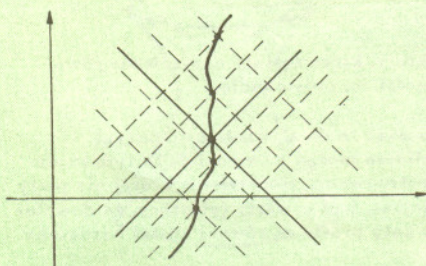
Aby uzasadnić zarzut, że uprawianie takiej geometrii przez fizyków zawęża obraz, trzeba przejść do interpretacji fizycznej pojęć czasoprzestrzeni (czy ogólniej: czasoprzestrzeni). Jeśli wyobrazimy sobie, że jedna z osi reprezentuje (jednowymiarową) przestrzeń, a druga czas, oraz że jednostki dobrano w ten sposób, by odcinek odpowiadający 1 sekundzie na drugiej osi był euklidesowo równy odcinkowi, który na pierwszej osi odpowiada 300 000 km, to interpretacja prostych narysowanych na czasoprzestrzeni jest oczywista – to historie układów inercjalnych. Tak! Prosta jest bowiem przy tej umowie wykresem ruchu jednostajnego.



Na obrazku widać historię punktu poruszającego się ze stałą prędkością po pierwszej osi w kierunku zgodnym z jej orientacją. W chwili $t = 0$ punkt był w x_0 .

Łatwo jednak zauważyć, że są wśród nich takie, które opisują ruch z prędkością większą od prędkości światła. Przyjmując (geometrycznie nie dający się uzasadnić) postulat, że układ inercjalny w każdym innym układzie inercjalnym ma prędkość nie większą od prędkości światła, ograniczamy zbiór interesujących fizyka prostych tylko do tych, które są bardziej nachylone do drugiej osi. Albo równoważnie – interesować nas będą tylko odcinki o długości urojonej.

Idąc dalej i żądając, by każdy układ (już niekoniecznie inercjalny) poruszał się wolniej niż światło, z każdym punktem wiążemy figurę złożoną ze wszystkich punktów, mogących należeć do historii układu, który znalazł się (gdzieś, kiedyś) w naszym punkcie. Figura ta nazywa się stożkiem przeszłość-przyszłość.



w przypadku obiegających się gwiazd, wskazuje na ich bliskość; ich wzajemne oddziaływanie grawitacyjne musi być zatem znaczne.

Jeśli Einstein miał rację, to osie orbit powinny podlegać systematycznemu skręcaniu, a tempo zmian powinno tu być bardzo wyraziste. Teoria podaje następującą zależność

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{64G^{2/3}}{c^2} \frac{M^{2/3}}{(1-e)P^{5/3}},$$

gdzie M oznacza sumę mas obydwu ciał, zaś P okres ich wzajemnego obiegu.

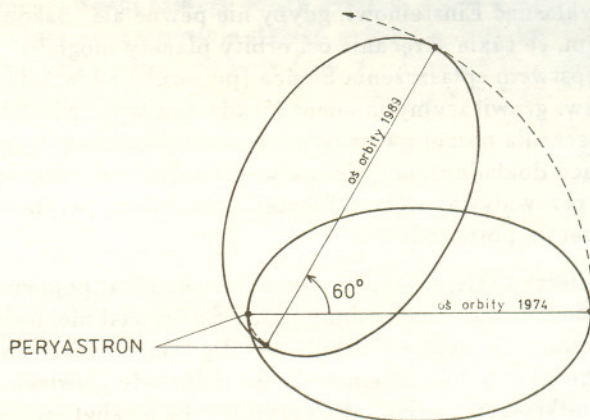
Aby uświadomić sobie wielkość tej zmiany kierunku osi, $d\omega/dt$, dokonajmy prostego porównania z danymi dla układu Słońce – Merkury. Okres obiegu tej planety wynosi 88 dni, tu zaś mamy $P = 0,323$ dnia; stosunek okresów obiegu ma się zatem jak 1 do 272. Po podniesieniu do potęgi $5/3$ pojawia się w mianowniku liczba aż 11 tysięcy razy mniejsza niż w przypadku Merkurego. Uwzględniając jeszcze różnice w masach i mimośrodkach otrzymujemy wynik dość zaskakujący. Jeżeli bowiem w przypadku Merkurego orbita skręca się o nieco ponad cztery dziesiąte sekundy na rok, to tu powinno być około cztery stopnie na rok!

Tak wynika z obliczeń, a co wynika z obserwacji?

Promieniowanie radiowe tego układu gwiazd neutronowych obserwuje się już od kilkunastu lat. Dzięki temu, że jeden ze składników jest pulsarem emitującym rytmiczne sygnały, możliwe jest wszechstronne badanie ruchów tych gwiazd. Otóż stwierdzono, że od czasu odkrycia tego układu osie orbit zdążyły skrócić się o ponad 60° ; o taki sam kąt przesunęły się zatem punkty peryastronu (rys. 3). Tempo tego relatywistycznego skręcania osi, wyznaczone na podstawie danych obserwacyjnych z lat 1974 – 1989, wynosi

$$\frac{d\omega}{dt} = 4,2266 \text{ stopni na rok.}$$

Dokładność pomiarów jest bardzo wysoka; błąd dopiero na piątym miejscu po przecinku.



Rys. 3. W układzie podwójnym PSR 1913+16 orbita każdej z gwiazd uległa w ciągu piętnastu lat skręceniu o około 60° .

Nawiążmy raz jeszcze do Merkurego. Jak łatwo obliczyć, na obrót orbity tej planety o kąt pełny należałoby czekać aż 3 miliony lat. Tu natomiast obrót orbity o 360° następuje po każdym 85 latach – mieści się zatem prawie w granicach życia jednego człowieka.

Jak widzimy, w obszarach o silnym polu grawitacyjnym odstępstwa od praw fizyki Newtona są bardzo wyraźne. Jaskrawym tego przykładem jest ta niezwykła parka z pulsarem PSR 1913+16.

Szybciej niż światło?

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Fundamentem, na którym zbudowana jest szczególna teoria względności, jest postulat o niezmienniczości prędkości światła, tzn. przyjmuje się, że wartość prędkości światła, oznaczana tradycyjnie literą c , jest taka sama we wszystkich układach odniesienia. Pojawia się naturalne pytanie: czy mogą istnieć obiekty zwane tachionami (od greckiego $\tau\alpha\chi\upsilon\varsigma$ – szybki) poruszające się szybciej niż światło? Większość fizyków uważa, że nie mogą i dlatego przyjmują, iż prędkość światła jest nie tylko prędkością niezmienniczą, ale i maksymalną. Są też jednak tacy, jak autor tego artykułu, którzy sądzą, że istnienia tachionów wykluczyć całkowicie nie można.

Prześledźmy argumenty przeciw tachionom.

Argument 1. Prędkość światła ma wartość skończoną (około 300 000 km/s). Można jednak posługiwać się do opisu ruchu zmienną inną niż prędkość, np. zmienną y , po angielsku zwaną *rapidity*, a przez niektórych po polsku *chyżością* lub *pośpiesznością*, która z prędkością v wiąże się w sposób następujący

$$(1) \quad y = \frac{1}{2} \ln \frac{c+v}{c-v}.$$

Pośpieszność światła jest nieskończona i pytanie, czy mogą istnieć obiekty o większej pośpieszności, pozbawione jest sensu. Zmienna określona równaniem (1) ma istotnie kilka zalet. Jeśli prędkość jest mała w porównaniu z prędkością światła, wówczas $v \approx yc$. Składanie pośpieszności odbywa się jak składanie nierelatywistycznych prędkości, co zwykle bardzo upraszcza rozważania. Jednak stosowanie zmiennej (1) w niczym nie rozwiązuje problemu istnienia tachionów, jedynie pytanie należy postawić inaczej. A mianowicie: czy istnieją obiekty, których pośpieszność jest zespolona?

Argument 2. Jak wiadomo, energia i pęd cząstki o masie m poruszającej się z prędkością v wyrażają się następującymi wzorami

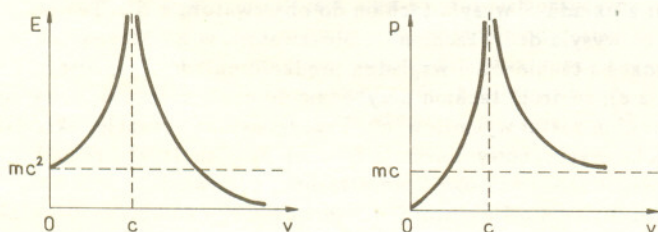
$$(2) \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

z których wynika, że nie można przyśpieszyć cząstki do prędkości większej niż c , gdyż wymagałoby to przejścia przez nieskończenie wysoką barierę energii przy $v=c$. Niektórzy wyciągają z tego wniosek, że tachiony istnieć nie mogą. Przypomina to jednak rozumowanie pewnego staroindyjskiego mędrca, który uważał, że nikt nie żyje na północ od Himalajów, gdyż człowiek nie zdoła przejść przez tak wielkie góry. Mędrzec nie zauważył, że ludy zamieszkujące Azję Środkową bynajmniej nie musiały się przeprawić przez Himalaje. Podobnie może się mieć rzecz z tachionami. Być może one istnieją, lecz zawsze poruszają się z prędkościami większymi niż c , a zatem są za barierą prędkości światła. Zauważmy, że podobną sytuację mamy z fotonami, które zawsze poruszają się z prędkością c i spowolnić ich nie sposób.

