



SPIS TREŚCI

NUMERU 10(245)

Dowody niewymierności pewnych liczb <i>Robert Hajlasz</i>	str. 1
Wbrew zdrowemu rozsądkowi (X) <i>Tomasz Hofmokr</i>	str. 1
Jak to rozwiązać ?	str. 3
Patrz w niebo	str. 4
Chodzenie <i>Bartosz Zieliński</i>	str. 5
Mała Delta	str. 6
Zadania	str. 8
Ciekłe kryształy – fantazja natury <i>Robert Hołyst</i>	str. 9
Anizotropia lepkości <i>Grzegorz Derfel</i>	str. 12
Klub 44	str. 15
Kącik olimpijski	str. 16
Epsilon	str. 17

W następnym numerze:

Porowaty lód

Okładkę wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokr
Marta Kicińska-Habior
– przewodnicząca
Krzysztof Maślanka
Andrzej Makowski
– wiceprzewodniczący
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Michał Różyczka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Piotr Hajlasz
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Krzysztof Rejmer
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
HAJLASZ@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Delta” prowadzi również firma AMOS, 01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1994 roku wynosi 10 000,-zł, a w 1995 roku 15 000,-zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1994 r. 22 000,-zł, a w 1995 r. – 30 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Delta” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Delta” w AMOS-ie zamieszczamy na str. 7/8. Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1995 r. wynosi 45 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
 - do 20 II na II kwartał
 - do 20 V na III kwartał
 - do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 10 000,- zł

Dowody niewymierności pewnych liczb

Robert HAJŁASZ

Znane jest twierdzenie:

Jeśli równanie stopnia n -tego o współczynnikach całkowitych i współczynniku przy najwyższej potędze równym 1 ma pierwiastek wymierny, to jest on całkowity.

Z twierdzenia tego skorzystamy niżej przy dowodzeniu niewymierności pewnych liczb.

I. Wykazać, że $\sqrt[11]{13}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód.

Rozważmy równanie

$$x^{11} - 13 = 0.$$

Liczba $\sqrt[11]{13}$ jest rozwiązaniem tego równania. Przypuśćmy, że jest ona wymierna. Wówczas, z uwagi na to, że równanie ma współczynniki całkowite i współczynnik przy najwyższej potędze równy 1, otrzymujemy, że liczba $\sqrt[11]{13}$ jest całkowita. A przecież nią nie jest. Sprzeczność.

Uwaga. W ten sam sposób dowodzimy, że niewymiernymi są liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[11]{19}$, $\sqrt[11]{307}$, itp.

Podamy jeszcze jeden dowód faktu, że

$$\sqrt{2} \text{ jest liczbą niewymierną.}$$

(Dowód pochodzi od matematyka angielskiego T. Estermana.)

Przypuśćmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Wówczas istnieje najmniejsza liczba naturalna – oznaczmy ją przez n – taka, że $n\sqrt{2}$ jest liczbą naturalną.

Rozważmy teraz liczbę $n\sqrt{2} - n$. Otrzymujemy, że

- 1) $n\sqrt{2} - n$ jest liczbą naturalną,
- 2) $n\sqrt{2} - n < n$ (bo $n\sqrt{2} < 2n$),
- 3) $(n\sqrt{2} - n)\sqrt{2}$ jest liczbą naturalną (bo $2n - n\sqrt{2}$ jest liczbą naturalną).

Otrzymaliśmy sprzeczność, bo znaleźliśmy liczbę $n\sqrt{2} - n$, która jest naturalna, mniejsza od n i taka, że $(n\sqrt{2} - n)\sqrt{2}$ jest liczbą naturalną.

II. Wykazać, że

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$$

jest liczbą niewymierną.

Dowód.

Przypuśćmy, że liczba ta jest wymierna. Wówczas podnosząc ją do kwadratu i odejmując 2 – odpowiednią liczbę razy – otrzymujemy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Sprzeczność.

III. Wykazać, że $\operatorname{tg} 1^\circ$ jest liczbą niewymierną.

Dowód.

Przypuśćmy, że $\operatorname{tg} 1^\circ$ jest liczbą wymierną. Wówczas wymierne są też liczby

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (X)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Tomasz HOFMOKL

Czy umiecie się dziwić?

W poprzednich dziewięciu pogadankach omawiałem zjawiska, których wynik zdaje się przeczyć naszemu poczuciu tego, co możliwe i dlatego skłonni jesteśmy je uznać za przeczące zdrowemu rozsądkowi. Zjawisk takich jest bardzo wiele i długo jeszcze można by gawędzić na ten temat. Kiedy jednak przychodzi pora zakończyć nasze spotkania, powstaje problem, jaki temat najbardziej by się do tego nadawał.

Zdecydowałem, że dobrze nadaje się do tego wskazanie, jak cenną cechą jest umiejętność dziwienia się. Mamy ją wszyscy we wczesnym dzieciństwie. Zadręczamy rodziców pytaniami *a co to? a po co to? a dlaczego?* Nie zawsze nawet wysłuchamy odpowiedzi, a już gotowe jest następne pytanie. Z wiekiem tę zdolność dziwienia się stopniowo zatracamy, wszystko powszednie i nie potrafimy już ujrzeć za zasłoną powszedniości zaskakujących problemów. Na szczęście nie wszyscy tracą zdolność dziwienia się i z nich wyrastają prawdziwi badacze.

Nie jest trudno zostać prawdziwym badaczem, bo rzeczy niezwykłych dzieje się wokół wiele. Aby się jednak czymś zdziwić, trzeba na ten temat mieć pewne podstawowe wiadomości. Jeżeli dziwię się (na przykład), że moja znajoma z dnia na dzień stała się platynową blondynką, to znaczy, że miałem informację o jej dotychczas kruczoczarnych włosach i dziwię się, jaki to fenomen przyrody lub może, bardziej się ograniczając, chemii, może być za to zjawisko odpowiedzialny. Niedobrze jest, jeżeli zarejestruję obie informacje: wczoraj ciemna, dziś blondynka i nie wywoła to żadnej reakcji.

Może, oczywiście, oznaczać to, że zjawisko zmiany koloru włosów jest dla mnie aż nadto dobrze znane. Wtedy, istotnie, nie ma czemu się dziwić. Może jednak być i tak, że nie dziwię się, bo mnie to nic nie obchodzi – i to jest objaw niepokojący. Oznacza to, że jestem nastawiony na rejestrowanie faktów, bo same pchają się

przed oczy, ale nie interesuje mnie pytanie ani *dlaczego?*, ani *w jaki sposób?*. Jest to duże kalectwo intelektualne i stąd pytanie, czy Państwo nie są nim dotknięci, **czy umieją się Państwo dziwić?**

Po tym wprowadzeniu rozejrzyjmy się dookoła. Na pomoc przywołamy tylko szkolną wiedzę z fizyki.

Obserwacja pierwsza: stoję na Ziemi, ciężko mi od niej się oderwać, co najwyżej mogę podskoczyć. Wiem, że to Ziemia przyciąga mnie grawitacyjnie. Dlaczego jednak nie odczuwam żadnego przyciągania ze strony innych obiektów materialnych?

Zapytany o to fizyk odpowie, że takie przyciąganie, oczywiście, istnieje, ale jest niesłychanie słabe. Jeżeli cała ogromna Ziemia przyciąga mnie (a ja ją) z siłą odpowiadającą mojemu ciężarowi, to zwykły budynek wielokrotnie lżejszy od Ziemi może to uczynić z tylekroć mniejszą siłą.

Możemy zadowolić się tą odpowiedzią i wtedy kończy się nasze zdziwienie, ale możemy być nieco bardziej dociekliwi i natychmiast wymyślić następny problem. Wiemy przecież, że jesteśmy zbudowani z atomów, a te zawierają elektrycznie naładowane dodatnie jądra i ujemne elektrony. Czy ładunki elektryczne, jakie są we mnie, dokładnie się równoważą?

Prosty rachunek, dostępny dla ucznia w szkole, może wykazać, że gdyby atomy nie były doskonale obojętne elektrycznie, to oddziaływałyby na siebie ogromnymi siłami. Wyobraźmy sobie dla przykładu, że Panie mają nadmiar ładunków dodatnich, a Panowie nadmiar ładunków ujemnych. Załóżmy dalej, że ten nadmiar lub niedomiar jest znikomo mały, na przykład niech tylko jedna stumilionowa część ładunku protonów u Pań, a elektronów u Panów, będzie niezobojętniona. Czy wyobrażają sobie Państwo, co by się wówczas działo? Otóż siła przyciągania płci przeciwnych z odległości jednego metra byłaby rzędu milionów milionów niutonów. Z tą samą siłą odpychałyby się wzajemnie Panie, jak również Panowie. To, że możemy w miarę spokojnie (na ogół) przechodzić obok siebie nie ulegając zmiażdżeniu ani odrzuceniu (choć, oczywiście, pewien pociąg lub abominację możemy wyraźnie odczuwać), świadczy o idealnym niemal zrównoważeniu ładunków elektronów i protonów w materii naszego organizmu. Czy to nas dziwi?

Jeżeli nie, to trudno, ale warto jednak snuć dalej te rozważania i dalej się dziwić.

$$\operatorname{tg} 2^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 1^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 1^\circ},$$

$$\operatorname{tg} 3^\circ = \operatorname{tg}(1^\circ + 2^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ}{1 - \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 2^\circ},$$

$$\operatorname{tg} 4^\circ = \operatorname{tg}(1^\circ + 3^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 3^\circ}{1 - \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 3^\circ},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg}(1^\circ + 29^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 29^\circ}{1 - \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 29^\circ}.$$

Otrzymaliśmy, że $\operatorname{tg} 30^\circ$, czyli $\sqrt{3}/3$ jest liczbą wymierną. Sprzeczność.

IV. Wykazać, że $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód.

I sposób. Korzystamy z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta.

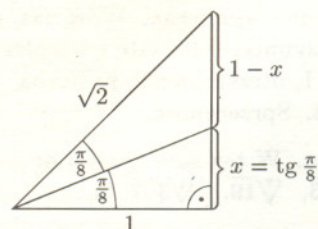
W trójkącie dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do boków przyległych.

W naszym przypadku

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{\sqrt{2}},$$

$$x\sqrt{2} = 1-x,$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1.$$



A więc x , czyli $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ jest liczbą niewymierną.

II sposób.

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$$

$$1 = \frac{2a}{1-a^2} \quad (a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8})$$

(*) $a^2 + 2a - 1 = 0$

$$a_1 = \sqrt{2} - 1 \text{ - liczba niewymierna.}$$

(Można i tak: Liczba a jest pierwiastkiem równania $v^2 + 2v - 1 = 0$ (patrz (*)). Gdyby liczba a była wymierna, to z uwagi na to, że równanie ma współczynniki całkowite i współczynnik przy najwyższej potędze równy 1, otrzymalibyśmy, że a jest liczbą całkowitą. Że nie jest, widać to wyraźnie na rysunku (sposób I). Tam jest to część jedynki, więc nie jest liczbą całkowitą.)

Rozwiążemy teraz zadanie znane już Czytelnikom *Delty*.

V. Czy istnieją takie dwie liczby niewymierne a i b , że a^b jest liczbą wymierną?

Rozwiązanie.

I sposób. Rozważmy liczbę $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Liczba ta jest albo wymierna, albo niewymierna. Jeśli jest wymierna, to odpowiedź jest twierdząca w sposób oczywisty. Jeśli jest niewymierna, to tę niewymierną podnosimy do niewymiernej $\sqrt{2}$ i otrzymujemy

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

a więc otrzymujemy liczbę wymierną.

Odpowiedź: Tak.

