



$h=6.63 \cdot 10^{-34}$ J·s $\hbar=3.141593$

CENA ZŁ. 8000

NR 10 (233) 1993

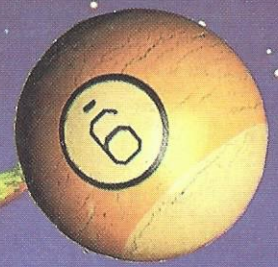
PL ISSN 0137-3085 | NR IND 35 550 X

Quanta

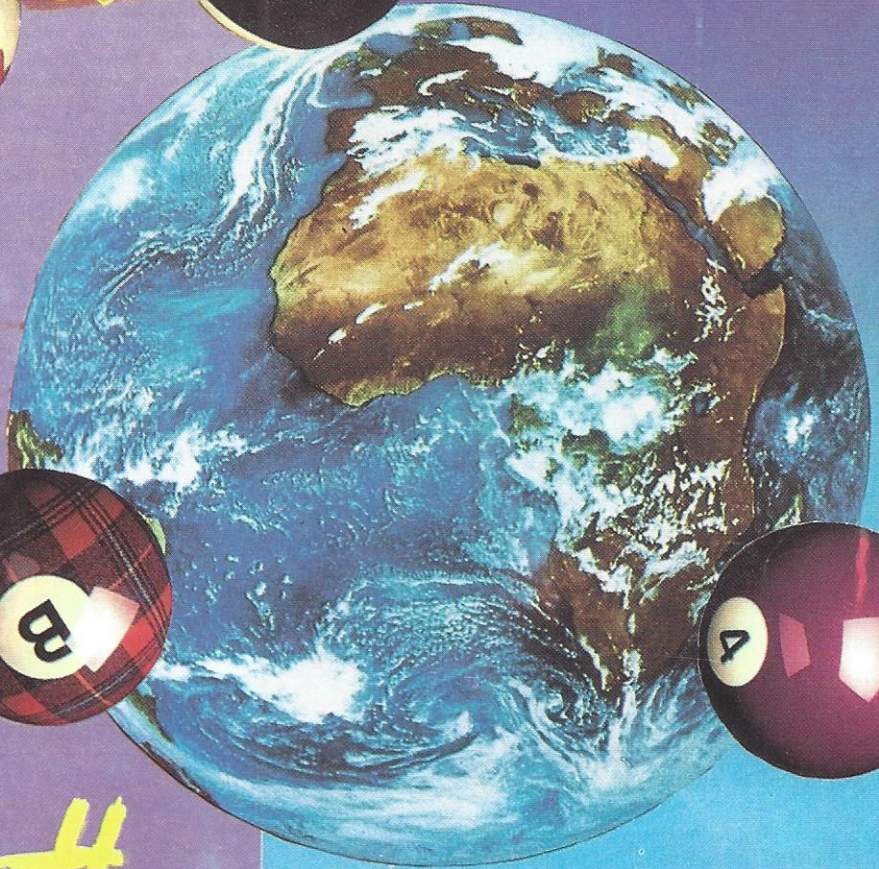
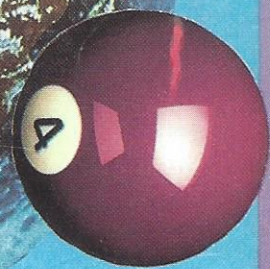
POPULARNY MIESIECZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY

$C_n F_{2n+2}$

$2n-2n+2$



C_{60}



$C_n H_{2n+2}$

UWAGA !!!

Nową formę prenumeraty „Delty”
proponuje firma AMOS,
warunki poniżej.

SPIS TREŚCI

NUMERU 10(233)

Wbrew zdrowemu rozsądkowi
Tomasz Hofmokl

Węglowodory i grafy
Piotr Kosztolowicz

Chaos jest wszędzie
Tomasz Kwast

Zadania

Mała Delta

Patrz w niebo

Kłopoty z aproksymacją
punktów stałych
Jarosław Górnicki

Siła Coriolisa
Zygmunt Ajduk

Klub 44

Epsilon

W następnym numerze:

Antybilard

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Makowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz SitarSKI
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk

str. 1

str. 1

str. 6

str. 7

str. 8

str.10

Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Piotr Hajłasz
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16
Skład systemem TrXwykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

- str.11 Od stycznia br. prenumeratę „Delty” prowadzi również firma AMOS, 01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Koszt trzech numerów wynosi 24 000,-zł (rocznika'94 – 96 000,-zł). Przy wpłacie prosimy zaznaczyć okres prenumeraty (co najmniej 3 miesiące).
- str.14 Prenumerata zagraniczna trzech numerów wynosi 60 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.
- str.16 **Uwaga!** AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.
- str.17 Blankiet pocztowy na prenumeratę „Delty” w AMOS-ie zamieszczamy na str.9/10. Konto AMOS-u: PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na I kwartał 1994 r. wynosi 24 000,- zł.
- Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób.
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
- Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
 - do 20 II na II kwartał
 - do 20 V na III kwartał
 - do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

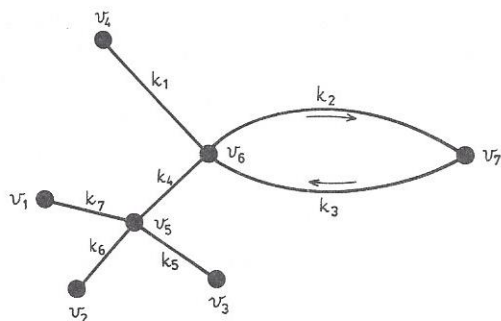
Węglowodory i grafy

Piotr KOSZTOŁOWICZ

Wśród chemików panuje dość powszechne przekonanie, że wzór sumaryczny cząsteczki związku chemicznego nie niesie żadnych informacji o jej strukturze. Czy rzeczywiście zapisy C_6H_{12} , $C_{10}H_8$, CH_4O nie pozwalają sformułować żadnych sensownych wniosków na temat liczby pierścieni w cząsteczce, obecności wiązań wielokrotnych, wartościowości atomów węgla itp.? Jak zwykle w takich przypadkach, rozstrzygnięcie problemu będzie możliwe dzięki zastosowaniu odpowiedniego narzędzia matematycznego. Obiektem, który w naturalny sposób nadaje się do tego celu, jest graf nieskierowany. Dla Czytelnika, który nie zetknął się bliżej z grafami, podane będą podstawowe definicje i własności grafów, z konieczności tylko te, które będą przez nas wykorzystane.

Grafy

Graf G to para zbiorów (V, K) . Pierwszy z nich jest zbiorem wierzchołków $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, drugi to zbiór krawędzi $K = \{k_1, k_2, k_3, \dots, k_m\}$. Krawędź k_i utożsamia się z parą wierzchołków (v_k, v_l) zwanych jej wierzchołkami końcowymi. Często rysunek, na którym rolę wierzchołków pełnią punkty, a łączące je linie rolę krawędzi, sam nazywany jest grafem.



Rys. 1. Graf o 7 wierzchołkach i 7 krawędziach z zaznaczonym obwodem $v_6k_2v_7k_3v_5$.

Gdyby na rysunku 1 w miejsce wierzchołków v_1, v_2, v_3, v_4 wstawić literę H, w miejsce v_5 i v_6 literę C, a w miejsce v_7 literę O, uzyskalibyśmy wzór strukturalny aldehydu octowego. Wzory strukturalne cząsteczek chemicznych można więc traktować jako grafy.

Stopniem wierzchołka v_i nazywamy liczbę krawędzi, które łączą się z tym wierzchołkiem, czyli mówiąc ściślej – są z nim incydentne.

Obwodem albo cyklem w grafie nazywamy odpowiednik wielokąta, lub łamanej zamkniętej: skończony ciąg na przemian występujących wierzchołków i krawędzi z nimi incydentnych, w którym ostatnia krawędź łączy ostatni wierzchołek z pierwszym. Graf może mieć wiele obwodów, ale istnieje zawsze pewien minimalny ich zbiór, z którego można odtworzyć pozostałe (przez usuwanie wspólnych krawędzi). Obwody takie nazywamy podstawowymi, ich liczba równa jest liczbie krawędzi, które należy usunąć z grafu, aby otrzymać graf bez cykli. Dla zastosowań do opisu cząsteczek węglowodorów (a takie będą obiektem naszych zainteresowań), można przyjąć, że maksymalny stopień wierzchołka wynosi 4.

Oto podstawowe wzory, które znajdują zastosowanie w dalszej części:

$$(1) \quad m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4,$$

$$(2) \quad 2l = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4,$$

gdzie: m – liczba wszystkich wierzchołków w grafie, m_i – liczba wierzchołków stopnia i , l – liczba wszystkich krawędzi w grafie.

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (VII)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Jak wyjść przez dwoje drzwi równocześnie nie dzieląc się – interferencja elektronu samego ze sobą

Tomasz HOFMOKL

Tak zwany zdrowy rozsądek kształtuje się na podstawie doświadczeń, obserwacji bezpośrednio otaczającego nas świata. Jest rzeczą oczywistą, że częściej mamy okazję obserwować spadek rzuconego kamienia niż kwantowe zachowanie się elektronu. Na podstawie tych właśnie codziennych obserwacji wytwarzamy sobie, najczęściej bezwiednie, przekonanie o tym, co jest możliwe, a co nie. Inaczej mówiąc, co jest zgodne ze zdrowym rozsądkiem, a co jemu przeczy. W badaniach naukowych, dzięki odpowiednim urządzeniom, możemy obserwować zjawiska, z którymi nie spotykamy się na co dzień. Niektóre z tych zjawisk zdają się przeczyć naszemu poczuciu tego, co jest możliwe. Obserwacja ich stanowi najcenniejszą podniętę do weryfikowania naszego poglądu na otaczający świat i przy okazji uczy nas pokory. Nie wszystko, co jest sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem, jest rzeczywiście niemożliwe. Przykładem takiego zjawiska, które w sposób oczywisty wydaje się na pierwszy rzut oka niemożliwe, jest interferencja elektronu samego ze sobą. Wspominałem o tym zjawisku w pierwszym wykładzie. Teraz, dla podkreślenia jego zaskakującego przebiegu, przedstawię je przez analogię.

Wyobraź sobie, Czytelniku, następującą sytuację. Jesteś samotnie w pomieszczeniu, w którym jest dwoje drzwi. Aby być bardziej precyzyjnym, powiem, że są tam dwa oddzielne otwory drzwiowe nie stykające się. Nie ma więc mowy o żadnych wykrętach, jak na przykład rozważanie jednego otworu dwudrzwiowego. Mamy pomieszczenie o dwóch nie stykających otworach.

Proponuję wykonanie następującego zadania: wyjść przez oba otwory jednocześnie nie rozdzielając się przy tym na dwie części. Czy to możliwe? W oparciu o nasze codzienne doświadczenia, czyli w ramach zdrowego

rozsądku, jest to zadanie bezsensowne do tego stopnia, że nie warto nawet poważnego zastanawiania się.

A jednak... Elektron potrafi to wykonać, a przynajmniej zachowuje się tak, jak by to wykonywał. Mamy na to dowody eksperymentalne. Okazuje się, że nasz zdrowy rozsądek może prowadzić do fałszywych wniosków, jeżeli zastosujemy go w sytuacji skrajnie nietypowej dla życia codziennego. Co więcej, nie potrafimy wyobrazić sobie, jak to elektron robi, że przechodzi przez dwa otwory równocześnie będąc przy tym cząstką niepodzielną. Musimy zmienić nasz pogląd na świat, a tym samym wzbogacić rozumienie procesów, jakie występują w przyrodzie.