Łatwo można sobie wyobrazić, jak zmodyfikować wzory (2), by opisywały energię i pęd tachionu, tzn. gdy $v > c$. A mianowicie

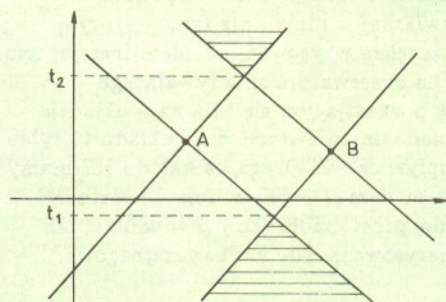
$$(3) \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}.$$

Rysunek przedstawia zależność energii i pędu od prędkości.



Rys. 1

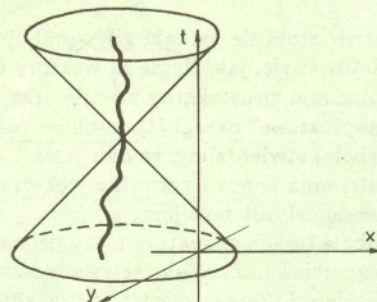
Istotnie – wykres ruchu z prędkościami mniejszymi od prędkości światła ma zawsze styczne spośród fizycznie dozwolonych prostych – nigdy więc poza stożek przeszłość-przyszłość nie wyjdzie.



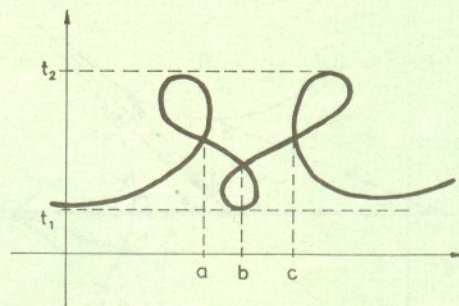
Jeśli punkty A i B spotkały się kiedyś, było to nie później niż w chwili t_1 ; jeśli się kiedyś spotkają, będzie to nie wcześniej niż w chwili t_2 .

I to niezależnie od tego, czy będziemy się interesować tym, co jest wyżej (czyli w przyszłości układu znajdującego się w naszym punkcie), czy też tym, co niżej (czyli w przeszłości).

W czasoprzestrzeni stożek przeszłość-przyszłość to kąt, ale nazwa została wzięta z czasopłaszczyzny – tam rzeczywiście jest to zwyczajny stożek.

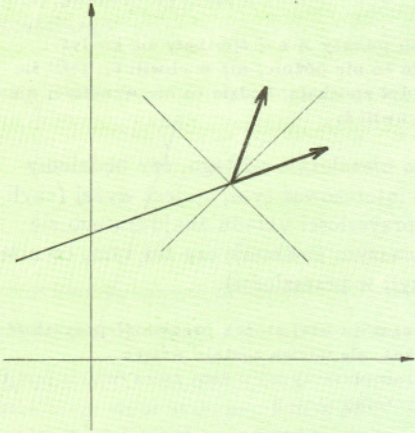


Od razu widać, że znakomita większość krzywych z fizycznego punktu widzenia nie ma sensu (większość w tym znaczeniu, że losując z rodziny krzywych jedną zazwyczaj trafimy na taką bez sensu).

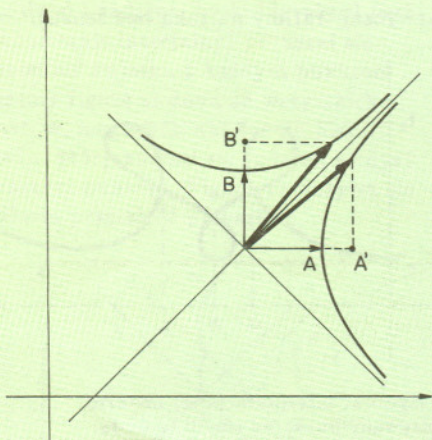


„Fizyczna” interpretacja tej historii: opisywany punkt od chwili t_1 do t_2 równocześnie był w czterech, a czasem w trzech miejscach, przy czym w a , b i c spotkał się sam ze sobą; poruszał się przy tym w czasie zarówno w przód, jak i w tył.

Mówiąc o interpretacji fizycznej czasoprzestrzeni nie sposób pominąć sprawy zmiany układu współrzędnych (stosownie wzory w innych artykułach w tym numerze). Chodzi mianowicie o to, jak będzie wyglądał układ współrzędnych związany z innym niż ten, w którym zaczęliśmy rysować, układem inercyjnym. Dla obserwatora spoczywającego w poruszającym się (dla nas) układzie inercyjnym historia tego układu to tylko upływ czasu. Drugą oś układu już mamy. A pierwsza? – oczywiście – będzie do niej prostopadła (co już wiadomo, jak narysować). Nic nadzwyczajnego.



Ciekawie zrobi się jednak, gdy spróbujemy zorientować się, jak długie są wektory osi. Rysując rzut prostokątny na osie oraz „czasoprzestrzowe” okręgi (tj. euklidesowe hiperbole) stwierdzimy, że odległość przestrzenna końca i początku wektora pierwszej osi jest mniejsza, niż była. Podobnie będzie z wektorem drugiej osi nowego układu. Zjawiska te zwane są skróceniem Lorentza i dylatacją czasu; stanowią one wdzięczny obiekt układania przez fizyków różnych zaskakujących zadań.



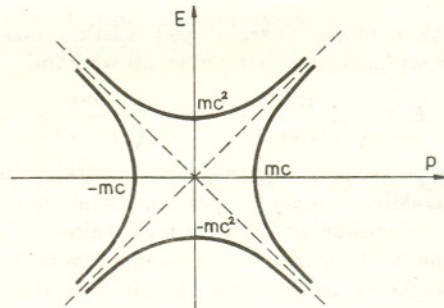
AA' to skrócenie Lorentza, BB' – dylatacja czasu.

Dla porównania przedstawiśmy również odpowiednie zależności dla bradionów (od greckiego βραδύς – powolny) – tak nazwano obiekty wolniejsze niż światło. Widzimy, że tachion ma minimalną, zerową energię, gdy porusza się z nieskończoną prędkością, pęd jest równy wówczas mc . Gdy prędkość tachionu zbliża się do prędkości światła, energia i pęd dążą do nieskończoności.

Mamy więc tutaj sytuację analogiczną do tej z bradionami, z tym że energię należy zamienić z pędem, prędkość zerową zaś z prędkością nieskończoną. Zauważmy również, że gdy prędkość tachionu jest dużo większa niż c , możemy wyrażenia (3) przybliżyć, podobnie jak przybliżamy wzory (2) w granicy nierelatywistycznej, tzn. gdy $v \ll c$. W obu przypadkach odpowiada to sytuacji małych energii, tzn. $\frac{E}{c^2} - m \ll m$.

Kwadrat czterowektora pędu, określanej jako $E^2 - p^2c^2$, równy jest dla bradionu m^2c^4 . W przypadku tachionów natomiast $E^2 - p^2c^2 = -m^2c^4$. Można więc mówić, że tachion to cząstka o urojonej masie. Nie prowadzi to jednak do żadnych paradoksów. Masa odpowiada energii w układzie, gdzie cząstka spoczywa. Nie możemy jednak przejść do takiego układu odniesienia, ponieważ musielibyśmy przejść wspomnianą barierę prędkości światła. Łatwo natomiast wykazać, że cząstka będąca tachionem w układzie, w którym na przykład Ty, Czytelniku, spoczywasz, jest bradionem dla hipotetycznego obserwatora, który poruszałby się względem Ciebie z prędkością większą niż c .

Transformacja Lorentza, która wiąże energię i pęd danej cząstki w różnych inercjalnych układach odniesienia (poruszających się względem siebie z prędkością nie większą niż c), zachowuje wspomniany powyżej kwadrat czterowektora. Oznacza to, że przy przechodzeniu od jednego do drugiego układu odniesienia punkt (E, p) będzie przesuwany wzdłuż hiperboli wyznaczonej równaniem $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ dla bradionu i $E^2 - p^2c^2 = -m^2c^4$ dla tachionu. Hiperbole takie zaznaczono na rysunku.

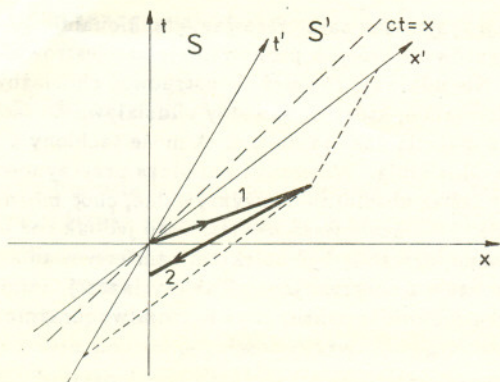


Rys. 2

Jak widać, bradion mający dodatnią energię w jednym układzie odniesienia, ma dodatnią energię we wszystkich innych układach. W przypadku tachionów natomiast znak energii może być różny w różnych układach odniesienia. Ponieważ cząstki o ujemnej energii odpowiadają antycząstkom, dwaj obserwatorzy o odpowiednio dobranej prędkości względnej postrzegaliby ten sam tachion, jeden jako cząstkę, drugi zaś jako antycząstkę. W przypadku bradionów taka możliwość nie istnieje. Przedstawioną własność tachionów wykorzystamy przy analizowaniu najpoważniejszego argumentu przeciw istnieniu tachionów, tzw. paradoksu przyczynowego.