Uwaga. Można udowodnić, że $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną. Napiszemy o tym w artykule „O liczbach przestępnych” w *Delcie* 11/1994.

II sposób. $\sqrt{2}^{\lg \sqrt{2}^3} = 3$. Pozostaje wykazać, że $\lg \sqrt{2}^3$ jest liczbą niewymierną. Przypuśćmy, że $\lg \sqrt{2}^3$ jest liczbą wymierną, czyli że

$$\lg \sqrt{2}^3 = \frac{m}{n},$$

gdzie m i n są pewnymi liczbami naturalnymi (wolno napisać, że naturalnymi, bo $\lg \sqrt{2}^3 > 0$). Stąd

$$(\sqrt{2})^{m/n} = 3,$$

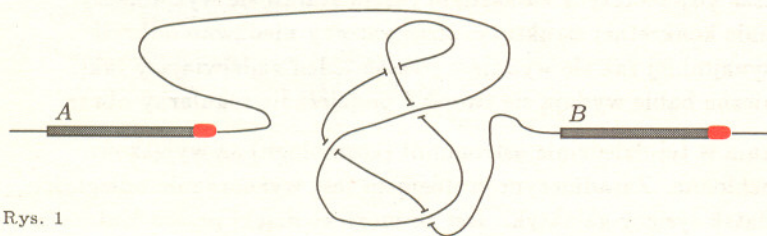
$$\sqrt{2}^m = 3^n,$$

$$2^m = 9^n.$$

Lewa strona dzieli się przez 2, prawa zaś nie. Sprzeczność.

Jak to rozwiązać?

Mamy prostą. Usuńmy z niej pewien odcinek i zamiast niego „wklejmy” krzywą, tak jak na rysunku 1.



Rys. 1

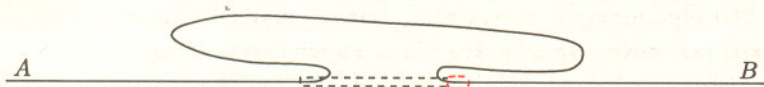
Problem jest następujący:

Czy po każdej takiej krzywej da się przejechać zapalką z lewej półprostej (położenie A) na prawą (położenie B) w taki sposób, aby cały czas oba końce zapalki dotykały linii?

Ponieważ nie jest jasne, jak matematycznie zdefiniować krzywą, więc proponuję przyjąć, że obie półproste A i B są połączone nie krzywą, lecz łamaną.

Proponuję też najpierw porobić trochę doświadczeń z różnymi krzywymi. Czytelnik przekona się, jak czasami skomplikowane ruchy zmuszona jest wykonywać zapalka, nim przejdzie od A do B. Ale czy zawsze to się jej uda?

Jeżeli zapalka znajduje się w takim położeniu, jak na rysunku 2, to na pewno nie przejdzie ona na półprostą B. To jednak nie jest kontrprzykład, bo gdybyśmy wystartowali z położenia A, to bez przeszkód dojdziemy do B. Po prostu ruszając z A zapalka nigdy nie wpadnie w taką pułapkę, jaka jest przedstawiona na rysunku 2.



Rys. 2

Czekamy na listy. Autorom najciekawszych dowodów bądź kontrprzykładów wyślemy nagrody książkowe.

Piotr HAJŁASZ

Przecież takie idealne prawie zrównoważenie świadczy, że ładunek elektryczny nie zależy od jego ruchu. Elektronów są znacznie bardziej ruchliwe od protonów, a jednak mają w materii dokładnie ten sam ładunek co do wartości, a różniący się tylko znakiem. Co w tym dziwnego? Choćby to, że wiemy skądinąd, iż masa zależy od prędkości ciała. Czy nie zaskakuje nas, że ładunek nie wykazuje tej zależności?

Kojarząc niezależność ładunku od jego prędkości i stwierdzenia szczególnej teorii względności można wywnioskować, że powinno istnieć pole magnetyczne (faktycznie odkryto je wcześniej niż teorie względności, ale możemy spróbować zrobić to na nowo po jej odkryciu). Wiedząc zaś o polu magnetycznym przewodnika z prądem możemy (na nowo) zaprojektować silnik elektryczny. Ten ciąg wnioskowania można ciągnąć jeszcze daleko. Wybrałem go dla wykazania, że wnikliwie zastanowienie się, dlaczego nie odczuwam żadnego pociągu do znajomej Pani (a w każdym razie nie mierzonego w milionach milionów niutonów), może doprowadzić – przy odpowiedniej zdolności wnioskowania – do odkrycia zasady działania silnika elektrycznego.

Przedstawione rozumowanie było rozumowaniem naukowym. Wyciągaliśmy wnioski ze znanych faktów doświadczalnych i nie postulowaliśmy niczego, czego nie można by sprawdzić doświadczalnie. Nie zawsze jednak tak być musi.

Na sam koniec zatrzymam się na koncepcjach, które wykraczają poza ściśle naukowe wnioskowanie. Obserwacja, którą proponuję wykonać, jest zaskakująco prosta. Proszę spróbować stwierdzić, że Pan czy Pani istnieje. Czy to zamierzenie wydaje się być pozbawione sensu?

Znane jest powiedzenie „myślę, więc jestem”. Jest to jakieś rozwiązanie sprawy. Możemy sprawdzić to w jeszcze prostszy sposób nie nadwężając naszych władz umysłowych. Można się po prostu uszczypnąć. Jeżeli Państwo nie zasnęli nad lekturą tego tekstu, to i tę obserwację świadcząca o własnym istnieniu wykonają Państwo bez trudności. A teraz pytanie, czy ta obserwacja coś nam daje. Oczywiście, tak.

Skoro stwierdziliśmy, że istniejemy, nasuwa się od razu szereg pytań filozoficznych o to, skąd wziął się człowiek, o jego świadomość, myśli, o jego duszę.

Ten zakres pytań – niewątpliwie bardzo ważnych i ciekawych – należy do filozofii i religii. Ale czy może należeć do nauk przyrodniczych? Okazuje się, że tak. Niech Państwo pozwolą, że spróbuję teraz poprowadzić na ten temat rozważania.

Żyjemy na Ziemi. Ziemia nie jest typowym środowiskiem we Wszechświecie. Żyjemy na planecie o szczególnych właściwościach, okrążającej stabilną (a więc też szczególną) gwiazdę – Słońce. Obserwujemy Wszechświat nie w jakiejś dowolnej chwili, lecz właśnie wtedy, gdy osiągnął on dostateczny stopień rozwoju, aby wytworzyć tak złożone formy materii jak my – ludzie. Idąc krok dalej możemy powiedzieć, iż jesteśmy teraz i tutaj z tego powodu, że prawa fizyki i podstawowe stałe przyrody są właśnie takie, aby umożliwić nam powstanie. Mówiąc w skrócie – to właśnie taki, a nie inny zestaw praw przyrody, praw fizyki doprowadził do tego, że mogliśmy się – czytając jeden z poprzednich akapitów – uszczypnąć.

Wyobraźmy bowiem sobie, że został stworzony Wszechświat o nieco innych podstawowych stałych. Zabawmy się w takiego majsterkowicza, który stwarza Wszechświat zmieniając – powiedzmy – tylko stałą grawitacyjną, czyli tę stałą, która jest odpowiedzialna za przyciąganie nas przez Ziemię i nie tylko nas. Ponieważ stała grawitacyjna jest tak niezwykle mała, więc typowa gwiazda, jak nasze Słońce, zawiera około 10^{57} atomów – w mniejszym zgrupowaniu atomów siły grawitacyjne nie byłyby w stanie tak zgnieść materii, aby nastąpił zapłon reakcji jądrowych. Wyobraźmy teraz sobie, że siły grawitacyjne byłyby większe o tysiąc milionów razy. W stosunku do sił elektrostatycznych byłyby dalej nieporównanie mniejsze, bo we Wszechświecie, w którym żyjemy, są one 10^{39} razy mniejsze, a w świecie, który mamy właśnie zamiar stworzyć, byłyby „tylko” 10^{30} . W końcu różnica zaledwie dziewięciu zer przy prawie czterdziestu zerach. W tym nowym Wszechświecie Słońce mogłoby być tysiąc milionów milionów (czyli 10^{15}) razy mniejsze niż nasze Słońce, żyłoby natomiast tylko jeden nasz rok. Wobec tego na naszej planecie nie starczyłoby czasu na powstanie życia i ewolucję istot inteligentnych, za jakie się uważamy.

Możemy podobnie bawić się z innymi stałymi fizyki i za każdym razem dojdziemy do zaskakującego wniosku, że nawet mała zmiana ich wartości uniemożliwiłaby nasze istnienie. Czyżby więc były one dobrane specjalnie dla nas?

Patrz w niebo

Jaki jest rozkład materii we Wszechświecie w największych skalach? – oto problem nurtujący astronomów od dawna. Pogląd na tę sprawę ewoluował z biegiem czasu i do dziś nie jest ustalony. Kilkadziesiąt lat temu panowało przekonanie, że gromady galaktyk rozrzucone są w przestrzeni losowo, a więc w największych skalach wypełniają Wszechświat równomiernie. Kilkanaście lat temu wydawało się, że tworzą coś jakby splecione kłęb włókien. Obecnie, dzięki nowym danym obserwacyjnym podejrzewa się, że materia w postaci galaktyk i gromad galaktyk tworzy raczej powierzchnie połączonych bąbli otaczające obszary względnej pustki. Krótko mówiąc, kiedyś zdawało się, że Wszechświat przypomina rój, potem gąbkę, a dziś pianę. Prawdę mówiąc, innych możliwości nie ma.

Podczas gdy teoretycy za każdym razem starali się wytłumaczyć istnienie konkretnej struktury, obserwatorzy niedawno odkryli – przynajmniej tak się wydaje – jeszcze jeden zadziwiający fakt: kosmiczne bąble wydają się tworzyć regularny obraz.

Badania w tej dziedzinie astronomii (kosmologii) są wyjątkowo czasochłonne. Zasadniczym problemem jest wyznaczanie odległości dziesiątek tysięcy galaktyk. Jest to możliwe dzięki prawu Hubble’a: im dalsza jest galaktyka, tym większa jest jej prędkość radialna. Trzeba więc fotografować widma ogromnej liczby galaktyk, by przez porównanie z widmami laboratoryjnymi znaleźć przesunięcia linii, a stąd prędkości galaktyk określone przez efekt Dopplera i w konsekwencji odległości. A uzyskanie widma bardzo odległej, a więc słabej galaktyki, to mogą być godziny pracy dużego teleskopu. Co prawda, technika idzie stale naprzód, ale i tak nie sposób takimi badaniami objąć całego widocznego Kosmosu. Ograniczając się do galaktyk bliskich (jasnych) można zbadać całe niebo, ale płytko, bardzo głęboko można sięgnąć tylko w wybranych kierunkach.

Właśnie kilka lat temu głębokie sondowania Wszechświata w kierunkach obu biegunów galaktycznych wykazały, że galaktyki tworzą zgęszczenia niemal regularnie co 250 Mpc (liczba ta zależy zresztą od przyjętej wartości stałej Hubble’a, ale nie jest to tu ważne). Obserwacje obejmowały w każdym kierunku obszar nie większy od stopnia kwadratowego i sięgały do galaktyk o jasności 22 mag.

Jeżeli odkrycie zostanie potwierdzone, to będzie oznaczać, że co 250 Mpc mamy w przestrzeni „ścianę” materii. Nie wiadomo na razie, jak może wyglądać ten obraz na większym obszarze nieba. Istniejące dane u jednych kosmologów budzą entuzjazm, inni podchodzą do nich z ogromną rezerwą. Niektórzy dowodzą, że owo „skwantowanie odległości” to fluktuacja statystyczna i nie należy się tym przejmować, jeszcze inni twierdzą, że jeżeli rozkład materii jest rzeczywiście tak regularny, to oznacza, że nasza wiedza o wczesnym Wszechświecie jest po prostu fałszywa.