Przyjrzyjmy się nieco dokładniej samemu doświadczeniu. Wyniki zostały opublikowane stosunkowo niedawno, bo w lutym 1989 roku w *American Journal of Physics*. Doświadczenie wykonali w Japonii A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki i H. Ezawa. Sama idea doświadczenia jest bardzo prosta. Należy zbadać interferencję elektronów wypuszczanych pojedynczo na dwie szczeliny i zaobserwować obraz interferencyjny. Nie jest to pierwsze doświadczenie wskazujące na możliwość interferencji cząstek materii samych ze sobą, ale pierwsza realizacja dotychczas jedynie myślowego eksperymentu opisywanego w podręcznikach teorii kwantów. Znane są fakty doświadczalne wskazujące na falowe własności cząstek materialnych. Słyszeli o nich nie tylko ci, którzy studiowali fizykę. Ze względu na chronologię odkryć „szerokie rzesze” przyjmują, że światło jest falą, a elektrony cząstkami. Około roku 1923 L.V. de Broglie wysunął przypuszczenie, że cząstki materialne mają również własności falowe. Uzupełniało to obraz fali elektromagnetycznej, na przykład światła widzialnego, które ma, oczywiście, własności falowe, ale ma również cechy cząstek – mówimy przecież o fotonach. Jeżeli więc każda drobina materii ma własności falowe, to przynajmniej w pewnych sytuacjach drobina taka powinna zachowywać się jak fala. Czym zaś różni się fala od cząstki?

Najprościej odpowiedzieć na to, że fale mogą interferować. Nie wszyscy może pamiętają, co to jest interferencja fal, inaczej mówiąc – ich nakładanie się. Dwie fale spotykając się mogą się wzmacnić, jeżeli grzbiet jednej fali spotka się z grzbietem drugiej, lub osłabić aż do zupełnego wygaszenia, jeżeli grzbiet spotka się z doliną. Widzieliśmy to zjawisko wielokrotnie rzucając do wody dwa lub więcej kamieni. Od wrzuconego jednego kamienia rozchodzą się po powierzchni

Istnieje jeszcze jeden wzór o fundamentalnym znaczeniu dla teorii grafów. Jest to wzór Eulera, pozwalający obliczyć liczbę obwodów podstawowych μ , jeżeli znana jest liczba krawędzi l i wierzchołków m w grafie:

$$(3) \quad \mu = l - m + 1.$$

Przy założonych ograniczeniach, korzystając ze wzorów (1) i (2) można zapisać, że

$$(4) \quad \mu = \frac{1}{2}(m_3 - m_1) + m_4 + 1.$$

Dla tych, którzy są zaznajomieni z topologią, dodajmy, że liczba cykli jest własnością topologiczną grafu i nie zależy od liczby wierzchołków stopnia 2, ponieważ homeomorfizmy ignorują wierzchołki 2 stopnia traktując je jako punkty krawędzi.

Przejdźmy obecnie do konkretów. Ze względu na wielką różnorodność strukturalną obiektów naszych zainteresowań będą węglowodory. Pamiętaj jednak należy, że prawa teorii grafów obowiązują także w odniesieniu do innych grup cząsteczek niekoniecznie organicznych.

Alkany

Alkany to węglowodory, których cząsteczki nie zawierają wiązań wielokrotnych pomiędzy atomami węgla. Ogólny wzór sumaryczny tej grupy połączeń zapiszemy wstępnie jako C_nH_r . We wzorze strukturalnym tej cząsteczki wierzchołek reprezentujący atom węgla jest ze względu na swą wartościowość 4 stopnia, atom wodoru natomiast – 1 stopnia. Liczba wszystkich wiązań w cząsteczce równa jest liczbie krawędzi w grafie, który ją reprezentuje. Obliczyć ją można ze wzoru (2), przyjmując następujące założenia:

$$m_1 = r, \quad m_2 = m_3 = 0, \quad m_4 = n.$$

Otrzymujemy

$$l = \frac{1}{2}(4n + r).$$

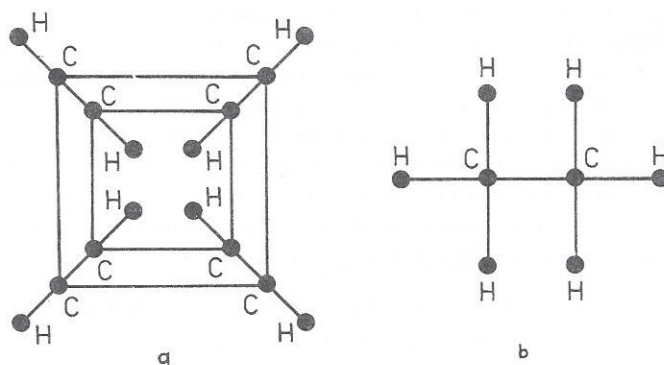
W cząsteczce występuje r wiązań C-H, pozostałe to wiązania C-C, w liczbie

$$l_{C-C} = 2n - \frac{1}{2}r.$$

Czy rozważana cząsteczka może zawierać jakieś pierścienie? Odpowiedzi udzieli nam równanie Eulera w formie (4), przy zachowaniu założeń poczynionych poprzednio. Otrzymamy ostatecznie następujący rezultat:

$$\mu = n - \frac{1}{2}r + 1.$$

Wynika stąd, że ogólny wzór cząsteczki alkanu można wyrazić w formie $C_nH_{2n-2\mu+2}$. Jeżeli $\mu = 0$, to wzór nasz zredukuje się do postaci znanej z podręczników chemii organicznej dla alkanów niecyklicznych C_nH_{2n+2} . Czytelnikowi pozostawiam praktyczne sprawdzenie wyprowadzonych zależności dla cząsteczek z rysunku 2.



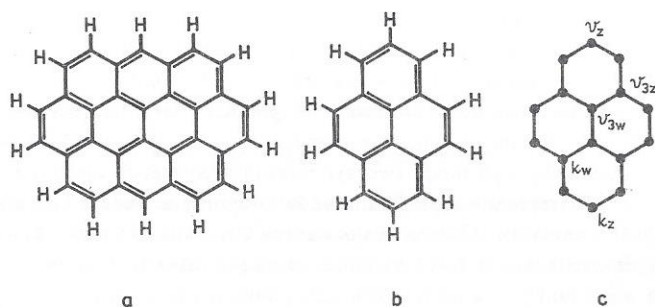
Rys. 2. Grafy reprezentujące cząsteczki węglodorów:
a) kuban (pięciocykliczny).
b) etan (niecykliczny).

Węglowodory aromatyczne o pierścieniach skondensowanych

Cząsteczki tej grupy węglowodorów charakteryzują się wyjątkowo regularną budową. Przyjmują one formę kawałków pszczelego plastra oderwanych od całości. W przypadku tych cząsteczek wygodniej jest posługiwać się grafem szkieletu węglowego w miejsce pełnego wzoru strukturalnego. Wymaga to pominięcia wiązań wielokrotnych oraz atomów wodoru we wzorze strukturalnym. Cząsteczki rozważanej grupy połączenia są płaskie (jest to rezultat obserwacji, a nie obliczeń). Fakt ten umożliwia dokonanie podziału wierzchołków i krawędzi na następujące zbiory:

- zbiór krawędzi k_z leżących na zewnętrznym obwodzie cząsteczki,
- zbiór krawędzi k_w przynależnych do dwu pierścieni jednocześnie,
- zbiór wierzchołków v_z drugiego stopnia reprezentujących atomy węgla związane z atomami wodoru,
- zbiór wierzchołków 3 stopnia v_{3z} należących do dwu pierścieni i leżących na zewnętrznym obwodzie,
- zbiór wierzchołków 3 stopnia v_{3w} należących do trzech pierścieni jednocześnie i znajdujących się wewnątrz cząsteczki.

Przez pierścienie rozumiemy tu cykle sześciocłonowe, stanowiące pewien zbiór obwodów podstawowych grafu.



Rys. 3. Niektóre węglowodory skondensowane:

- wzór półstrukturalny owalenu,
- wzór półstrukturalny pirenu,
- graf szkieletu węglowego pirenu.

Czy i w tym przypadku dysponując jedynie wzorem sumarycznym C_nH_s jesteśmy w stanie obliczyć, ile jest poszczególnych elementów strukturalnych grafu? Aby zastosować wzory (1), (2) i (4) w odniesieniu do tej grupy połączeń, należy przyjąć założenia: $m_1 = m_4 = 0$, $m_2 = s$, $m_3 = n - s$. Liczba obwodów podstawowych, którymi są cykle sześciocłonowe, wyrazi się wzorem

$$(5) \quad \mu = \frac{1}{2}(n - s) + 1.$$

Liczba wszystkich krawędzi l_{C-C} w tym przypadku wynosi

$$l_{C-C} = \frac{1}{2}(3n - s).$$

Liczbę l_w krawędzi typu k_w przynależnych do dwu pierścieni obliczamy korzystając z następującej równości

$$(6) \quad l_{C-C} = 6\mu - l_w.$$

Uzasadnienie tego wzoru pozostawiam dociekliwemu Czytelnikowi. Stosując wyżej przedstawione wzory otrzymamy ostatecznie

$$(7) \quad l_w = \frac{1}{2}(3n - 5s + 12).$$

Ten rezultat pozwoli nam obliczyć w prosty sposób liczbę krawędzi l_z leżących na obwodzie zewnętrznym cząsteczki. Uwzględniając, że

$$l_{C-C} = l_z + l_w,$$

otrzymamy

$$(8) \quad l_z = 2s - 6.$$

wody koncentryczne kręgi fal. Przy dwóch wrzuconych kamieniach kręgi te w pewnej chwili spotykają się i w ich przecięciu powstaje dość złożony obraz. W niektórych miejscach fala wodna jest większa niż fale przed spotkaniem, a w innych woda jest spokojna, co oznacza, że fale wygasily się. Łatwo zaobserwować interferencję fal na wodzie. Ich długość sięga kilkunastu, kilkadziesiątu centymetrów. W sprzyjających okolicznościach możemy obserwować wynik interferencji fal świetlnych, na przykład obserwując barwne plamy powstające w cieniutkiej warstewce benzyny rozlanej na powierzchni kałuży. W braku zanieczyszczonej benzyną kałuży możemy użyć siatki dyfrakcyjnej (jest to płytka z bardzo drobnymi, blisko siebie leżącymi rysami) lub innego urządzenia optycznego. Im mniejsza długość fali, tym trudniej zaobserwować zjawiska interferencji. Czego spodziewamy się od fal związanych z cząstkami materii?

Rozważmy cząstkę, która jest mała z makroskopowego punktu widzenia (przykład zaczerpnąłem z książki Wichmana *Fizyka kwantowa*). Przypuśćmy, że masa naszej cząstki równa się 10 mikrogramów, czyli dziesięć milionowych części grama. Niech cząstka ta porusza się z prędkością 1 cm/s – długość fali de Broglie'a (h/mv) wyniesie w tym przypadku około $6,6 \times 10^{-22}$ cm. Jest to wielkość śmiesznie mała: tysiąc milionów milionów razy mniejsza niż długość fali światła widzialnego w zakresie czerwieni. Przypomnijmy, że długość fali, na przykład światła widzialnego o kolorze czerwonym, wynosi około siedmiuset nanometrów. Przypominam: jeden nanometr to jedna tysięczna milionowej części metra. Wyjaśnia to, dlaczego fale materii, jeżeli nawet istnieją, zwykle nie uwidoczniają się. Jeżeli chcemy mieć stosunkowo długą falę de Broglie'a, to powinniśmy do doświadczenia wybrać cząstkę o możliwie jak najmniejszej masie, najlepiej elektron i nadać jej bardzo małą prędkość. Dla elektronów przyspieszanych różnicą potencjałów 150 woltów długość fali będzie mniejsza tylko siedmiokrotnie od długości fali światła czerwonego. Taka długość fali jest już rzędu odległości między atomami w kryształach. Można więc wykorzystać kryształ jako siatkę dyfrakcyjną.

Pierwsze doświadczenie tego typu wykonał C.J. Davisson przy współpracy L.H. Germera potwierdzając falowe właściwości elektronów.