Argument 3. Rozważmy dwa poruszające się względem siebie układy odniesienia S i S' oraz dwóch obserwatorów związanych z tymi układami. Obserwator z układu S wysyła tachion do obserwatora z S' . Ten po odebraniu go wysyła drugi tachion do obserwatora w S . Można tak dobrać prędkości tachionów i względną prędkość układów (tę ostatnią mniejszą niż c), że drugi tachion przybędzie do obserwatora w S , zanim pierwszy tachion został wyemitowany. Przedstawioną sytuację, określaną jako paradoks przyczynowy, ilustruje rysunek 3, gdzie (t, x) i (t', x') oznaczają współrzędne czasowe i przestrzenne, odpowiednio w S i S' . Przyczynę nachylenia osi układu S' (obserwowanego z układu S) wyjaśnia artykuł *Geometria czasoprzestrzeni*.

Źródłem paradoksu jest to, że tachion poruszający się do przodu w czasie w jednym układzie odniesienia (tutaj w układzie, w którym został wysłany) może poruszać się do tyłu w czasie w innym układzie odniesienia (w naszym przypadku w układzie, gdzie jest odbierany).

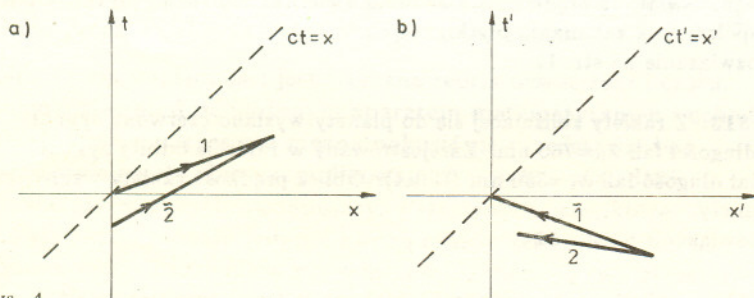


Rys. 3

Istnienie opisanego paradoksu sformułowanego już w 1917 roku, naruszającego zasadę przyczynowości stwierdzającą, że przyczyna zawsze poprzedza skutek, spowodowało brak zainteresowania tachionami aż do lat sześćdziesiątych, kiedy zaproponowano rozwiązanie paradoksu. W owym czasie zresztą pojawił się dopiero termin tachion.

Rozwiązanie paradoksu opiera się na obserwacji, że tachion poruszający się do tyłu w czasie niesie ujemną energię. Dzieje się tak dlatego, że czterowektor położenia (t, x) transformuje się tak samo jak wspomniany powyżej czterowektor pędu (E, p) . W związku z tym zaproponowano przyjęcie następującego postulatu, zwanego postulatem reinterpretacji: Tachion z ujemną energią poruszający się do tyłu w czasie jest antytachionem poruszającym się do przodu w czasie.

Zastosujmy teraz postulat reinterpretacji do rozwiązania paradoksu przyczynowego. Jak wynika z rysunku 3, dla każdego z obserwatorów jeden tachion porusza się do przodu w czasie, drugi zaś do tyłu. Jeśli przyjąć postulat reinterpretacji, to każdy z obserwatorów będzie widział w swoim układzie odniesienia tachion i antytachion, oba poruszające się do przodu w czasie, jak to pokazują rysunki 4a i 4b, gdzie falką zaznaczono reinterpretowany tachion.



Rys. 4

Każdy z obserwatorów będzie uważał, że to on wysłał oba tachiony. Ponieważ w żadnym z układów nie ma związków przyczynowych między aktami emisji tachionu i antytachionu, zasada przyczynowości nie jest złamana.

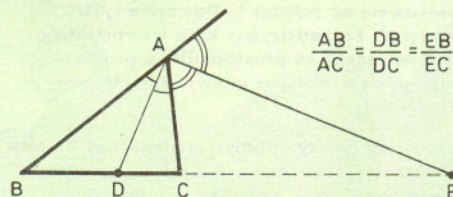
Cena za rozwiązanie paradoksu jest wysoka. Co jest przyczyną, a co skutkiem można określić jedynie w danym układzie odniesienia. To, co nazywamy przyczyną w jednym układzie odniesienia, może być skutkiem w innym. Zasada przyczynowości traci swój absolutny charakter, lecz stosowana musi być różnie w różnych układach odniesienia. Nie jest to jednak nieszczęście. Jak wiemy, teoria względności usunęła z fizyki absolutny czas i absolutną przestrzeń, więc i relatywizacja pojęć przyczyny i skutku wydaje się być w duchu teorii względności. Niestety, pojawia się poważniejszy problem, tzw. paradoks wolnej woli. Rzecz w tym, że zastosowanie postulatu reinterpretacji do rozwiązania paradoksu

Wróćmy jednak do geometrii. Zapytajmy o najoszczędniejszy układ pojęć, za pomocą którego można by taką geometrię uprawiać.

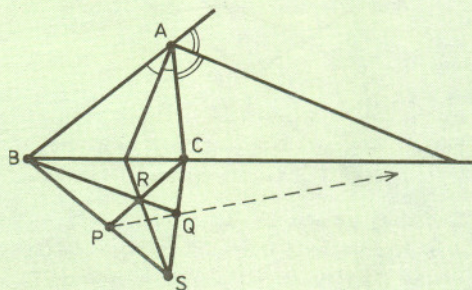
Pytania tego rodzaju wchodzą w skład mało od pewnego czasu modnej gałęzi matematyki – podstaw geometrii. Tutaj piszę na ten temat, bo uzyskany rezultat ma – w kontekście fizyki – głębszy sens.

Okazuje się, że układ taki tworzą współliniowość punktów i przynależność pary punktów do jednej prostej izotropowej. Aby się o tym przekonać, wystarczy stwierdzić, że za ich pomocą można opisać przystawanie odcinków. A można. Jest to jednak dość trudne zadanie... z geometrii euklidesowej. Niżej drobniejszą czcionką podany jest schemat dowodu z informacjami, jak każdy z Czytelników mógłby go uzupełnić. Tym, którzy nie mają ochoty na takie figle, proponuję ten fragment opuścić.

Najpierw przypomnienie twierdzenia o dwusiecznych:
Dwusieczna kąta wewnętrznego (zewnątrznego) trójkąta dzieli wewnętrznje (zewnątrznje) przeciwległy bok na części proporcjonalne do przyległych do nich boków trójkąta.

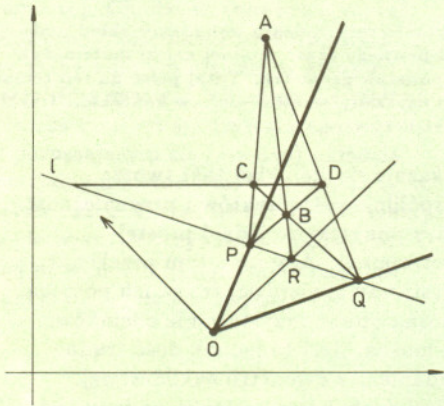


Twierdzenie to wchodzi w skład obowiązującego w klasach matematyczno-fizycznych liceum programu nauczania. Następne twierdzenie już takie nie jest. *Jakkolwiek dobierzemy do trójkąta ABC punkty P, Q, R, S spełniające warunki*
 – proste PS i QR przechodzą przez B,
 – proste PR i QS przechodzą przez C,
 – prosta RS przechodzi przez punkt przecięcia dwusiecznej kąta BAC z bokiem BC,
 to prosta PQ przejdzie przez punkt przecięcia dwusiecznej kąta zewnętrznego trójkąta ABC przy wierzchołku A z prostą BC.



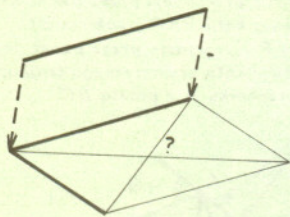
Dowód tego twierdzenia polega na zastosowaniu do trójkąta BSC twierdzenia Cevy, twierdzenia Menelaosa i podanego wyżej twierdzenia o dwusiecznych.

Teraz możemy bez trudu podanymi wyżej środkami rozpoznawać na czasoprzestrzeni jej kąty proste.



Przecinamy oba ramiona weryfikowanego kąta i jedną z prostych izotropowych wychodzących z jego wierzchołka O prostą l otrzymując punkty P, Q i R . Następnie wybieramy poza prostą l dowolny punkt A i łączymy go z P, Q i R . Na odcinku AR wybieramy punkt B i łączymy go prostymi z Q i P . Oznaczmy przecięcie BQ z AP przez C i BP z AQ przez D . Czytelnik bez trudu z podanych wyżej twierdzeń wyprowadzi fakt, że badany kąt jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy prosta CD i drugie ramię kąta przetną się na prostej l . Powinien tylko pamiętać, że dwusieczne kąta wewnętrznego i zewnętrznego są prostopadłe, a proste izotropowe w naszym modelu również są prostopadłe.

