UWAGA !!!

w prenumeracie *Delta* tańsza

SPIS TREŚCI

NUMERU 12(223)

W następnym numerze:

Wspomnienia Rudolfa Peierlsa

Okładkę zaprojektowała
Monika WALCZYK

W informacji o systemie *Mathematica* zamieszczonej w numerze 10/1992 omyłkowo został podany numer tel/fax 6287252.
Prosimy nie korzystać z tego numeru. Jednocześnie informujemy, że wiersz z In[1] powinien wyglądać następująco:
`In[1]=NIntegrate[Sin[Sin[x]],{x,0,Pi}]`
Przepraszamy.

Redakcja

„Delta"
matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21

Adres poczty komputerowej (E-mail address):
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 8 000 egz.
Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

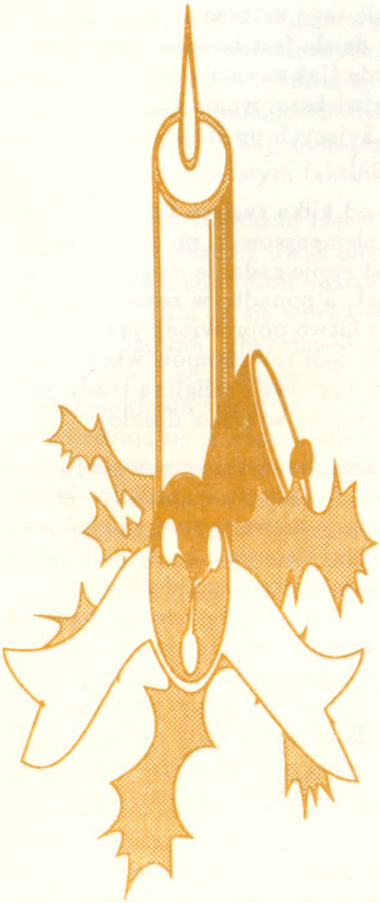
Skład systemem TeX
wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1993 r. wynosi 18 000,– zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
– na teren kraju
  – jednostki kolportażowe „Ruch" właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
  – urzędy pocztowe na terenie wiejskim i w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych „Ruch" – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pocztą zwykłą pod wskazanym adresem **w ramach opłaconej prenumeraty,**
– na zagranicę
  – Zakład Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty,** z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  – na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
  do 20 II na II kwartał
  do 20 V na III kwartał
  do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,– zł

500 lat



Przez cały rok 1992 powracała sprawa pięćsetlecia podróży Krzysztofa Kolumba do Ameryki. Podróż tę nazywa się na całym świecie odkryciem Ameryki, co w jawny, żeby nie powiedzieć nachalny, sposób pokazuje, jak europocentryczna jest kultura światowa.

Obchodzono tę uroczystość różnie: jedni uważali to za okazję do wynoszenia pod niebo Stanów Zjednoczonych Ameryki Północnej (co w Polsce było mało widoczne, jako że USA zajmują w naszej zbiorowej świadomości i tak podniebną pozycję), inni traktowali dotarcie Europejczyków na kontynent amerykański jako początek największego w dziejach ludobójstwa, jeszcze inni świętowali po prostu sukces bardzo śmiałego przedsięwzięcia (tym bardziej godny uwagi, że bohater osiągnął zupełnie co innego, niż zamierzał – wybrał się przecież „z przeciwnej strony" do Indii).

Nie wypada i nam uchylić się od wzięcia udziału w tej rocznicy. Ale postanowiliśmy uchylić się od zajęcia stanowiska w sporze o istotę tego, co się zdarzyło. Nie jesteśmy skłonni myśleć (jak czyni to wielu Amerykanów), że rozczulać się nad Indianami nie warto, bo każdy jest kowalem swego losu i (jeśli nie podobało się im ginąć) mogli wymordować europejskich przybyszów. Nie jesteśmy też przekonani, że hekatomba Indian jest czymś niezwykłym w dziejach ludzkości – wyróżnia się tylko tym, że miała dobrze zarysowany początek i, też dość wyraźny, koniec – historia długo jeszcze polegać będzie na tym, że różne grupy ludzi będą podejmowały zbożny trud wymordowania innych. Zaś wyczyn sportowy Kolumba przeszedłby właściwie niezauważony (kto np. zechciałby urządzać światowe obchody dotarcia Vasco da Gamy do Indii?), gdyby nie to, że akurat ta podróż zmieniła bardzo wiele na świecie. I to zmieniła już wtedy, aktualnie. Właściwie lepiej byłoby powiedzieć, że współcześnie z nią wiele rzeczy się zmieniło.

Kilka aspektów tych zmian chcemy krótko opisać w tym numerze. Wybór aspektów jest arbitralny – nie piszemy np. nic o tym, że wzrosła w efekcie liczba wyznawców idei chrześcijańskich, ani o tym, że rozprzestrzeniły się choroby weneryczne.

Redakcja

Supermocarstwa

Rok odkrycia Ameryki to również rok śmierci Kazimierza Jagiellończyka. Jest to czas, gdy Polska była (mówiąc dzisiejszym językiem) supermocarstwem. Wspólnie z Litwą, złączeni unią personalną (która miała zamienić się za 70 lat w formalną unię państwową), tworzyliśmy największą potęgę w Europie. Polska wyznaczała królów Węgier i Czech, wyraźnie zdominowała Rosję (co próbował przełamać później Iwan Groźny), podporządkowała sobie państwo krzyżackie (późniejsze Prusy), miała zwycięskie zatargi ze Szwedami, gromiła Turków, słowem, trzęsła całą środkową i wschodnią Europą. Nawet księstwa niemieckie znajdowały się w znacznej mierze w orbicie naszych wpływów – np. żony książąt Bawarii, Brandenburgii i Saksonii były córkami Kazimierza Jagiellończyka. Potęgę swoją i bogactwo czerpała Polska z eksportu zboża. Swoją drogą może to dziś wyglądać na żart, gdy się zważy, że liczne państwa znajdujące się obecnie na tamtym naszym terytorium dziś zboże importują mimo nieznacznych zmian glebowych i klimatycznych od XV wieku.

Odkrycie Ameryki przysporzyło nam bardzo silnego konkurenta na zachodzie. Hiszpania dostarczyła Europie niezbędny element rozwoju gospodarczego, jakim jest pieniądz – złoto sprowadzane z nowo odkrytych ziem nakręciło koniunkturę całej zachodniej Europy, a samą Hiszpanię postawiło w roli hegemona. Francja, Anglia, Niderlandy znalazły się we władaniu hiszpańskim. Austria tworzyła z nią personalną unię (od 1519 do 1556 roku), później jedność dynastyczną. Wśród Habsburgów podobną rolę do Kazimierza Jagiellończyka odegrał Karol V.

Wiek XVI to ciągły konflikt między tymi dwiema potęgami – między polskimi Jagiellonami i hiszpańsko-austriackimi Habsburgami (tak naprawdę to Jagiellonowie wywodzili się z Litwy, a Habsburgowie ze Szwabii, ale widać tak już musi być). Wszystko wskazywało na to, że między nimi rozegra się dalsza historia Europy. Jednak wskazywało źle. Wiek XVII to okres wyzwolenia Europy spod władzy supermocarstw. Nam wypowiedzieli posłuszeństwo praktycznie wszyscy sąsiedzi – poprzedni wasale, Hiszpania podobnie straciła właściwie wszelkie wpływy we Francji (Henryk IV), w Anglii (Elżbieta I) i Stanach Holenderskich. Ale to było później. Na przełomie XV i XVI wieku odkrycie nowych lądów stworzyło w Europie wyraźnie dwubiegunowy układ sił.

M.K.

Do Nowego Świata

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Wyprawa do Nowego Świata będąc przejawem ogromnej odwagi, fantazji i wytrwałości Krzysztofa Kolumba była jednocześnie przedsięwzięciem wynikającym ze stanu ówczesnej wiedzy, możliwym dzięki osiągniętemu poziomowi techniki i sztuki żeglarskiej.

Przez długie lata Kolumb poszukiwał argumentów na rzecz swego zamysłu dotarcia do Indii drogą wiodącą z Europy na zachód. Marginesy swej ulubionej księgi *De Imagine Mundi* (*Obraz Świata*) Pierre'a d'Ailly'ego (Piotra z Aliaco), z którą nie rozstawał się przez długie lata, pokrył kilkuset uwagami świetnie dokumentującymi tok jego myśli. I tak w pewnym miejscu Kolumb pisze: *Ziemia to sfera kulista.* Ta zasadnicza przesłanka dla całego przedsięwzięcia była już dobrze ugruntowanym poglądem wśród wykształconych elit owego czasu. Drugą przesłankę Kolumb formułuje w notatce: *Kraniec zamieszkałej ziemi na wschodzie i kraniec zamieszkałej ziemi na zachodzie są dostatecznie bliskie, a pośrodku małe morze.* Ciekawe, że ta opinia była od czasów starożytnych bardzo rozpowszechniona. Była ona częścią teorii, zgodnie z którą na naszej planecie jest jednolity ląd – Eurazja z Afryką (wykluczano istnienie innych kontynentów) obmywany ze wszech stron oceanem. Ptolemeusz uważał, iż szerokość lądu jest równa szerokości oceanu, ale przeważał pogląd, że ląd zajmuje dużo więcej miejsca niż ocean. Z faktu, że słonie żyją w górach Atlasu i w Indiach, wyciągano wniosek o bliskości tych miejsc.

Kilka marginesów pokazuje, że Kolumb próbował ocenić, jaka jest szerokość oceanu. Punktem wyjścia do jego rozważań było stwierdzenie grecko-syryjskiego geografa z I w.n.e., Marinosa z Tyru, że spośród 360° obwodu Ziemi na ląd przypada 225°, a na ocean 135°. Kolumb zmniejszył ową liczbę o 58° argumentując, że w czasach Marinosa Azja kończyła się gdzieś na (dzisiejszym) Półwyspie Malajskim, Marco Polo zaś, którego *Opisanie Świata* słynny genueńczyk pilnie studiował, przesunął granicę poznanego świata do Chin, a później do Japonii. Nieznany ocean na zachodzie rozpoczynał się zaś na Wyspach Kanaryjskich, więc Kolumb odjął dalsze 9° i w ten sposób otrzymał kątową odległość do przepłynięcia

Mikołaj Kopernik (1473–1543)

Dzieło Kopernika *De Revolutionibus* było już omawiane i komentowane przez niezliczonych autorów, cóż może zatem tu dodać nasze pismo? Jeszcze jednego artykułu pochwalnego chyba nie warto pisać, tymczasem niepodobna się tego ustrzec pisząc o dziele naprawdę epokowym. Znaczenie tego dzieła jest bowiem bezsporne: nie tylko podawało światu nową prawdę (jak czynią wszystkie prace przyczynkowe), ale prawda ta była największej wagi, samo zaś dzieło stało się inspiracją dla wielu badaczy żyjących po Koperniku (a tego już prace przyczynkowe nie zapewniają).

Ruchy planet na niebie śledzone były od kilku tysięcy lat i na podstawie tych obserwacji powstał ptolemeuszowski model Układu Słonecznego. Model ten nieźle spełniał swoje zadanie, tzn. pozwalał na obliczanie przyszłych położeń planet, a ponadto w razie wykrycia niezgodności z obserwacjami mógł być łatwo poprawiony przez dodanie nowych epicykli. W rezultacie ogół astronomów właściwie nie czuł potrzeby zmiany uświęconego naukową i religijną tradycją światopoglądu. Dlaczego więc do tej zmiany wreszcie doszło?

Wydaje się, że wszelkie sądy na ten temat zawierają się między dwiema skrajnościami. Jedni mówią tu o geniuszu Kopernika, który bezpardonowo obalił tak – zdawałoby się – niewzruszony pogląd na centralną pozycję Ziemi, podczas gdy inni twierdzą, że Kopernik jedynie stworzył nową hipotezę inaczej interpretującą dostępne wówczas dane obserwacyjne. Cały kłopot w tym, że – moim zdaniem – prawda nie leży tu pośrodku, lecz obejmuje obie te skrajności. Kopernik był geniuszem, ale niezwykle ostrożnym, krytycznym dla siebie i obawiającym się konsekwencji swojej pracy, zarazem rzeczywiście przeniesienie początku układu odniesienia z Ziemi do Słońca nie jest z obecnego punktu widzenia niczym nadzwyczajnym, a jednak wówczas spowodowało jedną z najdramatyczniejszych rewolucji w nauce.