W doświadczeniach Davissona-Germera, i w innych późniejszych, używano wiązki elektronów i okazało się, że w odpowiednio dobranych warunkach zachowuje się ona jak wiązka światła. Można by zrobić przeskok myślowy i powiedzieć: elektrony

mają własności falowe. Zastanówmy się nad tym. W doświadczeniach użyto wiązek elektronów. Najprostsze doświadczenie z interferencją możemy wyobrazić sobie następująco: elektrony wybiegają ze źródła, padają na ekran, w którym są dwie szczeliny i po przejściu przez nie biegną do obserwatora, którym może być klisza fotograficzna. Mamy dwie możliwe drogi elektronów: albo przez jedną, albo przez drugą szczelinę. Drogi te różnią się w sposób oczywisty i, zależnie od różnicy dróg, u obserwatora lub na kliszy spotykają się dwie fale przesunięte względem siebie tak, że nakładają się albo wierzchołek z wierzchołkiem, albo wierzchołek z doliną, albo są w sytuacji pośredniej. W zależności od przesunięcia możemy zaobserwować albo wzmocnienie fali, albo osłabienie – aż do całkowitego wygaszenia. Na ekranie zobaczymy więc charakterystyczne maksima i minima interferencyjne. W przypadku kliszy fotograficznej pojawiają się prążki silniejszego i słabszego zaczerpnienia. Przedstawiony opis przebiegu doświadczenia nadal nie jest wyczerpujący. Nie odpowiada bowiem na pytanie, czy interferują, czyli nakładają się, fale różnych elektronów, czy interferuje fala tego samego elektronu. Przynajmniej, że jest to zasadnicza różnica. Na interferencję różnych elektronów możemy się łatwiej zgodzić niż na interferencję tego samego elektronu ze sobą. Jak bowiem sobie wyobrazić, że elektron przechodzi przez obie szczeliny jednocześnie? Dzieli się? – jest przecież niepodzielny. Wyrażna sprzeczność ze zdrowym rozsądkiem. Dlatego właśnie nie możemy poprzestać na stwierdzeniu, że elektrony mają własności falowe w opisanych doświadczeniach, ale musimy rozstrzygnąć, czy elektron może interferować sam ze sobą. Odpowiedź na to właśnie pytanie była przedmiotem wspomnianego na początku doświadczenia.

Do jego przeprowadzenia wykorzystano odpowiednio zmodyfikowany mikroskop elektronowy. Bardzo ciekawie rozwiązano problem dwóch szczelin. Utworzono je przez oryginalną konfigurację pola elektrostatycznego. Elektrony nadlatujące ulegają ugięciu w powstałym polu elektrostatycznym tak samo, jak by przechodziły przez szczeliny. Poniżej szczelin umieszczono układ elektronicznego odczytu pozwalający zarejestrować nadejście każdego pojedynczego elektronu. Elektrony są niepodzielne, więc układ mógł rejestrować albo fakt nadejścia elektronu, albo jego brak. Nie będę opisywać szczegółów elektronicznych urządzenia do detekcji – autorzy zdołali doprowadzić aparaturę do takiego stanu, że prawdopodobieństwo niezarejestrowania elektronu lub zarejestrowania fałszywego sygnału nie przekraczało jednego procentu.

Równie proste rachunki doprowadzą do obliczenia liczby wierzchołków trzeciego stopnia poszczególnych rodzajów. Oznaczmy przez n_{3z} i n_{3w} odpowiednio liczbę wierzchołków typu v_{3z} i v_{3w} . Każdy obwód, w tym także obwód zewnętrzny grafu, którym się zajmujemy, zawiera tyle samo wierzchołków co krawędzi. Musi więc być spełnione równanie

$$l_z = n_{3z} + s,$$

skąd wykorzystując równanie (8) otrzymamy

$$n_{3z} = s - 6.$$

Tym samym łatwo znajdziemy wyrażenie pozwalające obliczyć parametr n_{3w}

$$n_{3w} = n - 2s + 6.$$

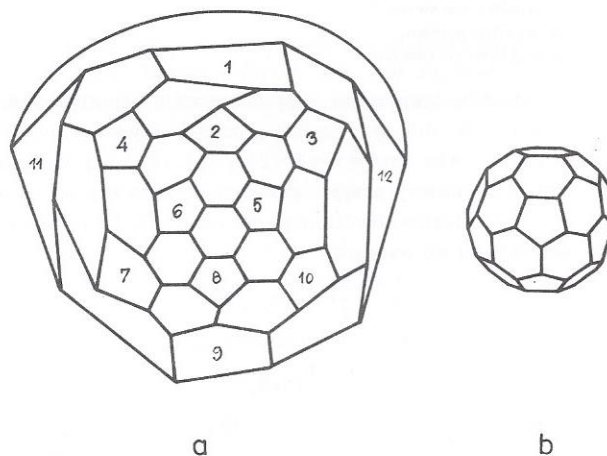
Wystarczy wykorzystać oczywistą równość

$$n_{3w} + n_{3z} = n - s.$$

Na uwagę zasługuje fakt, że wartości parametrów: l_{C-C} , l_w , l_z , n_{3w} , n_{3z} uzyskano znając jedynie wzór sumaryczny cząsteczki, czyli współczynniki n i s oraz mając informację o rodzaju węglowodoru. W niektórych przypadkach, jak widzimy, wzór sumaryczny niesie dość znaczną informację o strukturze cząsteczki.

Fullereny

Fullereny nie są węglowodorami, lecz mimo to istnieje wiele podobieństw strukturalnych między tymi obiektami. Fullereny stanowią odmiany pierwiastkowego węgla, podobnie jak grafit czy diament. Cząsteczki fullerenów są kuliste i mają budowę wielopięścieniową. Atomy węgla występują tu w takim samym stanie walencyjnym, jak w węglowodorach skondensowanych, czyli mogą tworzyć wiązania wyższych rzędów niż w alkanach. Otrzymano szereg fullerenów o ogólnym wzorze C_n , gdzie n jest liczbą parzystą. Cząsteczka o wzorze C_{60} okazała się wyjątkowo trwała. Stwierdzono, że jest ona zbudowana jak piłka futbolowa i składa się z 12 pięściocłonowych i 20 sześciocłonowych.



Rys. 4. Cząsteczka fullereny C_{60} , zwanego buckminsterfullerenem: a) graf cząsteczki z ponumerowanymi cyklami pięściocłonowymi, b) kształt geometryczny cząsteczki.

Narysowanie rzeczywistego kształtu cząsteczki fullereny nie jest łatwe ze względu na jej przestrzenną strukturę. Z łatwością narysować można natomiast jej graf strukturalny. W tym miejscu pora na wyjaśnienie pewnej subtelności. W przedstawionych sytuacjach tak naprawdę rzadko odwoływaliśmy się do metrycznych własności cząsteczek, bardziej interesowała nas ich topologia. Takie własności, jak długości wiązań, kąty między wiązaniami były pomijane.

Do wyciągnięcia wszystkich wniosków wystarczające okazały się informacje o tym, które wierzchołki są połączone krawędzią oraz jakiego stopnia były te wierzchołki. Krawędzie reprezentujące wiązania mogą więc (jeśli to jest wykonalne tak, aby krawędzie się nie przecinały) być narysowane dowolnie na płaszczyźnie. Graf fullerenu narysować można „rozciągając” jeden z pierścieni do takich rozmiarów, że cała reszta znajdzie się wewnątrz. Zakładamy więc, że wzór naszej cząsteczki ma postać C_n . Co mówi nam ten wzór o strukturze fullerenu? Przyjmijmy oczywiste założenie: $m_1 = m_2 = m_4 = 0, m_3 = n$. Pozwala to obliczyć liczbę wiązań C – C

$$l_{C-C} = \frac{3}{2}n,$$

oraz liczbę pierścieni w cząsteczce, w tym jednak przypadku wzór Eulera należy zmodyfikować (co znowu nie wynika z teorii grafów) do postaci znanej z geometrii wielościanów

$$(9) \quad \mu = l - m + 2.$$

Pozwoli to uwzględnić pierścieni, przez który „oglądamy” cząsteczkę. Cząsteczki fullerenów składają się z pierścieni pięcio- i sześciocłonowych. Czy potrafimy w każdym przypadku odpowiedzieć na pytanie, ile jest jednych i drugich? Odpowiedź jest pozytywna, jeżeli założymy, że innych pierścieni nie ma i że każdy wierzchołek należy jednocześnie do trzech pierścieni. Oznaczmy przez μ_5 i μ_6 odpowiednio liczbę pierścieni pięcio- i sześciocłonowych. Wystarczy teraz rozwiązać układ równań

$$6\mu_6 + 5\mu_5 = 3n,$$

$$\mu_6 + \mu_5 = \mu.$$

Uwzględniając (9) otrzymamy nieco zaskakujący rezultat

$$\mu_5 = 12, \quad \mu_6 = \frac{1}{2}n - 10.$$

W każdej cząsteczce fullerenu liczba cykli pięciocłonowych równa jest dokładnie 12. Ponadto nie istnieją cząsteczki fullerenów złożone z samych tylko pierścieni sześciocłonowych. Wynik ten jest w pełni zgodny z wynikami otrzymanymi przez Eulera w XVII w. – nic dziwnego, przecież ze wzoru Eulera je wyprowadziliśmy. Euler nie znał, co prawda, fullerenów, ale badał bryły geometryczne, które opisują ich strukturę. Łączna liczba pierścieni w cząsteczce fullerenu wynosi zatem

$$\mu = \frac{1}{2}n + 2.$$

Wynika stąd jasno, że fullereny muszą zawierać parzystą liczbę atomów węgla w cząsteczce, co gwarantuje ich fizyczną stabilność.

Pora na krótkie podsumowanie. Jak wykazaliśmy, wzór sumaryczny pozwala przewidzieć pewne cechy strukturalne cząsteczki chemicznej i dość powszechne przekonanie chemików zawarte w pierwszym zdaniu tego opracowania okazało się mocno przesadzone. Czy jednak prowadzone przez nas rozważania to tylko zabawa? Wydaje się, że nie. Grafy mogą się okazać przydatne wszędzie tam, gdzie na podstawie niepełnej informacji o budowie cząsteczki, uzyskanej np. drogą badań instrumentalnych, trzeba odtworzyć jej rzeczywistą strukturę.

Na zakończenie ciekawostka związana z tym, że teoria grafów dostarcza często zaskakujących wniosków niezupełnie zgodnych z intuicją. Zainteresowanemu Czytelnikowi proponuję znalezienie takiej cząsteczki chemicznej, w której skład wchodzi nieparzysta liczba atomów o nieparzystej wartościowości. Rozwiązanie znajdzie Czytelnik w książce: Narsinght Deo, *Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce*. Miłej zabawy.

Należało się jeszcze zabezpieczyć przed zaobserwowaniem interferencji dwóch elektronów, chciano bowiem wykazać, że to właśnie pojedynczy elektron może interferować sam ze sobą. Osiągnięto to wykorzystując bardzo słabą wiązkę elektronów. W ciągu jednej sekundy do urządzenia docierało około tysiąca elektronów. Może się to wydawać bardzo dużo, ale żeby uzmysłowić Państwu, jak to w rzeczywistości jest niewiele, zróbmy następujące porównanie. Odległość od źródła do ekranu, na którym były rejestrowane elektrony, wynosiła 1,5 m. Średnia odległość między kolejnymi elektronami wynosiła 150 kilometrów. Wynika z tego, że średnio rzecz biorąc na trasie przelotu nigdy nie było dwóch elektronów.

Obraz interferencyjny w tych warunkach powstawał w czasie około 20 minut. Wynik przedstawiono w postaci serii zdjęć z ekranu telewizyjnego aparatury rejestrującej elektrony. Każda kropka na ekranie odpowiadała zarejestrowaniu jednego elektronu. Po nadejściu najpierw pięciu, a później stu elektronów, rozkład na ekranie był całkiem przypadkowy, przynajmniej tak wyglądało. Widać było powierzchnię ekranu pokrytą chaotycznie rozrzuconymi kropkami. Po zarejestrowaniu już 3000 elektronów zaczął wyłaniać się obraz maksimów – w pewnych miejscach było wyraźnie więcej kropek – i minimów – gdzie tych kropek zarejestrowano niewiele. Odpowiadało to obrazowi interferencyjnemu. W miarę przybywania elektronów obraz stawał się coraz wyraźniejszy. Otrzymano więc naoczny dowód, że elektron może interferować sam ze sobą.