Tomasz KWAST

Chodzenie

Bartosz ZIELIŃSKI

Proces chodzenia możemy potraktować jako ciągłe przewracanie się i podpieranie, w wyniku którego przesuwa się środek ciężkości.

– Unosimy lewą nogę, pochylamy się lekko, tak by rzut środka ciężkości na podłoże przesunął się poza prawą stopę. Zaczynamy się przewracać, podpieramy się lewą nogą, przenosimy na nią ciężar ciała, unosimy prawą itd.

Dla uproszczenia potraktujmy chodzącego człowieka na etapie przewracania się jako przewracający się prosty kij. Obliczmy, przy jakim kącie α między kijem a pionem zacznie się on ślizgać, jeśli współczynnik tarcia statycznego między kijem i podłożem wynosi f .

T – siła tarcia,
 R – reakcja podłoża,
 mg – ciężar.

Przenieśmy wektor składowej siły ciężkości równoległej do kija do punktu styczności kija z podłożem i rozłóżmy go na składową równoległą i prostopadłą do podłoża.

W chwili, gdy zacznie się poślizg, mamy $mg \sin \alpha \cos \alpha = T_{max}$, ale $T_{max} = fmg \cos^2 \alpha$. Wynika stąd, że

$$mg \sin \alpha \cos \alpha = fmg \cos^2 \alpha,$$

a więc

$$(*) \quad \operatorname{tg} \alpha = f.$$

Oczywiście, człowiek nie jest kijem, ale w przybliżeniu, zwłaszcza dla niewielkich kroków, wzór można uznać za prawdziwy również dla człowieka.

Zakładając, że w momencie, gdy podpieramy się drugą nogą, aby zatrzymać przewracanie się, obie nogi są wyprostowane, możemy, korzystając ze wzoru (*) obliczyć maksymalną długość kroku, jaki można zrobić bez obawy poślizgnięcia się

x – długość kroku,

a – długość nogi,

$$\begin{aligned} x &= 2a \sin \alpha = 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}} = \\ &= 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{f^2}}}, \end{aligned}$$

czyli im mniejszy współczynnik tarcia, tym mniejsze kroki trzeba robić.

Wzór ten tłumaczy, na przykład, dlaczego podczas chodzenia po śliskim podłożu możemy robić jedynie małe kroki.

Przyroda jest pełna niespodzianek. Ziemia jest ciągle bombardowana przez cząstki nadlatujące z przestrzeni kosmicznej, tzw. promienie kosmiczne. Niektóre z nich niosą energię miliony razy większą niż energie rzędu 10^{11} eV, do których możemy rozpędzać cząstki elementarne w największych ziemskich akceleratorach. W listopadowym numerze *Physical Review Letters* z 1993 roku grupa doświadczalna z Uniwersytetu Utah pracująca z detektorem promieni kosmicznych *Fly's Eye* (oko muchy) powiadomiła o wynikach badań wskazujących, że jedno ze źródeł wysoko energetycznych ciężkich jąder o energii rzędu 10^{19} eV „wypaliło się” i stało się źródłem wysoko energetycznych protonów. Takie wnioski wyciągnięto z przypadku zarejestrowania cząstki o energii $3 \cdot 10^{20}$ eV. Jest to olbrzymia energia. Zauważmy, że $3 \cdot 10^{20}$ eV = $3 \cdot 10^{20} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ J = 48 J. Widać, że energia tej cząstki jest porównywalna z energią kinetyczną cegły o masie około 5 kg, spadającej z wysokości 1 m!

Jeżeli tak, to przywraca nam to wiarę w naszą ważność dla całego Wszechświata i naszą w nim szczególną rolę, odebraną ludzkości przez Kopernika.

A może jest jednak inaczej – może kiedyś okaże się, że stałe fizyczne mają takie, a nie inne wartości, bo tak (z jakichś, dziś trudnych do wymyślenia, względów) musi być. Przecież jeszcze sto lat temu można było snuć dość dowolne rozważania na temat zmiany prędkości światła i siły oddziaływań elektrycznych i magnetycznych. Dziś wiemy jednak, że te wielkości są ze sobą powiązane. Być może przyszła teoria dokona takiego połączenia całej wiedzy przyrodniczej i okaże się, że nasz Wszechświat jest jedynym możliwym. Ale może też dowiemy się na pewno, że jest (przynajmniej teoretycznie) więcej możliwości. Wtedy naszkicowane rozważania zmuszą nas do refleksji.

Jest wielu specjalistów od kosmologii, którzy już teraz na poważnie traktują tego typu analizę. W 1986 roku ukazała się poważna monografia astronoma Johna Barrowa i fizyka Franka Tiplera pt. *Antropiczna Zasada Kosmologiczna*. Sformułowana jest w niej tak zwana silna i tak zwana słaba zasada antropiczna. W formie silnej twierdzi ona: *Wszechświat musi mieć takie właściwości, aby na pewnym stopniu rozwoju mogło powstać życie*. Oto do jakich wniosków może doprowadzić dziwienie się własnemu istnieniu.

Ale nie koniec na tym. Jeżeli powiązemy tę zasadę z wnioskami dotyczącymi pomiarów w mechanice kwantowej, to możemy dojść do następującej konkluzji: *Na początku było tylko prawdopodobieństwo zaobserwowania. Wszechświat mógł więc powstać tylko wtedy, gdy znalazł się ktoś, kto go obserwuje*. I to nieważne, że obserwator pojawił się szereg miliardów lat później. Wszechświat istnieje, ponieważ jesteśmy tego świadomi.

Ktoś może powie, że to, co tu napisałem, jest rzeczywistość wbrew zdrowemu rozsądkowi. Nie mogę temu całkowicie zaprzeczyć. Chciałem jednak w tym ostatnim przykładzie pokazać nieco spekulacji, jakie spotyka się w bardzo poważnych pracach naukowych. Może rozważania te prowadzą donikąd, może rzeczywistość są bezsensowne, ale chyba wnoszą jakiś ferment i niepokój do ustalonych poglądów. Rozwój nauki nie przebiega według planu badań naukowych: *w tym roku odkryjemy to i tamto*. Czasami największy postęp wynika z dziwienia się wszystkiemu, co nas otacza. A jest czemu się dziwić.

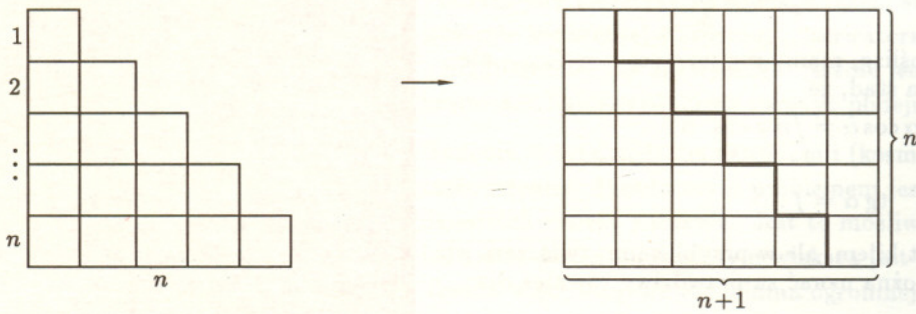


Geometryczne uzasadnienia

Równość

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$$

wynika z ułożenia jednostkowych kwadratów tak, jak na rysunku 1.

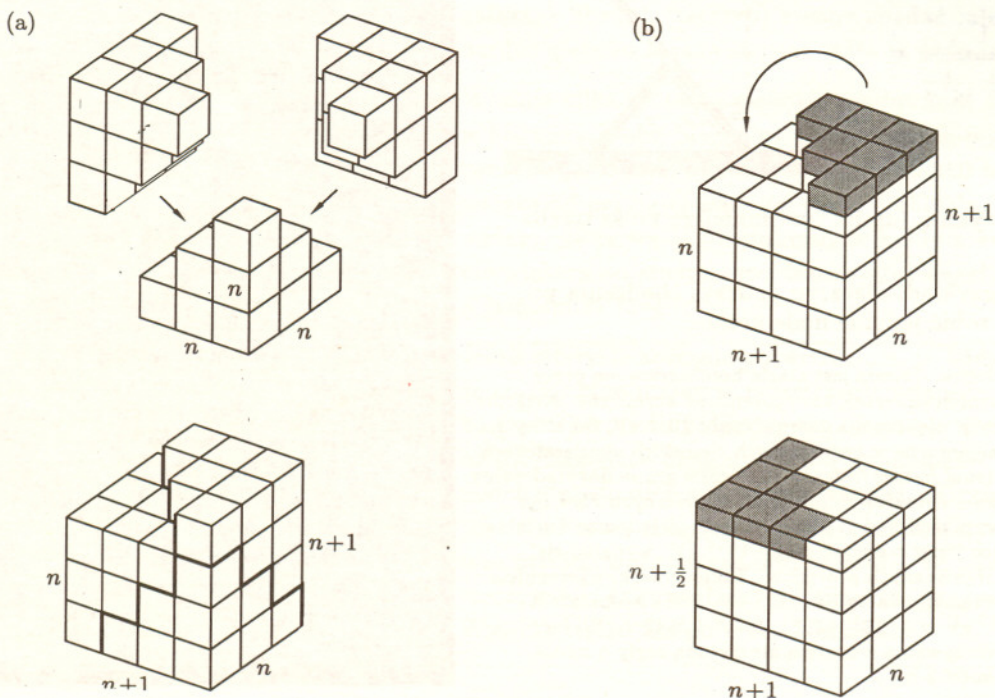


Rys. 1

Aby przekonać się o równości

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right),$$

wystarczy zbudować trzy „piramidy” z jednostkowych sześcianów, połączyć je i ... zerknąć na rysunek 2.

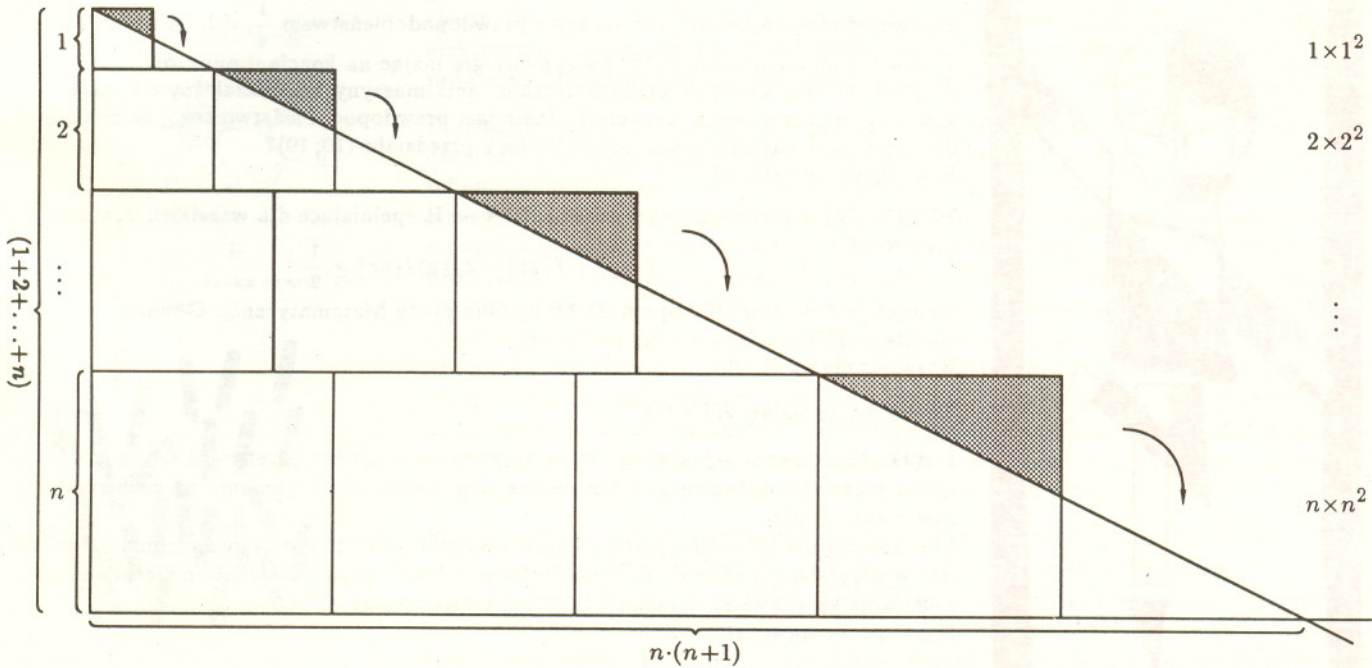


Rys. 2

Łatwiejsza wydaje się interpretacja równości

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)\right)^2.$$

Wynika ona z rysunku 3 i z tożsamości udowodnionej na samym początku.