A oto ciąg dalszy. Ponieważ struktura liniowa czasoprzestrzeni jest taka sama jak płaszczyzny euklidesowej, więc pojęcia równoległobok, przesunięcie czy środek odcinka są na nich jednakowe. Aby sprawdzić, czy dane odcinki są w sensie czasoprzestrzeni tej samej długości, wystarczy przesunąć jeden z nich tak, by miały wspólny koniec, uzupełnić je do równoległoboku i przekonać się, czy jest rombem, czyli czy ma prostopadłe (w sensie czasoprzestrzeni) przekątne – a to już umiemy.



Podany dowód przenosi się praktycznie bez zmian na czasoprzestrzeni dowolnego wymiaru. Ale jaki jest z niego pożytek?

Zwróćmy uwagę, że oba pojęcia wystarczające do opisu czasoprzestrzeni mają sens fizyczny. Punkty współliniowe to punkty należące do historii jednego układu inercyjnego. Punkty należące do prostej izotropowej to punkty z historii jednego promienia światła.

przyczynowego, ilustrowanego rysunkami 3 i 4, prowadzi do sytuacji, w której wysłanie antytachionów przez obu obserwatorów staje się aktem niezależnym od ich woli. Pozostaje kwestią indywidualnego poczucia zdrowego rozsądku, czy taka sytuacja jest do zaakceptowania, czy nie.

Postulat reinterpretacji przywrócił zainteresowanie tachionami. Wykonano nawet kilka eksperymentów, w których próbowano je zarejestrować. Niestety, bez skutku. Nie udało się również skonstruować chociażby modelu poprawnego formalnie, który opisywałby oddziaływanie tachionów z bradionami, a więc z materią nas otaczającą. A może tachiony z taką materią po prostu nie oddziałują. Wówczas i paradoks przyczynowy nie zachodzi, tachiony zaś są absolutnie niewykrywalne, choć można by myśleć, że istnieje jakiś tachionowy wszechświat. Jeśli jednak coś jest absolutnie niewykrywalne, przestaje być obiektem zainteresowania fizyki, która swe teorie konfrontuje z obserwacjami. Tak czy inaczej, zajmowanie się tachionami nie jest pozbawione sensu, gdyż rozwija wyobraźnię, tak potrzebną przy studiowaniu teorii względności.



Zadania

Redaguje Jarosław KULPA

F 312. W szklanej płytce poruszającej się z relatywistyczną prędkością v biegnie światło z prędkością u zgodnie z kierunkiem ruchu płytki. Oblicz współczynnik załamania płytki.

Rozwiązanie na str. 12

F 313. Z rakiety zbliżającej się do planety wysłano czerwony sygnał o długości fali $\lambda_0=760$ nm. Zarejestrowany w rakiecie odbity sygnał miał długość fali $\lambda_1=380$ nm (fiolet). Oblicz prędkość rakiety względem planety.

Rozwiązanie na str. 12

F 314. Oblicz, o jaką wielokrotność k masy Ziemi zmniejszyła się masa Słońca w trakcie jego istnienia, tj. przez czas około 6 mld lat. Załóż, że temperatura powierzchni Słońca równa $T \approx 6000$ K nie uległa zasadniczym zmianom. (Masa Ziemi jest równa $m=6 \cdot 10^{24}$ kg, a promień Słońca $R=6,95 \cdot 10^8$ m.)

Rozwiązanie na str. 12

F 315. Neutralna cząstka rozpada się na dwa kwanty γ biegnące pod kątem 120° względem siebie i mające jednakowe częstotliwości. Oblicz prędkość rozpadającej się cząstki.

Rozwiązanie na str. 13

F 316. Oblicz minimalną energię (zw. progową) fotonu, który może wywołać produkcję pary e^+e^- na spoczywającym elektronie.

Rozwiązanie na str. 13

Teoria względności na Uniwersytecie Warszawskim

Stanisław L. BAŻAŃSKI

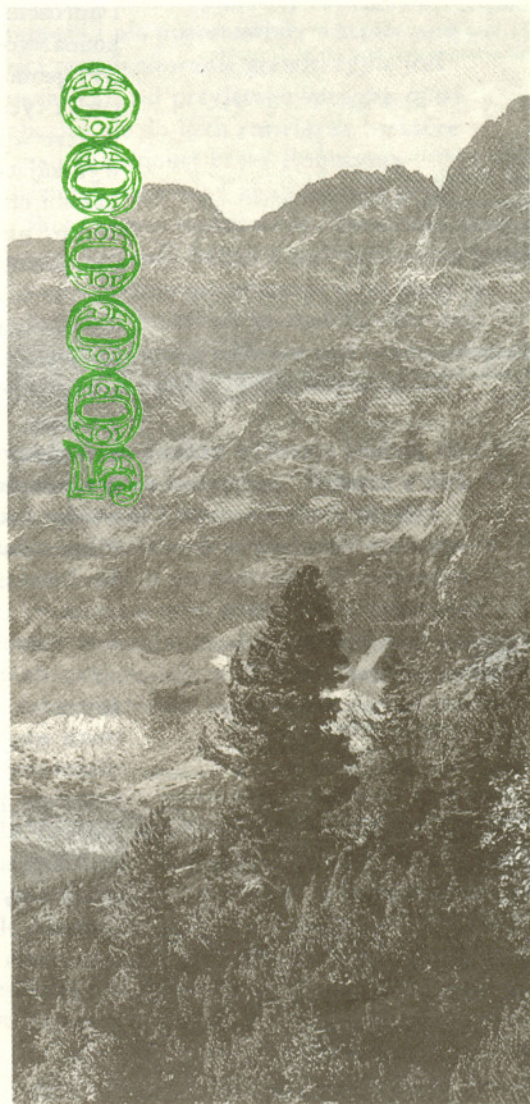
Powojenna historia badań nad teorią względności i pokrewnymi jej dziedzinami fizyki teoretycznej w Warszawie zaczęła się, w zasadzie, w roku 1950 z chwilą powrotu do Polski prof. Leopolda Infelda, wsławionego przez prace nad zagadnieniem ruchu w ogólnej teorii względności, opublikowane wspólnie z Einsteinem. W pierwszym roku po swym powrocie prof. Infeld zorganizował przy ówczesnym Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Warszawskiego Instytut Fizyki Teoretycznej (IFT), w którym zaczęły się tworzyć grupy badawcze specjalizujące się w podstawowych gałęziach fizyki, w tym także grupa szczególnie interesująca się badaniami samego Infelda. W grupie tej najpierw kontynuowane były prace nad tematyką wniesioną przez prof. Infelda. W miarę upływu czasu i dojrzewania naukowego poszczególnych badaczy tematyka ta ulegała ewolucji i obejmować zaczęła nowe dziedziny, które wyrosły z teorii względności bądź były z nią związane, a często obejmowane są wspólną nazwą klasycznej teorii pola. W dalszej części tego artykułu postaram się przybliżyć Czytelnikowi niektóre z zagadnień, które stanowiły lub stanowią przedmiot badań w tej dziedzinie w IFT. W ciągu czterdziestu lat, jakie upłynęły od chwili założenia Instytutu, zagadnienia te były przedmiotem badań uprawianych przez okazałą liczbę osób, które wniosły liczący się wkład do tej dziedziny nauki, uzyskując przy tym stopnie i tytuły naukowe. Trudno by było wszystkich ich tu wymienić. Samodzielnymi pracownikami naukowymi, zatrudnionymi obecnie w IFT UW i prowadzącymi między innymi badania nad ogólną teorią względności i klasyczną teorią pola, są profesorowie Andrzej Trautman, Jerzy Plebański, Marek Demiański, Wojciech Kopczyński, dr. hab. Jacek Tafel oraz autor niniejszego artykułu.

Ogólna teoria względności jest fizyczną teorią przestrzeni i czasu. Posługuje się ona dość złożonym aparatem matematycznym i uchodzi za teorię trudną. Jej istotę można pokusić się przedstawić bez odwoływania się do zbyt skomplikowanych pojęć, a więc dość niedokładnie, w sposób następujący. Przestrzeń i czas, które stanowią swego rodzaju jedność zwaną czasoprzestrzenią, pod wpływem materii zmieniają swe własności, zmieniają swą geometrię. Geometrią pustej czasoprzestrzeni, bez materii, jest geometria znaleziona w 1907 r. przez H. Minkowskiego. Geometrią zwykłej trójwymiarowej przestrzeni związanej z czasoprzestrzenną geometrią Minkowskiego jest znana ze szkoły geometria Euklidesa. Geometria rzeczywistej czasoprzestrzeni wykazuje pewne odstępstwo od geometrii Minkowskiego, zwane krzywizną czasoprzestrzeni. To odstępstwo, czyli krzywizna czasoprzestrzeni, jest zmienne w czasie i przestrzeni. Teoria pozwala wyznaczyć krzywiznę czasoprzestrzeni w zależności od pewnych własności materii za pomocą równań znalezionych w 1915 r. przez Einsteina. Krótko mówiąc, *materia określa geometrię świata*. Jednak w warunkach spotykanych np. na Ziemi odstępstwo geometrii zwykłej przestrzeni spowodowane krzywizną czasoprzestrzeni jest tak małe, że geodeci z powodzeniem mogą posługiwać się geometrią Euklidesa.