Czy to można zrozumieć? Zależy od tego, co rozumiemy przez samo słowo *zrozumieć*. Jeżeli chcemy tylko przewidzieć przebieg zjawiska na podstawie praw teorii kwantów, to, oczywiście, łatwo to zrobić. Jeżeli chcemy sobie wyobrazić przebieg zjawiska na podstawie modelu, na przykład, kul bilardowych biegnących przez dwie szczeliny, to jest to niemożliwe – świat nie da się opisać za pomocą analogii tylko z życia codziennego. Jeżeli dalej nie ufając wynikom opisanego doświadczenia postawimy pytanie „ale którądy tak naprawdę przeszedł elektron, przez którą szczelinę?”, to nie będziemy umieli znaleźć na nie odpowiedzi. Jeżeli zasłonimy jedną szczelinę, wiedząc już teraz na pewno, że elektron przemknął przez pozostałą otwartą, to obraz interferencyjny zniknie. Przyroda nam nie zdradzi, którądy przeszedł elektron, a tak naprawdę, to pytanie o jego drogę nie ma sensu, ale to już inna sprawa.

Chaos jest wszędzie

Tomasz KWAST

Słowo *chaos* w potocznym rozumieniu oznacza bałagan, brak prawidłowości. Dla matematyka, a pośrednio też dla fizyka lub astronoma, oznacza ono coś jeszcze. Pojęcie to powstało przy próbach nowego spojrzenia na takie układy fizyczne, które – mówiąc w uproszczeniu – startując z bardzo podobnych warunków początkowych osiągają bardzo różne stany końcowe. Takie zjawisko jest znane od dawna, ale impuls nowym badaniom dało odkrycie w latach 60. przez meteorologa Edwarda Lorenza z Massachusetts Institute of Technology niepokojącego faktu. Wykonując mianowicie komputerowe symulacje klimatu stwierdził, że małym zmianom parametrów modelu (ciśnienia atmosferycznego, prędkości wiatru itd.) mogą odpowiadać duże zmiany końcowego rozkładu pogody. Było to tym dziwniejsze, że równania opisujące model zostały uprzednio tak uproszczone, że ich rozwiązania powinny zachowywać się „porządnie”.

Zauważmy jednak, że coś takiego można zaobserwować w zachowaniu już zaledwie dwóch punktów materialnych działających na siebie siłami grawitacji lub elektrostatycznymi. Jeden z nich puszczony ku drugiemu z daleka minie go po hiperboli, ale wystarczy bardzo mała zmiana początkowego kierunku ruchu lub punktu startowego, by hiperbola wygięta była w zupełnie inną stronę. Takie właśnie rozpraszanie cząstek α na folii metalowej Rutherford wytłumaczył istnieniem jąder atomowych. W mechanice gazów lub układów gwiazdowych zjawisko to prowadzi do „mieszania”, relaksacji, a ostatecznie do osiągnięcia stanu równowagi.

Ogólnie biorąc chaos pojawia się w zagadnieniach dynamiki, gdy równania opisujące zjawisko są nieliniowe. Poeksperymentujmy z bardzo prostym modelem jakiejś fikcyjnej populacji. Niech w chwili t zbiorowość ta liczy x_t członków, a w chwili $t + 1$

$$x_{t+1} = x_t(a + 1) - ax_t^2,$$

gdzie a jest dowolnym „parametrem wzrostu”. Człon pierwszy równania reprezentuje wzrost populacji proporcjonalny do jej aktualnej wartości, a drugi – jej malenie – nieliniowe! Badanie tego modelu nietrudno zaprogramować. I co się okazuje? Dla $a < 2$ startując od niedużych wartości x (np. kilka dziesiątych) proces opisywany powyższym równaniem dąży do $x = 1$. Ale dla $2 < a < \sqrt{6}$ kolejne punkty skupiają się wokół dwu wartości i proces oscyluje między nimi. Dla nieco większych a liczebność populacji skacze między czterema, ośmioma itd. wartościami, wreszcie dla a większych od około 2,6 nie ma żadnego konkretnego punktu skupienia i zachowanie się modelu jest w pełni chaotyczne.

Realne zjawiska są bardziej skomplikowane i niektórzy uważają, że chaos jest wszechobecny. Pojawia się zarówno w mechanice atmosfery jak i mechanice Układu Słonecznego. Jest to o tyle paradoksalne, że ciała niebieskie zwykle się uważa za wzór ładu. Tymczasem weźmy przykład Hyperiona – akurat jego ruch był kilka lat temu intensywnie badany. Ten satelita Saturna jest nieco nieregularną bryłą o rozmiarach około 190 km i obiega planetę po wyraźnie wydłużonej orbicie (mimośród 0,104). Siły pływowe Saturna usiłują, oczywiście, ustawić go najdłuższą osią w kierunku planety i w ten sposób zrównać jego prędkość rotacji ze średnią prędkością kątową ruchu orbitalnego. Tak się stało z ziemskim Księżycem, ale jego orbita mniej różni się od kołowej (mimośród dwa razy mniejszy), natomiast w przypadku Hyperiona widocznie tak stać się nie może. Owszem, gdyby sztucznie nadać mu ruch wirowy np. synchroniczny z obiegiem (rezonans 1:1), to już tak by zostało. W rzeczywistości jednak Hyperion na swojej orbicie koziółkuje i nie wydaje się, by kiedykolwiek miał przestać, czyli jego ruch obrotowy jest w dłuższych okresach chaotyczny. Potwierdzają to np. długotrwałe obserwacje jego jasności, które nie wykazują żadnych trwałych okresowości.

Jest nawet gorzej. Planetoidy należące do grup Trojan i Greków obiegają Słońce praktycznie na orbicie Jowisza (w trójkątnych punktach libracji układu Jowisz-Słońce), są więc z nim w rezonansie 1:1 i taki stan trwa. Brak jest natomiast planetoid, które byłyby z Jowiszem w rezonansie 1:2, 1:4, 2:5 i in. Fakt ten zauważył Daniel Kirkwood w 1866 r. Oznacza to, że niektóre rezonanse „przyciągają”, a inne „odpychają” obiekty. Mechanika nieba zapewnia wprawdzie o stabilności Układu Słonecznego w tym sensie, że ocenia jako niemal nieprawdopodobne takie warunki początkowe, które miałyby doprowadzić do jego rozpadu. Nie ma jednak gwarancji, czy pojedynczy drobny obiekt nie zostanie zepchnięty na osobliwą orbitę.

Nie jest pewne, czy obliczenia numeryczne przyczynią się do wyjaśnienia tego problemu, bowiem trzeba by obliczać ruch Układu Słonecznego na miliony lat w przyszłość. Temu na razie nie są w stanie podołać współczesne komputery, ponadto ostateczny wynik zawsze zafałszowany zostaje przez nieuniknione maszynowe błędy „na ostatnim miejscu po przecinku” i wreszcie warunki początkowe, tzn. dzisiejsze położenia i prędkości planet i ich satelitów znamy z ograniczoną dokładnością. Można więc zaryzykować pogląd, że badania chaosu w mechanice zostały dopiero rozpoczęte, wyniki są wrywkowe i nie bardzo wiadomo, jak dochodzić do uogólnień.



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 682. Znaleźć cyfrę jedności (w zapisie dziesiętnym) liczby $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1992}$.
Rozwiązanie na str. 13

M 683. W czworoscianie foremnym o objętości 1 poprowadzono 6 płaszczyzn w ten sposób, że każda z nich zawiera jedną z krawędzi czworoscianu i środek przeciwległej krawędzi. Na ile części dzielą one czworoscian? Znaleźć objętość każdej z tych części.
Rozwiązanie na str. 10

M 684. Czy istnieje funkcja różnowartościowa $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ spełniająca dla każdego $x \in \mathbf{R}$ warunek $f(x^2) - (f(x))^2 \geq 1/4$?
Rozwiązanie na str. 10

Redaguje Jarosław KULPA

F 367. Wiązka światła laserowego o energii E i częstości ν spolaryzowana kołowo padła prostopadle na swobodny nieobrcający się dysk o masie m i promieniu r . Obliczyć prędkość kątową dysku przy założeniu, że jest on ciałem doskonale czarnym.
Rozwiązanie na str. 13

F 368. Znajdująca się w przestrzeni kosmicznej bryłka węgla o temperaturze początkowej 25°C stygnie do temperatury zbliżonej do zera bezwzględnego. Ile fotonów przypadających na jeden atom węgla zostanie wyemitowanych przez bryłkę, przy założeniu, że węgiel jest ciałem doskonale czarnym. Entropia molowa węgla w temperaturze 25°C wynosi $S_m = 5,69 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$. Widmo ciała doskonale czarnego opisuje wzór $I(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$, gdzie k oznacza stałą Boltzmanna.

(W rozwiązaniu można wykorzystać wartości całek: $\beta_2 = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2,404$,

$$\beta_3 = \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 6,48.)$$

Rozwiązanie na str. 12

5

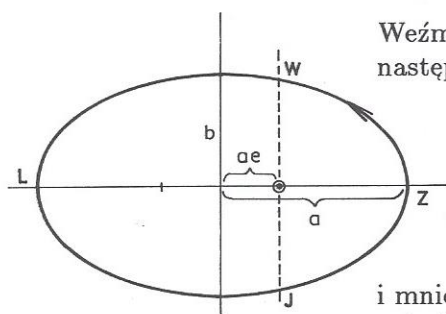
mała delta

Aby do wiosny

Znów zbliża się zima, przyroda zasypia i chociaż każda pora roku ma swój urok, to jak zwykle będziemy z utęsknieniem oczekiwać wiosny. Ile czasu nam to zajmie?

Weźmy dla przykładu ostatni rok. Dаты początków pór roku były następujące:

jesieni	23 IX 1992
zimy	21 XII 1992
wiosny	20 III 1993
lata	21 VI 1993
jesieni	23 IX 1993



i mniej więcej tak samo jest każdego roku. Łatwo porachować, że „ciepła” połowa roku, tzn. wiosna i lato, trwała 187 dni (oznaczymy ten okres przez T_c), podczas gdy „zimna” połowa, tzn. jesień i zima, trwała 178 dni (T_z).

To pocieszające. Domyślamy się, że przyczyną tej „nierówności połówek” roku jest eliptyczność orbity Ziemi. Jak te rzeczy zależą od siebie – zaraz sami obliczymy, a będzie to łatwe dzięki szczęśliwemu przypadkowi. Otóż tak się składa, że około 4 stycznia każdego roku Ziemia znajduje się najbliżej Słońca. Jest to tak blisko początku zimy, że różnicę można w naszych rozważaniach zaniedbać. Dlatego na rysunku punkt Z oznaczający początek zimy może być zarazem przysłonecznym punktem orbity. Punkty W , L i J leżące w kierunkach co 90° (gdyby patrzeć ze Słońca) oznaczają punkty orbity, w których Ziemia wkracza w wiosnę, lato i jesień (na półkuli północnej!).

A co to w ogóle jest elipsa? Chyba najczęściej mówi się o niej, że jest to zbiór punktów, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów jest stała. Definicja ta jest nawet praktyczna, bo umożliwia łatwe wykreślenie elipsy. Wbijamy (ale nie w stół, tylko w jakąś pomocniczą deskę!) dwa gwoździe – będą to te ustalone punkty; nazywają się one ogniskami elipsy. Na nich zaczepiamy kawałek nitki i wodząc ołówkiem umieszczonym w jej zgięciu tak, by była stale napięta, rysujemy właśnie nie co innego, tylko elipsę. Stałość sumy odległości ołówka od dwóch ognisk automatycznie zapewnia nitka, której połowa długości to tzw. wielka pół elipsy oznaczana tradycyjnie przez a . Tak się dziwnie składa, że skoro Słońce działa na każdą planetę z siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości, to torem planety wokół Słońca jest też elipsa, przy czym Słońce leży w jednym z jej ognisk – wiemy, że tak brzmi pierwsze prawo Keplera.