Rys. 3

Małą Deltę przygotował Jarosław GÓRNICKI

<p>Odcinek dla poczty</p> <p>Zł</p> <p>słownie złotych</p> <p>Dokładny adres wpłacający</p> <hr/> <p>na r-k AMOS</p> <p>01-806 Warszawa</p> <p>ul. Zuga 12</p> <hr/> <p>nazwa banku PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p>	<p>Odcinek dla posiadacza rachunku</p> <p>Zł</p> <p>słownie złotych</p> <p>Dokładny adres wpłacający</p> <hr/> <p>na r-k AMOS</p> <p>01-806 Warszawa</p> <p>ul. Zuga 12</p> <hr/> <p>nazwa banku PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p>	<p>Potwierdzenie dla wpłacającego</p> <p>Zł</p> <p>słownie złotych</p> <p>Dokładny adres wpłacający</p> <hr/> <p>na r-k AMOS</p> <p>01-806 Warszawa</p> <p>ul. Zuga 12</p> <hr/> <p>nazwa banku PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p>
<p>stempel</p> <p>..... podpis przyjmującego</p>	<p>stempel</p> <p>..... podpis przyjmującego</p>	<p>stempel</p> <p>..... podpis przyjmującego</p>
<p>Pobrano opłatę</p> <p>zł</p>	<p>Pobrano opłatę</p> <p>zł</p>	<p>Pobrano opłatę</p> <p>zł</p>



M 717. W próbówce znajduje się dziesięć bakterii białych i dwadzieścia bakterii czarnych. Co minutę dokładnie jedna z bakterii dzieli się na dwie o takim samym jak ona kolorze, przy czym wszystkie bakterie znajdujące się wówczas w próbówce mają jednakowe szanse na podział. Po godzinie w naczyniu będzie 90 bakterii. Wylosujmy jedną z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będzie ona biała?

Rozwiązanie na str. 12

M 718. Po naciśnięciu przycisku maszyna szczęścia daje nam 1 punkt z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, 2 punkty z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, itd. (n punktów z prawdopodobieństwem 2^{-n}). Zaczynamy grę mając na koncie 0 punktów i naciskamy przycisk 30 razy (rezultat każdego uruchomienia maszyny jest niezależny od stanu konta i dotychczasowych wyników). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dokładnie dwa razy stan naszego konta będzie liczbą z przedziału (10; 19)?

Rozwiązanie na str. 12

M 719. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ spełniające dla wszelkich $x, y, z \in \mathbf{R}$ nierówność

$$f(xy) + f(xz) - 2f(x)f(yz) \geq \frac{1}{2}$$

(zadanie z zawodów III stopnia III Małej Olimpiady Matematycznej, Gdynia, 20 lutego 1994).

Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Jarosław KULPA

F 391. Oszacować, w jakiej najniższej temperaturze można przebywać w skąym stroju plażowym przez bardzo długi okres, aby nie narazić organizmu na zachwianie równowagi cieplnej.

Moc cieplna produkowana przez organizm wynosi około 100 W, powierzchnia człowieka jest w przybliżeniu równa 1 m^2 . Człowiek w zakresie promieniowania podczerwonego zachowuje się jak ciało doskonale czarne o temperaturze 36°C .

Rozwiązanie na str. 13

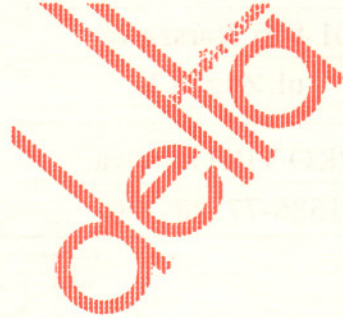
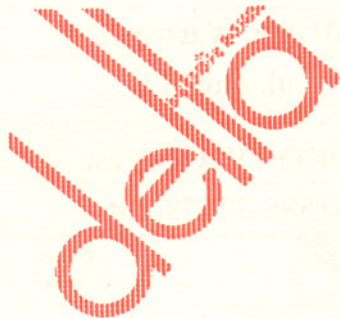
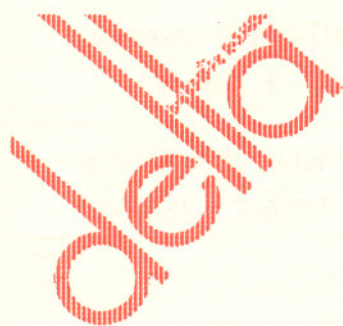
F 392. Oszacować temperaturę we wnętrzu Ziemi przy upraszczającym założeniu, że Ziemia jest jednorodną kulą charakteryzującą się średnią wartością współczynnika przewodnictwa cieplnego $\lambda = 50 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$. Strumień ciepła wydobywający się na powierzchnię Ziemi wynosi $Q = 63 \text{ mW/m}^2$, promień Ziemi jest równy 6400 km.

Rozwiązanie na str. 13

Prenumerata „Delfy”
za okres:

Prenumerata „Delfy”
za okres:

Prenumerata „Delfy”
za okres:

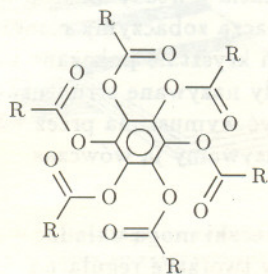


Ciekle kryształy – fantazja natury

Robert HOŁYST



Rys. 1a. Typowa wydłużona cząsteczka ciekłego kryształu.



Rys. 1b. Typowa płaska cząsteczka ciekłego kryształu.



Rys. 2. Struktura nematyczna. Strzałka określa kierunek uporządkowania orientacyjnego w ciekłym kryształcie. W rzeczywistym układzie cząsteczki są ułożone bardzo gęsto, nie tak jak na rysunku.



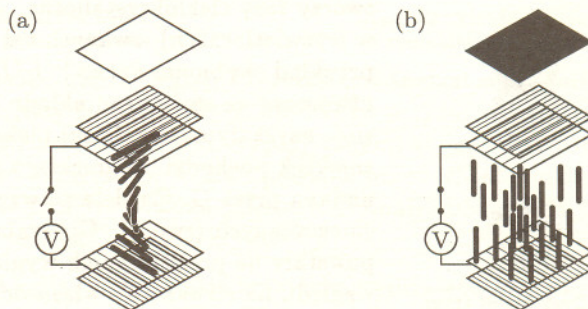
Rys. 3. Struktura izotropowa. Ciekły kryształ podgrzany do odpowiednio wysokiej temperatury traci swój porządek orientacyjny (patrz rys. 2) i powstaje wtedy zwykła klarowna ciecz o typowych własnościach.

Łatwiej jest powiedzieć, czym nie są, niż czym są ciekłe kryształy. Nie są to zwykłe ciecze, choć można je nalać do szklanki. Niektóre z nich mają konsystencję mleczka kosmetycznego, inne gęstego miodu. Płyną, ale nie całkiem tak, jak zwykła woda. Nie są to też kryształy, choć ich mikroskopowa struktura (lokalne ustawienie cząsteczek) upodabnia je bardziej do kryształów niż do cieczy. Są anizotropowe, to znaczy, że wykazują różne własności elastyczne, elektryczne i magnetyczne w zależności od kierunku, w którym przeprowadzamy pomiary. Zwykle ciecze są izotropowe i nie wyróżniają żadnego kierunku.

Podstawą anizotropii ciekłych kryształów jest wydłużona lub płaska budowa cząsteczek chemicznych, które je tworzą. Na rysunku 1a pokazana jest schematycznie typowa wydłużona cząsteczka ciekłego kryształu. Składa się ona z części sztywnej utworzonej z co najmniej dwóch pierścieni benzenowych oraz z części giętkiej utworzonej z łańcucha węglowodorowego. Część sztywna jest niezbędna do utworzenia ciekłego kryształu. W przypadku płaskich cząsteczek wystarczy jeden pierścień benzenowy (rys. 1b). Z symulacji komputerowych i badań teoretycznych wynika, że dla wydłużonych cząsteczek stosunek długości L do szerokości D części sztywnej cząsteczki (pierścienie benzenowe na rysunku 1a) musi być co najmniej równy 2,5, aby utworzyć struktury ciekłokrystaliczne pokazane na zamieszczonych rysunkach. Części giętkie pełnią tylko rolę pomocniczą. Łatwo stąd zrozumieć, dlaczego w wydłużonej cząsteczce ciekłego kryształu są co najmniej dwa pierścienie benzenowe.

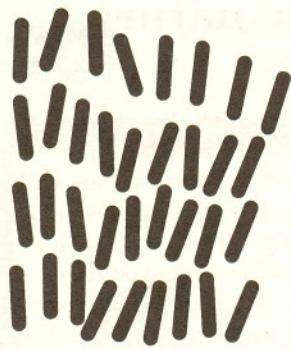
W odpowiednio niskiej temperaturze (często dużo wyższej niż 100°C) cząsteczki ciekłego kryształu układają się wzdłuż pewnego kierunku w przestrzeni (rys. 2a, 2b). Ten typ porządku, podstawowy dla ciekłych kryształów, nazywamy porządkiem orientacyjnym, a strukturę pokazaną na rysunkach 2a i 2b nazywamy strukturą nematyczną lub po prostu nematykiem. Jeżeli jednak podgrzejemy ciekły kryształ do odpowiednio wysokiej temperatury, to zmienia się on w zwykłą izotropową ciecz, w której cząsteczki nie wyróżniają już żadnego kierunku w przestrzeni (rys. 3). Ta zmiana nazywana jest przejściem fazowym, tak samo jak topnienie lodu. Łatwo możemy teraz zrozumieć, że anizotropia ciekłych kryształów wynika głównie z porządku orientacyjnego.

Odkrywcą ciekłych kryształów jest przyrodnik Friedrich Reintzer, ich ojcem chrzestnym zaś fizyk Otto Lehman. Działo się to na przełomie lat 1888/1889, czyli ponad sto lat temu. Były ciekawostką naukową aż do 1971 roku, kiedy to pojawił się pierwszy wyświetlacz ciekłokrystaliczny. Wielką zaletą takich wyświetlaczy w porównaniu z wyświetlaczami lampowymi było małe zużycie prądu, co miało istotny wpływ na wzrost produkcji przenośnych urządzeń elektronicznych na baterie, takich jak zegarki, kalkulatory, a ostatnio – komputery podręczne (laptopy i notebooki). Na rysunkach 4a i 4b pokazano, jak działa najprostszy wyświetlacz wykorzystujący anizotropowe własności ciekłego kryształu.