Obserwacje to rzecz święta; jeżeli wykonane są poprawnie, można się z nimi tylko pogodzić. I takie właśnie obserwacje dziennego obrotu nieba i zawiłych ruchów planet na niebie były dostępne całej społeczności piętnastowiecznych astronomów. Jednak dopiero Kopernik dobitnie wyraził, że dobowy obrót nieba musi być złudzeniem i że to Ziemia musi się obracać. Wszyscy też widzieli, że składając (według ówczesnego kanonu) ruch planet z ruchów kołowych, trzeba było zastosować tzw. główny epicykl o rozmiarach jednakowych dla wszystkich planet. Jednak znowu dopiero Kopernik zauważył i nie zawahał się jawnie stwierdzić, że przecież może to być odbiciem ruchu Ziemi wokół Słońca. Inaczej mówiąc, obserwujemy planety z ruchomej Ziemi, więc jej ruch musi modyfikować własny ruch planet na niebie. Te banalne dla nas wnioski z oczywistej zasady względności ruchów były w owym czasie rewelacją i pociągały za sobą daleko idące skutki. Bo skoro Ziemia jest jedną z planet, to cały mistyczny podział na „świat ziemski" i „świat niebieski" traci sens, świat staje się w jakimś sensie jednolity. Sfera gwiazd stałych staje się niemal zbędna, w szczególności odpada konieczność przypisywania jej jakichkolwiek ruchów. Odtąd może ona stanowić jakieś ogromne, niezmienne i o nie znanej na razie naturze otoczenie Układu Słonecznego. Nawiasem mówiąc, brak paralaktycznych przesunięć gwiazd na niebie (w każdym razie mierzalnych), co przecież byłoby koronnym dowodem słuszności modelu heliocentrycznego, Kopernik z całym spokojem i wbrew panującym wówczas opiniom tłumaczył ogromną odległością gwiazd. I okazuje się, że miał rację! – pierwsze paralaksy gwiazd zostały zmierzone dopiero w XIX w. za pomocą przyrządów w jego czasach jeszcze nie istniejących.

Kopernik nie ograniczył się do wypowiedzenia swoich przekonań, lecz na podstawie swojej – formalnie – hipotezy (nie mógł „udowodnić" centralnej pozycji Słońca, gdyż nie istniała wtedy jeszcze dynamika) wysnuł szereg wniosków, czyniąc ją przez to teorią. Np. wynikające z jego heliocentrycznego modelu stosunki rozmiarów deferentów planet do ich głównego epicyklu zinterpretował jako – mówiąc dzisiejszym językiem – rozmiary orbit planetarnych wyrażone w jednostkach astronomicznych, uzyskując świetną zgodność z rzeczywistością. W odniesieniu do Księżyca wykazał, że stosunek jego najmniejszej odległości od Ziemi do największej wynosi 0,76 (w rzeczywistości 0,88), podczas gdy według Ptolemeusza stosunek ten – wbrew oczywistym faktom – wynosił 0,52.

Oprócz samych rozważań merytorycznych Kopernik umieścił w swoim dziele szereg uwag metodologicznych. Tak np. przestrzegał przed budowaniem teorii opartej na zbyt dowolnie przyjmowanych założeniach. Nie da się wprawdzie mechanicznie oddzielić zawczasu założeń „zbyt dowolnych" od dobrych, ale sprawdzianem poprawności badań zawsze będą wypływające z nich wnioski. Powiedzielibyśmy dziś, że ta nauka jest dobra, której przewidywania potwierdzają się w obserwacjach – jest to zasada dla nas tak oczywista, że niemal się o niej nie mówi. Jeszcze jedną tego rodzaju świętą zasadą jest dla Kopernika konieczność logicznego rozumowania. Skutki jej stosowania mogą być przeogromne. Weźmy bowiem taki przykład. Wysokość bieguna niebieskiego zależy od szerokości geograficznej obserwatora – stąd wniosek, że Ziemia jest kulista. Dalej, gwiazdy leżące na równiku niebieskim tyle samo czasu spędzają nad horyzontem, co pod nim – stąd wniosek, że gwiazdy (przynajmniej te właśnie) znajdują się bardzo daleko w porównaniu z rozmiarami Ziemi. A stąd wniosek końcowy: rozsądniej jest przypisać ruch obrotowy małej Ziemi niż nie wiadomo jak wielkiej „sferze gwiazd". Wreszcie niebagatelnym argumentem za słusznością nowej teorii była według Kopernika (i jemu współczesnych) jej „harmonijność", doskonalsza niż w teorii geocentrycznej. Okazało się mianowicie, że im dłuższy jest czas obiegu planety (oczywiście, wokół Słońca), tym obszerniejsza jest jej orbita – taka prawidłowość w modelu geocentrycznym nie miała szans się ujawnić.

Nie należy zapominać też o niedostatkach pracy Kopernika. Wspominaliśmy już, że nie zdobył się na zrezygnowanie z deferentów i epicykli, czyli z tradycyjnej metody składania ruchów jednostajnych po kołach. Trzeba jednak pamiętać, że służyło to opisowi ruchu planet, czyli kinematyce, bez wnikania w przyczyny takiego właśnie ruchu. Z tradycji tej zrezygnował dopiero Kepler odkrywszy ruch po elipsie, też zresztą metodą prób i błędów. Również jednostkę astronomiczną Kopernik oceniał bardzo fałszywie. Według niego Słońce znajdowało się 20 razy dalej niż Księżyc (w rzeczywistości 400 razy dalej), nie miało to jednak większego znaczenia dla jego teorii ruchów planet, gdzie istotne są stosunki rozmiarów ich orbit.

Nie ma potrzeby dowodzić, że nawet na tle epoki, która wydała wielu wybitnych ludzi, Kopernik jest postacią należącą do najwybitniejszych. Jak każde odkrycie astronomiczne, tak i jego dzieło nie miało wielkiego wpływu na codzienne życie szarych ludzi, ale na sposób myślenia ówczesnych elit miało wpływ ogromny. Taka pozornie błahostka, jak zmiana układu odniesienia, spowodowała niesłychany ferment w nauce, stała się przyczyną, dla której jedni robili kariery, inni ginęli, i jeszcze niemal 150 lat upłynęło, zanim model heliocentryczny uzyskał potwierdzenie ze strony dynamiki i walka o nowy system świata ustała.

Tomasz KWAST

równą 68°. W rzeczywistości odległość między kanaryjską wyspą Ferro i Tokio wynosi 202°13′.

Już w III w. p.n.e. grecki geograf Eratostenes ocenił 1° szerokości jako 700 stadionów. Przyjmując długość stadionu jako 160 m otrzymujemy dla 1° rzeczywistą wielkość około 110 km. Kolumb wiedział, że po Eratostenesie podobne pomiary wykonał w IX w. n.e. arabski geograf Al-Farghani otrzymując dla 1° szerokość $56\frac{2}{3}$ mili arabskiej, która równa jest 1973 m. W swoich obliczeniach Kolumb przyjął milę włoską równą 1480 m zamiast arabskiej i znalazł długość do przepłynięcia

$$68 \times 56\frac{2}{3} \times 1,48 = 5710 \text{ km}.$$

Liczba ta stała się podstawą planów wielkiej wyprawy, choć trzeba powiedzieć, że budziła wątpliwości już u współczesnych. Gdyby Kolumb znał rzeczywistą odległość między wyspą Ferro a Tokio, która wynosi 19042 km, nie ruszyłby zapewne na nieznany ocean.

Przedstawione argumenty, choć częściowo błędne, miały charakter całkowicie racjonalny. Ale Kolumb był człowiekiem Średniowiecza i wiary od wiedzy ściśle nie oddzielał, więc uzasadnienia dla swego zamysłu szukał również w tekstach filozofów i proroków. Na marginesie *Medei* Seneki zapisuje hiszpańskie, nieco dowolne tłumaczenie kilku wersów rzymskiego poety: *Nastaną na świecie czasy, kiedy Ocean osłabi więzi rzeczy i odsłoni się wielka ziemia, i nowy żeglarz, podobny temu, który wiódł Jazona i nosił imię Tifis, odkryje nowy świat, a wtedy wyspa Tile nie będzie ostatnią z ziem.*

W apokryficznej, czwartej księdze Ezdrasza znajduje się natomiast potwierdzenie sądu o małości oceanu: *A trzeciego dnia rozkazałeś się wodom zebrać na siódmą część Ziemi, a sześć części osuszywszy zachowałeś (...).*

* * *

W wiekach XIV i XV technika budowy statków, wiedza i sztuka żeglarska poczyniły znaczne postępy. Dzięki nim oceaniczny rejs nie był pomysłem szaleńca, lecz całkiem realnym przedsięwzięciem.

Po Morzu Śródziemnym od czasów starożytnych pływały statki wiosłowe z żaglami używanymi jedynie przy sprzyjających wiatrach. Kombinacja żagli i wioseł była całkowicie zadowalająca, dopóki żegluga odbywała się w rejonach przybrzeżnych, gdzie łatwo można było zdobyć wodę i żywność dla wieloosobowych załóg wioślarzy. Od początku XIV w.

żeglarze śródziemnomorscy odbywają regularne rejsy aż do Brugii we Flandrii, ci zaś z wybrzeży atlantyckich odwiedzają porty śródziemnomorskie. Ożywione kontakty wpływają na szybkie zmiany, jakim ulega konstrukcja statków i ich ewolucja ku typom wspólnym dla wszystkich flot europejskich. W stoczniach żeglarzy północy – spadkobierców Wikingów – budując statek zaczynano od jego kadłuba, po ukończeniu którego wykonywano roboty ciesielskie we wnętrzu. Poszycie robione było z desek zachodzących na siebie, tzn. „na zakładkę". Całość technologii umożliwiała jedynie budowę niewielkich jednostek. W wieku XV porzucono tradycyjną technikę i przyjęto sposób szkutników śródziemnomorskich, którzy najpierw wykonywali szkielet statku, a potem kadłub formując go z desek łączonych „na styk", żeby tworzyły gładką powierzchnię. Dzięki żeglarzom północy natomiast przyswajano sobie w krajach śródziemnomorskich typ statku poruszanego wyłącznie wiatrem, początkowo z jednym masztem, później z dwoma, w końcu z trzema masztami. Od końca XIV wieku pojawiają się karawele, statki budowane w Portugalii, na biskajskim wybrzeżu Kastylii i w stoczniach Andaluzji. Ponieważ z czasem wprowadzono liczne zmiany konstrukcyjne, szczególnie w ożaglowaniu, więc określenie *karawela* jest mało precyzyjne. Z tego też powodu bardzo trudno jest zrekonstruować statki z wyprawy Kolumba, których plany się nie zachowały.

Karawele były zwykle trójmasztowe; miały: fokmaszt – przedni, grotmaszt – główny, środkowy i bezanmaszt – tylny. Wyposażone były również w bukszpryt – drzewce wydłużające jakby kadłub statku do przodu. W porównaniu ze swymi poprzednikami karawele miały bardzo dużą powierzchnię żagli. Ożaglowanie było początkowo gaflowe, później rejowe bądź mieszane. W pierwszym przypadku żagiel rozpinany jest na gaflu – drzewcu skośnie umocowanym do masztu. Gdy nie ma wiatru, żagiel ustawia się wzdłuż osi statku. Przy ożaglowaniu rejowym żagiel umocowany jest do prostopadłej do masztu rei i zwisa prostopadle do osi statku, jeśli jest bezwietrznie. Grotmaszt, który oprócz żagla dolnego – grota niósł także żagiel mniejszy, zwany marslem, robiono z dwóch części. Do grubej i mocnej podstawy przymocowywano odejmowaną stengę i na niej rozwieszano marsel. Poza żaglami podstawowymi, umieszczonymi na bezanmaszcie, grotmaszcie i fokmaszcie,

Zawrotna kariera bulwy

Jan TRĘTOWSKI

Przeciętny mieszkaniec naszego kraju nie wyobraża sobie obiadu bez ziemniaka. Upodobania nasze są bardzo różne. Mieszkańcy wschodniej części kraju wolą ziemniaki białe i sypkie, podczas gdy mieszkańcy części zachodniej raczej żółte i zwięzłe. Podobnie układają się upodobania w całej Europie. W krajach bardziej uprzemysłowionych ziemniak traktowany jest jako jarzyna, warzywo i większy jest udział w diecie codziennej różnego rodzaju produktów przetworzonych, takich jak: frytki, czipsy, placki ziemniaczane, budyń, puree, w postaci płatków itp.

Bulwa ziemniaczana zawiera substancję zapasową – skrobię, która ma różnorodne zastosowania w gospodarstwie domowym: krochmal, spirytus, kleje. Ogromna jest również skala zastosowań produktów pochodnych skrobi w przemyśle.

Można więc sformułować tezę, że żadne społeczeństwo nie mogłoby dzisiaj normalnie funkcjonować, gdyby nie bulwa ziemniaczana – przekształcony pęd podziemny, powstająca bez dostępu światła. Ziemniak jest wszechobecny w naszym życiu jak powietrze. I podobnie jak powietrze zauważamy go wtedy, gdy jest go brak.

A przecież ziemniak nie zawsze był obecny w naszym życiu. Nie znany był w starożytnych Chinach, Egipcie, Grecji, Rzymie. Nie wspomina o ziemniaku Biblia, w której występuje np. jabłko, proso, oliwka. Nie znał ziemniaka także średniowieczny Europejczyk.

Obecność ziemniaka w naszej rzeczywistości zawdzięczamy odkryciu Ameryki. Ameryka jest ojczyzną ziemniaka (podobnie jak tytoniu), jest kontynentem, gdzie ziemniak występuje w stanie dzikim.

W Ameryce, ojczyźnie ziemniaka, do dziś występuje około 2000 dzikich gatunków ziemniaka, z których zaledwie niewielka część ma zdolności do tworzenia bulw (tuberyzacji). Uważa się, że ojczyzną tych gatunków jest teren obecnego Meksyku.