Drugie prawo Keplera wykorzystamy, by wreszcie powiązać geometryczne własności elipsy z czasem. Głosi ono, że prędkość połowa planety jest stała, albo inaczej – promień wodzący planety omiata w jednakowych odstępach czasu jednakowe pola. Wobec tego okresowi T_c odpowiada pole części elipsy na lewo od przerywanej linii, a okresowi T_z – na prawo od niej. Miarą spłaszczenia elipsy jest tzw. mimośród $e = \sqrt{(a^2 - b^2)/a^2}$, gdzie b jest małą półosią elipsy. Inaczej można go określić zauważwszy, że skoro odległość końca małej osi od ogniska wynosi a (bo wtedy ołówek dzieli nitkę na połowy), to odległość ogniska od środka elipsy musi wynosić ae , aby spełnione było twierdzenie Pitagorasa dla widocznego na rysunku trójkąta prostokątnego. Widać zatem, że „ciepła” część pola elipsy jest od „zimnej” większa o cztery pola figury ograniczonej przez małą półoś b , odcinek ae , linię przerywaną i łuk elipsy. Figura ta jest w przybliżeniu prostokątem o rozmiarach $ae \times b$, a przybliżenie jest tym lepsze, im mniej spłaszczona jest elipsa. Całe pole elipsy wynosi, oczywiście, πab , mamy więc układ „równań”:

$$T_c - T_z \sim 4aeb,$$

$$T_c + T_z \sim \pi ab,$$

skąd po podzieleniu stronami dostajemy

$$e \approx \frac{\pi}{4} \frac{T_c - T_z}{T_c + T_z}.$$

Dokładniejsze wyprowadzenie tego wzoru można znaleźć w *Delcie* 5/1984. Z obserwacji już wiemy, że $T_c - T_z \approx 9$, a $T_c + T_z \approx 365$, skąd $e \approx 0,019$. Wynik jest trochę zawyżony, ale ileż uproszczeń po drodze zrobiliśmy! Jak na rachunek niemal na palcach – jest niezłe.

Małą Deltę przygotował Tomasz KWAST

Odcinek dla poczty		Odcinek dla posiadacza rachunku		Potwierdzenie dla wpłacającego	
Zł		Zł		Zł	
słownie złotych		słownie złotych		słownie złotych	
Dokładny adres	wplacający	Dokładny adres	wplacający	Dokładny adres	wplacający
na r-k	AMOS	na r-k	AMOS	na r-k	AMOS
Dokładna nazwa	01-506 Warszawa ul. Szenwalda 1	Dokładna nazwa	01-506 Warszawa ul. Szenwalda 1	Dokładna nazwa	01-506 Warszawa ul. Szenwalda 1
nazwa banku	PKO VIII O/W-wa	nazwa banku	PKO VIII O/W-wa	nazwa banku	PKO VIII O/W-wa
Nr r-ku	1586-77578-136	Nr r-ku	1586-77578-136	Nr r-ku	1586-77578-136
stempel	Pobrano opłatę	stempel	Pobrano opłatę	stempel	Pobrano opłatę
..... podpis przyjmującego	zł podpis przyjmującego	zł podpis przyjmującego	zł



Patrz w niebo

Rozwiązanie zadania M 683.

Każda z poprowadzonych płaszczyzn zawiera jeden z odcinków łączących środki dwóch skośnych krawędzi czworoscianu, zatem wszystkie płaszczyzny przechodzą przez jeden punkt. Stąd wynika, że rozważane płaszczyzny dzielą całą przestrzeń na kąty wielościenne o wspólnym wierzchołku; czyli, że każda z części, na które został podzielony czworoscian, ma przynajmniej jedną ścianę na każdej ze ścian czworoscianu. Łatwo też zauważyć, że żadna część nie może mieć swoich ścian na dwóch różnych ścianach czworoscianu (leżą one po dwóch stronach tej płaszczyzny, która zawiera ich wspólną krawędź). Zatem, czworoscian jest podzielony na 24 części (na każdej z czterech ścian „narysowane” zostały środkowe dzielące ją na 6 trójkątów, $4 \cdot 6 = 24$). Wszystkie części są przystające (nie trudno się o tym przekonać rozpatrując symetrie względem każdej z sześciu poprowadzonych płaszczyzn), a więc ich objętości są równe $1/24$.



Rozwiązanie zadania M 684. Jeśli liczba x spełnia warunek $x = x^2$, to $f(x) - (f(x))^2 \geq 1/4$, albo równoważnie $(f(x) - 1/2)^2 \leq 0$. Stąd wynika, że $f(0) = f(1) = 1/2$, czyli funkcja f nie jest różnowartościowa. Nie istnieje więc żadna funkcja spełniająca warunki zadania.

14 lipca 1789 r. zdobycie Bastylli przez lud Paryża miało dać początek nowej erze dziejów ludzkości, erze, w której wszyscy byliby równi, wolni i – w ostatecznym rachunku – szczęśliwi. Co z tego wyszło, wszyscy wiemy. Tak chyba kończy się każda rewolucja, a właściwie rewolucja nie ma ochoty się zakończyć i swój byt podtrzymywać może już tylko siłą, czego konsekwencje są raczej ponure. Ale nie o to chodzi. Rewolucja Francuska przeprowadziła między innymi bardzo ważny i udany „eksperyment” w nauce w ogóle i inny nieudany w astronomii.

W połowie 1790 r. na propozycję Akademii Nauk Zgromadzenie Narodowe podjęło decyzję zreformowania systemu miar i wag. To był właśnie ten udany „eksperyment”, którego doniosłość jest niezaprzeczalna. W owym czasie w Europie było w użyciu podobno około 800 jednostek długości. Łatwo sobie wyobrazić, jaki musiał panować zamęt np. w handlu. I pomyśleć, że dziś wielu studentom (i nie tylko) fizyki sprawia trudność przeliczenie czegokolwiek z systemu cgs do SI lub odwrotnie! W każdym razie Francji udało się wprowadzić u siebie i rozpropagować na cały (prawie) świat nowy system jednostek, tzw. metryczny. Nawiasem mówiąc, wzorcem metra miało być pierwotnie wahadło o okresie 2 s. Później dopiero komisja, w której składzie zasiadali m.in. Lagrange, Lavoisier, Laplace, zdecydowała, że będzie nim $1/20\ 000\ 000$ część południka paryskiego. Wzorec wahadłowy odrzucono, ponieważ sekunda nie jest dziesiątą częścią żadnego okresu spotykanego w przyrodzie. Wtedy również za jednostkę masy uznano kilogram, czyli masę jednego litra destylowanej wody. Oczywiście, z biegiem czasu wzorce te musiały być określane coraz dokładniej, nie ma to już jednak nic wspólnego z Rewolucją.

A „eksperyment” nieudany polegał na wprowadzeniu nowego kalendarza. Według niego rok zaczynał się 22 września, co pokrywało się z równonocą jesienną oraz datą proklamacji Republiki. Rok liczył 12 miesięcy, każdy po 30 dni, plus 5 dodatkowych dni w roku zwykłym lub 6 w przestępnym. Skasowano tygodnie i dniem wolnym był jeden dzień w dekadzie. Same nazwy nowych miesięcy pochodziły od zjawisk zachodzących w przyrodzie. Niestety, jak widać, kalendarz ten nie był tak uniwersalny, jak chcieli go widzieć jego twórcy, bowiem podkreślał początek akurat francuskiej Republiki i odpowiadał akurat francuskiemu klimatowi. Trudno orzec, czy to właśnie było powodem jego końca, w każdym razie tak usilnie zwalczana przez Rewolucję tradycja wkrótce do Francji powróciła.

Tomasz KWAST

Prenumerata „Deltę”
za okres:

Prenumerata „Deltę”
za okres:

Prenumerata „Deltę”
za okres:

Kłopoty z aproksymacją punktów stałych

Jarosław GÓRNICKI

Pewne problemy matematyczne wyróżniają się prostotą i naturalnością sformułowań. Niestety, nie oznacza to, że ich rozwiązania (o ile potrafimy je wskazać) są równie proste. Przekonują nas o tym, między innymi, przykłady z teorii liczb lub elementarnej geometrii.

Wiemy, że w pewnych sytuacjach istnieją rozwiązania równania $Tx = x$; nazywamy je punktami stałymi (niezmienniczymi) odwzorowania T .

Matematycy czasem oznaczają wartości funkcji T w punkcie x przez Tx , zamiast $T(x)$.

Mówi o tym, na przykład, twierdzenie Brouwera:

Twierdzenie (L.E.J. Brouwer, 1911).

Jeżeli B jest domkniętą kulą w n -wymiarowej przestrzeni \mathbf{R}^n i $T : B \rightarrow B$ jest odwzorowaniem ciągłym, to istnieje taki punkt $x_0 \in B$, że $Tx_0 = x_0$.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) – matematyk holenderski.

Niestety, twierdzenie to nic nie mówi, jak te rozwiązania wyznaczyć! I na ten problem zwrócimy tutaj uwagę. Ograniczymy się do prostej sytuacji, gdy T jest odwzorowaniem ciągłym i $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Rysując w prostokątnym układzie współrzędnych XOY (ze zwykłym sposobem mierzenia odległości) wykres dowolnej funkcji ciągłej $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ oraz funkcji identycznościowej $i(x) = x$ stwierdzamy, że wykresy te mają co najmniej jeden punkt wspólny. Innymi słowy, prawdziwe jest twierdzenie

Twierdzenie 1 (jednowymiarowa wersja twierdzenia Brouwera).

Jeżeli odwzorowanie $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jest ciągłe, to istnieje taki punkt $x_0 \in [0, 1]$, że $Tx_0 = x_0$.

Czytelnik może sprawdzić – wystarczą odpowiednie rysunki – że twierdzenie to nie musi być prawdziwe, gdy T nie jest odwzorowaniem ciągłym bądź gdy rozważany przedział nie jest domknięty.

Dowód. Wykorzystamy własność Darboux: jeżeli funkcja $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła, $F(a) = u$, $F(b) = v$, to dla dowolnego z leżącego pomiędzy u i v istnieje taki punkt $c \in [a, b]$, że $F(c) = z$.

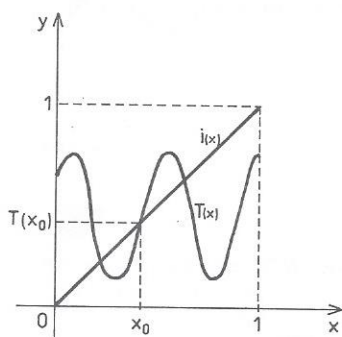
Jean Gaston Darboux (1842 – 1917) – matematyk francuski.

Niech $F(x) = x - Tx$. Wtedy funkcja $F : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła jako różnica funkcji ciągłych, a ponadto $F(0) = 0 - T(0) \leq 0$ oraz $F(1) = 1 - T(1) \geq 0$. Istnieje zatem taki punkt $x_0 \in [0, 1]$, że $F(x_0) = 0$. Oznacza to, że $Tx_0 = x_0$. ■

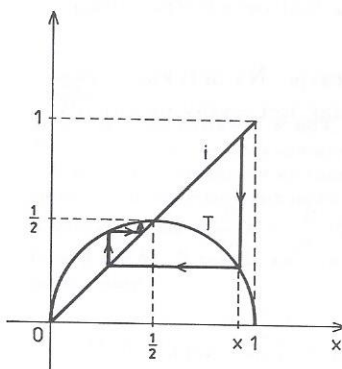
Twierdzenie to i jego dowód są przykładem egzystencjalnego i niekonstruktywnego rezultatu matematycznego. Gwarantuje ono, w opisanej sytuacji, istnienie rozwiązania równania $Tx = x$, ale go nie wskazuje. Nie mówi też ono o liczbie tych rozwiązań. Spróbujmy jednak wskazać lub aproksymować jakieś jedno rozwiązanie tego równania w sytuacji z twierdzenia 1. Czy biorąc dowolny punkt $x \in [0, 1]$ i tworząc ciąg iteracyjny $\{x_n = T^n x\}$ otrzymujemy ciąg zbieżny do punktu stałego odwzorowania T ?

Przypatrzmy się sytuacjom z rysunków 2 i 3. Na rysunku 2 funkcja

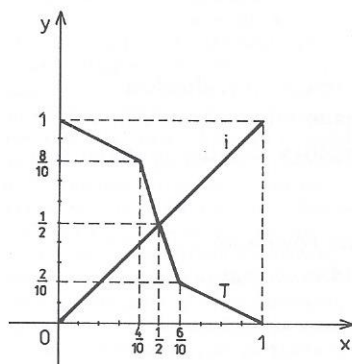
$T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dana wzorem $T(x) = \left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)^{1/2}$ ma dwa punkty



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rozwiązanie zadania F 368.