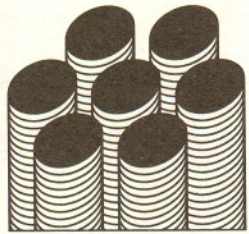


Rys. 4. Wyświetlacz ciekłokrystaliczny. Pałeczki określają kierunek uporządkowania orientacyjnego. Na górze mamy polaryzator, a na dole analizator. Układ znajduje się między okładkami kondensatora.

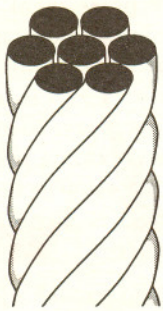
- Bez pola elektrycznego. Skręcony kierunek uporządkowania ciekłego kryształu umożliwia przejście światła przez układ.
- W polu elektrycznym. Cząsteczki układają się wzdłuż pola elektrycznego i światło nie przechodzi przez analizator. Na ekranie wyświetlacza zobaczymy wtedy ciemną plamę.



Rys. 5. Struktura smektyczna. Wydłużone cząsteczki układają się w warstwy.



Rys. 6. Struktura kolumnowa. Płaskie cząsteczki układają się w kolumny, które z kolei tworzą regularną sieć sześciokątną.



Rys. 7. Struktura skręconych kolumn.



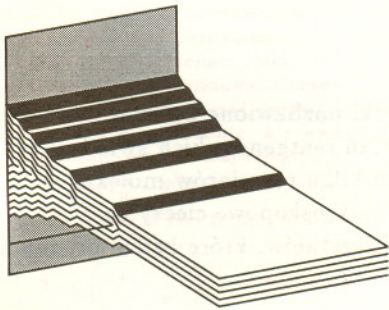
Rys. 8. Różne typy dysklinacji (rzut z góry). Ciągłe linie oznaczają kierunek uporządkowania orientacyjnego (rys. 2a, 2b) cząsteczek, a czarne punkty reprezentują linię dysklinacji. Są to typowe defekty występujące w ciekłych kryształach, łatwo widoczne pod mikroskopem.

Światło padające na wyświetlacz przechodzi wpiery przez polaryzator, który polaryzuje je wzdłuż jednego kierunku. Następnie w ciekłym kryształ następuje skręcenie tego kierunku zgodne ze skręceniem kierunku uporządkowania orientacyjnego. Po przejściu przez analizator na dole wyświetlacza światło odbija się od lusterka i wraca tą samą drogą. Gdy jednak przyłożymy do tego układu napięcie, tak jak to pokazano na rysunku, to wówczas ciekły kryształ porządkuje się prostopadle do polaryzatorów i zgodnie z polem elektrycznym oraz nie skręca kierunku polaryzacji światła – wtedy światło nie przechodzi przez analizator. W tym miejscu wyświetlacza zobaczymy ciemną plamę. Skręcenie kierunku uporządkowania w ciekłym kryształ pokazane na rysunku 4a występuje często spontanicznie i jest wtedy nazywane strukturą cholesteryczną. W wyświetlaczu struktura ta może być wymuszona przez odpowiednie przygotowanie ścianek wyświetlacza. Nazywamy ją wówczas skręconym nematykiem.

Ciekłe kryształy tworzą wiele różnych struktur. Cząsteczki mogą układać się w warstwy jak w smektyku (rys. 5) lub w kolumny tworzące regularną sieć sześciokątną (rys. 6). Kolumny mogą być dodatkowo skręcone (rys. 7). Struktury kolumnowe tworzą się w układach płaskich cząsteczek, które nazywamy dyskoidalnymi ciekłymi kryształami. Istnieje cała menażeria struktur ciekłokrystalicznych: smektyków, których nazwy stanowią kolejne litery alfabetu – A, B, C itd, smektyków antyferroelektrycznych, heksatycznych I, J, F, skręconych, różnych struktur kolumnowych czy wreszcie faz błękitnych I, II, III, o pięknej opalizującej barwie. Co roku odkrywane są nowe, i wydaje się, że natura realizując najbardziej wymyślne struktury prześciga ludzką wyobraźnię.

Nazwy, które badacze nadali różnym ciekłym kryształom, powstały, zanim zrozumiano ich strukturę. I tak, na przykład, nazwa nematyk (rys. 2a, 2b), nadana przez G. Friedela, pochodzi od słowa greckiego używanego na określenie nici. Nazwa ta dobrze odzwierciedla to, co można zobaczyć patrząc na nematyk pod mikroskopem. „Nici” są tworzone przez często pojawiające się w nematykach defekty zwane dysklinacjami. Przykłady takich defektów, pokazane na rysunku 8, zostały zaczerpnięte z pracy F.C. Franka z 1958 roku, jednego z pierwszych uczonych, którzy je opisali. Na rysunku 8 linia ciągła określa kierunek orientacyjnego uporządkowania w ciekłym kryształ, a czarny punkt oznacza środek (jądro) dysklinacji. Rozmiar jądra jest rzędu rozmiarów cząsteczki. W jądrze dysklinacji cząsteczki układają się wzdłuż linii dysklinacji (prostopadle do płaszczyzny rysunku) lub tworzą strukturę dwuosiową (dwuosiowy nematyk) i z grubsza leżą w płaszczyźnie prostopadłej do linii dysklinacji (w płaszczyźnie rysunku). To, która z tych dwóch struktur dominuje, zależy od długości cząsteczek ciekłego kryształu; dla długich cząsteczek ($L/D \geq 10$) tworzy się pierwsza z nich. Rozmiary te odpowiadają makrocząsteczkom takim, jak np. wirus mozaiki tytoniowej ($L = 3000 \text{ \AA}$, $D = 150 \text{ \AA}$, $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$), który w roztworze wodnym tworzy fazy ciekłokrystaliczne. Dla typowych ciekłych kryształów (używanych w wyświetlaczach), zwanych też termotropowymi ciekłymi kryształami (kolejny przykład chybionej nazwy), L/D jest dużo mniejsze niż 10. Fazy błękitne, utworzone ze stabilnego układu dysklinacji uporządkowanych w regularną sieć, uzyskały nazwę dzięki pięknej barwie, choć nie zawsze niebieskiej. Nazwa smektyk pochodzi od greckiego słowa używanego na określenie mydła i została nadana przez G. Friedela ze względu na mechaniczne własności struktur smektycznych (rys. 5). Generalnie rzecz biorąc – nazwy ciekłych kryształów powstały na podstawie ich wyglądu i zachowania makroskopowego, a nie ze względu na strukturę i własności mikroskopowe.

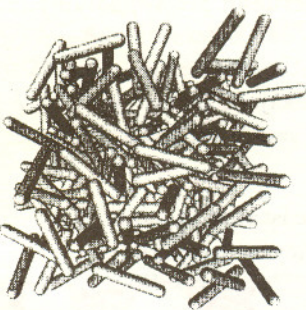
Ostatnie lata przyniosły wzrost zainteresowania ciekłymi kryształami w fizyce, a zwłaszcza fazami błękitnymi, smektykami antyferroelektrycznymi i skręconymi, cienkimi błonami smektycznymi o najmniejszych grubościach równych dwóm długościom cząsteczki, tj. 60 \AA , oraz mikroskopowymi mechanizmami powstawania struktur ciekłokrystalicznych. Schematyczny rysunek



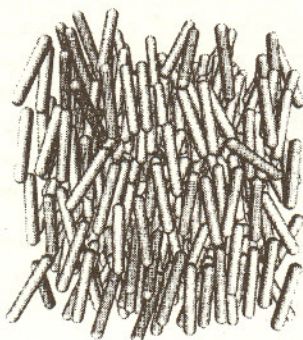
Rys. 9. Schematyczny rysunek cienkiej błony smektycznej rozpiętej na metalowej obręczy tuż przy jej powierzchni. Cząsteczki nie zostały zaznaczone. W środku błony widać dyslokacje (niepełne warstwy), typowe defekty w smektykach i kryształach. Najmniejsze grubości takich błon wynoszą 60 Å, zaledwie dwie długości cząsteczki!

cienkiej błony smektyka, rozpiętej na metalowej obręczy, jest pokazany na rysunku 9 (wg. P. Pierańskiego). W pobliżu brzegu obręczy tworzy się menisk z charakterystycznymi stopniami wywołanymi przez dyslokacje (typ defektu obserwowany w smektykach i kryształach) znajdujące się w środku błony. Na rysunku została zaznaczona tylko struktura warstwowa smektyka, przy czym położenie warstwy jest określone przez położenia środków mas cząsteczek. Niezwykle jest to, że błona składająca się tylko z dwóch warstw cząsteczkowych ma dobrze określone napięcie powierzchniowe, takie samo jak błona o grubości tysiące razy większej. Napięcie powierzchniowe jest zapewne dobrze znane Czytelnikom *Delty* z doświadczeń, które każdy może przeprowadzić z rozciąganiem błonki mydlanej rozpiętej na kawałku drutu. Bardzo cienkie błony smektyczne dostarczają nam wielu informacji o własnościach układów w dwóch wymiarach, normalnie nieosiągalnych w naszym trójwymiarowym świecie. Na okładce pokazane jest zdjęcie, wykonane w świetle spolaryzowanym, 30-warstwowej błony (grubość 900 Å) o średnicy 7 mm i mikroskopowej strukturze heksatycznej (zdjęcie wykonane jest przez B. Swansona).

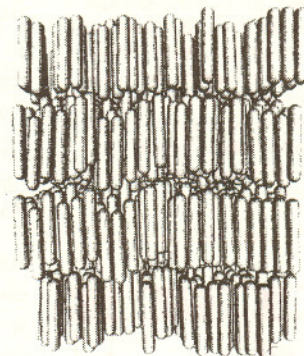
Inną grupę badań nad ciekłymi kryształami stanowią symulacje komputerowe. Na rysunkach 10, 11 i 12 (wg. D. Frenkela) zostały pokazane typowe konfiguracje cząsteczek w fazie izotropowej, nematycznej i smektycznej, uzyskane w symulacjach. Rysunki te dają też wyobrażenie o typowych gęstościach cieczy, a w tym przypadku – ciekłych kryształów. Dzięki teorii i symulacjom komputerowym ciekłych kryształów zrozumiano, że do utworzenia się podstawowych struktur ciekłokrystalicznych, takich jak nematyk, smektyk, struktura kolumnowa czy heksatyczna, nie potrzeba przyciągania między cząsteczkami. Najważniejsze w tworzeniu takich struktur są geometryczne efekty upakowania cząsteczek związane z ich wydłużonym lub płaskim kształtem. Można samemu przeprowadzić następujące doświadczenie: rzucamy zapalki na powierzchnię wody. Przy małej liczbie zapalek są one przypadkowo rozrzucone na powierzchni, jednak przy większej liczbie zapalki układają się w regularne struktury ciekłych kryształów. Jest to, oczywiście, związane z ich upakowaniem na powierzchni. Analogicznie zachodzi proces porządkowania się cząsteczek w ciekłym kryształach.



Rys. 10. Struktura izotropowa w symulacji komputerowej.



Rys. 11. Struktura nematyczna w symulacji komputerowej.



Rys. 12. Struktura smektyczna w symulacji komputerowej.

Wzrost zainteresowania ciekłymi kryształami znalazł swoje odbicie w decyzji komitetu Nagrody Nobla, który w 1991 roku przyznał tę prestiżową nagrodę Pierre'owi Gilles de Gennesowi, między innymi za jego wkład w zrozumienie istoty ciekłych kryształów. Wśród polskich uczonych najbardziej znanym w tej dziedzinie jest profesor Marian Mięśowicz, pionier badań nad anizotropowym charakterem lepkości ciekłych kryształów.