Ziemniak w Ameryce Południowej był uprawiany na długo przed przybyciem Kolumba. Pierwsze próby „udomowienia" ziemniaka miały miejsce w rejonie Andów, w południowej części obecnego Peru i północnej Boliwii. Następnie przez migrujących Indian przeniesiony został na tereny dzisiejszego Chile.

Do Europy ziemniak został przywieziony w II połowie XVI wieku z terenów obecnej Kolumbii; do Hiszpanii – około 1570 roku, do Anglii – około 1590 roku. Na przełomie XVI i XVII wieku andyjskie ziemniaki były uprawiane w łagodnych warunkach południowej i zachodniej Europy. W tym okresie ziemniak był traktowany jako roślina lecznicza i ozdobna.

Początki uprawy ziemniaka w celach jadalnych miały miejsce w Irlandii już na początku XVII wieku. Tam też na skutek selekcji w kierunku adaptacji do warunków środowiska powstał ziemniak jako gatunek europejski, który około 1750 roku Linneusz opisał jako *Solanum tuberosum*. Według naszej tradycji ziemniak miał być do Polski przywieziony przez wyprawę króla Jana III Sobieskiego powracającą z odsieczy wiedeńskiej.

Od przybycia do Europy rozpoczyna się właśnie zawrotna kariera bulwy ziemniaczanej. Już w II połowie XVII wieku ziemniak uzyskał ogromne znaczenie w procesie industrializacji naszego kontynentu. Stał się tanim pożywieniem dla robotników, których liczba gwałtownie wzrastała. W XIX wieku rozwinął się przerób przemysłowy ziemniaka na krochmal i spirytus. Wzrasta znaczenie ziemniaka jako paszy dla zwierząt.

Klęska nieurodzaju ziemniaka spowodowana nadmiernymi opadami w 1848 roku była przyczyną głodu w Irlandii i masowej emigracji.

Obecnie ziemniak jest uprawiany praktycznie na całej kuli ziemskiej, głównie między 30° szerokości południowej i 30° szerokości północnej, a także w afrykańskich krajach śródziemnomorskich. Nastąpił także wzrost produkcji ziemniaka w Azji, głównie w Chinach i Indiach, gdzie np. w latach 1970–1976 produkcja wzrosła ponad dwukrotnie. W Europie ziemniak uprawiany jest od Irlandii po Białoruś. Na powodzenie uprawy ziemniaka w Polsce poza klimatem mają wpływ także warunki glebowe. W Polsce produkcja ziemniaka wynosi od 40 do 50 mln ton rocznie, co daje około 1200 kg na jednego mieszkańca (1980 r.) – najwięcej na świecie; w tym samym roku Holandia wyprodukowała 880 kg, Białoruś około 1000 kg, Irlandia 300 kg (też w przeliczeniu na jednego mieszkańca). Holandia przeznacza największą część swoich gruntów ornych pod uprawę ziemniaka – około 19,3%, Polska – około 15%.

Znaczenie gospodarcze ziemniaka wymaga jego dalszego i ciągłego doskonalenia. Praktycznie każdy liczący się w produkcji ziemniaka kraj prowadzi prace hodowlane mające na celu uzyskiwanie coraz lepszych i wydajniejszych form noszących nazwę odmian. Wyróżniamy więc odmiany jadalne o różnej barwie miąższu i konsystencji (typie kulinarnym), odmiany skrobiowe, pastewne i specjalne, przeznaczone do przerobu na różne produkty spożywcze. Pod względem długości okresu wegetacji dzielimy odmiany na bardzo wczesne, wczesne, średnio wczesne, średnio późne i późne.

W Polsce uprawia się obecnie około 50 odmian. Do najbardziej znanych należą:

bardzo wczesne (60 – 70 dni wegetacji)	Frezja, Ruta, Koral, Irys
wczesne (80 – 90 dni wegetacji)	Jaśmin, Perkol, Lotos (jadalne) i Duet (skrobiowa)
średnio wczesne (około 100 dni wegetacji)	Elida, Beryl, Mila, Fauna (jadalne) oraz Ronda, Bliza, Darga (skrobiowe)
średnio późne (około 110 dni wegetacji)	Sokół, Bryza, Atol, Arkadia (jadalne) oraz Certa, Cisa, Brda (skrobiowe)
późne (około 120 dni wegetacji)	Tarpan, Janka, Bronka (jadalne) oraz Bóbr, Stobrawa, Bzura (skrobiowe)

Różnorodność odmian zapewnia stabilizację produkcji czyniąc ją mniej zależną od zmiennych warunków pogodowych. W krajach o wysokim poziomie rolnictwa (Niemcy, Holandia, Francja) liczba odmian bedących w uprawie jest zdecydowanie wyższa.

Ziemniak jako roślina uprawna zrobił więc w okresie ostatnich 500 lat, które minęły od odkrycia Ameryki, karierę wręcz zawrotną.

W krajach uprzemysłowionych i rozwiniętych gospodarczo nastąpiła pewna stabilizacja produkcji spowodowana głównie powstaniem zaplecza przemysłowego. W krajach trzeciego świata prawdopodobnie będziemy obserwować dalszy wzrost jego produkcji i znaczenia. W stolicy Peru, Limie, działa Międzynarodowy Ośrodek Badawczy (International Potato Centre) zajmujący się rozpowszechnianiem ziemniaka w tych krajach.

Bulwa ziemniaczana zawiera skrobię, podobnie jak ziarno zbóż, i skrobia jest głównym przedmiotem zainteresowania z punktu widzenia gospodarki. Jednak chyba warto wiedzieć o tym, że ziemniak jest także ważnym źródłem witaminy C. Zawiera jej mniej niż np. cebula czy czarna porzeczka, lecz fakt, że spożywamy go praktycznie codziennie, spowodował, że taka choroba, jak szkorbut, jest obecnie nieznana w północnej i środkowej Europie.

stosowano również dodatkowe żagle rozpinane między masztami i na bukszprycie.

Walory żeglarskie karawel były niezwykle wysokie. Mogły one pływać z prędkością, którą oceniano na 10 węzłów (jeden węzeł to jedna mila morska na godzinę). Potrafiły żeglować pod wiatr, więc nie były zdane tylko na sprzyjające wiatry. Ca'da Mosto, Wenecjanin w służbie portugalskiej, który w roku 1456 odkrył Wyspy Zielonego Przylądka, pisał, że potrafił żeglować kursem pod kątem 6 rumbów, tj. 67,5° do kierunku wiatru.

Postępom w budowie statków towarzyszył rozwój nawigacji, czyli sztuki prowadzenia statków. Od początku XIV w. jest w użyciu przejęta od Arabów busola (od słowa *buzula* – skrzyneczka z bukszpanowego drewna), dzięki której można było określić kurs statku. W owym czasie nie wiedziano, oczywiście, że magnetyczna igła kieruje się nie w stronę geograficznego, lecz magnetycznego bieguna Ziemi. Odkrycie deklinacji magnetycznej zawdzięczamy właśnie Kolumbowi, o czym jeszcze poniżej.

Około roku 1480 opanowano umiejętność wyznaczania szerokości geograficznej pozycji statku na podstawie wysokości kątowej nad widnokręgiem Słońca lub Gwiazdy Polarnej. Wykorzystywano do tego zmniejszone i zmodyfikowane astrolabium i kwadrant. Relacja między położeniem Słońca czy Gwiazdy Polarnej a szerokością geograficzną zależy, oczywiście, od dnia roku. Tablice deklinacji Słońca umożliwiające odpowiednie przeliczenie sporządzili Portugalczycy i wydali je w Wenecji w roku 1483.

Dokładne wyznaczenie długości geograficznej stało się możliwe dopiero w połowie wieku XVIII, gdy weszły do użytku precyzyjne zegary. W czasach Kolumba oceniano długość geograficzną na podstawie przebytej przez statek drogi. Czas na statkach określano za pomocą zegarów piaskowych. Z górnej do dolnej części piasek przesypywał się w ciągu pół godziny, potem przydzielony do przyrządu chłopiec okrętowy odwracał klepsydrę, a dowódca wachty zaznaczał na łupkowej tabliczce jej numer. Prędkość statku oceniano według czasu, jaki potrzebował wyrzucony za burtę przedmiot na przepłynięcie wzdłuż statku. Pierwsza wzmianka o logu – przyrządzie do mierzenia prędkości pochodzi dopiero z roku 1577.

Wraz z innymi działami wiedzy żeglarskiej rozwija się kartografia. W XIV w. korzystanie z map staje się powszechne.

W roku 1354 Piotr IV Aragoński nakazał kapitanom swoich statków, aby każdy zaopatrzył się w mapy. Zasadniczy jednak krok w rozwoju kartografii morskiej został zrobiony dopiero 60 lat po śmierci Kolumba. W roku 1569 flamandzki matematyk i kartograf, Gerhard Mercator ogłosił system rzutowania sfery na powierzchnię walca i opracował odpowiednią mapę świata. Mapy w rzucie Mercatora są stosowane w nawigacji do dziś.

* * *

Wyprawy Kolumba będące szczytowym osiągnięciem żeglarskim wieku XV ogromnie się przyczyniły do dalszego rozwoju wiedzy i sztuki żeglarskiej.

Już w trakcie pierwszej wyprawy Kolumb odkrył zjawisko deklinacji magnetycznej. W tydzień od wyruszenia z Wysp Kanaryjskich zauważył, że igła magnetyczna odchyliła się od kierunku wyznaczonego przez Gwiazdę Polarną, przy czym odchylenie wzrastało w miarę posuwania się na zachód. W drodze powrotnej spostrzegł natomiast, że odchylenie się zmniejszało, aż do momentu, gdy w odległości około 100 mil hiszpańskich od Wysp Azorskich igła wskazywała dokładnie północ, a później zaczęła odchylać się w przeciwną niż poprzednio stronę. Obserwacje te powtarzał Kolumb również podczas następnej podróży przez ocean, a opisał w liście pisanym z Hispanioli (Haiti) w roku 1498 w trakcie trzeciej wyprawy.

Drugim wielkim osiągnięciem Kolumba było znalezienie optymalnej z punktu widzenia prądów oceanicznych drogi do Ameryki. Już sam wybór kursu z Hiszpanii na południe do Wysp Kanaryjskich był iście genialny.
Od brzegów Półwyspu Pirenejskiego do Wysp Kanaryjskich płynie silny Prąd Kanaryjski. Na południe od owych wysp skręca on gwałtownie na zachód i wpada do nurtu Prądu Północnorównikowego. Prąd ten przecina Ocean Atlantycki w strefie północnych pasatów i dociera do brzegów Kuby i Florydy. Tą właśnie drogą płynął Kolumb na spotkanie z Nowym Światem. Do Hiszpanii natomiast żeglował trzymając się Golfsztromu, który przecina północny Atlantyk z południowego zachodu na północny wschód i znosi statki w kierunku Azorów. Odkrycie właściwej drogi miało ogromne znaczenie – umożliwiło już w kilka lat od pierwszej wyprawy stałą komunikację między Nowym i Starym Światem.

Indyk

Indyk dziki zamieszkiwał obszary dzisiejszych stanów Ohio, Kentucky, Illinois, Arkansas, Tennessee i Alabamy. Obecnie zachował się jedynie w południowej części USA i w Meksyku. Podgatunek południowy, występujący w Meksyku, był ptakiem domowym Azteków. Do Europy został przywieziony przez Hiszpanów na początku XVI wieku.

Pies

Jedynym zwierzęciem domowym Indian był pies. Psy były używane jako zwierzęta juczne i do ciągnięcia włók. Niektóre plemiona używały psów do ścigania zwierzyny w czasie łowów. Wiele plemion jadało psie mięso, które uważane było za przysmak godny zasłużonych ludzi. Jadano je w czasie ważnych ceremonii i narad.

Mokasyny

Mokasyny stanowiły pierwszą część odzieży indiańskiej przejętej przez Europejczyków. Istniały dwa podstawowe rodzaje mokasynów: 1) o twardej zelówce z niewyprawionej skóry i miękkiej przyszywanej cholewce i 2) całe wykrojone z jednego kawałka miękkiej skóry.
Te pierwsze noszone były na równinach i południowym zachodzie, gdzie sztywny spód chronił stopy przed kamieniami, kaktusami i spaloną ziemią, te drugie – przez Indian zamieszkujących lasy. Ciężkie, europejskie obuwie po przemoczeniu w dzień nie wysychało przez noc i szybko ulegało zniszczeniu. Dlatego biali zdobywcy szybko przyswoili sobie indiańskie obuwie doskonale dostosowane do lokalnych właściwości terenu.

Tobogan

Tobogan, sanie do transportu rannych w górach, wywodzi się z sanek ciągniętych przez psy używanych przez plemiona Athabasków i Algonkinów. Po algonkinsku tobogan oznacza sanki ciągnięte przez psy. Współczesne kajaki budowane są na wzór indiańskich kanu – lekkich łodzi, których drewniany szkielet pokrywany był brzozową korą.