Niech Q oznacza ciepło bryłki węgla, S – jej powierzchnię, a T – temperaturę. Prawo Stefana-Boltzmana możemy zapisać w postaci

$$\frac{dQ}{dt} = \sigma T^4 S = \int I(\nu) d\nu \cdot S.$$

Energia pojedynczego fotonu wynosi $h\nu$. Stąd liczba fotonów emitowanych w jednostce czasu jest równa

$$\frac{dn}{dt} = \int \frac{I(\nu)}{h\nu} d\nu \cdot S.$$

Podstawiając $x = \frac{h\nu}{kT}$ i zamieniając zmienne całkowania mamy

$$\frac{dn}{dt} = \alpha \cdot T^3 \cdot S,$$

gdzie

$\alpha = \frac{k^3}{h^3} \frac{8\pi}{c^3} \beta_2$, $\sigma = \frac{k^4}{h^3} \frac{8\pi}{c^3} \beta_3$. Wyrażając z prawa Stefana-Boltzmana dt za pomocą dQ mamy

$$\frac{dn}{dQ} = \frac{\alpha T^3 S}{\sigma T^4 S} = \frac{\alpha}{\sigma} \cdot \frac{1}{T}.$$

Stąd

$$n = \frac{\alpha}{\sigma} \int \frac{dQ}{T}.$$

Ponieważ entropia definiowana jest jako $S_0 = \int \frac{dQ}{T}$ oraz $S_0 = S_m \cdot n_0$, gdzie n_0 jest liczbą moli węgla, mamy

$$n = \frac{\alpha}{\sigma} S_m n_0 = \frac{\beta_2}{\beta_3} \frac{1}{k} S_m \cdot n_0.$$

Stałą Boltzmana możemy wyrazić za pomocą liczby Avogadro N_A oraz stałej gazowej R : $k = \frac{R}{N_A}$. Stąd ilość fotonów przypadających na jeden atom węgla wynosi

$$q = \frac{n}{N_A \cdot n_0} = \frac{S_m}{R} \cdot 0.371 = 0.254.$$

stałe: $x_1 = 0$ oraz $x_2 = \frac{1}{2}$. Punkt stały x_2 „przyciąga” za pomocą iteracji T^n wszystkie punkty z przedziału $(0, 1)$, tzn. dla każdego $x \in (0, 1)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = \frac{1}{2}$ (zamiast rachunków patrz na rysunek!). Pozostałe dwa punkty „przyciąga” punkt stały x_1 .

Inaczej wygląda sytuacja na rysunku 3. Funkcja $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (zdefiniowana na rysunku 3) ma dokładnie jeden punkt stały $x = \frac{1}{2}$. Ale ten punkt „nie przyciąga” za pomocą iteracji T^n żadnego punktu ze zbioru $[0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$.

Przykłady te sugerują, że dla zbieżności ciągu iteracyjnego $\{x_n = T^n x\}$ do punktu stałego odwzorowania T konieczne są dodatkowe założenia.

Twierdzenie 2. Niech będzie dana ciągła funkcja $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ i $x \in [0, 1]$. Ciąg iteracyjny $\{x_n = T^n x\}$ jest zbieżny do punktu stałego odwzorowania T wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} |T^{n+1} x - T^n x| = 0$.

Dowód. Załóżmy, że $|T^{n+1} x - T^n x| \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$ i ciąg iteracyjny $\{x_n = T^n x\}$ nie jest zbieżny. Wtedy z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa wynika, że istnieją takie podciągi zbieżne: $T^{n_i} x \rightarrow y_1$ oraz $T^{m_i} x \rightarrow y_2$, że $y_1 \neq y_2$. Dodatkowo podciągi te wybieramy tak, by $m_i > n_i$, $i = 1, 2, \dots$. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy tak wybrać liczby naturalne n_{i_0} oraz $m_{j_0} > n_{j_0}$, by:

- 1) $|T^{n_i} x - y_1| < \frac{\varepsilon}{3}$ dla $n_i \geq n_{i_0}$,
- 2) $|T^{m_i} x - y_2| < \frac{\varepsilon}{3}$ dla $m_i \geq m_{j_0}$,
- 3) $|T^{n+1} x - T^n x| < \frac{\varepsilon}{3(m_{j_0} - n_{i_0})}$ dla $n > n_{i_0}$.

Wtedy

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2| &\leq |y_1 - T^{n_{i_0}} x| + |T^{n_{i_0}} x - T^{m_{j_0}} x| + |T^{m_{j_0}} x - y_2| \leq \\ &\leq |y_1 - T^{n_{i_0}} x| + \sum_{v=n_{i_0}}^{m_{j_0}-1} |T^{v+1} x - T^v x| + |T^{m_{j_0}} x - y_2| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + (m_{j_0} - n_{i_0}) \frac{\varepsilon}{3(m_{j_0} - n_{i_0})} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Z dowolności wyboru $\varepsilon > 0$ wynika, że $y_1 = y_2$. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że ciąg iteracyjny $\{x_n = T^n x\}$ jest zbieżny. Niech $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x$. Wtedy x_0 jest punktem stałym odwzorowania T :

$$T x_0 = T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1} x = x_0.$$

W drugą stronę implikacja jest oczywista. ■

Bernard Bolzano (1781 – 1848) – matematyk i filozof czeski.

Karl Teodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1898) – matematyk niemiecki.

Twierdzenie (Bolzano-Weierstrassa). Każdy ograniczony ciąg liczbowy zawiera podciąg zbieżny.

Można również rozważać bardziej skomplikowane iteracje. Na przykład, niech (t_n) będzie ciągiem liczb z przedziału $[0, 1]$, a ciąg iteracyjny opisujemy wzorem

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &\in [0, 1], \\ x_{n+1} &= (1 - t_n)x_n + t_n T x_n. \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \dots$

Wówczas zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. Niech T będzie ciągłym odwzorowaniem przedziału $[0, 1]$ w siebie. Jeżeli ciąg iteracyjny określony wzorem (1) jest zbieżny do punktu z oraz $\sum t_n = \infty$, to z jest punktem stałym odwzorowania T .

Dla zilustrowania tego twierdzenia weźmy $t_n = \frac{1}{2}$. Oczywiście, $\sum t_n = \infty$, a więc otrzymujemy następujący

Wniosek. Niech T będzie ciągłym odwzorowaniem przedziału $[0, 1]$ w siebie. Określamy następujący ciąg. Niech $x_1 \in [0, 1]$, x_{n+1} zaś niech będzie środkiem odcinka o końcach x_n i Tx_n , czyli $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + Tx_n)$. Wówczas, jeśli ciąg x_n jest zbieżny do punktu z , to z jest punktem stałym odwzorowania T .

Dowód twierdzenia 3 oraz dalsze fakty można znaleźć w pracy: D. Borwein i J. Borwein *Fixed point iterations for real functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 157, No. 1 (1991), 112-126.

Niestety, nawet te proste rezultaty nie przenoszą się na przypadek dwuwymiarowy. W odniesieniu do twierdzenia 2 pokazuje to następujący przykład:

Przykład. Niech $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Korzystając ze współrzędnych biegunowych (r, θ) określamy ciągłe odwzorowanie $T : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ wzorem

$$T(r, \theta) = \begin{cases} (0, 0) & \text{dla } r = 0, \\ \left(\frac{4}{3}r, \theta + \frac{1}{2}\right) & \text{dla } 0 < r \leq \frac{1}{2}, \\ ((2-r)^{-1}, \theta + (1-r)) & \text{dla } \frac{1}{2} < r \leq 1. \end{cases}$$

Geometryczny efekt tego odwzorowania jest następujący:

a) Punktami stałymi tego odwzorowania są punkty z brzegu koła oraz punkt $\{(0, 0)\}$.

b) Jeżeli $p = (r, \theta)$ jest punktem spełniającym warunek $0 < r \leq \frac{1}{2}$,

to punkt $T^N p = (\bar{r}, \bar{\theta})$ spełnia warunek $\frac{1}{2} < \bar{r} \leq 1$ dla dostatecznie dużego N .

c) Jeżeli $p = (r, \theta)$ jest punktem spełniającym warunek $\frac{1}{2} < r < 1$, odległym od brzegu koła o k^{-1} , wtedy punkt $Tp = (\hat{r}, \hat{\theta})$ jest punktem spełniającym warunek $\frac{1}{2} < \hat{r} < 1$, odległym od brzegu koła o $(k+1)^{-1}$ oraz (rys. 4)

$$\arg(Tp) = k^{-1} + \arg(p).$$

Z faktów tych wynika, że dla dowolnego $p \in B(0, 1)$, $|T^{n+1}p - T^n p| \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Jednak dla takiego punktu $p = (r, \theta)$, że $\frac{1}{2} < r \leq 1$ mamy

$$\arg(T^n p) = \arg(p) + \sum_{i=0}^{n-1} (k+i)^{-1}.$$

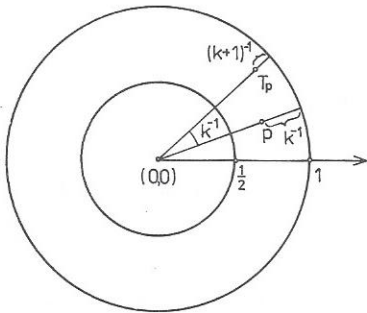
Zatem z rozbieżności szeregu $\sum_{i=0}^{\infty} (k+i)^{-1}$ wynika rozbieżność ciągu $\{x_n = T^n p\}$.

Jak widać, problem aproksymacji i lokalizacji punktów stałych, o których mowa w twierdzeniu Brouwera, jest zagadnieniem kłopotliwym i wciąż aktualnym.

Na koniec trochę optymizmu. W przypadku odwzorowań „więcej niż ciągłych” – na przykład odwzorowań lipschitzowskich ze stałą $L < 1$ mamy nie tylko istnienie punktu stałego, ale również wiemy, że taki punkt jest dokładnie jeden.

Odwzorowanie $T : A \rightarrow A$ nazywamy lipschitzowskim ze stałą $L > 0$, gdy dla dowolnych $x, y \in A$, $\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\|$.

Ponadto możemy go aproksymować z dowolną dokładnością za pomocą iteracji opisanej w twierdzeniu 2 (*Delta* 8/1980). Problemy znowu się pojawiają, gdy rozważane odwzorowanie jest lipschitzowskie ze stałą $L \geq 1$, ale to już całkiem inna historia...



Rys. 4



Rozwiązanie zadania M 682.

Rozpatrzmy ciąg $a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n} = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n$. Posługując się metodą indukcji łatwo wykazać, że $a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$ (zatem wyrazy ciągu a_n to liczby całkowite, bowiem $a_0 = 2, a_1 = 10$). Stąd wynika, że $a_{n+2} + a_n$ dzieli się przez 10, a więc liczba

$$a_{n+4} - a_n = (a_{n+4} + a_{n+2}) - (a_{n+2} + a_n)$$

też jest podzielna przez 10. Oznacza to, że cyfra jedności każdej z liczb

$$a_0 = 2, a_4, a_8, a_{12}, \dots, a_{996}$$

jest taka sama, mianowicie równa 2. Zatem

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1992} = a_{996} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1992}$$

ma cyfrę jedności 1, bowiem $0 < (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1992} < 1$.



Rozwiązanie zadania F 367.

Fotony w świetle spolaryzowanym kołowo mają wyróżniony kierunek spinu. Całkowity moment pędu wiązki fotonów $J = nh = \frac{E}{h\nu}h = \frac{E}{2\pi\nu}$ (spin fotonu $s = h$). Z zasady zachowania pędu mamy

$$\frac{1}{2}mr^2\omega = \frac{E}{2\pi\nu},$$

$$\text{skąd } \omega = \frac{1}{\pi} \frac{E}{mr^2\nu}.$$

Siła Coriolisa

Zygmunt AJDUK

Czy tor swobodnie spadającej metalowej kulki pokrywa się z linią pionu wyznaczoną przez zwisający ciężarek?