Zatem pojęcia układ inercjalny i promień światła mogą być jedynymi pojęciami czasoprzestrzeni. Cała fizyka w szczególnej teorii względności okazała się geometrią, a cała geometria czasoprzestrzeni – fizyką.

Fakt opisany wyżej nie był znany Einsteinowi. Tym większym podziwem napawają jego dalsze prace, które już bezpośrednio zmierzały do utożsamienia geometrii świata z jego fizyką, a które są znane jako ogólna teoria względności.

Ale to już inna historia.





Rozwiązanie zadania F 312. Niech n oznacza współczynnik załamania płytki. Z prawa relatywistycznego składania prędkości mamy

$$\frac{c/n + v}{1 + \frac{c/n \cdot v}{c^2}} = u,$$

gdzie c/n oznacza prędkość światła w płytce, w układzie płytki. Przekształcając powyższy wzór otrzymujemy:

$$n = \frac{c^2 - u \cdot v}{c(u - v)}.$$



Rozwiązanie zadania F 318. Niech v oznacza prędkość rakiety względem planety. Przejdźmy do układu związanego z powierzchnią planety. Długość fali światła padającego λ_2 możemy obliczyć ze wzoru na relatywistyczny efekt Dopplera

$$\lambda_2 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Przy odbiciu, oczywiście, długość fali nie ulegnie zmianie. Przechodzimy z powrotem do układu odniesienia związanego z rakieta i obliczamy długość fali rejestrowaną w rakiecie:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = \lambda_0 \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}.$$

Przekształcając powyższy wzór i oznaczając $k = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ otrzymujemy

$$v = \frac{1 - k}{1 + k} \cdot c = \frac{1}{3}c.$$



Rozwiązanie zadania F 314. Energia E wypromieniowana przez Słońce równa się Mc^2 , gdzie M oznacza ubytek masy Słońca. Z drugiej strony znając powierzchnię Słońca $S = 4\pi R^2$ oraz czas t , przez jaki świeciło, wypromieniowaną energię możemy obliczyć zakładając, że Słońce jest ciałem doskonale czarnym. Stosując prawo Stefana-Boltzsmanna mamy

$$Mc^2 = \sigma T^4 4\pi R^2 t,$$

gdzie $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$. Stąd

$$k = \frac{M}{m} = \frac{\sigma T^4 4\pi R^2 t}{mc^2}.$$

Podstawiając wielkości liczbowe otrzymujemy $k \approx 150$.

Jednak geometria geodetów to tylko geometria przestrzeni, a nie czasoprzestrzeni. Istnienie krzywizny czasoprzestrzeni, nawet w warunkach spotykanych na Ziemi, przejawia się natomiast poprzez ruch ciał. Z równań Einsteina wynikają równania ruchu ciał, przy czym w zakrzywionej czasoprzestrzeni ciała swobodne nie poruszają się ruchem jednostajnym po liniach prostych. Czyli nie tylko *materia określa geometrię świata*, lecz także *geometria świata dyktuje materii, jak ma się poruszać*. W pewnym sensie jest to intuicyjnie oczywiste; ruchem jednostajnym po linii prostej toczyć się może kulka po gładkiej poziomej powierzchni płaskiej, ale już nie po gładkiej powierzchni pofalowanej. Jednak z przyczyn, których tu nie będziemy rozwijać, analogia ta jest bardzo niedokładna. Natomiast w ogólnej teorii względności nie odwołując się do żadnych intuicji można pokazać, że np. nasza Ziemia tak zmienia geometrię otaczającej ją czasoprzestrzeni, iż ciała swobodne, a więc takie, na które nie działają żadne siły, wypuszczone w pobliżu Ziemi z pewną prędkością, spada na nią po krzywej balistycznej. I podobnie, w czasoprzestrzeni otaczającej Słońce ciała swobodne poruszają się będą po torach planet. Czyli to, co kiedyś Newton uważał za przejaw działania na odległość tajemniczej siły grawitacji, jest po prostu przejawem geometrycznych własności czasoprzestrzeni określonych lokalnie w otoczeniu poruszających się ciał. W ogólnej teorii względności nie ma siły ciężenia, jedynie lokalna geometria czasoprzestrzeni określa taki, a nie inny ruch ciał.

W pierwszym okresie badań nad teorią względności w IFT zajmowano się głównie problemem ruchu ciał. W okresie tym Infeld i jego uczniowie wyświetlili i uprościli cały szereg spraw związanych z tym zagadnieniem. Wyjaśniono do końca ogólną zależność logiczną między równaniami Einsteina, które mówią, jaka jest geometria czasoprzestrzeni w otoczeniu poruszających się ciał, a równaniami ruchu tych ciał. Między innymi, posługując się metodą przybliżeń sformułowaną jeszcze w roku 1938 przez Einsteina, Infelda i Hoffmana, znaleziono poprawki wynikające z teorii względności, tzw. poprawki relatywistyczne, do dynamiki układu ciał oddziałujących grawitacyjnie. Innymi słowy, chociaż ściśle rzecz biorąc, nie ma siły grawitacji, a ruch ciał np. w układzie planetarnym jest przejawem takiej a nie innej geometrii czasoprzestrzeni w otoczeniu tych ciał, to w określonych warunkach i w opisie przybliżonym teoria prowadzi do dynamiki newtonowskiej układu ciał oddziałujących klasycznymi siłami grawitacji, a w dokładniejszych przybliżeniach, siłami uzupełnionymi o odpowiednie poprawki relatywistyczne, potwierdzane przez bardziej dokładne pomiary. Ten okres badań jest w zasadzie od dawna zakończony, a wkład wniesiony do nich przez grupę badaczy w Warszawie został podsumowany w monografii napisanej przez Infelda i Plebańskiego. Wypracowane jednak wtedy metody są dość podstawowe i od czasu do czasu do nich się powraca. Powrotem takim były np. prace przeprowadzone około roku 1974 przez M. Demiańskiego poświęcone ruchowi czarnych dziur.

Z problemem ruchu wiąże się inny, bardzo ważny problem teorii względności – zagadnienie promieniowania grawitacyjnego. Już w roku 1918 Einstein zauważył, badając własności teorii będącej pewnym przybliżeniem jego ogólnej teorii względności, że układ ciał oddziałujących grawitacyjnie, a więc np. układ planetarny lub układ dość blisko siebie położonych gwiazd zachowuje się podobnie jak układ elektronów w antenie nadajnika lub w ciele świecącym. Taki układ promieniuje grawitacyjnie. Promieniowanie to wykazuje pewne podobieństwo do promieniowania elektromagnetycznego, ale istnieją też poważne różnice wynikające z zasadniczej odmienności teorii Maxwella opisującej zjawiska elektromagnetyczne i teorii Einsteina zjawisk grawitacyjnych. Przede wszystkim jednak nie ma do dnia dzisiejszego bezpośredniego doświadczalnego potwierdzenia występowania promieniowania grawitacyjnego w przyrodzie, choć istnieją poważne poszlaki, oparte na wieloletniej obserwacji pulsara podwójnego PSR 1913+16, wskazujące na istnienie tego zjawiska. W okresie kiedy Einstein teoretycznie przewidywał występowanie promieniowania grawitacyjnego, nie było jednak rzeczą do końca wyjaśnioną, z powodu pewnych komplikacji

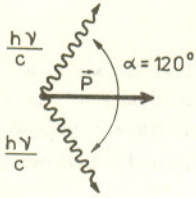


Rozwiązanie zadania F 315.
Stosując zasadę zachowania energii i pędu dla rozpadającej się cząstki mamy

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 2h\nu,$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 2 \frac{h\nu}{c} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

gdzie m_0 , v oznaczają masę i prędkość rozpadającej się cząstki, ν – częstotliwość kwantów γ , α – kąt między nimi.



Dzieliąc powyższe równania stronami otrzymujemy:

$$v = c \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}c.$$



Rozwiązanie zadania F 316.
Najmniejszą sumaryczną energię będą miały cząstki (e^+ , e^- , e^-) lecące w jednym kierunku z tymi samymi prędkościami. Napiszmy zasadę zachowania pędu i energii dla chwili przed i po zderzeniu:

$$\frac{h\nu}{c} = 3p,$$

$$m_0 c^2 + h\nu = 3E,$$

gdzie p , E oznaczają pęd oraz energię jednej z cząstek po zderzeniu, m_0 zaś masę spoczynkową elektronu.