Hamak

Pierwszą stosunkowo dużą wyspę, na którą trafił Kolumb podczas pierwszej wyprawy, nazwał Fernandyną – od imienia Ferdynanda, katolickiego króla Aragonii, jednego z protektorów wyprawy. Tutaj po raz pierwszy Kolumb odwiedził tubylczą chatę i zobaczył wiszące, przywiązane do słupów łóżko. Krajowcy nazywali je „hamak" bądź tak się Kolumbowi wydawało i tak to zapisał. Tubylcza ludność została przez konkwistadorów wymordowana w ciągu kilkudziesięciu lat, a jej język zapomniany. „Hamak" jest prawdopodobnie jedynym zachowanym słowem. O zaletach hamaka nikogo zapewne nie należy przekonywać. Warto może wspomnieć, że hamaki niezwykle się rozpowszechniły w krajach tropikalnych i że służyły marynarzom przez kilka stuleci.

Tytoń

Kolejną rośliną psiankowatą, przywiezioną z odkrytej przez Kolumba Ameryki obok ziemniaków i pomidorów, a tak obecnie rozpowszechnioną, jakby była „od zawsze", jest tytoń. Zarówno ten szlachetny (*Nicotiana tabacum*), jak i pogardzana ostatnio machorka (*Nicotiana rustica*), jak też wszelkie inne odmiany (w tym hodowane jako rośliny ozdobne), wszystkie pochodzą z Ameryki. Pierwsze odnotowane wzmianki o obecności tej rośliny w Europie datowane są na 1559 rok.

Palenie tytoniu, jak wiadomo, szkodzi. Szkodzi na różne sposoby. Najistotniejszy z nich nie ma nic wspólnego z, utożsamianą zwykle z tytoniem, nikotyną (liść tytoniu zawiera 1–3% tej substancji) – chodzi o osadzanie się w płucach substancji smolistych wciąganych tam wraz z papierosowym dymem. Rola zaś samej nikotyny ($C_{10}H_{14}N_2$, alkohol pirydynowy) jest typowa dla substancji pobudzających. Z punktu widzenia biochemii nikotyna wspomaga powstawanie tzw. ATP (*adenozynotrójfosforanu*), który jest najważniejszym środkiem przenoszenia energii w organizmach żywych; w praktyce (czyli z punktu widzenia medycyny) oznacza to pobudzanie układu nerwowego, a w konsekwencji wzmaga zdolności wydzielania gruczołów i podwyższa ciśnienie krwi – tym wszystkim mogą palacze uzasadniać zyski z palenia papierosów. Przedawkowanie powoduje jednak w pierwszej kolejności doraźne wyeksploatowanie organizmu (zużycie wszelkich posiadanych zasobów energetycznych), a dalej – przez nasilenie oddziaływania na układ nerwowy – paraliż układu oddechowego. Śmiertelna dawka nikotyny dla człowieka to około 50 mg (papieros zawiera 1,8 mg nikotyny, choć nie sposób stwierdzić, ile z tego wchłania palący).

Nikotyna jest jednak (jak większość substancji tego typu) cennym lekiem – obok korzystnego działania pobudzającego ważną rolę pełni rozprowadzanie po organizmie fosforu, którego brak powoduje nadmierną kruchość kości.

Mniej znaną wartością tytoniu jest używanie go w przemyśle spożywczym jako ważnego surowca do produkcji kwasu cytrynowego.

M.K.

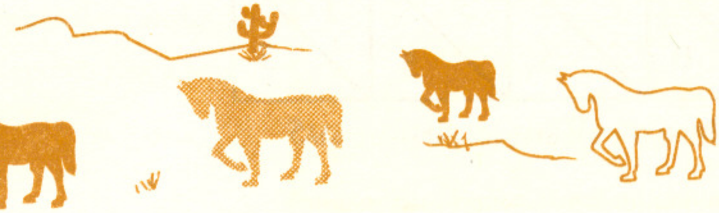
Koń

Z tego, co Europejczycy dostarczyli Ameryce, a czego nie musimy się dzisiaj wstydzić, najbardziej wrósł w jej krajobraz koń. Mustangi, pędzący na nich Indianie, kowboje czy gauchos to obrazek tak amerykański, że nie chce się wierzyć, iż konie nie są rdzennie amerykańskie. I słusznie – koń, gatunek koń, powstał na terenach Ameryki Północnej. Było to bardzo dawno temu, około 50 mln lat. Niewielkie zwierzę wielkości psa (dziś zwane *Eohippus*), jeszcze pięciopalczaste, ma cechę bardzo charakterystyczną dla koniowatych – brak obojczyka, co oznacza, że jego kończyny poruszają się tylko w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny symetrii ciała. Od niego (co udokumentowali paleontolodzy) wywodzą się konie. Szczątki *Eohippusa* odkryto w Wyoming, na terenach, które dziś zwą się słusznie Badlands (okolice Wind River), ale które 50 mln lat temu były wspaniałym, żyznym stepem. W Europie odkryto współczesne *Eohippusowi* zwierzę o podobnych cechach, lecz wymarło ono bezpotomnie.

Potomkowie *Eohippusa* – *Mesohippus* i *Parahippus* prezentują ewolucję zarówno stopy (ku jednopalczastości), jak zębów, a także wzrostu, która prowadzi do gatunku *Equus*, czyli do konia. Przez cały jednak eocen, oligocen, miocen i pliocen kolejne wersje prakonia dostają się na teren Azji przez trudny dziś do przebycia pomost łączący Alaskę z Syberią. Tam jednak giną bezpotomnie. Dopiero pod koniec pliocenu, tuż przed epoką lodowcową, następuje skuteczna migracja *Equusa* na teren Eurazji. Żeby było śmieszniej, w epoce lodowcowej ludzie przedostaną się z Azji do Ameryki tą samą drogą i również będzie to migracja skuteczna – są to przodkowie późniejszych Indian.

Equus potrzebuje na zasiedlenie i przebycie Azji blisko milion lat, by dotrzeć do Europy mniej więcej pod koniec zlodowaceń. W tym czasie jego amerykańscy krewni wymierają bez śladu. Koń jest w Europie zwierzęciem oryginalnym – jeszcze 7000 lat temu Sumerowie uważali jazdę konną za szkodliwe dziwactwo, a 3000 lat po nich Achajowie nie byli w stanie uwierzyć, że jeździec na koniu to dwa, a nie jeden organizm, tworząc postać centaura. Późniejsza kariera konia jest błyskawiczna – staje się on nawet symbolem rycerstwa i dzielności. I wtedy wraca na ziemie przodków z hiszpańskimi konkwistadorami, by w nowej–starej ojczyźnie stworzyć raz jeszcze wspaniały dziki gatunek nieposkromionego władcy stepów, szkoda, że nawet w Argentynie właściwie już wymierający.

M.K.



mała delta

Kłopoty z rachunkami

W średniowiecznej Europie matematyka w znacznej mierze sprowadzała się do rachunków. Były to, na przykład, rachunki kupieckie i rachunki kalendarzowe – takie jak wyliczenie daty Wielkanocy. Ponieważ jednak nie posługiwano się systemem dziesiętnym, więc nawet te proste rachunki nie były tak proste.

Jeśli chcesz się o tym przekonać, to rozwiąż następujące „proste" zadanie kalendarzowe.

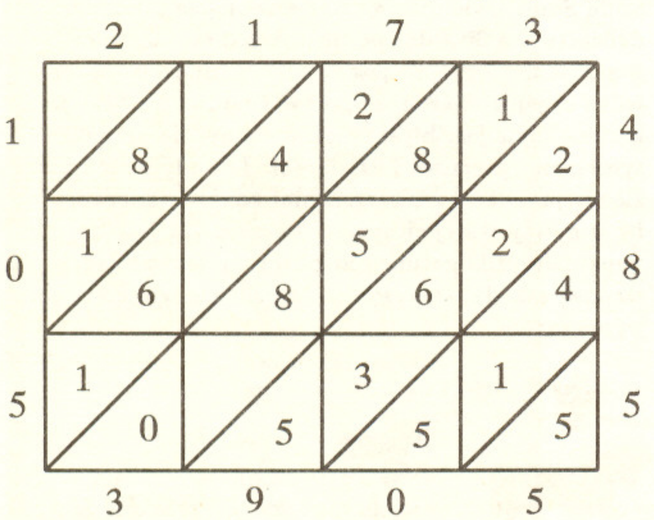
Dziś jest wtorek. Oblicz – nie posługując się systemem dziesiątkowym – jaki dzień będzie za MCCXXIII dni.

(dla tych, którzy nie pamiętają: M oznacza 1000, C zaś 100).

Jak piszemy na stronie 11, z takimi rachunkami radzono sobie za pomocą abaka.

Wprowadzenie systemu dziesiętnego umożliwiło zastąpienie rachunków na abaku rachunkami pisemnymi. Oprócz obecnie stosowanych metod dodawania, mnożenia i dzielenia pisemnego było wiele innych. Poniżej opisana metoda mnożenia liczb nosiła nazwę „gelosia", dlatego, że sposób zapisywania rachunków przypomina zakratowane okiennice, które tak właśnie się nazywały.

Chcąc pomnożyć liczby 2173 i 485 rysujemy „szachownicę" 4 na 3 (bo po tyle cyfr mają mnożone liczby).



$$2\ 173 \cdot 485 = 1\ 053\ 905$$

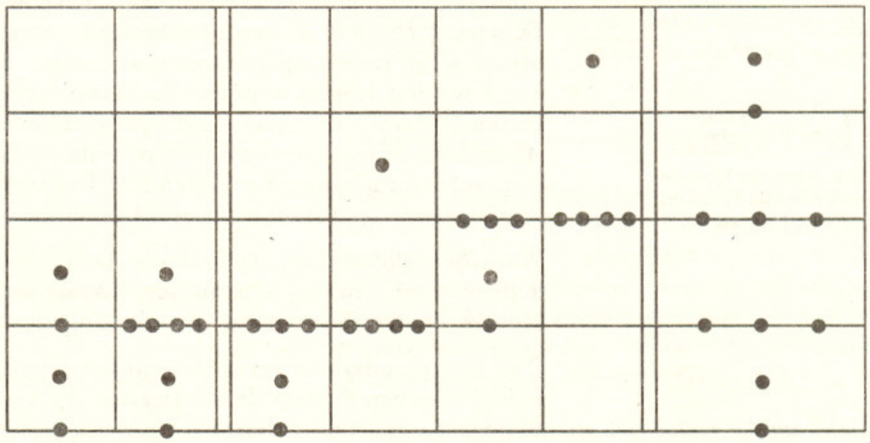
Każde z pól dzielimy przekątną. U góry i z boku zapisujemy mnożone liczby. Iloczyny cyfr – po jednej z obu liczb – zapisujemy w odpowiednich polach, a następnie wyniki dodajemy po skosach – tak jak na rysunku. Dokładne prześledzenie i zrozumienie omawianej metody pozostawiamy jako zadanie.

Wprowadzenie systemu dziesiętnego nie wyparło rachunków na różnych przyrządach do liczenia. Od końca XV w. rozpowszechnione było tzw. liczenie na liniach.

Na desce rysowano proste poziome – najniższe dla jednostek, wyższe dla dziesiątek, dalej dla setek, tysięcy itd. Liniami pionowymi oddzielano poszczególne składniki, czynniki itd. Cyfry oznaczano kładąc na odpowiednich polach metalowe żetony. Żeton na linii oznaczał jednostkę, a pomiędzy liniami – pięć jednostek.

Na poniższym rysunku przedstawiamy przykład wykonania mnożenia na liniach

$$66 \cdot 96 = 36 + 540 + 360 + 5400 = 6336\,.$$



Dokładne zrozumienie powyższego rachunku pozostawiamy jako zadanie.

Warto zaznaczyć, że za pomocą żetonów można było też wykonywać bardziej skomplikowane rachunki, np. na ułamkach.

Chcąc ułatwić sobie mnożenie dużych liczb naturalnych korzystano z następującego wzoru

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}\,.$$

Dlatego też wydawano tablice kwadratów albo też ćwiartek kwadratów liczb naturalnych. (W 1592 roku wydano tablice zawierające kwadraty liczb od 1 do 100 000). Dzięki temu pomysłowi mnożenie sprowadzało się do jednego dodawania i dwóch odejmowań (jeżeli dysponowaliśmy tablicą ćwiartek kwadratów).

Aby przekonać się, czy rzeczywiście jest to dobra metoda, proponuję zadanie.

Pomnóż liczby 35742 i 63179 sposobem szkolnym i powyższym. Zamiast tablicy ćwiartek kwadratów użyj kalkulatora. Oczywiście, wszystkie inne operacje wykonaj na kartce.

No i który sposób jest lepszy?

Małą Deltę przygotował Piotr HAJŁASZ

Kompleksy i algebra

W 732 roku Karol Młot zatrzymał Arabów w ich zwycięskim, zdobywczym pochodzie wokół Morza Śródziemnego. Od tego momentu zaczyna się trwająca około tysiąca lat rywalizacja cywilizacyjna i naukowa między Arabami (i islamem) a Europejczykami (i chrześcijaństwem). Wyprawy krzyżowe czy mozolne odbijanie Arabom Półwyspu Pirenejskiego dowodziły jednak (szczególnie uczestnikom tych walk), że kultura arabska, nauka arabska, cywilizacja arabska stoją na znacznie wyższym poziomie od swoich europejskich odpowiedników. Stan taki, to znaczy stan ciężkiego totalnego kompleksu niższości, trwa właściwie aż do XVI wieku, choć bezradność, eksponująca jako zadośćuczynienie tylko słuszność wiary, kończy się w momencie wyboru na papieża francuskiego mnicha Gerberta (Sylwester II, 999 r.), zresztą po odbyciu przez niego studiów w arabskim Toledo. Z czasem (początek XII wieku) powstają uniwersytety, rodzi się naukowa tożsamość Europy. Ale kompleks pozostaje. W matematyce wyraża się on uznaniem za najlepszą, najnowocześniejszą, najważniejszą gałąź tej nauki algebry – jedynej dyscypliny matematycznej stworzonej przez Arabów. Kto wie, ile z tego poglądu dotrwało do czasów nam współczesnych.