Okazuje się, że nie. Przy spadku z wysokości 100 m (na szerokości geograficznej Polski) spadająca kulka uderzy o około 1,5 cm na wschód od miejsca wyznaczonego metodą ciężarka i linki. Różnica jest niewielka, ale jest. Co jest tego przyczyną?

Przyczyną odchylenia jest siła Coriolisa. Układ odniesienia związany z obracającą się Ziemią nie jest układem inercyjnym i do opisu ruchu ciał w układach nieinercyjnych, oprócz działających na dane ciało sił \vec{F} ze strony innych ciał, należy uwzględnić jeszcze siły bezwładności \vec{F}_{bezw} . Równanie Newtona

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

obowiązujące w układzie inercyjnym, trzeba zastąpić przez

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{bezw}.$$

Dla układu nieinercyjnego obracającego się ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$ siły bezwładności mają postać

$$\vec{F}_{bezw} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Pierwszy człon w tym wzorze to dobrze znana z codziennego doświadczenia siła odśrodkowa. Doznajemy jej, gdy wiozący nas pojazd znajduje się na zakręcie. Siła odśrodkowa powoduje odchylenie od pionu łańcucha z krzeselkiem na obracającej się karuzeli i usuwa wodę z mokrej bielizny w zbiorniku wirówki. W szkoleniu pilotów i kosmonautów siła odśrodkowa wykorzystywana jest do wytwarzania sztucznej grawitacji o różnym natężeniu.

Drugi człon to właśnie siła Coriolisa. Odkrył ją Gustave Coriolis (1792–1843), fizyk i inżynier francuski. Siła Coriolisa pojawia się wtedy, gdy ciało porusza się względem układu nieinercyjnego. Nie odczuwamy jej więc siedząc w autobusie. Trzeba się w nim poruszać w momencie brania zakrętu, aby odczuć jej działanie. Wyraźnie odczuwają ją aktorzy grający na obracającej się scenie (np. w czasie przedstawienia *Metra*) i trzeba się do niej przyzwyczaić, aby prawidłowo się poruszać. Siła Coriolisa jest bowiem „dziwna”: działa w kierunku prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{\omega}$ i \vec{v}' . Zależy też od sinusa kąta między tymi wektorami.

Aby lepiej zrozumieć siłę Coriolisa, rozpatrzmy prosty przykład: ruch toczącej się kulki po poziomej kartce papieru. Możemy kulkę pomalować farbą, żeby zostawiła na kartce ślad toru. W układzie inercyjnym kulka będzie poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością \vec{v}_0 i jej położenie można opisać wzorami:

$$x = v_0 t, \quad y = y_0$$

w układzie inercyjnym Oxy , gdzie oś x została wybrana równoległe do \vec{v}_0 . Połóżmy teraz kartkę na obracającym się talerzu gramofonu i puśćmy kulkę tak samo, jak poprzednio. Kulka zostawi teraz ślad taki, jak na rysunku 1. Możemy łatwo znaleźć równania opisujące ten ruch. Układ związany z kartką obraca się ze stałą prędkością kątową i związki między współrzędnymi x i y w nieruchomym układzie Oxy a współrzędnymi x' i y' w układzie $Ox'y'$ na obracającej się kartce mają postać

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \omega t + y \sin \omega t, \\y' &= -x \sin \omega t + y \cos \omega t.\end{aligned}$$

W układzie nieinercyjnym tor ma więc postać

$$\begin{aligned}x' &= v_0 t \cos \omega t + y_0 \sin \omega t, \\y' &= -v_0 t \sin \omega t + y_0 \cos \omega t.\end{aligned}$$

Kierunek prędkości kątowej $\vec{\omega}$ jest prostopadły do płaszczyzny obrotu, zwrot – zgodny z regułą śruby prawoskrętnej, a wartość – równa ilorazowi 2π przez okres pełnego obrotu.

Wielkości primowane mierzone są względem obracającego się układu odniesienia.

Łatwo sprawdzić, że powyższe równania są rozwiązaniami równań ruchu postaci:

$$\vec{a} = \vec{0} \quad \text{i} \quad \vec{a}' = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' ,$$

gdzie wektor $\vec{\omega}$ jest skierowany prostopadle do kartki papieru. Gdyby występowała jedynie siła odśrodkowa, to kulka znacznie szybciej oddalałaby się od osi obrotu kartki. Gdyby działała wyłącznie siła Coriolisa, to kulka poruszałaby się po okręgu (działanie siły Coriolisa jest podobne do działania siły Lorentza na ładunek q w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = 2m\vec{\omega}/q$). Złożenie obu sił daje tor przedstawiony na rysunku.

Siła Coriolisa związana z ruchem obrotowym Ziemi jest stale obecna w naszym życiu. Ziemia obraca się z prędkością kątową $\omega = 2\pi/\text{doba}$, bardzo małą dla typowej skali czasowej zjawisk w życiu codziennym. Równanie ruchu ciała przy powierzchni Ziemi ma postać

$$m\vec{a}' = m\vec{g}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{R} + \vec{r}')) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' ,$$

gdzie \vec{g}_0 jest natężeniem pola grawitacyjnego, a \vec{R} jest wektorem położenia początku układu nieinercyjnego na powierzchni Ziemi mierzonego od środka Ziemi. Dla ruchów bliskich powierzchni Ziemi część siły odśrodkowej związana z \vec{r}' jest zanedbywalnie mała. Pierwsze dwa człony w powyższym równaniu definiują lokalną siłę ciężkości $m\vec{g} = m\vec{g}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$ na powierzchni Ziemi i przybliżone równanie ruchu ma postać

$$m\vec{a}' = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' .$$

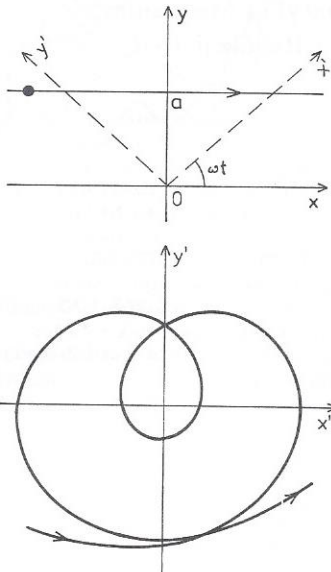
Powróćmy do przykładu swobodnie spadającego kamienia. Ponieważ wartość ω jest mała, to wystarczy ograniczyć się do wyrazów pierwszego rzędu.

Wstawiając do równania $\vec{v}' = \vec{g}t$ dla spadku z zerową prędkością początkową, dostajemy

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + \vec{g}t^2/2 - \vec{\omega} \times \vec{g}t^3/3 .$$

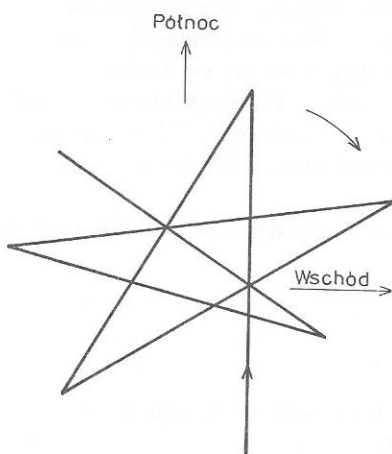
Ostatni wyraz to przejaw działania siły Coriolisa. Dla swobodnego spadku wyraz ten ma zwrot na wschód. Z punktu widzenia obserwatora w układzie inercyjnym interpretacja odchylenia spadającego kamienia na wschód jest inna. Odchylenie spowodowane jest tym, że kamień spadając z pewnej wysokości miał nieco większą prędkość ku wschodowi związaną z ruchem obrotowym Ziemi niż znajdujący się pionowo pod nim punkt powierzchni Ziemi. Wobec tego w czasie spadku przesunie się ku wschodowi względem powierzchni Ziemi.

W czasie ruchu ciał po powierzchni Ziemi na półkuli północnej ciała zbaczą w prawo od kierunku ruchu, a na półkuli południowej w lewo. Ze względu na powolny obrót Ziemi odchylenia spowodowane siłą Coriolisa są małe i można je wyraźnie obserwować tylko przy dużych prędkościach ruchu (np. przy ruchu pocisków artyleryjskich lub rakiet) lub w przypadku ruchów długo trwających. Dla samochodu o masie 1000 kg i prędkości 100 km/h siła Coriolisa wynosi tylko kilka niutonów, ale dla rakiety o zasięgu 1000 km odchylenia nią spowodowane mogą być rzędu 10 km. Siła Coriolisa powoduje podmywanie prawych brzegów rzek na półkuli północnej i lewych na południowej (prawo Baera) oraz wywołuje skręcanie prądów morskich i wiatrów, np. pasatów. W cyklonach na półkuli północnej wiatry okrążają obszar niskiego ciśnienia z lewej strony, a na południowej – z prawej (prawo Buys-Ballota). W przypadku wahadła na powierzchni Ziemi siła Coriolisa powoduje powolny obrót płaszczyzny jego wahań (w kierunku wschodnim na półkuli północnej) z częstością $\omega \sin \varphi$ (gdzie φ jest szerokością geograficzną), czyli na terenie Polski z okresem około 30 godzin. Fakt ten wykorzystał w 1851 r. Leon Foucault do bezpośredniej demonstracji obrotu Ziemi, zawieszając w tym celu w paryskim Panteonie wahadło o długości 67 m. Mamy nadzieję, że Czytelnik łatwo zrozumie przyczynę obrotu płaszczyzny drgań wahadła z punktu widzenia układu inercyjnego, zwłaszcza jeśli rozpatrzy na początek wahadło umieszczone na biegunie Ziemi.



Rys. 1. Ruch tego samego punktu materialnego obserwowany w układzie inercyjnym i nieinercyjnym.

Przykład ten jest też dobrą ilustracją względności ruchu: ruch, który w jednym układzie odniesienia jest bardzo prosty, może wyglądać skomplikowanie w innym układzie.



Rys. 2. Rozetka zakreślona przez wahadło Foucaulta na półkuli północnej (szkie odpowiadający dużej prędkości kątowej Ziemi).

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1994

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Zadania z fizyki nr 165, 166

165. Wysokie, najeżone drutem kolczastym ogrodzenie nie wyglądało zachęcająco. Dzielnicowy Służbiński mówił, pokazując ręką widoczne za nim budynki szklarni:

– Właściciel wszystko ogrzewa elektrycznie, a rachunki płaci niewielkie. Nie możemy go złapać na kradzieży prądu, choć sprawdzaliśmy pobór mocy poza gospodarstwem. Jak on to robi?

– A czy nie podłączył się do wysokiego napięcia? – zapytał inspektor Wnikliwy wskazując przewody linii przesyłowej biegnącej wzdłuż drogi.

– Nie ma tu żadnego transformatora, a gdzieby ktoś wdrapywał się na słupy! Przecież tam jest sto kilowoltów, trup byłby na miejscu – dzielnicowy wydawał się powątpiewać w zdrowy rozsądek inspektora.

– Hm... jednak zastanawiam się, czy to byłoby możliwe – powiedział Wnikliwy przyglądając się czemuś uważnie.

Co zainteresowało inspektora Wnikliwego i do jakich doszedł wniosków?

Odpowiedź należy poprzeć orientacyjnymi obliczeniami.

166. W chwili początkowej jednorodny pręt o długości l miał kierunek osi x , przy czym jego prawy koniec (rys.) poruszał się wzdłuż tej osi z prędkością v_1 , a składowa y prędkości lewego końca była równa v_2 . W tym momencie prawy koniec pręta wsunął się do wnętrza pierścienia, który może się swobodnie obracać w ustalonym miejscu (nie może się przesuwać). Pierścień obejmuje pręt ciasno (bez luzu), ale tarcie między tymi ciałami nie występuje. Jaki warunek muszą spełniać podane wielkości, aby pręt przeleciał przez pierścień na drugą stronę?