Podstawiając z pierwszego równania energię fotonu $h\nu$ do drugiego otrzymujemy

$$3E = 3pc + m_0 c^2,$$

$$\left(E - \frac{m_0 c^2}{3}\right)^2 = p^2 c^2.$$

Wykorzystując relację między energią i pędem $E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$ dostaniemy

$$E = \frac{5}{3} m_0 c^2.$$

Stąd $h\nu = 3E - m_0 c^2 = 4m_0 c^2$.

teoretycznych, czy jest ono pewną cechą teorii pojawiającą się wskutek przyjętego schematu opisu, czy też jest zjawiskiem obiektywnym, niezależnym od przyjętego sposobu obserwacji. Było to źródłem kontrowersji, która została rozstrzygnięta dopiero około roku 1960. Dziś wiemy, że teoria przewiduje, iż układ ciał poruszających się stale w ograniczonym obszarze przestrzeni powoduje powstanie na zewnątrz układu zaburzeń krzywizny czasoprzestrzeni, tzn. powoduje zmianę wielkości mierzących lokalne odstępstwo geometrii czasoprzestrzeni od geometrii Minkowskiego. Zaburzenia te rozchodzą się w przestrzeni na zewnątrz układu, oddalając się od niego z prędkością światła, a sam ruch układu zmienia się, przy czym w niektórych sytuacjach ciała tworzące układ zaczynają na siebie spadać. Ta propagacja zaburzeń krzywizny czasoprzestrzeni to właśnie promieniowanie grawitacyjne. Jedną z cech je charakteryzujących jest specyficzna struktura krzywizny w obszarach przestrzeni bardzo dalekich od układu promieniującego. Struktura ta jest opisana w tzw. twierdzeniu o odłupywaniu się krzywizny.

Powyższy obraz teoretyczny promieniowania grawitacyjnego jest ogólnym podsumowaniem wielu prac prowadzonych w licznych ośrodkach na świecie. Dla nas jest rzeczą ważną, że poważny udział w tych pracach miały badania prowadzone swego czasu w IFT Uniwersytetu Warszawskiego. Pierwsze sformułowanie twierdzenia, które z fizycznego punktu widzenia przekazywało treści podobne do twierdzenia o odłupywaniu się krzywizny, choć w jego pierwotnym sformułowaniu pojęcie krzywizny nie występowało, zostało podane w roku 1960 przez A. Trautmana. W IFT w Warszawie znaleziono też cały szereg ścisłych rozwiązań równań Einsteina, które opisywały szczególne przypadki promieniowania grawitacyjnego i nie pozostawiały wątpliwości, że zgodnie z ogólną teorią względności promieniowanie grawitacyjne jest zjawiskiem fizycznym istniejącym niezależnie od przyjętego sposobu opisu teoretycznego. Przede wszystkim zaliczają się do tych rozwiązań niektóre z należących do słynnej klasy rozwiązań znalezionej przez Robinsona i Trautmana, a ponadto niektóre z licznych rozwiązań znalezionych przez M. Demiańskiego i J. Plebańskiego. Stosunkowo niedawno A. Trautman wraz z amerykańskim fizykiem I. Robinsonem ponowili badania nad znaną przez nich w 1962 r. klasą rozwiązań i pokazali, że czasoprzestrzenie z tej klasy są reprezentacjami pewnej nowej geometrii, którą nazwali geometrią optyczną. Obecnie kilku uczniów prof. Trautmana kontynuuje badania nad różnorodnymi właściwościami tej geometrii i jej związkami z ogólną teorią względności.

Istnieje kilka sposobów, które z teoretycznego punktu widzenia nadają się do ewentualnego wykrywania promieniowania grawitacyjnego. Jednym z nich jest obserwacja ruchu bardzo bliskich sobie ciał i występujących między nimi sił przyływowch. W mechanice ogólnej teorii względności zjawisko to jest opisywane za pomocą tzw. równań dewiacji geodezyjnej. W ostatnich kilku latach badania nad dynamiką związaną z tymi równaniami prowadził w Warszawie S. Bazański, który między innymi znalazł nową, bardziej efektywną metodę rozwiązywania równań dewiacji. Aktualnie w IFT prowadzone są też badania nad teoretycznymi podstawami niektórych optycznych metod detekcji promieniowania grawitacyjnego.

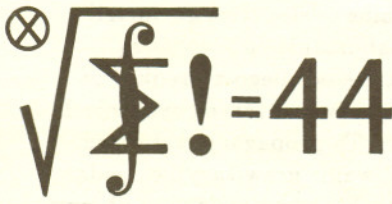


Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1991

Zadania z matematyki nr 223, 224

223. W trójkącie ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę trzykrotnie większą niż kąt wewnętrzny przy wierzchołku A . Dowieść, że wysokość opuszczona z wierzchołka C jest krótsza niż połowa boku AB .

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1991
Przypominamy treść zadań:

219. Niech $x_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{k}\right)^n$ dla $n=2, 3, 4, \dots$. Czy ciąg (x_n/n) jest zbieżny?

219. Badany ciąg jest zbieżny. Dowód: przyjmijmy

$$(1) \quad a_{nk} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n, \quad b_{nk} = \frac{1}{n} e^{-n/k}, \quad c_{nk} = b_{nk} - a_{nk}$$

dla $n \geq k \geq 1$. Wykażemy, że

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_{nk} = 0.$$

W nierówności $1 - t < e^{-t} < 1 - t + t^2$ (dla $t > 0$) podstawiamy $t = 1/k$ i podnosimy wszystkie trzy człony do n -tej potęgi. Otrzymujemy związki

$$a_{nk} < b_{nk} < \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right)^n.$$

Stąd

$$(3) \quad 0 < c_{nk} < \phi(\beta_k) - \phi(\alpha_k),$$

$$\text{gdzie } \phi(t) = \frac{1}{n} t^n, \quad \alpha_k = 1 - \frac{1}{k}, \quad \beta_k = 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}.$$

Zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a, $\phi(\beta_k) - \phi(\alpha_k) = (1/k^2)\phi'(\xi) = \xi^{n-1}/k^2$ dla pewnego $\xi \in (\alpha_k; \beta_k)$. Stąd i z (3)

$$(4) \quad 0 < c_{nk} < \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right)^{n-1}.$$

Wobec tego

$$(5) \quad 0 < c_{nk} < \frac{1}{k^2} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_{nk} = 0 \quad (\text{dla każdego } k);$$

ostatnia relacja graniczna wynika dla $k \geq 2$ z oszacowania (4), a dla $k=1$ – wprost z definicji (1).

Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz taką liczbę naturalną m , że $\sum_{k=m+1}^{\infty} 1/k^2 < \varepsilon$ (możemy to zrobić, bo szereg $\sum 1/k^2$ jest zbieżny). Zatem

$$\sum_{k=1}^n c_{nk} < \sum_{k=1}^m c_{nk} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^m c_{nk} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

Redaguje Marcin E. KUCZMA

224. Liczba naturalna $n > 1$ jest dzielnikiem liczby $p-1$, gdzie p jest dzielnikiem pierwszym liczby n^3-1 . Znaleźć związek między p i n (w postaci równości wielomianowej). Zadanie 224 zaproponował pan Henryk Pawłowski z Torunia.

220. W trójkąt ABC wpisano okrąg styczny do boków tego trójkąta w punktach P, Q, R . Miary kątów trójkąta ABC równe są α, β, γ ; miary kątów trójkąta PQR wynoszą α', β', γ' . Dowieść, że

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma'.$$

dla dostatecznie dużych n ; wynika to ze związków (5), bowiem m jest ustalone. Równość (2) jest tym samym udowodniona. Zauważmy teraz, że

$$(6) \quad \frac{x_n}{n} = \sum_{k=2}^n a_{nk} = \sum_{k=1}^n a_{nk};$$

natomiast $\sum_{k=1}^n b_{nk}$ jest sumą Riemanna funkcji ciągłej

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{dla } x \in (0; 1), \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

odpowiadającą podziałowi przedziału $(0; 1)$ na n równych części. Graniczną wartością tej sumy (przy $n \rightarrow \infty$) jest całka $\int_0^1 f(x) dx$.

Na mocy (1), (2) i (6) ta sama liczba jest też granicą badanego ciągu (x_n/n) . Jej przybliżona wartość: 0,1484955... (Liczba ta dopuszcza i inne przedstawienia całkowite, ale nie wyraża się przez funkcje elementarne i znane stałe.)

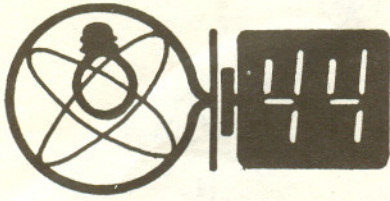
220. Możemy przyjąć, że punkty P, Q, R leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB , oraz że $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ są odpowiednio miarami kątów A, B, C, P, Q, R rozważanych trójkątów. Mamy więc równość

$$180^\circ = |\angle BPR| + |\angle RPQ| + |\angle QPC| = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) + \alpha' + \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma).$$

Stąd $\alpha' = (\beta + \gamma)/2$, a zatem

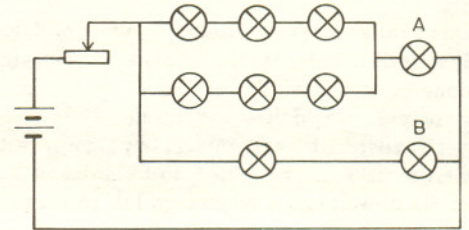
$$\begin{aligned} \sin \alpha' &= \sin \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \geq \\ &\geq 2\sqrt{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} = \sqrt{\sin \beta \sin \gamma} \end{aligned}$$

i analogicznie $\sin \beta' \geq \sqrt{\sin \gamma \sin \alpha}$, $\sin \gamma' \geq \sqrt{\sin \alpha \sin \beta}$. Mnożąc stronami te trzy nierówności uzyskujemy tezę zadania.