Dla mnie, jako dla fizyka, ciekłe kryształy wypełniają, swymi jedno-, dwu- i trójwymiarowymi strukturami, lukę pomiędzy nieuporządkowanymi cieczami a idealnie uporządkowanymi kryształami. Nie jest to pełna odpowiedź na pytanie, czym są te fantazyjne twory natury tak często spotykane w przyrodzie. Jednak wierzę, że nowe fascynujące odkrycia pozwolą nam zrozumieć w pełni niezwykle świat ciekłych kryształów.

Autor dziękuje Komitetowi Badań Naukowych za grant przeznaczony na badania nad ciekłymi kryształami.

Anizotropia lepkości

Grzegorz DERFEL



Rozwiązanie zadania M 717.

Załóżmy, że każda bakteria jest w nieco innym odcieniu (bieli lub czerni) i podczas podziału odcień koloru jest zachowywany. Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana przez nas bakteria ma dany odcień, wynosi $\frac{1}{30}$ (wszystkie odcienie są „równouprawnione”). Ponieważ 10 spośród odcieni jest białych, szansa, iż wylosujemy białą bakterię, jest równa

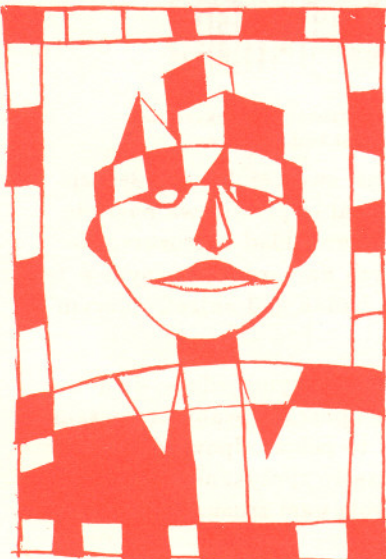
$$10 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{3}.$$



Rozwiązanie zadania M 718.

Wyobraźmy sobie, że w maszynie szczęścia ukryty jest człowiek, który po naciśnięciu przez nas przycisku zaczyna rzucać symetryczną monetą. Po każdym rzucie dodaje nam jeden punkt, a jeśli wypadnie reszka, przestaje rzucać. Maszyna podaje stan konta wtedy i tylko wtedy, gdy ukryty w niej człowiek wyrzuci reszkę. Czytelnik zechce sprawdzić, że taka „maszyna” nie różni się działaniem od opisanej w zadaniu. Wystarczy zatem znaleźć prawdopodobieństwo tego, że w dziesięciu kolejnych rzutach (od dziesiątego do dziewiętnastego) wypadną dokładnie dwie reszki. Prawdopodobieństwo to, jak dobrze wiadomo, wynosi

$$\binom{10}{2} / 2^{10} = 45/1024 \approx 0,044.$$

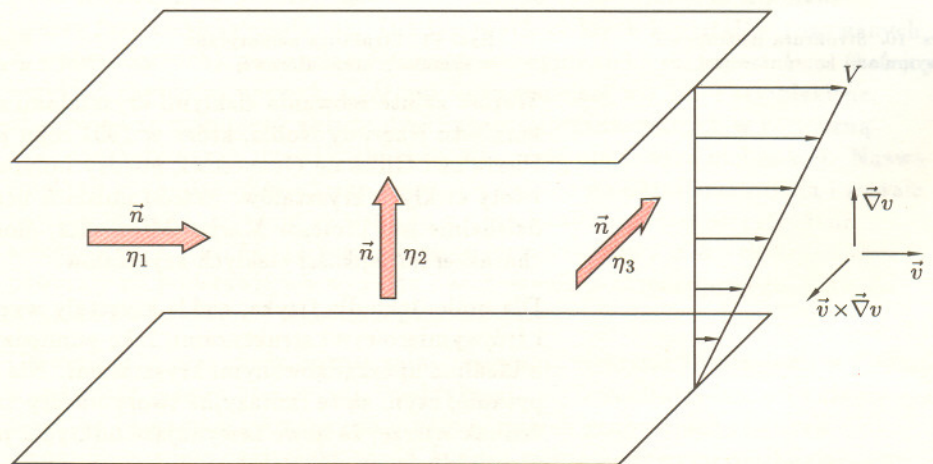


Tradycyjnie ciecze wyobrażamy sobie jako ośrodki pozbawione uporządkowania. Słuszność tego poglądu potwierdzają wyniki badań rentgenowskich świadczące o zaniku uporządkowania na odległościach rzędu kilku rozmiarów molekuł (atomów). Z tego powodu wszystkie własności makroskopowe cieczy są izotropowe. Inaczej jest w przypadku ciekłych kryształów, które będąc płynnym wykazują anizotropię.

Skupimy się tu na nematycznych ciekłych kryształach, w których uporządkowanie jest najsłabsze: dotyczy ono tylko kierunków długich osi molekuł. W niewielkiej próbce nematyka ustawiają się one średnio w pewnym kierunku. Wersor \mathbf{n} (wektor o jednostkowej długości) związany z tym kierunkiem zwany jest direktorem i stanowi podstawowe pojęcie w fizyce ciekłych kryształów. Możemy wprowadzić pojęcie pola direktora, podobnie jak wprowadza się pojęcie pola prędkości cieczy. W skali makroskopowej można opisać ciekły kryształ jako ośrodek ciągły, którego strukturę opisuje, oprócz tradycyjnych charakterystyk, takich jak pole gęstości czy prędkości, także pole direktora. Bardzo interesujące i ważne są własności sprężyste ciekłych kryształów związane z odkształceniami tego pola (*Delta* 4/1986). Orientacyjne uporządkowanie molekuł pociąga za sobą anizotropię własności fizycznych, czyli ich zależność od kierunku względem direktora.

Połączenie anizotropii i płynności rodzi wiele ciekawych zjawisk, wśród których efekty związane z przepływem należą do najbardziej zaskakujących. W szczególności sposób, w jaki zachodzi przepływ ciekłego kryształu, zależy od kierunku – sytuacja nie do pomyślenia w zwykłych cieczach. Relacja między naprężeniem ścinania (tj. stosunkiem siły F przyłożonej stycznie do powierzchni S , $\tau = F/S$) a szybkością ścinania dv/dz (tzn. zmianą prędkości przepływu w kierunku siły F ze zmianą położenia w kierunku prostopadłym) definiuje efektywne współczynniki lepkości: $\tau = \eta_{ef} dv/dz$. Zależą one od wzajemnej orientacji direktora \mathbf{n} , prędkości \mathbf{v} i gradientu wartości prędkości ∇v . Ponadto na ogół nie jest spełnione prawo Newtona orzekające proporcjonalność τ do dv/dz . Oznacza to, że lepkość efektywna zależy od szybkości ścinania. Zachowanie takie nazywamy nienewtonowskim.

Anizotropię lepkości najbardziej poglądowo można przedstawić za pomocą efektywnych współczynników lepkości η_1, η_2, η_3 rządzących przepływem w trzech sytuacjach pokazanych na rysunku 1: $\mathbf{n} \parallel \mathbf{v}$, $\mathbf{n} \parallel \nabla v$, $\mathbf{n} \parallel \mathbf{v} \times \nabla v$.



Rys. 1



Rozwiązanie zadania F 391.

Oznaczmy przez W moc ciepłą produkowaną przez organizm, a przez S – powierzchnię ciała człowieka. Energia oddawana przez człowieka musi bilansować energię wytwarzaną w organizmie. Z prawa Stefana-Boltzmanna znajdujemy

$$\sigma(T_0^4 - T^4) \cdot S = W,$$

gdzie $T_0 = 309$ K jest temperatura człowieka. Stąd

$$T = \left(T_0^4 - \frac{W}{\sigma S}\right)^{1/4} = 293 \text{ K}.$$

Przeliczając na stopnie Celsjusza dostajemy ostatecznie temperaturę otoczenia 20°C .



Rozwiązanie zadania F 392.

Zakładamy, że ciepło produkowane w Ziemi na jednostkę objętości jest wartością stałą, tj. $q = \text{const}$. Równanie przewodnictwa cieplnego przyjmuje postać

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{dT}{dr} = Vq,$$

gdzie $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$, natomiast r jest odległością od środka Ziemi. Stąd wyznaczamy temperaturę

$$T = \frac{q}{3\lambda} \int_0^R r dr = \frac{qR^2}{6\lambda},$$

gdzie R jest promieniem Ziemi. Z drugiej strony z bilansu energii

$$q \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = Q \cdot 4\pi R^2$$

otrzymujemy

$$q = \frac{3Q}{R}$$

i ostatecznie

$$T = \frac{QR}{2\lambda} \approx 4000 \text{ K}.$$

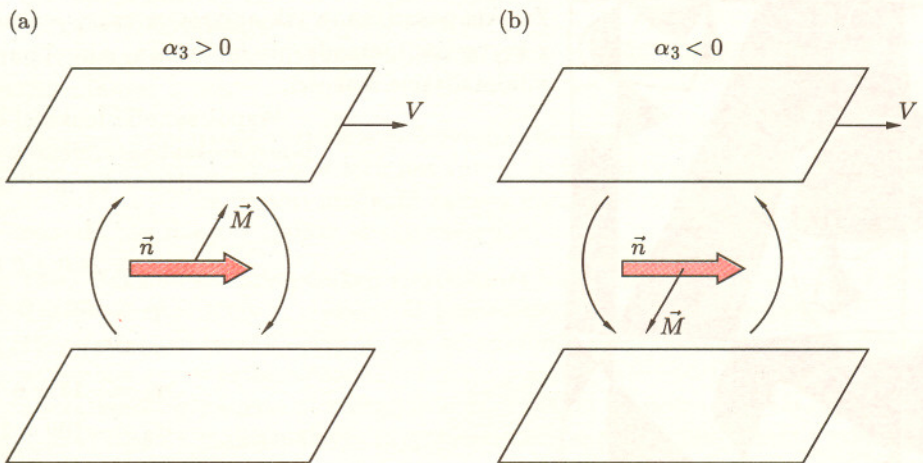


Pierwsze pomiary tych współczynników zostały wykonane w latach 1934–1936 przez Mariana Mięśowicza (w eksperymentach, które o ponad 30 lat wyprzedzały teoretyczną analizę zagadnienia). Ich wzajemna relacja: $\eta_1 < \eta_3 < \eta_2$ wydaje się intuicyjnie zrozumiała, jeśli wyobrazić sobie, jak ułożone są molekuly w każdej z trzech sytuacji. Anizotropia lepkości sprawia, że tracą sens pomiary tej wielkości metodami stosowanymi w przypadku zwykłych cieczy, np. metodą spadającej kulki. Dla ciekłych kryształów ważne jest jednoznaczne określenie orientacji direktora na powierzchniach, z którymi styka się ciekły kryształ. Najprostszy przepływ ma miejsce przy tak zwanym prostym ścinaniu, gdy ciecz zawarta jest między dwiema równoległymi płytkami, z których jedna porusza się z prędkością V względem drugiej.

W latach 60. i 70. powstało kilka prac teoretycznych opisujących hydrodynamikę ciekłych kryształów z dwóch odmiennych punktów widzenia: makroskopowego i mikroskopowego. Powszechniej stosowane jest to pierwsze podejście oparte na klasycznej mechanice ośrodków ciągłych i znane jako teoria ELP (Ericksen, Leslie, Parodi).