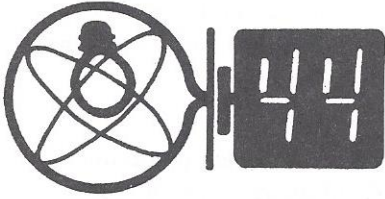
Redaguje Marcin E. KUCZMA

Zadania z matematyki nr 267, 268

267. Liczby a, b, c są związane zależnością $a + b + c = 0$. Przyjmijmy $Q_n = (a^n + b^n + c^n)/n$. Dowieść, że $Q_5 = Q_2 Q_3$.

268. Udowodnić, że suma $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}$ równa się n -tej liczbie Fibonacciego F_n .
(Określenie rekurencyjne: $F_0 = F_1 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ dla $n \geq 0$.)

Zadanie 268 zaproponował pan Krzysztof Parol z Mińska Mazowieckiego.

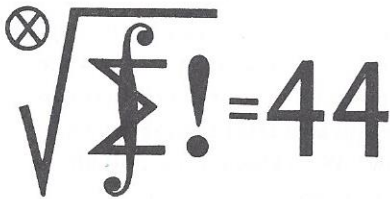


Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 151 ($WT=2,90$) i 152 ($WT=3,20$)
z numeru 1/1993

Przemysław Gworys	- Częstochowa	32,92
Tomasz Wiebecha	- Tarnów	32,90
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	25,34
Andrzej Borowski	- Aleksandrów K.	19,30



Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 253 ($WT=2,70$) i 254 ($WT=2,14$)
z numeru 1/1993

Marcin Kasperski	- Warszawa	44,81
Adam Czornik	- Bytom	42,13
Leszek Gasiński	- Stalowa Wola	41,46
Jerzy Jąnowicz	- Bolesławiec	41,19

I znów nowa twarz w Klubie 44:
M. Kasperski

Dwie rocznice

Międzynarodowe Kongresy Matematyków są największymi i najważniejszymi zjazdami naukowymi matematyków z całego świata. Odbywają się co 4 lata (z przerwami w okresach wojen światowych): do II wojny światowej w latach parzystych podzielnych przez 4, po II wojnie światowej w latach parzystych niepodzielnych przez 4. W tym roku (choć 1993 jest liczbą nieparzystą) obchodzimy dwie okrągłe rocznice związane z Kongresami Matematyków.

Pierwszy Kongres Matematyków odbył się w Zurychu w roku 1897, drugi zaś, o którym – z pewnych matematycznych względów – do dziś głośno, w Paryżu w roku 1900 (i odtąd Kongresy mają miejsce co 4 lata). Wydawać więc by się mogło, że od tych wielkich rocznic dzieli nas jeszcze parę lat. Tak, ale...

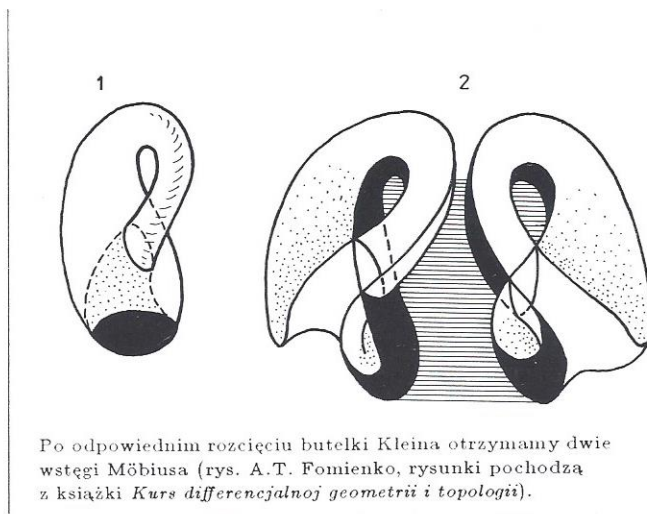
Niektórzy cofają historię Międzynarodowych Kongresów Matematyków do roku 1893. Warto może zatem poświęcić kilka zdań temu, co się wtedy wydarzyło – od tego właśnie rozpoczęła się historia matematycznych Kongresów. Otóż w Chicago miały w owym roku miejsce uroczyste (światowe!) obchody 400. rocznicy odkrycia Ameryki przez Kolumba. W ramach tych obchodów odbyły się liczne naukowe zjazdy i kongresy, a w szczególności „Światowy Kongres” matematyków i astronomów.

Przewodniczącym Kongresu był W.E. Story z Clark University. Inauguracyjny odczyt wygłosił nie byle kto, bo Felix Klein. Odczyt ten nosił tytuł „Obecny stan matematyki”. Klein podkreślił m.in., że współpraca matematyków staje się koniecznością; to, co niegdyś było możliwe do dokonania przez wybitnego matematyka w pojedynkę, teraz próbuje się osiągnąć wspólnymi wysiłkami. Był to czas coraz wyraźniej uwidaczniającej się eksplozji matematyki; kończyły się czasy „uniwersalistów”, orientujących się w całości współczesnych im badań naukowych w matematyce.

Zaskakujące koligacje rodzinne

W książce „Elementary Algebraic Geometry” (Springer Verlag 1977) Keith Kendling po zdefiniowaniu pierścienia noetherowskiego (jednego z fundamentalnych pojęć współczesnej algebry) umieszcza następujący komentarz:

„...[pierścienie te] zostały tak nazwane od nazwiska Emmy Noether (1882-1935), córki Maza Noethera (1844-1921). M. Noether był „ojcem geometrii algebraicznej”. E. Noether była centralną postacią w rozwoju nowoczesnej teorii ideałów.”



Po odpowiednim rozcięciu butelki Kleina otrzymamy dwie wstęgi Möbiusa (rys. A.T. Fomienko, rysunki pochodzą z książki *Kurs różniczkowej geometrii i topologii*).

Po odczycie Kleina matematycy i astronomowie rozpoczęli obrady w sekcjach (dwóch). Matematyków było aż... 45 (słownie: czterdziestu pięciu), w tym czterech spoza USA. Trzeba jednak pamiętać, że próby organizacji spotkań matematyków całego świata dopiero się rozpoczynały. Ponadto wtedy trochę trudniej niż dziś było dostać się z Europy do Ameryki, a i kontakty naukowe między matematykami z dalekich ośrodków były inne niż teraz.

Na Kongres w Chicago wielu znakomitych uczonych dostarczyło prace informujące o ostatnich osiągnięciach matematycznych. Wśród autorów widnieją: David Hilbert (z Królewca), Felix Klein (z Getyngi), Charles Hermite (z Paryża), Hermann Minkowski (z Bonn), Arthur Schönflies (z Getyngi), Max Noether (z Erlangen), Adolf Hurwitz (z Zurychu). Liczne prace matematyków europejskich przywiózł na Kongres właśnie Klein, gdyż tylko niektórzy z autorów byli w Chicago obecni.

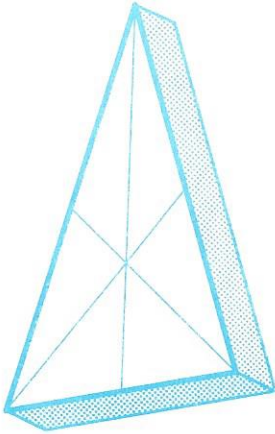
Wielu matematyków uznaje za liczbę naturalną także i 0. Jeśli więc przyjmujemy za Pierwszy Kongres Matematyków ten w Zurychu, może sensownym będzie pamiętać o Kongresie Nr 0 w Chicago.

A druga rocznica? Powierzenie organizacji Kongresu danemu państwu jest uznaniem dla osiągnięć matematyków tego kraju i wielkim zaszczytem. W roku 1983 Kongres odbył się w Polsce. Dziesięć lat temu – to nie tak dużo, przypomnijmy zatem jedynie, że nietypowy (nieparzysty) rok wziął się stąd, że ze względu na restrykcje stanu wojennego Kongres został przesunięty o rok. Nie brakowało wiele, by się w ogóle w Polsce nie odbył...

(KC)

Wśród uczestników Kongresu w Warszawie byli także i studenci matematyki. Pewnego dnia po jednym z odczytów profesor matematyki podszedł do swojej studentki (wówczas po drugim roku studiów).
– No i jak pani to odbiera? Zrozumiała pani coś z tego?
– zapytał.
– Tak, oczywiście, co prawda nie wszystko, ale dużo, bardzo się staram jak najwięcej wynieść – odpowiedziała studentka.
– Zupełnie nie wiem, jak pani to zrobiła – rzekł na to profesor. – Ja słuchałem bardzo uważnie i kompletnie nic nie zrozumiałem!

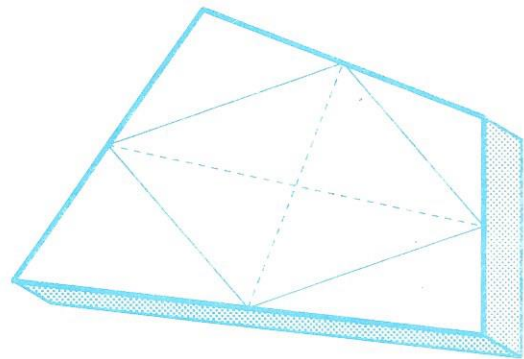
Punkty i deseczki



Środek ciężkości trójkąta leży w przecięciu jego środkowych. Przy czym zdanie to jest prawdziwe niezależnie od tego, czy przez trójkąt rozumiemy trzy wierzchołki obciążone jednakowymi ciężarkami, czy też płaską, o równej gęstości, trójkątną deseczkę. To, że jest wszystko jedno, udowodnił Archimedes w –III wieku.

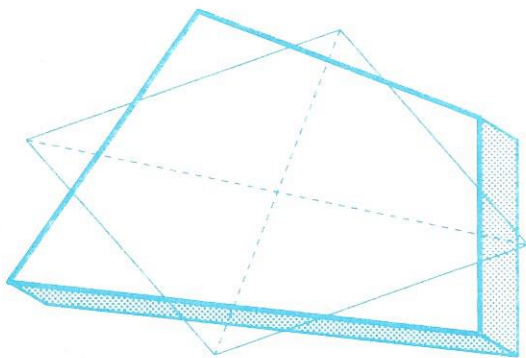
Własność, że środek ciężkości wierzchołków to ten sam punkt co środek ciężkości deseczki, przysługuje nielicznym tylko wielokątom. Już czworokąty z reguły mają w innym punkcie każdy z tych środków. Jakże to punkty?

Jeżeli połączyć środki kolejnych boków dowolnego czworokąta, to uzyska się równoległobok. Udowodnił to w XVII wieku Pierre Varignon (a każdy z Czytelników chyba będzie umiał ten dowód powtórzyć). Czworokąt ten nazywano nawet czworokątem Varignona. Otóż środek ciężkości wierzchołków czworokąta przypada w punkcie przecięcia przekątnych jego czworokąta Varignona.



Nie jest to może najprostszy sposób wskazania tego środka ciężkości (ale dobry – proszę sprawdzić). Podajemy go tu jednak dlatego, że jest podobny do niego sposób wskazania położenia środka ciężkości czworokąta–deseczki. Wskazanie środka jakiegokolwiek figury–deseczki jest w ogóle zadaniem bardzo trudnym.

W dwieście lat po Varignonie Wittenbauer wprowadził do geometrii swój równoległobok. Mianowicie dostrzegł on, że jeśli podzielimy boki dowolnego czworokąta na trzy równe części (każdy) i połączymy najbliższe każdemu wierzchołkowi punkty podziału prostymi, to proste te przetną się w wierzchołkach równoległoboku (sądzimy, że Czytelnik bez większych trudności stwierdzi, że tak jest – dowód jest analogiczny, jak w przypadku czworokąta Varignona). I ten równoległobok nazywa się czasami równoległobokiem Wittenbauera.



Prostota dowodu każe podejrzewać, że fakt, iż jest to równoległobok, nie był wystarczający, by nim się zainteresować. Istotnie. Wittenbauer udowodnił mianowicie, że środek ciężkości każdego czworokąta–deseczki leży w punkcie przecięcia przekątnych jego równoległoboku Wittenbauera.

Polecamy Czytelnikom sprawdzenie tego faktu, choć wypada uprzedzić, że jest to ćwiczenie nieporównanie trudniejsze od proponowanych wcześniej.