Algebra jest słowem powstałym przez zniekształcenie fragmentu tytułu dzieła Muhammada ibn Musa al-Chwarizmiego (powstałego w pierwszej połowie IX wieku) *Hisab al dżabr ua-l-mukabala – Sztuka redukcji i przenoszenia* ustalającego zasady operowania równaniami. Jest to więc dosłownie *redukcja*. Skrót ten jest zresztą wspólny dla Europejczyków i Arabów. Inny termin matematyczny – *algorytm* – jest już czysto europejskim neologizmem: *Algorithmi de numero Indorum* nazywało się łacińskie tłumaczenie pracy o sposobach rachowania w systemie dziesiętnym – miało to znaczyć *Al-Chwarizmiego* (dzieło) *o liczbach indyjskich.*

Ważność problematyki algebraicznej była taka, że zakompleksieni Europejczycy dopiero wtedy uwierzyli, iż nie są od Arabów gorsi, gdy rozwiązali problem, którego Arabowie rozwiązać nie potrafili, choć uważali go za bardzo ważny.

Dwa lata po odkryciu przez Kolumba Ameryki ukazała się drukiem praca Luki Pacioliego *Summa de arithmetica.* W niej znalazło się, między innymi, zdanie: *dla równań sześciennych nie ma sposobu w arytmetyce, tak jak nie ma sposobu na kwadraturę koła.* Zdanie to spowodowało zmasowany atak na problem rozwiązalności równań trzeciego stopnia zakończony po czterdziestu latach sukcesem. Podobno Scipio del Ferro, a na pewno Tartaglia (Nicolo Fontana), równanie takie rozwiązali. O wadze problemu niech świadczy fakt, że rozwiązanie jego zostało przywłaszczone przez należącego do elity Girolamo Cardano i do dziś jest nazywane jego nazwiskiem (Tartaglia pochodził z nizin społecznych). Jak to dokładnie było, to już inna historia. Warto jednak tu odnotować, że przełamanie kompleksu niższości europejskich matematyków nastąpiło właśnie w tym momencie historii. Od tej pory europejscy matematycy byli już tak samo zarozumiali, jak są dziś.

Marek KORDOS

Rozwiązanie zadania F 347. Ziemię i Księżyc traktujemy jako układ izolowany. Jeśli zmniejsza się moment pędu związany z ruchem obrotowym Ziemi, to musi wzrastać moment pędu odpowiadający ruchowi orbitalnemu Księżyca, tak aby całkowity moment pędu był zachowany. Niech r oznacza szukaną odległość Księżyca, gdy Ziemia na skutek przypływów wyhamuje swój ruch obrotowy. Moment pędu Księżyca $I = mvr$ możemy wyznaczyć z równania opisującego ruch Księżyca w polu grawitacyjnym Ziemi $G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$, stąd $I = \sqrt{GMm^2r}$. Moment pędu Ziemi $I_z = \frac{2}{5}MR^2\omega$, gdzie $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = 24$ godziny – jest okresem obrotu Ziemi. Korzystając z zasady zachowania momentu pędu mamy

$$\sqrt{GMm^2r_0} + \frac{2}{5}MR^2\omega = \sqrt{GMm^2r},$$

skąd

$$r = \left(\sqrt{r_0} + \frac{2MR^2}{5\sqrt{GMm^2}}\right)^2.$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy $r = 595$ tys. km.

Rozwiązanie zadania F 348. Niech r oznacza odległość drobiny od Słońca, m zaś jej masę; M – oznacza masę Słońca, R – odległość Ziemi od Słońca. Drobina jest zarazem przyciągana przez Słońce siłą grawitacji, jak i wypychana przez promieniowanie z siłą $F = \frac{P}{c}$, gdzie P jest mocą promieniowania padającego na drobinę, c zaś jest prędkością światła. Porównując tę siłę z siłą grawitacji mamy

$$\frac{P}{c} = \frac{GMm}{r^2},$$

z drugiej strony $P = \frac{SR^2\phi}{r^2}$, gdzie $S = \pi x^2$ jest przekrojem poprzecznym drobiny. Podstawiając P do poprzedniego wzoru mamy

$$\frac{\pi x^2R^2\phi}{cr^2} = \frac{4GM\pi x^3\rho}{3r^2},$$

uwzględniając, że $a = \frac{GM}{R^2}$ otrzymujemy

$$x = \frac{3\phi}{4ac\rho} = 1,2\cdot 10^{-7}\ \text{m}.$$

Mniejsze drobiny będą wypychane poza Układ Słoneczny.

Summa de arithmetica

Franciszkanin Luca Pacioli (1445–1514) był autorem jednego z pierwszych wydanych drukiem dzieł matematycznych. Była nim wydana w języku włoskim *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494) (*Wiadomości o arytmetyce, geometrii, stosunkach i proporcjonalności*). Warto zaznaczyć, że wcześniej został już wydany łaciński przekład *Elementów* Euklidesa (1482). Jedną z bardzo istotnych zalet dzieła Paciolego była jego powszechność, którą uzyskało ono dzięki temu, że zostało wydane drukiem. W książce tej, która była pewnego rodzaju encyklopedią wiedzy z arytmetyki, algebry i trygonometrii, Pacioli opisał, między innymi, różne metody wykonywania działań arytmetycznych. I tak dla mnożenia, oprócz obecnie stosowanego sposobu, podał siedem innych. (Jeden z nich o nazwie „gelosia" opisaliśmy w *Małej Delcie*).

W części algebraicznej Pacioli zajmował się równaniami liniowymi, kwadratowymi i dwukwadratowymi. Pacioli poświęcił też dużo miejsca geometrii, arytmetyce kupieckiej i buchalterii, a także zadaniom niezwykłym.

Opracował P.H.

Wynalezienie druku

Jan Gutenberg (Johannes Gensfleisch) urodził się w Moguncji na krótko przed rokiem 1400. Około roku 1430 przeniósł się do Strasburga, gdzie pracował jako złotnik i szlifierz drogich kamieni.

W 1438 roku zawarł wraz z dwoma wspólnikami umowę, której cel został określony enigmatycznie jako „doskonalenie pewnej sztuki". Przedsięwzięcie to było okryte tajemnicą i tylko dzięki dokumentom sądowym wiadomo, że dotyczyło ono pracy nad drukiem. Około roku 1445 Gutenberg powrócił do Moguncji. Ponieważ praca nad drukiem wymagała wielkich nakładów finansowych, więc zawarł spółkę z Janem Fustem, którego rola sprowadziła się do zainwestowania 1600 guldenów.

Drukarnia zaczęła pracować. Pierwszym wielkim dziełem (choć nie pierwszym w ogóle), które wyszło z drukarni Gutenberga, była Biblia. Ukazała się ona w 1455 roku w nakładzie 200 egzemplarzy. Do dziś zachowało się ich tylko 46. Jeden z nich znajduje się w Polsce, w Bibliotece Seminarium Duchownego w Pelplinie.

Dzieło to było, niestety, pierwszym i ostatnim wielkim dziełem Gutenberga. Bowiem wkrótce potem jego wspólnik Fust zażądał zwrotu zainwestowanych pieniędzy, skutkiem czego w wyniku rozprawy sądowej drukarnia stała się własnością Fusta.

Niewiele wiadomo o późniejszych losach Gutenberga. Zmarł on w 1468 roku.

Pomysł Gutenberga polegał na odlewaniu z metalu czcionek – pionowych słupków zakończonych literami. Ze słupków tych składał on całe strony tekstu, które następnie odbijał na prasie w dowolnej liczbie egzemplarzy. Wykonanie tego pomysłu wymagało wielkiej precyzji, a także wielu doświadczeń. Na przykład jeden z problemów stanowił metal, z którego były wykonywane czcionki. Początkowo do ich odlewania Gutenberg wykorzystywał ołów, lecz metal ten był zbyt miękki. Po długich doświadczeniach stopem o odpowiednich własnościach okazał się stop ołowiu, cyny i antymonu.

Technika drukarska dająca możliwość wielokrotnego zwiększenia nakładu książek błyskawicznie rozpowszechniła się w Europie. Do końca XV w. czynne były drukarnie w 250 miastach, a ich produkcję ocenia się na 40 000 druków.

W Polsce pierwsza drukarnia pojawiła się w Krakowie na przełomie lat 1473 i 1474.

Opracował P.H.

Dziesiętny układ pozycyjny

W średniowiecznej Europie posługiwano się rzymskim sposobem zapisywania liczb. Łatwo sobie wyobrazić, do jakich problemów prowadziły proste nawet rachunki. Chcąc dodawać, mnożyć, dzielić, a także wykonywać rachunki na ułamkach posługiwano się abakami. Były to pewnego rodzaju liczydła. Opanowanie jednak umiejętności wykonywania bardziej skomplikowanych rachunków na abaku nie było wcale takie łatwe. W XI i XII wieku napisano wiele dzieł poświęconych budowie i sposobowi jego używania.

Zasadnicze uproszczenie w wykonywaniu rachunków przyszło dopiero wraz z dziesiętnym systemem pozycyjnym. Aby jednak o tym opowiedzieć, cofnijmy się o kilka wieków i przenieśmy się na wschód, do Indii. Dziesiętny system pozycyjny – ten, którego używamy obecnie, został w pełni ukształtowany w VII wieku w Indiach. Należy sobie jednak zdać sprawę, że powstanie tego systemu, jak i wyglądu cyfr, było ewolucyjne, długotrwałe i dlatego trudno jest ustalić ścisłą chronologię „wydarzeń".

Dziesiętny system pozycyjny szybko został uznany i rozpowszechniony w świecie arabskim.

Do kultury europejskiej cyfry indyjsko-arabskie (ze względu na liczne metamorfozy wyglądu cyfr trudno powiedzieć, w jakim stopniu obecnie używane w Europie cyfry mają genezę indyjską, a w jakim arabską) zaczęły docierać od Arabów poprzez Hiszpanię już w X wieku, lecz jeszcze długo trzeba było czekać na przeniknięcie i upowszechnienie się systemu pozycyjnego.

Na jego upowszechnienie decydujący wpływ miały łacińskie przekłady arabskich dzieł traktujących o arytmetyce. Równie ważnym w tym względzie dziełem było obszerne dzieło *Liber Abaci* (1202) napisane przez Leonarda z Pizy zwanego Fibonaccim. Dzieło to, choć jak na ówczesną Europę słusznie uznane za genialne, było jedynie zebraniem i usystematyzowaniem tego, czego Leonardo nauczył się w czasie swoich kupieckich podróży na wschód. Należy bowiem wiedzieć, że aż do XVI wieku, kiedy to znaleziono rozwiązanie równań trzeciego stopnia, w matematyce europejskiej nie powstało nic, co nie byłoby znane w matematyce arabskiej.

Powróćmy jednak do systemu dziesiętnego. Mimo ewidentnych korzyści płynących ze stosowania systemu pozycyjnego, jego wprowadzenie napotykało wiele sprzeciwów. Na przykład, w 1299 roku zakazano florenckim bankierom używania cyfr arabskich w księgach rachunkowych.

Początek powszechnego stosowania cyfr arabskich w tychże księgach przypada dopiero na czternasty – piętnasty wiek.

Opracował P.H.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 1993

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Zadania z matematyki nr 251, 252

Redaguje Marcin E. KUCZMA

251. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ nie są prostopadłe i przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że prosta przechodząca przez ortocentra (punkty przecięcia wysokości) trójkątów PAB i PCD jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki boków BC i DA.

252. Ciąg wielomianów $W_0(x)$, $W_1(x)$, ... jest określony przez warunki $W_0(x) = 1$, $W_{n+1}(x) = W_n{}'(x) - 2x\,W_n(x)$. Dowieść, że
$$W_{2k+1}(0) = 0\,, \quad W_{2k}(0) = \frac{(-1)^k(2k)!}{k!} \quad \text{dla } k = 0,1,2,\ldots.$$
Zadanie **252** zaproponował pan Piotr Żmijewski z Łodzi.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 237 (WT=1,47) i 238 (WT=2,27) z numeru 3/1992

Marek Prauza	– Poraj	41,29
Mikołaj Rotkiewicz	– Warszawa	36,34
Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	35,52

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1992

Przypominamy treść zadań:

243. Na każdym polu szachownicy stoi sześcian, którego jedna ściana jest czarna, a pozostałe białe. Chcemy, aby wszystkie czarne ściany znalazły się na górze. Można tylko jednocześnie obracać wszystkie sześciany dowolnie wybranego rzędu poziomego lub pionowego wokół ich wspólnej osi obrotu. Wskazać algorytm.