121. Astronauci podróżujący rakieta w przestrzeni kosmicznej nagle wykrywają pocisk znajdujący się w odległości r i poruszający się wprost w ich kierunku z prędkością (względna) v . Pocisk nie ma napędu i jest zaprogramowany tak, że wybuchu w chwili największego zbliżenia do rakiety. W jakim kierunku astronauci powinni skierować dyszę silnika, aby minimalna odległość od pocisku miała wartość maksymalną? Przyjąć, że rakieta z włączonym silnikiem porusza się ze stałym przyspieszeniem a . Załóżmy teraz, że pocisk nie wybuchu, ale wysyła promienie γ . Czy opisany powyżej optymalny kierunek dyszy gwarantuje także pochłonięcie najmniejszej dawki?

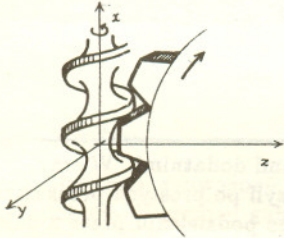
122. W obwodzie przedstawionym na rysunku wszystkie żaróweczki są jednakowe. Jakim wzorem wyraża się zależność prądu przepływającego przez żaróweczkę od przyłożonego napięcia, jeśli żaróweczka A pali się tak samo jasno jak B, przy każdym nastawieniu potencjometru?



Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1991

Przypominamy treść zadań:

117. Jaka jest maksymalna możliwa wartość sprawności przekładni ślimakowej (rys.), jeśli współczynnik tarcia zębów jest równy f ?



117. Przyjmijmy, że oś obrotu pierwszego koła (napędowego) pokrywa się z osią x , a oś obrotu drugiego koła – z osią y ; wtedy w punkcie zazębienia zęby pierwszego koła poruszają się w kierunku osi y , a zęby drugiego – w kierunku osi z . Oznaczmy przez \mathbf{n} jednostkowy wektor prostopadły do płaszczyzny zetknięcia się zębów obu kół:

$$\mathbf{n} = (\cos \Theta \cos \phi, \cos \Theta \sin \phi, \sin \Theta),$$

tzn. kąt ϕ wskazuje nachylenie zębów w płaszczyźnie xy , a kąt Θ opisuje odchylenie w kierunku trzeciej osi z . Jeśli Δx oznacza małe przesunięcie zębów pierwszego koła, a Δz – drugiego, to wektor przesunięcia względnego (poślizgu) będąc różnicą wektorową tych przesunięć jest dany wyrażeniem

$$\mathbf{t} = (\Delta x, -\Delta y, 0)$$

i musi być prostopadły do wektora \mathbf{n} . Stąd

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \operatorname{tg} \phi.$$

Siłę wzajemnego oddziaływania zębów $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ możemy rozłożyć na składową normalną $\mathbf{F}_n = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ i składową styczną $\mathbf{F}_{st} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_n$. Ponieważ \mathbf{F}_{st} jest równoległa do wektora \mathbf{t} , więc siła ta nie ma składowej z , czyli $F_z = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})n_z$. Korzystając z tego związku możemy obliczyć długość wektorów \mathbf{F}_n i \mathbf{F}_{st} eliminując z równa F_z .

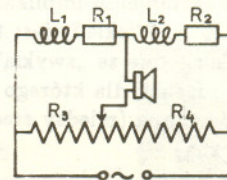
$$F_n = |\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}| = \frac{|F_x n_x + F_y n_y|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}, \quad F_{st} = \frac{|F_y n_x - F_x n_y|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}.$$

Stosunek F_{st}/F_n jest współczynnikiem tarcia f . Gdy pierwsze koło jest napędowe, a drugie odbiera energię, należy podstawiając tu otrzymane wyrażenia na F_n i F_{st} pominąć moduły. Dalsze przekształcenia prowadzą do wzoru

$$F_x = F_y \frac{\cos \phi - h \sin \phi}{\sin \phi + h \cos \phi}, \quad \text{gdzie } h = \frac{f}{\cos \Theta}$$

(przekładnia może działać tylko wtedy, gdy licznik jest dodatni). Praca koła napędowego jest równa $F_y \Delta y$, a praca drugiego

118. W przedstawionym obwodzie suwak przesuwano wzdłuż opornika $R_3 - R_4$ do uzyskania minimum dźwięku. Wykazać, że na ogół dźwięk nie zanika całkowicie przy żadnym położeniu suwaka. Jaki warunek musi być spełniony, aby dźwięk zanikł?



koła – $F_z \Delta z$. Stosunek tych dwóch wyrażeń jest sprawnością przekładni η .

$$\eta = \frac{F_x \Delta x}{F_y \Delta y} = \frac{\cos \phi - h \sin \phi}{\sin \phi + h \cos \phi} \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\sin 2\phi + h(\cos 2\phi - 1)}{\sin 2\phi + h(\cos 2\phi + 1)}$$

Sprawność jest tym większa, im mniejsze jest h , zatem w optymalnym przypadku $\Theta=0$, $h=f$. Aby obliczyć optymalną wartość ϕ , korzystnie jest przekształcić

$$\frac{2f}{1 - \eta} = \sin 2\phi + f(\cos 2\phi + 1)$$

i teraz przyrównać pochodną względem ϕ do zera. Ostatecznie otrzymujemy $\operatorname{tg} 2\phi = \frac{1}{f}$ i

$$\eta_{max} = \frac{\sqrt{1 + f^2} - f}{\sqrt{1 + f^2} + f}$$

118. Gdy głośnik nie daje żadnego sygnału, nie przepływa przez niego żaden prąd i nie ma też na nim żadnego napięcia, tzn. napięcia w górnej gałęzi równają się odpowiednim napięciom w dolnej gałęzi:

$$U_{L_1 R_1} = U_{R_3}, \quad U_{L_2 R_2} = U_{R_4}.$$

Znikanie napięcia na głośniku zachodzi tylko wtedy, gdy powyższa równość dotyczy zarówno amplitud, jak i faz napięć. Zastosujmy więc metodę liczb zespolonych i podstawmy zespolone zawady cewek i podzielmy równania stronami

$$(1) \quad \frac{L_1 \omega i + R_1}{L_2 \omega i + R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Rozpatrując oddzielnie część rzeczywistą i urojoną lewej strony dochodzimy do warunku

$$(2) \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Konieczny jest więc nie tylko dobór odpowiednich wartości R_3 i R_4 , lecz także spełnienie lewej równości (2) (oczywiście, równanie (1) może być spełnione także przy $R_1 = R_2 = 0$).

Jeden krok w przód, kilka do tyłu...

Świetnie znana ze szkoły *zasada indukcji matematycznej* mówi, że jeśli w twierdzeniu o liczbach naturalnych spełnione są dwa warunki:

- 1) twierdzenie prawdziwe jest dla n_0 ,
- 2) z prawdziwości twierdzenia T_k wynika prawdziwość twierdzenia T_{k+1} ($\forall k \geq n_0$), to twierdzenie T_n prawdziwe jest dla dowolnego n większego lub równego n_0 .

Zasada ta ma wiele odmian (np. gdy pokazujemy implikację $T_k \Rightarrow T_{k+2}$, pierwszy krok trzeba wtedy sprawdzić dla dwóch kolejnych liczb). Chciałbym tu przedstawić jedną z rzadziej spotykanych odmian indukcji, tzw. indukcję wsteczną.

Jej główna myśl polega na zastąpieniu implikacji $T_k \Rightarrow T_{k+1}$ implikacją $T_k \Rightarrow T_{k-1}$. Niekiedy jest to znacznie łatwiejsze niż postępowanie zgodne ze „zwykłą” zasadą indukcji. Przykładem twierdzenia, dla którego tak jest, jest nierówność Cauchy-Riemanna (między średnią arytmetyczną a geometryczną).

Jeżeli a_1, a_2, \dots, a_n są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Udowodnić tę nierówność za pomocą „zwykłej” indukcji nie jest łatwo. Natomiast nietrudno jest wykazać, że z prawdziwości twierdzenia dla n wynika prawdziwość twierdzenia dla $n-1$.

Niech bowiem a_1, \dots, a_{n-1} będą liczbami dodatnimi. Przyjmijmy

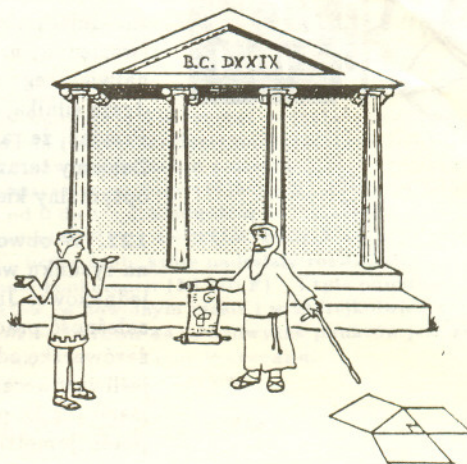
$$a_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}}.$$

Korzystając z prawdziwości twierdzenia dla n możemy napisać:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n}.$$

Wiemy, że $a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} = a_n^{n-1}$, czyli $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_n^{n-1} \cdot a_n} = a_n$, co po prostych przekształceniach daje nam żadaną nierówność.