Przepływ zwykłej cieczy izotropowej jest określony równaniem Naviera-Stokesa. W ciekłych kryształach równanie to przybiera formę znacznie bardziej skomplikowaną. Działanie tarcia wewnętrznego jest w nim uwzględnione poprzez tensor naprężeń lepkich, zależny od aż sześciu współczynników o wymiarze lepkości: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ i α_6 . Dzięki istnieniu relacji między nimi liczba niezależnych współczynników maleje do pięciu. Dodatkowym zjawiskiem w ciekłych kryształach, jakie trzeba wziąć pod uwagę oprócz transportu masy, jest możliwość zmian kierunku direktora. Opisuje je II zasada Newtona dla ruchu obrotowego. Pomija się w niej – jako znikomy – moment bezwładności związany z direktorem.

Efektywne współczynniki lepkości w różnych konfiguracjach wyrażają się przez kombinacje α_i . Pomiary tych efektywnych współczynników lepkości pozwalają wyznaczyć każde α_i oddzielnie. Godny uwagi jest fakt, że niektóre ze zmierzonych wartości są ujemne. W pewnych przypadkach ten ujemny znak ma przejrzystą interpretację. Można wykazać, że w sytuacjach przedstawionych na rysunku 2 moment sił lepkich \vec{M} usiłujący obrócić direktor zależy tylko od współczynnika α_3 . W materiałach, dla których $\alpha_3 > 0$, moment ten działa tak, jak pokazuje rysunek 2a, powodując wychylenie w kierunku zgodnym z biegiem wskazówek zegara. Natomiast gdy $\alpha_3 < 0$ – wychylenie następuje w kierunku przeciwnym (rys. 2b). Powyższy przykład ilustruje, jak przepływ oddziałuje – za pośrednictwem tarcia wewnętrznego – na orientację direktora (zmieniając zresztą wartość efektywnej lepkości).



Rys. 2

Nawet w tak nieskomplikowanej sytuacji, jaką jest proste ścinanie, anizotropia lepkości daje niezwykle efekty. Orientujące działanie przepływu może mieć dość skomplikowany przebieg. Niech np. direktor pozostaje w płaszczyźnie ścinania



Rozwiązanie zadania M 719.

Podstawiając $x = y = z = 0$ otrzymamy

$$2f(0) - 2f(0)^2 \geq \frac{1}{2},$$

czyli

$$\left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0,$$

skąd

$$f(0) = \frac{1}{2}.$$

Podstawiając $x = y = z = 1$ i rozumując jak przed chwilą otrzymujemy, że

$$f(1) = \frac{1}{2}.$$

Niech x będzie dowolne, a $y = z = 1$. Wówczas

$$2f(x) - f(x)^2 \geq \frac{1}{2},$$

czyli

$$f(x) \geq \frac{1}{2}.$$

Podobnie, gdy przyjmiemy $y = z = 0$, otrzymamy przy dowolnym x , że

$$f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

Ostatecznie

$$f(x) \equiv \frac{1}{2}.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja ta spełnia warunki zadania.

prostopadłej do warstwy i równoległej do prędkości V jednej z płytek. Jeśli spełniony jest warunek $\alpha_3/\alpha_2 > 0$, to rozkład direktora dąży – przy rosnącej wartości dv/dz – do granicznego uporządkowania, tworząc z v kąt „nasyceń” $\theta = \arctg \sqrt{\alpha_3/\alpha_2}$. W przeciwnym przypadku taka graniczna orientacja nie istnieje i kąt może przybrać dowolnie dużą wartość (jeśli nie przeszkodzą temu inne efekty zaburzające idealny przepływ). Warto wymienić jeszcze inne przypadki zdarzające się w nematykach, gdy $\alpha_3/\alpha_2 > 0$. Jeśli direktor nie leży w płaszczyźnie ścinania, to pojawiają się siły poprzeczne, które mogą nadać przepływowi prędkość prostopadłą do prędkości płytki. Jeśli direktor pierwotnie jest prostopadły do wymienionej płaszczyzny, to przepływ jest newtonowski ($\eta_{ef} = \eta_3 = \alpha_4/2$), dopóki V nie przekroczy krytycznej wartości. Jeśli ją przekroczy, direktor obraca się w kierunku płaszczyzny ścinania. Istnieje też szeroka klasa zjawisk polegających na rozwijaniu się niestabilności przypominających ruch konwekcyjny.

Przepływ zwykłej cieczy można scharakteryzować za pomocą bezwymiarowej liczby Reynoldsa $R = \rho v d / \eta$ utworzonej z gęstości cieczy ρ i z charakterystycznych dla danego przepływu długości d , prędkości v i lepkości η . Liczba ta określa, czy w danej sytuacji o zachowaniu się cieczy decyduje bezwładność czy lepkość. Umożliwia także rozpatrywanie podobieństw przepływów zachodzących w różnych skalach. W ciekłych kryształach oprócz R można utworzyć inną wielkość bezwymiarową zwaną liczbą Ericksena $E = \eta v d / K$, w której K charakteryzuje własności sprężyste direktora. Liczba ta wyznacza względną rolę zjawisk dynamicznych (przepływ) i statycznych (deformacja pola direktora). Przy małych E przepływ prawie nie zmienia orientacji direktora, przy dużych – uporządkowanie direktora określone jest siłami lepkiymi a nie sprężystymi.

W ciekłych kryształach opór lepki może wystąpić nawet bez przepływu – przy samych tylko zmianach orientacji direktora wywołanych np. polem elektrycznym lub magnetycznym. Na ogół jednak odkształcenie pola direktora pociąga za sobą niewielkie przemieszczenie cieczy.

Rolę tarcia wewnętrznego przy tego rodzaju efektach można stwierdzić obserwując szybkość zanikania ciemnych cyfr na ciekłokrystalicznym ekraniku kalkulatora lub zegarka. Lepkość hamuje powrót direktora do niezaburzonego polem elektrycznym stanu, który nie powoduje zaciemnienia ekranu. Szczególnie wyraźne jest spowolnienie zanikania cyfr w niskich temperaturach. (Przy obserwacji tego efektu nie należy przekraczać granic zakresu temperatur pracy wskaźnika ciekłokrystalicznego podanych w instrukcji obsługi urządzenia.) Zwykle pożądane są jak najkrótsze czasy reakcji wskaźnika. Dlatego jednym z kryteriów sporządzania mieszanin, jakimi napełnia się te urządzenia, jest minimalizacja lepkości.

Współczynniki lepkości dla $T = 25^\circ$
 p-n-metoksybenzylideno-p'-butyloaniliny
 $[10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}]$

$$\eta_1 = 24,0 \pm 0,5$$

$$\eta_2 = 136 \pm 6$$

$$\eta_3 = 41,3 \pm 0,8$$

$$\alpha_1 = -18 \pm 6$$

$$\alpha_2 = -109 \pm 2$$

$$\alpha_3 = -1,0 \pm 0,2$$

$$\alpha_4 = 83 \pm 2$$

$$\alpha_5 = 80 \pm 15$$

$$\alpha_6 = -34 \pm 2$$



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1995

Zadania z matematyki nr 287, 288

Redaguje Marcin E. KUCZMA

287. Czy istnieje trójkąt, w którym dwusieczna jednego z kątów wewnętrznych jest prostopadła do jednej ze środkowych, a długości boków są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi?

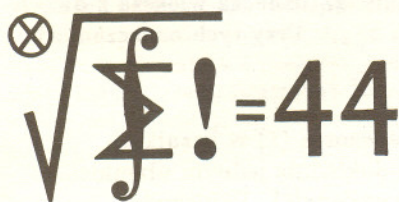
288. Przyjmijmy

$$a_n = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wykazać istnienie i obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt{a_n}$$

Zadanie **288** zaproponował pan Józef Banaś z Rzeszowa.

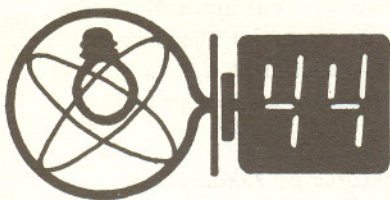


Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 273 ($WT=1,53$) i 274 ($WT=2,88$)
z numeru 1/1994

Tomasz Kulpa	- Katowice	48,26
Paweł Lizak	- Puławy	40,17
Waldemar Pompe	- Warszawa	38,83
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	37,48

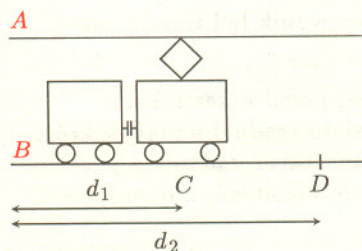
Pan Kulpa: siedemdziesiąta piąta
osoba w matematycznym Klubie 44.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 175 ($WT=2,26$) i 176 ($WT=3,28$)
z numeru 3/1994

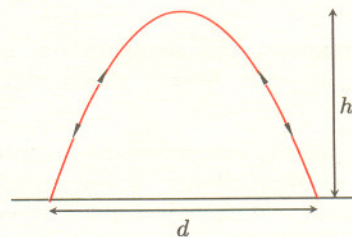
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	35,48
Andrzej Borowski	- Aleksandrów K.	32,85
Aleksander Surma	- Myszków	18,56



Zadania z fizyki nr 185, 186

Redaguje Jerzy B. BROJAN

185. Odpowiednio rzucona jednorodna sprężysta piłeczka może skakać tam i z powrotem po poziomej powierzchni (rys.) na skutek ruchu obrotowego. W rozwiązaniu zadania pomijamy poślizg występujący na początku zderzenia, powodujący straty energii i w konsekwencji powrót piłeczki po nieco innym torze.



Jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia piłeczki o podłoże, jeśli maksymalna wysokość lotu jest równa h , a punkty odbicia są odległe od siebie o d ? Ile wynosi prędkość kątowa piłeczki w czasie lotu? Promień r piłeczki jest dany. Pominąć straty energii.

186. Odcinek kolejowej trakcji elektrycznej jest zasilany w punktach A i B napięciem $U = 1000$ V, a oporność przewodów wynosi $\rho = 2$ Ω na każde 100 m długości (przyjmijmy, że jest to oporność przewodów wiszących, natomiast szyny są bezoporowe). Pociąg o masie $m = 100$ ton stoi w chwili początkowej w punkcie C odległym o $d_1 = 500$ m od podstacji AB (rys.). Pociąg rusza z maksymalnym przyspieszeniem w prawo i po czasie t mija punkt D leżący w odległości $d_2 = 2$ km od AB . Jeśli opory ruchu można pominąć, to ile razy zmaleje ten czas, gdy podwoimy napięcie U ? Obliczyć numerycznie wartość t dla podanych wartości stałych. Czy w bardzo dużej odległości od AB ($d_2 \rightarrow \infty$) prędkość pociągu rośnie nieograniczenie, czy tylko do pewnej granicy?

Na radzieckiej Olimpiadzie Matematycznej w 1968 roku w Kijowie pojawiło się ciekawe i dość trudne

Zadanie. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich x_1, \dots, x_n zachodzi nierówność

$$(1) \quad \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_{n-2}}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \frac{n}{4}.$$

Porównaj też z Kącikiem Olimpijskim w Delcie 5/1994.

Rozwiązanie jest dość krótkie. Pomysł polega na tym, by szacować lewą stronę z dołu odrzucając ułamki o niewielkich licznikach; oto szczegóły.