244. Na płaszczyźnie dany jest punkt P. Wynaczyć kres górny pól trójkątów ABC o tej własności, że $|PA|+|PB|+|PC| = 1$.

243. Przyjmijmy zwykłe oznaczenie pól szachownicy ($a1, \ldots, h8$); tymi samymi symbolami będziemy też oznaczać sześciany stojące na odpowiednich polach. Sześcian $b2$ przylega swoją „lewą" ścianą do $a2$, a „przednią" ścianą do $b1$; podobnie określamy lewe i przednie ściany pozostałych sześcianów. Sześciany $a1, \ldots, a8$ tworzą „oś a"; Sześciany $a1, \ldots, h1$ tworzą „oś 1"; analogicznie określamy osie $b, \ldots, h$ oraz osie $2, \ldots, 8$.

Kręcąc osią a i osią 1 doprowadzamy czarną ścianę sześcianu $a1$ do pozycji ściany przedniej. Następnie, kręcąc osią a i osią 2 doprowadzamy czarną ścianę sześcianu $a2$ do pozycji ściany przedniej (nie naruszając przy tym ustalonej poprzednio przedniej pozycji czarnej ściany $a1$). Tak samo postępujemy kolejno z sześcianami $a3, \ldots, a8$: wszystkie ich czarne ściany znajdą się w przedniej pozycji. Teraz wykonując jeden ruch każdą z osi $1, \ldots, 8$ przemieszczamy te czarne ściany do pozycji ściany górnej. Wreszcie jednym ruchem osi a przenosimy je do pozycji ściany lewej.

Do tej pory kręciliśmy tylko osią a oraz osiami $1, \ldots, 8$. Teraz wykonujemy analogiczną serię czynności z sześcianami osi b ; kręcimy przy tym jedynie osią b i osiami $1, \ldots, 8$; czarne ściany sześcianów osi a nie zmieniają ustalonych „lewych" pozycji. Dalej, to samo robimy z sześcianami osi c, d, e, f, g, h. Wszystkie czarne ściany znajdą się w pozycji ściany lewej.

I ostatni krok – jeden ruch (obrót o 90°) każdej z osi $a, \ldots, h$: wszystkie czarne ściany są na górze!

244. Dla każdego trójkąta ABC istnieje dokładnie jeden punkt T, którego suma odległości od wierzchołków jest minimalna. Gdy miary wszystkich kątów trójkąta są $< 120°$, wówczas T jest punktem (wewnątrz trójkąta), z którego wszystkie boki widać pod kątem 120°. Gdy trójkąt ma kąt rozwarty o mierze $\geq 120°$, wówczas T pokrywa się z wierzchołkiem tego kąta.

Niech ABC będzie dowolnym trójkątem o rozważanej własności $|PA|+|PB|+|PC| = 1$ i niech T będzie punktem, o którym mowa wyżej. Zatem $|TA|+|TB|+|TC| \leq 1$. Przesuwamy trójkąt ABC o wektor $\overrightarrow{PT}$ i otrzymujemy trójkąt $A'B'C'$, w którym $|PA'|+|PB'|+|PC'| \leq 1$. Jego obraz jednokładny $A''B''C''$ (jednokładność o środku P, w stosownej skali ≥ 1) jest trójkątem o polu nie mniejszym od pola ABC i takim, że $|PA''|+|PB''|+|PC''| = 1$, przy czym P jest punktem o minimalnej sumie odległości od wierzchołków A'', B'', C''.

Wystarczy więc ograniczyć rozważania do trójkątów takiej postaci. Niech ABC będzie takim trójkątem. Jeśli któryś z kątów, np. $\sphericalangle C$, ma miarę $> 120°$ (a więc $P = C$), to trójkąt o dwóch bokach długości $|AP|$, $|BP|$, tworzących kąt 120°, ma większe pole. Można zatem ograniczyć uwagę do trójkątów o wszystkich kątach $\leq 120°$ i wszystkich bokach widocznych z punktu P pod kątem 120° (lub – w granicznym przypadku – jednym boku widocznym pod kątem 120° oraz dwóch bokach widocznych pod kątem 0°). Jeśli odległości wierzchołków takiego trójkąta od punktu P oznaczymy przez x, y, z, to jego pole będzie równe
$$S = \left(\sqrt{3}/4\right)\left(yz + zx + xy\right).$$
Zadanie sprowadza się do maksymalizacji tego wyrażenia przy warunku $x + y + z = 1$ $(x, y, z \geq 0)$.

Gdy liczby x, y, z spełniają ten warunek, to na mocy nierówności Cauchy'ego–Schwarza
$$1 = (1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot z)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) =$$
$$= 3\big((x+y+z)^2 - 2(yz+zx+xy)\big) = 3 - 6(yz+zx+xy)\,,$$
a stąd $yz + zx + xy \leq 1/3$ i $S \leq 1/\left(4\sqrt{3}\right)$. Równość uzyskujemy dla $x = y = z = 1/3$. Odpowiada to sytuacji, gdy ABC jest trójkątem równobocznym o wysokości mającej długość 1/2. Jego pole wynosi $1/\left(4\sqrt{3}\right)$, i to jest właśnie szukany kres górny.

Zadania z fizyki nr 149, 150

Redaguje Jerzy B. BROJAN

149. W celu usprawnienia komunikacji między Ziemią i Księżycem rozpięto od jednego do drugiego ciała niebieskiego drabinkę sznurową (przyjmijmy dla uproszczenia, że Ziemia jest zwrócona do Księżyca stale tą samą stroną, jak Księżyc do Ziemi). Masa jednego kilometra drabinki jest równa 100 kg. Do którego ciała – Księżyca czy Ziemi – drabinka musi być przymocowana, aby nie spadła na drugie? Ile wynosi siła napięcia w miejscu przymocowania, jeśli o drugie ciało drabinka opiera się luźno? Ile wynosi maksymalna siła napięcia drabinki i w którym miejscu to maksimum występuje? Potrzebne dane wziąć z tablic.

150. Dopuszczalna wielkość rozmycia obrazu na kliszy fotograficznej wynosi $d = 0,1$ mm. Jaki jest zakres „głębi ostrości", tzn. w jakim zakresie odległości od przedmiotu rozmycie mieści się w tych granicach, jeśli ogniskowa obiektywu wynosi $f = 50$ mm, średnica otworu obiektywu $h = 30$ mm, a obiektyw nastawiono na odległość $l = 5$ m?

Termin nadsyłania rozwiązań
31 III 1993

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1992

Przypominamy treść zadań:

141. Wzdłuż linii prostej w jednakowych odstępach umieszczonych jest nieskończenie wiele ładunków punktowych dodatnich i ujemnych na przemian, o tej samej wartości bezwzględnej. Zbadać (analitycznie lub numerycznie), jak szybko maleje natężenie pola elektrycznego w miarę oddalania się od prostej.

142. Które z następujących hipotetycznych zjawisk są zgodne z zasadą symetrii zwierciadlanej, a które nie?

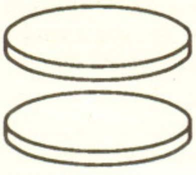
a) Dwa płaskie krążki ustawione równolegle (rys. 1) przyciągają się, gdy obracają się w tę samą stronę, a odpychają, gdy obracają się w przeciwne strony.

b) Krążek przyciąga drugi nieruchomy krążek, gdy obraca się w jedną stronę, a odpycha, gdy obraca się w przeciwną stronę.

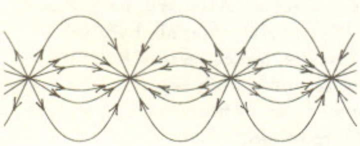
c) Krążek przyciąga drugi nieruchomy krążek, gdy obraca się w którąkolwiek stronę, a nie oddziałuje z nim, gdy jest nieruchomy.

d) Krążek przyciąga ładunek dodatni, gdy obraca się w jedną stronę, a odpycha, gdy obraca się w przeciwną stronę.

e) Krążek przyciąga biegun N magnesu, gdy obraca się w jedną stronę, a odpycha, gdy obraca się w przeciwną stronę.



Rys. 1



Rys. 2

141. Naszkicujmy najpierw przebieg linii pola (rys. 2). Widzimy, że w płaszczyznach prostopadłych do prostej i przechodzących przez ładunki pole ma kierunek radialny (prostopadły do prostej), a w płaszczyznach leżących w połowie odległości między ładunkami pole ma kierunek równoległy do prostej. Dla uproszczenia ograniczymy się więc do tych dwóch przypadków, a ponadto przyjmiemy, że odstęp między ładunkami oraz stała $q/4\pi\varepsilon_0$ mają wartość jednostkową. Dodając wektory natężenia pola ładunków

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

otrzymujemy w pierwszym przypadku szereg przedstawiający składową radialną pola w odległości r od prostej:

$$E_\perp(r) = \frac{1}{r^2} - \frac{2r}{(r^2+1)^{3/2}} + \frac{2r}{(r^2+4)^{3/2}} - \frac{2r}{(r^2+9)^{3/2}} + \ldots$$

W drugim przypadku składowa równoległa jest dana szeregiem

$$E_{||}(r) = \frac{1}{[r^2+(1/2)^2]^{3/2}} - \frac{3}{[r^2+(3/2)^2]^{3/2}} + \frac{5}{[r^2+(5/2)^2]^{3/2}} - \ldots$$

Mając do dyspozycji komputer nietrudno sporządzić tabelę

r	1	2	3	4	5
$E_\perp$	0,4275	0,0124	$4,30 \cdot 10^{-4}$	$1,59 \cdot 10^{-5}$	$6,1 \cdot 10^{-7}$
$E_{\vert\vert}$	0,3696	0,0115	$4,09 \cdot 10^{-4}$	$1,53 \cdot 10^{-5}$	$5,9 \cdot 10^{-7}$

Mamy tu do czynienia ze spadkiem wykładniczym. Aby się o tym przekonać, można wykreślić logarytm $E_\perp$ lub logarytm $E_{||}$ w zależności od r – są to w przybliżeniu linie proste. Analityczne wyprowadzenie tej własności jest dość trudne, gdyż wymaga zastosowania metod teorii funkcji zmiennej zespolonej. Wynikiem jest wzór asymptotyczny

$$E \sim e^{-\pi r}/\sqrt{r}.$$

Zadanie to wraz z otrzymanym rezultatem może służyć jako model objaśniający zanik pola elektrycznego ciał stałych.

142. Jeśli zjawisko jest zgodne z symetrią zwierciadlaną, to obserwowane w zwierciadle nie może sobie zaprzeczać. Odbicie lustrzane zmienia obrót prawoskrętny w lewoskrętny oraz zmienia bieguny N i S magnesu (zwrot pola magnetycznego jest umowny i opiera się na regule śruby prawoskrętnej). Nie zmienia się przy odbiciu znak ładunku ani zwrot siły (np. przyciąganie pozostaje przyciąganiem). Dlatego sprzeczne z symetrią zwierciadlaną są zjawiska b) i d), a zgodne są a), c) i e).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 135 (WT=2,56) i 136 (WT=3,22) z numeru 3/1992

Paweł Perkowski	– Szczecin	41,86
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	29,11
Tomasz Wietecha	– Tarnów	22,47
Przemysław Gworys	– Częstochowa	19,56
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	19,01

Prosimy o przestrzeganie terminów przysyłania rozwiązań zadań. Nadesłane przez p. Wietechę z dwutygodniowym opóźnieniem rozwiązanie zadania 134 (data stempla pocztowego 13 czerwca) nie zostało – niestety – uwzględnione w punktacji.

Kolumb a matematyka

Jerzy MIODUSZEWSKI

Słońce wolno przesuwało się po niebie; cień rzucany przez witkę skracał się pomału, a gdy Cyrusowi Smithowi wydało się, że zaczyna się wydłużać, zapytał:

– Która godzina?

– Piąta i jedna minuta – odpowiedział Gedeon Spilett.

Pozostawało dokonać obliczenia: na Wyspie Lincolna południe było wtedy, gdy w Waszyngtonie była piąta po południu. Słońce w swoim ruchu wokół Ziemi przebiega piętnaście stopni w ciągu godziny. Piętnaście pomnożone przez pięć daje siedemdziesiąt pięć. Ponieważ Waszyngton leży na siedemdziesiątym siódmym stopniu na zachód od Greenwich, więc wyspa znajduje się o siedemdziesiąt siedem plus siedemdziesiąt pięć stopni od południka przechodzącego przez Greenwich, czyli na sto pięćdziesiątym drugim stopniu długości zachodniej.

W ten sposób Cyrus Smith obliczył długość geograficzną Wyspy Lincolna – „Wyspy Tajemniczej" – na którą rzucił go, wraz z innymi rozbitkami, los i wola autora, Juliusza Verne'a.

Inżynier Cyrus Smith miał to szczęście, że jego współtowarzyszowi niedoli, Gedeonowi Spilettowi, udało się uratować chronometr wskazujący czas waszyngtoński. Krzysztof Kolumb nie miał tego ułatwienia: w jego czasach nie było chronometrów.

Wprawdzie w wieże ratuszów i kościołów wbudowywano (już w połowie XIV wieku) wielkie zegary mechaniczne, to jednak na małych statkach Kolumba do pomiaru upływu czasu służyły klepsydry, w których przesypywał się piasek. Taką klepsydrę trzeba było odwrócić, jeśli jej górna połowa się opróżniła. Zdarzało się, że obsługujący ją marynarz zasnął.