Oczywiście, taka indukcja wsteczna nie dowodzi prawdziwości twierdzenia dla dowolnej liczby naturalnej, a jedynie tego, że jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej, to i dla wszystkich liczb od niej mniejszych. Możemy więc wykonywać drobne kroczki do tyłu. Potrzebna nam jest jeszcze możliwość robienia dużych kroków w przód, czyli wykazanie, że istnieją dowolnie duże liczby naturalne, dla których twierdzenie jest prawdziwe. W naszym przypadku najłatwiej jest sprawdzić implikację $T_n \Rightarrow T_{2n}$. Nie możemy jednak zapomnieć o pierwszym kroku – sprawdzimy zatem prawdziwość twierdzenia dla $n=2$.



– To wszystko bardzo ciekawe, Pitagorasie, ale czy dzięki temu znajdę jakąś pracę?

J.H. Webb

© The Mathematical Intelligencer – przedruk za zgodą Redakcji czasopisma.

Niech a_1, a_2 będą liczbami dodatnimi. Wiemy, że $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$, czyli po prostych przekształceniach $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}$, a to po podzieleniu przez 2 daje żadaną nierówność.

Założmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby n . Zbadamy jego prawdziwość dla liczby $2n$.

Niech a_1, \dots, a_{2n} będą liczbami dodatnimi. Przyjmijmy $b_k = \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}$, $c_k = \sqrt{a_{2k-1} \cdot a_{2k}}$, dla $k=1, 2, \dots, n$. Wiemy, że $c_k \leq b_k$ dla $k=1, \dots, n$.

Zauważmy, że $\sqrt[2n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_{2n}} = \sqrt[n]{c_1 \cdot \dots \cdot c_n}$. Ponieważ twierdzenie jest prawdziwe dla n , więc $\sqrt[n]{c_1 \cdot \dots \cdot c_n} \leq \frac{c_1 + \dots + c_n}{n}$. Zatem podsumowując otrzymujemy

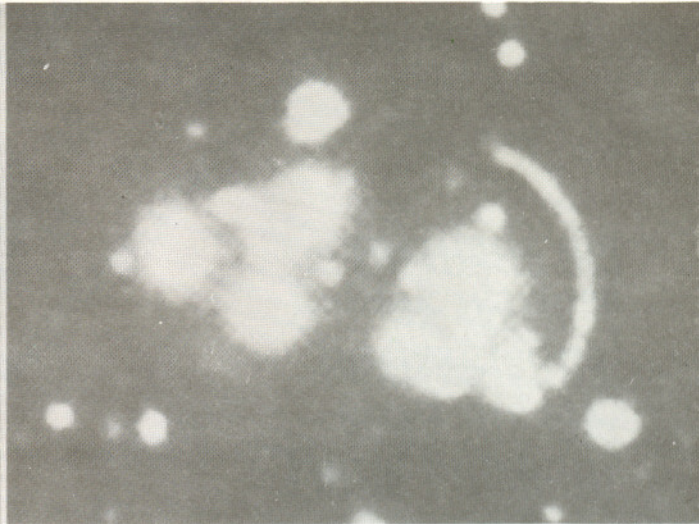
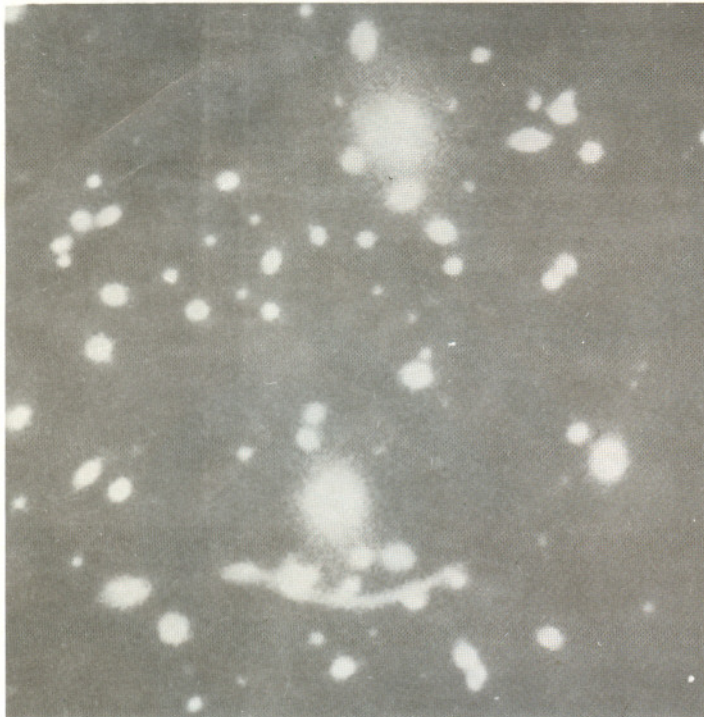
$$\begin{aligned} \sqrt[2n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_{2n}} &\leq \frac{c_1 + \dots + c_n}{n} \leq \\ &\leq \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} = \frac{a_1 + \dots + a_{2n}}{2n}, \end{aligned}$$

a to chcieliśmy wykazać.

Dokładne wykazanie, że z poczynionych uwag wynika prawdziwość twierdzenia, pozostawiamy dociekliwemu Czytelnikowi. Zauważmy, że drugą część dowodu można poprowadzić w inny sposób; zamiast wykazywać, że z prawdziwości twierdzenia dla n wynika prawdziwość twierdzenia dla $2n$, wystarczy wykazać, że z prawdziwości twierdzenia dla n wynika prawdziwość twierdzenia dla jakiegokolwiek liczby naturalnej większej od n (np. dla $n+5$, $17n^3 + 26n^2 + 32$ czy $n! + 1991$).

Indukcję wsteczną można stosować do dowodu wielu innych twierdzeń. Może Czytelnikom uda się znaleźć jakieś ciekawe przykłady?

Sławomir CYNK



Świetliste łuki wokół gromad galaktyk:
2242-02 w gwiazdozbiornie Wodnika – zdjęcie z lewej strony
i Abell 370 w gwiazdozbiornie Wieloryba – zdjęcie powyżej.

Patrz w niebo

Ponad dziesięć lat temu zauważone zostały pierwsze ślady dziwnych świetlistych łuków wokół niektórych gromad galaktyk. Dokładniejsze obejrzenie ich struktury stało się możliwe znacznie później, dopiero po zastosowaniu kamer CCD (zdjęcia). Obserwacje takie zostały wykonane przy okazji badań jasności powierzchniowych galaktyk prowadzonych w Kitt Peak National Observatory (USA).

Uderzająca jest regularna budowa tych łuków – są to niemal idealne łuki okręgów, których środek pokrywa się z przypuszczalnym środkiem masy gromady. Jasności łuków są porównywalne z jasnościami samych galaktyk. Gdyby miały być nimi obiekty materialne leżące w takiej właśnie odległości, co towarzyszące im gromady, to byłyby to chyba największe w ogóle twory we Wszechświecie świecące światłem widzialnym. Na podstawie rozmiarów kątowych i odległości gromad ich rozmiary oceniono na 100 kpc.

Podstawowym wydawał się być problem, jak można uzyskać taką regularność struktury przy tak ogromnych rozmiarach. Nikt nie był w stanie wyjaśnić, jak łuki mogą zachowywać swój kształt w skomplikowanym polu grawitacyjnym gromady galaktyk. Przez dłuższy czas nie były znane widma tych obiektów wskutek ich zbyt niskiej jasności obserwowanej – dało się tylko zauważyć, że są one bardziej niebieskie od galaktyk gromady. Sugerowano to, że jeżeli składają się z gwiazd, to z gwiazd młodych. Rozważano też inną jeszcze możliwość, mianowicie że łuki świecą wskutek zjawiska synchrotronowego, tzn. świecą w nich szybkie elektrony poruszające się w polu magnetycznym (podobnie jak to ma miejsce np. w mgławicy Krab). Było to jednak zastąpienie jednych zagadek innymi, nadal bowiem tajemnicza pozostała przyczyna tak regularnej struktury pola magnetycznego, a doszedł problem, skąd miałyby się tam wziąć szybkie elektrony.

Wydaje się, że wszystkie kłopoty z interpretacją łuków znikają po przyjęciu założenia, że w ogóle nie są one tworam materialnymi, lecz efektem soczewkowania grawitacyjnego. Do dziś znaleziono więcej przykładów tego zjawiska i w zasadzie wszystkie obrazy dają się wymodelować uginaniem się światła jakiegoś odległego obiektu w polu grawitacyjnym gromady galaktyk. Byłoby to zatem w ogromnej skali zachodzące zjawisko znane dotychczas tylko jako przesunięcia położenia gwiazd, gdy ich światło przechodzi w pobliżu Słońca (efekt ogólnej teorii względności zaobserwowany po raz pierwszy podczas zaćmienia Słońca w 1919 r.).

Tomasz KWAST