Wyberzmy tak numer i_1 , aby $x_{i_1} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$. Otóż x_{i_1} jest licznikiem jednego z ułamków. W mianowniku tego ułamka są dwa składniki. Większy z nich oznaczmy przez x_{i_2} . Dalej, niech x_{i_3} będzie większą z dwóch liczb stojących w mianowniku ułamka o liczniku x_{i_2} itd. – ogólnie, x_{i_l} oznacza większą z dwóch liczb stojących w mianowniku ułamka o liczniku $x_{i_{l-1}}$. Przy tych oznaczeniach

$$\frac{x_{i_l}}{x_{i_{l+1}} + x_{i_{l+2}}} \geq \frac{x_{i_l}}{2x_{i_{l+1}}}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Zauważmy, że liczby x_{i_l} oraz $x_{i_{l+1}}$ występują we wzorze (1) w licznikach ułamków bądź to sąsiednich, bądź oddzielonych dokładnie jednym ułamkiem (przyjmijmy, że ułamki pierwszy i ostatni też są sąsiednie). Ponieważ x_{i_1} występuje w mianownikach dwóch sąsiednich składników naszej sumy oraz jest największą ze wszystkich liczb x_i , więc dla pewnego k mamy $x_{i_{k+1}} = x_{i_1}$. Jak już powiedzieliśmy, przechodząc od ułamka z licznikiem x_{i_l} do tego z licznikiem $x_{i_{l+1}}$ przeskakujemy o jeden lub o dwa składniki. Aby dojść od x_{i_1} do $x_{i_{k+1}} = x_{i_1}$, musimy wykonać „pętlę” długości n ; skąd $k \geq n/2$.

Oszacujmy teraz naszą sumę S z dołu, wybierając jedynie składniki o licznikach $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$. Posługując się nierównością o średniej arytmetycznej i geometrycznej, otrzymamy tezę:

$$S \geq \frac{x_{i_1}}{2x_{i_2}} + \frac{x_{i_2}}{2x_{i_3}} + \dots + \frac{x_{i_k}}{2x_{i_1}} \geq k \cdot \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} \geq \frac{n}{4}.$$

To jednak nie koniec historii. Zauważmy, że w naszym dowodzie czasami zapominamy o niektórych składnikach w sumie S – może się nawet zdarzyć tak, że zapominamy o co drugim składniku. Zapewne więc udowodnione przez nas oszacowanie nie jest najlepsze z możliwych.

W 1954 roku amerykański matematyk H.S. Shapiro wysunął hipotezę, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla dowolnych dodatnich x_1, \dots, x_n zachodzi nierówność mocniejsza od (1): z lewą stroną nie zmienioną, i $n/2$ zamiast $n/4$ po prawej stronie. Udowodniono jednak, że przypuszczenie Shapiro nie jest prawdą dla parzystych $n \geq 14$ oraz dla nieparzystych $n \geq 27$.

Ostrą wersję nierówności (1) zdołał udowodnić wkrótce po zakończeniu kijowskiej olimpiady jeden z jej zwycięzców, W.G. Drinfeld, późniejszy (1990) laureat medalu Fieldsa.

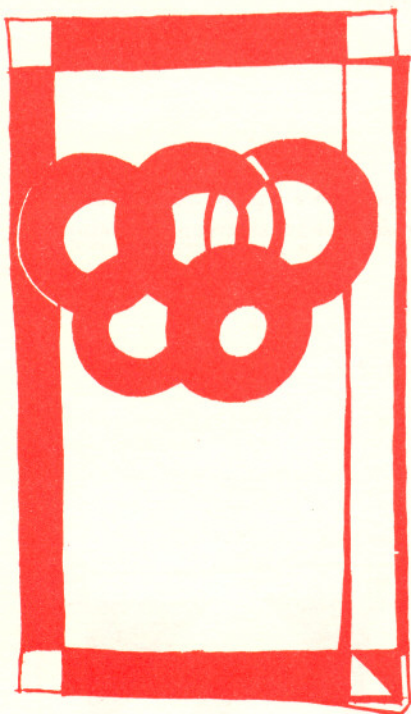
Okazuje się, że dla $n \in \mathbb{N}$ oraz dodatnich $x_i, 1 \leq i \leq n$, mamy zawsze

$$(2) \quad S(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \gamma \cdot \frac{n}{2}.$$

Liczba $\gamma \approx 0,989\dots$ jest rzędną punktu, w którym wspólna styczna do wykresów funkcji $y = \exp(-x)$ oraz $y = 2/(\exp(x/2) + \exp(x))$ przecina oś OY . Oszacowania (2) nie można poprawić: jeśli $\gamma_1 > \gamma$, to istnieje takie n i liczby dodatnie x_i , że $S(x_1, \dots, x_n) < \gamma_1 \cdot n/2$. Ten wynik był treścią jednej z pierwszych publikacji naukowych Drinfelda.

Historyjka wydaje się mieć dwa morały. Po pierwsze, przed uczestnikami Olimpiady Matematycznej otwiera się ścieżka do świata trudnej nauki, w którym jest miejsce nawet na medal Fieldsa. Po drugie, elementarne zadania z pozornie prostymi rozwiązaniami mogą być źródłem ciekawych uogólnień, interesujących nawet dla wielkich matematyków.

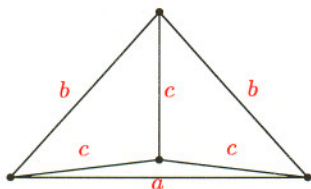
Paweł STRZELECKI



Medal Fieldsa jest w świecie matematyków odpowiednikiem Nagrody Nobla (matematyki nie uznał Nobel za działalność służącą ludzkości); przyznaje się go raz na cztery lata, podczas kolejnych międzynarodowych Kongresów Matematycznych. Żaden Polak nie był jeszcze laureatem medalu Fieldsa.

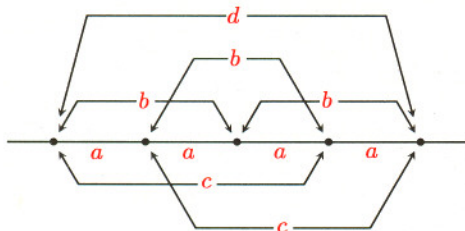
Odległości

Trzy wierzchołki trójkąta równoramiennego, ale nie równobocznego, mają tę własność, że jeśli rozważymy odległości między nimi, to jedna wartość jest przyjęta raz, a druga dwa razy. Podobnie banalną jest inna obserwacja: gdy do tych wierzchołków dołączymy środek okręgu opisanego na trójkącie, to wśród wzajemnych odległości jedna jest przyjmowana raz, druga dwa razy, trzecia trzy – chyba że akurat ktoś pechowo wybrał trójkąt, w którym miara kąta między równymi ramionami wynosi 30° (czemu wtedy jest inaczej?). Te prościutkie fakty prowadzą jednak do oryginalnego uogólnienia...



Zauważmy: jeżeli mamy na płaszczyźnie n punktów, to po połączeniu ich w pary otrzymamy $\binom{n}{2}$ układów dwupunktowych – i tym samym tyle też możliwych teoretycznie odległości. Ale przecież niektóre odległości mogą się powtórzyć... Wiemy, że $\binom{n}{2} = 1 + 2 + \dots + (n-1)$ – to już szybko prowadzi do pytania o naturalne uogólnienie naszych początkowych obserwacji. Czy można umieścić na płaszczyźnie n punktów tak, by przyjmowanych odległości między nimi było dokładnie $n-1$, przy czym jedna osiągnięta raz, druga dwa razy... $(n-1)$ -sza $n-1$ razy?

Znalezienie takiej konfiguracji nie jest specjalnie trudne. Wystarczy tak położyć n punktów na jednej prostej, by dwa sąsiednie były zawsze w tej samej odległości.



Wobec tego utrudnijmy sobie zadanie, wyrzucając specyficzne przypadki. Załóżmy zatem, że wśród n punktów żadne trzy nie są współliniowe i żadne cztery nie leżą na jednym okręgu (skąd ten drugi warunek?).

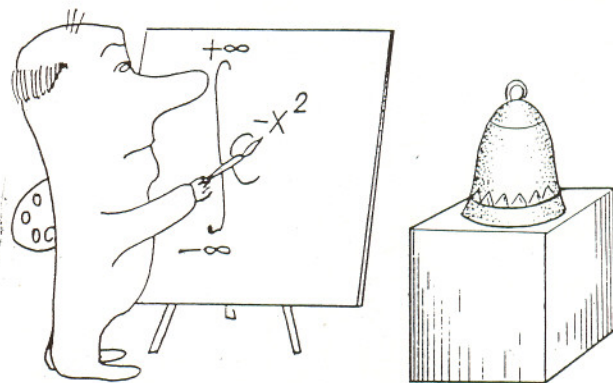
Dla n równego 3 i 4 zadanie jest niezwykle proste – właśnie je rozwiązaliśmy. Ale już dla n równego 5 trochę trudniej wskazać odpowiednie punkty.

Ogólny problem wcale nie jest taki stary. Postawił go w roku 1982 znakomity matematyk, Paul Erdős. Ale,

W pierwszych czterech tegorocznych *EPSILONACH* umieściliśmy rysunki (cztery spośród prawie dwustu) z książki K. Ciesielskiego i Z. Pogody *Bezmiar matematycznej wyobraźni* wraz z adnotacją, że na początku 1994 roku (czyli właśnie w czasie, gdy odpowiednio *Delty* się ukazywały) książka będzie do nabycia w księgarniach. Napłynęły do nas reklamacje Czytelników, że w księgarniach o takiej książce nie słyszano. I to prawda – jesteśmy winni przeprosiny, ale to nie nasza wina. Więc małe wyjaśnienia.

Książka *Bezmiar matematycznej wyobraźni* była w planie wydawniczym na 1993 rok (złożona została w wydawnictwie w styczniu 1991 roku, ale nie były to wspomnienia sekretarza KW PZPR pt. *Nie kradłem więcej niż inni* czy coś w tym rodzaju, więc musiała swoje odczekać). Przewidując pewien poślizg, sądziliśmy, że do księgarni dotrze na początku roku 1994. Niestety – opóźnienie okazało się istotnie większe, a *EPSILONY* przygotowywane są do druku z kilkumiesięcznym wyprzedzeniem, nie mogliśmy więc notki zmienić. Zgodnie z obecnymi (wiosna 1994) informacjami z Wydawnictwa, ma ona być w księgarniach jesienią 1994 roku – mniej więcej wtedy, gdy ukaże się ten, 10/1994 numer *Delty*. Mamy nadzieję, że tym razem okaże się to prawdą. A książkę (konsekwentnie) gorąco polecamy.

(A.P.)



Rysunek z książki *Bezmiar matematycznej wyobraźni*

co ciekawe – jeszcze niedawno zagadka nie była rozwiązana i nic nam nie wiadomo o tym, aby ją ktoś ostatnio rozstrzygnął.

Do roku 1991 znano konstrukcje odpowiedniego układu punktów dla n równych 3, 4, 5, 6, 7, 8. Już dla liczby dziewięć nie wiadomo było, co z tym fantem zrobić. Erdős oferował nagrody! Za dowód nieistnienia takiego układu w ogólnym przypadku oferował 50 dolarów, za konstrukcję dla dowolnego n natomiast 500 dolarów. Erdős był przekonany, iż istnieje takie k , że dla $n > k$ problem nie ma rozwiązania.

Oto odpowiedź dla n równego 8, podana przez Ilonę Palásti w 1989 roku. Owe punkty (zapisane we współrzędnych kartezjańskich) to: $(0, 2)$, $(\sqrt{3}, 7)$, $(2\sqrt{3}, 0)$, $(2\sqrt{3}, 4)$, $(3\sqrt{3}, 7)$, $(3\sqrt{3}, 9)$, $(4\sqrt{3}, 0)$, $(5\sqrt{3}, 5)$. Każdy może we własnym zakresie sprawdzić, że odległości 2, $2\sqrt{19}$, $2\sqrt{21}$, $2\sqrt{3}$, 4, $2\sqrt{7}$ i $2\sqrt{13}$ są przyjmowane odpowiednią liczbę razy.

A poza tym można rozważać analogiczny problem w przestrzeni trójwymiarowej, chyba również wciąż otwarty.

Krzysztof CIESIELSKI