Mimo to Kolumbowi udawało się radzić z określaniem długości geograficznej. Długość geograficzną Jamajki, na której się znalazł w czasie czwartej wyprawy, wyznaczył w efektowny sposób, którym posługiwał się już Ptolemeusz, wykorzystując przewidziany z góry czas, w którym miało nastąpić zaćmienie Księżyca. Oto wypływając w swą drugą podróż miał okazję obserwować zaćmienie Księżyca na postoju w jednym z portów hiszpańskich w dniu 14 października 1494 roku, odnotowując czas miejscowy tego zaćmienia. Na tej podstawie – dzięki wiedzy astronomów – można było przewidzieć daty przyszłych zaćmień. Jedno z nich było przewidziane na 29 lutego 1504 roku. Zdarzyło się, że akurat wtedy Kolumb przebywał na Jamajce. Odnotował czas miejscowy zaćmienia, a znając przewidziany czas miejscowy dla wspomnianego portu hiszpańskiego, dostał w ten sposób różnicę czasów miejscowych, a więc i różnicę długości geograficznych Jamajki i owego portu w Hiszpanii. Niedokładności tego rodzaju pomiarów były nieuniknione, wynikające chociażby z niedokładności w wyznaczaniu czasów miejscowych. Niewykluczone były pomyłki przy ustalaniu czasów przewidywanych zaćmień. Pomyłka Kolumba była jednak wyjątkowo duża: dwie i pół godziny w różnicy czasów, a więc prawie 40 stopni, w kierunku zachodnim. Może właśnie dzięki tej pomyłce Kolumb był przekonany, że jest już blisko upragnionego Cipangu – jak Marco Polo nazwał kiedyś Japonię.

Były jeszcze inne, znane już wtedy, sposoby określania długości geograficznej. Regiomontanus (1436–1475) sporządził dla południka przechodzącego przez Norymbergę katalog zawierający czasy przechodzenia znanych gwiazd stałych przez ten południk w ich codobowej drodze wokół osi nieba. Dla ustalenia długości geograficznej miejsca, w którym znajdował się żeglarz, należało odnotować czas przejścia przez jego południk gwiazdy figurującej w katalogu. Jeśli katalog był dostatecznie bogaty, to dostatecznie często w ciągu doby trafiała się na południku żeglarza gwiazda w nim figurująca. Dodajmy jednak, że jeśli statek był w ruchu, ustalanie czasu miejscowego – chociaż teoretycznie proste – było kłopotliwe.

Właściwe nazwisko Regiomontanusa brzmiało Johann Müller, ale że pochodził z Königsbergu (nie tego, nam znanego, tylko z miasteczka o tej nazwie leżącego w Dolnej Frankonii), stąd taka właśnie latynizacja nazwiska. Kierował obserwatorium astronomicznym w Norymberdze, a ostatnie lata życia spędził na dworze króla Macieja Korwina. Zasłynął odkryciami z zakresu trygonometrii sferycznej i chociaż wielu z tych odkryć można się doszukać u matematyków arabskich, to jego wpływ na naukę europejską był bezsporny. To z jego dzieł uczył się astronomii matematycznej Kopernik. Uczniem Regiomontanusa był Martin Behaim.

Jeśliby szukać uczonego, który wywarł bezpośredni wpływ na Kolumba, to będzie nim przede wszystkim Martin Behaim. Ale żeby wyjaśnić rolę tego wpływu, trzeba powiedzieć coś więcej o samym Kolumbie. Urodził się w Genui, ale co do daty urodzenia uczeni spierają się o niebagatelne dziesięć lat. Mając lat szesnaście rozpoczął swe podróże, więc można wątpić, czy skończył jakieś studia. Mówi się, że studiował w Pawii, ale wiadomo też, że ulica w Genui, przy której się wychował, nosiła właśnie tę nazwę. Stolicą żeglarzy była w owym czasie Lizbona. Nic więc dziwnego, że żeglarz Kolumb znalazł się i w Lizbonie. Ale los sprawił, że się tam ożenił i został w Lizbonie na dłużej – lata 1474–1484.

Minęły już czasy Henryka Żeglarza, ale jego syn, Jan II, kontynuował dzieło ojca. Pod patronatem króla Jana działała w Lizbonie Junta uczonych, nawigatorów i astronomów, którzy dla celów przedsiębranych przez Portugalczyków podróży sporządzali katalogi pozycji gwiazd stałych i planet oraz opracowywali mapy już odkrytych lądów. Wśród nich był Martin Behaim, który znalazł się w Lizbonie w tym samym mniej więcej czasie, co nie znany jeszcze nikomu Kolumb. Na mapach Behaima było już miejsce na Atlantyk, na położone na nim Wyspy Kanaryjskie i Wyspy Azorskie, ale były też na tych mapach wyspy hipotetyczne, leżące jeszcze dalej na zachód, o których zdarzało się, że opowiadali żeglarze. Te mapy poruszały wyobraźnię Kolumba: może tą hipotetyczną wyspą jest Cipangu, opisana przez Marco Polo?

Podróże Marco Polo dały wyobrażenie o ogromie lądu azjatyckiego, może nawet przesadne. Dlatego Cipangu lokowano znacznie dalej na wschód niżby należało, a więc, biorąc pod uwagę kulistość Ziemi, lokowano znacznie bliżej, niż należało,

---

Rozwiązanie zadania M 652. a) Niekoniecznie; łatwo np. sprawdzić, że sześciokąt powstały przez dobudowanie do każdego boku trójkąta równobocznego o boku $2+\varepsilon$ trójkąta równoramiennego o tejże podstawie i wysokości ε ma, dla małych $\varepsilon > 0$, wszystkie boki dłuższe od 1 i wszystkie przekątne krótsze od 2.

b) Tak. Z trzech przekątnych AD, BE i CF zawsze można wybrać dwie, których kąt przecięcia jest nie mniejszy od 60°; dla ustalenia uwagi przypuśćmy, że to przekątne AD i BE. Wybierzmy punkt M tak, by czworokąt $BEDM$ był równoległobokiem (o przekątnych BD oraz EM). Wtedy $DM = BE > 2$ i $DA > 2$, kąt zaś między DM oraz DA jest równy co najmniej 60°, zatem, z twierdzenia cosinusów, $AM > 2$. Ponieważ $AB + BM \geq AM$, to przynajmniej jedna z odległości AB i $BM = DE$ musi być większa od 1.

od europejskich brzegów Atlantyku. To mogło ośmielać do myśli o podróży od wybrzeży Atlantyku na zachód. Jeszcze jedno przekonanie – nie przez wszystkich podzielane – było dość rozpowszechnione. Przyjrzyjmy się mapom starożytnych, a zobaczymy, że większość Ziemi zajmują lądy, a na morza i oceany pozostają wąskie pasy. Stąd, można przypuszczać, że i Atlantyk nie powinien być przesadnie szeroki.

Kolumb przychylał się ku temu poglądowi, na co mógł mieć wpływ również pewien szczegół z jego życiorysu, który niektórzy z biografów skłonni są kwestionować. Lata 1484–87 Kolumb spędził gdzieś poza Portugalią. Nie poddaje się w wątpliwość tego, że był na Wyspach Brytyjskich, ale mówi się, że był na Szetlandach, że był na Islandii, a może nawet na Grenlandii. Stąd nieobce mogły być mu wiadomości o bliskości hipotetycznej Winlandii (dziś wiemy, że ten ląd będący bądź Nową Funlandią, bądź wprost dzisiejszą Ameryką, był rzeczywiście odwiedzany przez Wikingów). Można się zastanawiać, dlaczego do Cipangu nie wyruszył właśnie tą drogą.

Optymistyczne oceny Kolumba co do odległości do Cipangu nie były podzielane przez Portugalczyków, tym bardziej że Kolumb robił w swej argumentacji na rzecz przyszłej wyprawy często oczywiste błędy, np. szacując zbyt nisko długość równoleżnika, po którym miałby płynąć na zachód. Oczywiście, sam pomysł płynięcia na zachód nie był im obcy, ale trudności przedsięwzięcia traktowali poważniej. Dodajmy jeszcze jedno: podróże Portugalczyków były dotąd (pomijając Azory) podróżami na południe, a więc mniej więcej wzdłuż południka i kursem nie oddalającym statku zbyt daleko od brzegu. W ten sposób Vasco da Gama, płynąc wzdłuż brzegów Afryki, dotarł do przylądka Dobrej Nadziei kontynuując dzieło Henryka Żeglarza.

Historia podróży Kolumba jest dość dobrze znana. Matematyka jest w nich na dalekim planie, jeśli pominąć to, że biblioteka znajdująca się na jego statku – złożona z katalogów astronomicznych – była, jak się sądzi, bogata. Czy perypetie podróży pozwalały należycie z niej korzystać – należy wątpić.

Kolumb pozostawił po sobie zbiór dzienników podróży i pism składających się na dzieło o wartości nie tylko dokumentu. Szczególnie w późniejszych partiach tego dzieła znaleźć można wynurzenia człowieka dające wyobrażenie o jego charakterze, wykształceniu i emocjach kierujących jego planami, pozwalających mu pokonywać trudności, jakie stawiały materia i ludzie, od których nie zaznał wiele dobrego.

Nie zawdzięczał zbyt wiele nauce jemu współczesnej. Nie był wykształcony, a u ludzi uczonych – takich jak Behaim – szukał nie więcej niż utwierdzenia się w swoich przekonaniach. O matematyce – w tym przypadku trygonometrii – miał jedynie ogólne wyobrażenia. Nie korzystał z jej ówczesnego stanu. Matematyka czasów Ptolemeusza była dostateczna dla wykonania jego zadań. To, że dokonał swych odkryć przebywając w Portugalii i Hiszpanii, przemawia dodatkowo za tym, że jego dzieło nie musiało mieć wiele wspólnego z matematyką mu współczesną, która w jego czasach była w tych krajach w zastoju.

Mimo to należy uznać – wbrew temu, co pisze sam Kolumb, a co nie przeczy wcześniej przytoczonemu stwierdzeniu – że wpływ matematyki na odkrycia Kolumba był decydujący. Ale nie był to wpływ prosty. Jeśli ująć to krótko, to chyba tylko tak, że dzieło Ptolemeusza musiało dojrzewać w umysłach pokoleń uczonych – i to wcale nie matematyków – przez przeszło tysiąclecie, aby przetwarzane i w rozmaity sposób adaptowane do potrzeb, doprowadziło w końcu do odkryć praktycznych. Wydaje się przy tym, że powszechność zrozumienia idei była ważniejsza niż jej doskonalenie.

Wspomniana była rezerwa, z jaką odnosił się Kolumb do nadmiernej uczoności. Ale jak dalece była posunięta, daje się zobaczyć, jeśli przejrzy się jego pisma, szczególnie z ostatnich lat jego życia. Nie wydaje się, by zdania, które będą zacytowane, były wynikiem chwilowych emocji czy też próbą idealizacji jego poczynań. Są w pismach Kolumba rzeczy dla nas zrozumiałe i bliskie, np. tam, gdzie mówi o pieniądzu i gdzie zabiega o uznanie królów. Ale to nie jest cały Kolumb. Oto, co pisze o tym, w co wierzy, o tym, co się w nim zakorzeniło gdzieś, kiedyś i co pokierowało jego życiem.

W rozdziale o Genezis [czytamy], *że wody nie są obfite i,... że kiedy zostały stworzone, miały tylko otulać ziemię, a kiedy się złączyły, zajęły niewiele miejsca. Mikołaj z Liry jest tego samego zdania. Arystoteles* [również] *mówi, że świat jest mały, wody jest niewiele i z łatwością się można dostać z Hiszpanii do Indii. To samo potwierdza Ibn Ruszd (Averroes) i kardynał Piotr z Aliaco. Opinia Seneki* [również] *się z tym pokrywa. Arystoteles mógł znać wiele tajemnic dzięki Aleksandrowi Wielkiemu, a Seneka dzięki cesarzowi Neronowi. Poświęcili oni mnóstwo pieniędzy i wiele istnień ludzkich, i dołożyli wielkich starań, aby poznać te tajemnice świata i rozszerzyć o nich wiadomości. Ów kardynał przypisuje tym autorom znaczenie większe niż Ptolemeuszowi i innym autorom greckim czy arabskim. Aby* [wbrew Ptolemeuszowi] *potwierdzić, że wody jest mało, przywołuje autorytet Ezdrasza z jego III księgi. Tam jest powiedziane, że z siedmiu części świata sześć składają kontynenty, a tylko jedna jest pokryta wodą. Ta opinia potwierdzona jest przez świętych autorów* [wymienieni są św. Augustyn i św. Ambroży], *którzy mówią, że Ezdrasz był prorokiem podobnie jak Zachariasz, ojciec św. Jana. Wysyłam na ziemie świeżo odkryte gubernatora; na nich – jestem pewny niezbicie – znajduje się Raj ziemski.*

Według Kolumba istniały poszlaki – dla Kolumba były to dowody – że ziemie przez niego odkryte leżą już blisko ziemskiego Raju. Przebywając na Karaibach zaobserwował dziwne zachowanie Gwiazdy Polarnej, której wysokość oscylowała w ciągu doby w granicach pięciu stopni (żadnej takiej oscylacji być nie powinno, jeśli obserwator nie zmienia szerokości geograficznej swego położenia). To skłoniło go do przypuszczenia, że Ziemia nie jest idealną kulą. Ale w swych wnioskach szedł dalej, przypisując Ziemi kształt gruszki, której węższe zakończenie znajduje się na półkuli zachodniej w pobliżu równika, niedaleko miejsc, w których się znajdował. Pisze:... *określiłem miejsce Raju ziemskiego zgodnie z nauką św. Kościoła.*

c.d. na str. 16

Rozwiązanie zadania M 653. Z dziesięciu osób można wybrać $10 \cdot 9/2 = 45$ różnych par; ponieważ posiedzeń komisji było 40, a każda para spotykała się co najwyżej na jednym posiedzeniu, to spośród osób pracujących w tej komisji można wybrać co najmniej $40 \cdot 45 = 1800$ par. Z drugiej strony, z sześćdziesięciu osób można wybrać $30 \cdot 59 < 1800$ par, czyli komisja ma ponad sześćdziesięciu członków.

Rozwiązanie zadania M 654. Łatwo zauważyć, że $9999^{9999^{9}}$ jest liczbą nieparzystą (bowiem iloczyn liczb nieparzystych jest nieparzysty). Zatem nasza liczba ma postać

$$99999^{2k+1} = (9 \cdot 11111)^{2k+1} = \\ = 9 \cdot 81^k \cdot 11111^{2k+1},$$

a stąd natychmiast wynika, że cyfra jedności jest równa 9.

W innym miejscu (w liście *Do Królów*) Kolumb pisze: *Już powiedziałem, że dla spełnienia wyprawy do Indii rozum, matematyka i mapy na nic się nie zdały; jedynie spełniało się to, co przepowiedział Izajasz. Jeśli jest wiara, jest pewne z góry zwycięstwo. Św. Piotr skoczył w morze i szedł w nim tak długo, jak długo podtrzymywała go wiara. Znaczna część proroctw jeszcze się nie wypełniła; opat Joachim Kalabryjczyk powiedział, że ten, który ma* [je wypełnić] *ma wyjść z Hiszpanii.*

Widzimy więc, że Kolumb nie neguje roli matematyki, bo ją wspomina, chociaż pisze o niej źle. Czy jest sens rozpowszechniać tego rodzaju opinie wśród matematyków? Wydaje się, że nie tylko jest sens, ale i potrzeba, szczególnie w naszych czasach, kiedy zbyt prosto pojmuje się związek matematyki z zastosowaniami. Ten związek bywa bardzo uwikłany, a na przykładzie Kolumba widać, że może istnieć nawet wtedy, kiedy odkrywca neguje jej rolę. Czy coś może bardziej podkreślać jej siłę? Błędem jest jednak przypisywanie matematyce patentu na wyłączność.

Dziwne są czasy Kolumba. Odkrywcy porywają się na rzeczy wielkie, chociaż nie są uczonymi. Może najbardziej bijącym w oczy przykładem jest Leonardo da Vinci – niemal rówieśnik Kolumba. Tym, co ich łączy – w nieporównywalnych przecież przedsięwzięciach – jest jakieś wielkie ciśnienie myślowe. Towarzyszy ono także matematykom tamtych czasów. Odkrycia graniczą z magią, bo jak inaczej niż magią tłumaczyć można pojawienie się liczb ujemnych i urojonych, które są pomocą w rachunkach dających stosowalne wyniki?

Girolamo Cardano i jego niemal rówieśnik Tartaglia (ur. ok. 1500) są nieco późniejsi niż okres Kolumba. Dokładnie współczesny Kolumbowi jest Luca Pacioli (1445–1514). Wspomnijmy jeszcze Michaela Stifela (1486–1567). Są to czołowi matematycy tego okresu. Główne ich odkrycia należą do arytmetyki i formującej się wtedy algebry. A żeglarstwo i równania trzeciego stopnia mogą mieć jedynie dalekie związki. Chyba żeby za styczność z żeglarstwem uznać właśnie pewną magiczność myślenia, towarzyszącą arytmetyce od jej zarania, żeby tylko wspomnieć Pitagorejczyków. Współczesny tym czasom Albrecht Dürer (1471–1528) przedstawia – zapewne nie bez powodu – na jednej ze swych grafik alegoryczną matematykę na tle kwadratu magicznego.

Siłą napędzającą odkrycia ludzi tego czasu nie zawsze jest wiedza, lecz najczęściej śmiałość, która nierzadko wynika z nieświadomości trudności i rozmiarów przedsiębranych zadań. Ale widać i inne źródła, jakimi są przekonania oparte o wiarę, przy czym nie zawsze jest to wiara oparta o to samo pismo święte. Ibn Ruszdowi służy do tego Koran, a Stifel ma wiarę – w ówczesnym rozumieniu – heretycką. Historycy nauki uważają, że okres około 1500 roku jest w nauce okresem pustym. Minął już czas świetności nauki arabskiej i do przeszłości już należała subtelna scholastyka średniowiecznej Europy. Nie łagodzi tej oceny nawet to, że żyje i tworzy wtedy Kopernik. Jest to postać tak samotna, że można ją pomyśleć bezczasowo. Okres ten jednak mimo wszystko nazywany jest przez historyków epoką Odrodzenia. Ta nazwa pochodzi zresztą od współczesnych, którzy – cytowany był Kolumb – nie grzeszyli skromnością.

Nauka naszych czasów nie jest przeżywana tak emocjonalnie, jak w czasach Kolumba. Odkrycia rozłożone są na zespoły uczonych. Nie nazywa się tych zespołów juntami. Wiedza pojedynczego uczonego podróżującego przez Atlantyk nie musi już być tak duża, jak kiedyś inżyniera Cyrusa Smitha. Teraz długość geograficzną i czas poda mu radio. Zresztą nie jest on jej ciekawy. Nie interesuje go problem położenia ziemskiego Raju – tego z dużej litery. Pism dawnych filozofów nie musi czytać. Jeśli w coś wierzy, to w koniec świata, bo wszystko zostało już jakoby odkryte. Podobnie zresztą myślał po swych podróżach Kolumb i przepowiadał koniec świata na rok 7000 po jego stworzeniu, ale przepowiednia się nie sprawdziła.

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 652. a) Każdy bok sześciokąta wypukłego ma długość większą od 1. Czy ten sześciokąt musi mieć przekątną o długości co najmniej 2?
b) Przekątne AD, BE i CF sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ mają długości większe od 2. Czy ten sześciokąt musi mieć bok o długości większej od 1?
Rozwiązanie na str. 14

M 653. Pewna komisja parlamentarna zbierała się 40 razy. Na każdym posiedzeniu obecnych było dziesięciu członków komisji; wiadomo także, że każdych dwóch członków komisji spotkało się co najwyżej na jednym posiedzeniu. Udowodnić, że komisja liczy więcej niż 60 osób.
Rozwiazanie na str. 15

M 654. Jaka jest w zapisie dziesiątkowym cyfra jedności liczby $99999^{9999^{999^{99^{9}}}}$?
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Jarosław KULPA

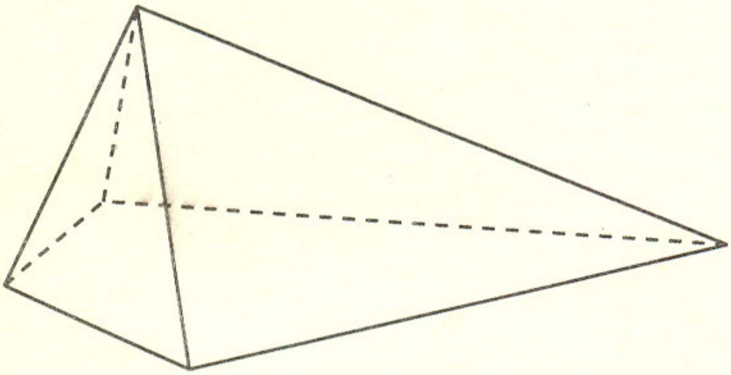
F 347. W jakiej odległości od Ziemi krążyłby Księżyc, gdyby Ziemia przestała się obracać? Masa Księżyca $m = 7,4 \cdot 10^{22}$ kg, masa Ziemi $M = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, odległość Księżyca od Ziemi $r_0 = 384$ tys. km, promień Ziemi $R = 6,38$ tys. km. Założyć, że orbitalny moment pędu Księżyca i własny moment pędu Ziemi skierowane są zgodnie.
Rozwiązanie na str. 10

F 348. Ocenić minimalny promień x kulistej drobiny, która może krążyć wokół Słońca. Założyć, że gęstość drobiny jest równa gęstości Ziemi $\rho = 5500$ kg/m^3, oraz że drobina jest ciałem doskonale czarnym. Stała słoneczna (moc promieniowania Słońca na jednostkę powierzchni w pobliżu Ziemi) wynosi $\phi = 1326$ W/m^2. Przyspieszenie dośrodkowe Ziemi w ruchu wokół Słońca wynosi $a = 5,2 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.
Rozwiązanie na str. 10

epsilon
12/92
(22)

Epsilonowe zadania na Święta

1. Ile przekątnych ma przedstawiony na poniższym rysunku wielościan?



Uwaga. Przez przekątną wielościanu rozumiemy odcinek łączący dwa wierzchołki wielościanu, nie zawierający się w żadnej z jego ścian.

2. Wykazać, że $\sin 1^\circ$ jest liczbą niewymierną.

3. Udowodnić (bez pomocy kalkulatora), że
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

4. Znaleźć część wspólną czworościanu foremnego i jego obrazu w symetrii środkowej względem środka wysokości czworościanu.

5. Do n zaadresowanych kopert włożono losowo n listów, do każdej koperty po jednym liście. Przez p_i oznaczamy prawdopodobieństwo tego, że dokładnie i listów trafi do właściwych kopert. Wykazać, że jeśli $n \geq 100$, to $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \leq \dfrac{\ln\sqrt{\pi n}}{2\pi n!}e^{-\pi n}$.

Uwaga. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba $\Theta \in (0,1]$, że $n! = e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^{\Theta/12n}$ (wzór ten nosi nazwę wzoru Stirlinga).

6. Obliczmy $\int \operatorname{tg} x\,dx$. Całkując przez części, otrzymujemy:
$$\int \operatorname{tg} x\,dx=\int\frac{1}{\cos x}\sin x\,dx=\frac{-\cos x}{\cos x}-\int-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}(-\cos x)\,dx=$$
$$=-1+\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-1+\int\operatorname{tg} x\,dx$$
i po dokonaniu redukcji mamy $0=-1$, czyli $1=0$. Gdzie jest błąd?

Encyclopaedia Britannica w XV wydaniu umieszcza informację o Stefanie Banachu. Rozpoczyna się owa notka następująco:
Banach, Stefan *(b. March 30, 1892, Kraków, Austria-Hungary – d. Aug. 31, 1945, Lvov, Ukrainian S.S.R), Soviet mathematician who founded modern functional analysis and...*

Potem w tekście jest jeszcze dwukrotnie wspomniany „Lvov" jako miejsce pracy Banacha, o Polsce ani słowa.

Zapewne ktoś redaktorom zwrócił uwagę na – mówiąc delikatnie – minięcie się z prawdą, bo w następnym wydaniu notka została „gruntownie" poprawiona. Oto początek (reszta nie uległa zmianie):
Banach, Stefan *(b. March 30, 1892, Kraków, Pol.– d. Aug. 31, 1945, Lvov, Ukrainian S.S.R), mathematician who founded modern functional analysis and...*

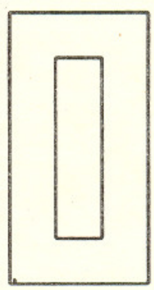
Czytelnik nie bez podstaw wywnioskuje więc, że Banach urodził się w Pol., ale matematykiem był radzieckim – no bo jakim mógł być innym na podstawie tego tekstu, skoro pracował w mieście Lvov?

Na marginesie dodajmy, że XV wydanie encyklopedii przedstawia Alberta Einsteina: „German-American physicist", a Alfreda Tarskiego: „Polish-born American mathematician" (porównując oba hasła dochodzimy do wniosku, że Tarski urodził się w Polsce, lecz matematykiem został w USA) – ale np. Eulera: „Swiss mathematician and physicist" (przypominamy, że Euler przez dużą część swego życia pracował w Rosji).

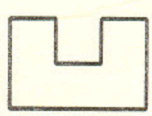
Zachodzi pytanie: czy dzieje się to według zasady typu: „O Litwie, dalibógże!, mniej wiem niż o Chinach" czy też jest to efekt sympatii do Polski? A może jedno i drugie?

7. Oto dwa rzuty pewnej bryły:

z góry



i z boku.



Co to za bryła?

Uwaga. Na rzucie liniami ciągłymi oznacza się krawędzie widoczne, liniami przerywanymi – krawędzie niewidoczne.

Wśród osób, które nadeślą *EPSILONOWI* (w ciągu miesiąca od ukazania się tego numeru *Delty*) pełne rozwiązania wszystkich siedmiu zadań, rozlosujemy nagrody.

Prawidłowe rozwiązania podamy w *EPSILONIE* za dwa miesiące.

Życzymy miłej zabawy!

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.