W dniu 14 sierpnia 1995 roku
zmarł

Władysław J.H. KUNICKI–GOLDFINGER
wybitny biolog, znakomity rzecznik spraw nauki, mądry człowiek,
Autor *Delty*

SPIS TREŚCI

NUMERU 10(257)

W następnym numerze:

Aproksymacje diofantyczne

Okładkę i ilustracje wykonał *Bernard BADZIOCH*

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65.
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1996 roku wynosi 2 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1996 r. 4 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.
Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1996 r. wynosi 6 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju:
   - a) jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób;
   - b) od osób zamieszkałych lub instytucji mających siedzibę w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH, wpłaty należy wnosić na konto „RUCH" S.A. Oddział Warszawa w PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. $8^{00} - 14^{00}$;
     dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską".
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH" S.A. na konto lub w kasach Oddziału. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną ze zleceniem dostawy za granicę od osób zamieszkałych w kraju:
   do 20 XI na I kwartał roku następnego,
   do 20 II na II kwartał,
   do 20 V na III kwartał,
   do 20 VIII na IV kwartał.
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-10-39, 620-10-19, 620-12-71 w. 2442, 2366.

Cena 1 egzemplarza 1 zł 50 gr, 15 000 zł

Żeglarstwo, fizyka i komputery

Na podstawie artykułów: „Stars & Stripes" (*Scientific American*, Vol. 257, August 1987, Nr 2) i „Teoria żeglowania" (*Sport i Turystyka* 1970).

Andrzej WITOWSKI

Podobno historia lubi się powtarzać. Pod koniec ubiegłego wieku uważano, że w fizyce praktycznie nic nowego nie można już zrobić. Pozostawało do wyjaśnienia tylko kilka niezbyt istotnych zjawisk. A potem była teoria względności i teoria kwantów.

Podobna sytuacja miała miejsce w żeglarstwie na początku lat siedemdziesiątych. W klasie 12 metrów, w której rozgrywane są najbardziej prestiżowe regaty o Puchar Ameryki, i która technicznie jest najbardziej rozwinięta, wydawało się, że nie należy spodziewać się żadnych nowości technicznych. Wydawało się, że konstrukcja jachtu osiągnęła swoje optimum i sądzono, że tylko wyszkolenie oraz zdolności załogi będą decydowały o wygranej. Przebudzenie było bardzo przykre dla Amerykanów. W 1983 roku, po raz pierwszy od stu lat utracili Puchar. Zwyciężył jacht z Australii właśnie dzięki nowościom technicznym, a dokładnie – dzięki nowej konstrukcji kilu.

Urażona duma może stać się potężnym motorem postępu. Natychmiast znaleziono stosowne fundusze i zorganizowano zespoły odpowiednich ludzi. Postawiono jasny cel: zbudować jacht, który na pewno wygra. Niestety, w miarę szybko modelowanie komputerowe wykazało, że nie można w klasie 12 m zbudować jachtu wygrywającego zawsze, jedynie można spróbować zbudować taki, który ma ponad 50% szans wygrania. Powodem tego jest formuła klasy, do której zaliczany jest jacht. Klasa jachtu nie jest ustalana na podstawie sztywno ustalonych wymiarów i kształtów. Wzór, według którego oblicza się przynależność klasową, zawiera wiele parametrów:

$$K = (L + \sqrt{S_A} - F \pm B \pm D \pm P + A \pm H + C - k)P_f/2\,,$$

gdzie:
K – wartość klasyfikacyjna w metrach lub stopach,
L – długość,
S_A – powierzchnia ożaglowania,
F – wolna burta,
B – współczynnik szerokości,
D – współczynnik zanurzenia,
P – współczynnik wyporności,
A – współczynnik dla nawisów,
H – współczynnik dla profilu kadłuba poniżej linii wodnej,
C – współczynnik dla rufy skróconej,
k – współczynnik dla żelaznego kilu,
P_f – współczynnik zależny od rodzaju śruby napędowej.

Wartość liczbowa K zależy zasadniczo od $L + \sqrt{S_A}$. Każda klasa ma określoną najmniejszą i największą długość linii wodnej i odpowiednią do niej wyporność. Znaki $+$ albo $-$ zmieniają się stosownie do wielkości współczynników względem podstawowych standardów dla określonej klasy. Powierzchnia żagli jest mierzona według instrukcji pomiarowej i wchodzi do wzoru po pomnożeniu jej przez współczynnik zależny od rodzaju otaklowania. I tak np. dla kutra lub slupu o ożaglowaniu bermudzkim (trójkątne) współczynnik ma wartość 1, a dla kecza o ożaglowaniu gaflowym wartość 0,90.

Z powyższego widać, mimo że wzór nie jest skomplikowany, dlaczego jego interpretacja zajmuje 25 stron drobnego druku, a konstruktorzy mają duże możliwości manewru. Tak więc do klasy może należeć

Przygody matematyki wśród ludzi (I)

(na podstawie wykładów wygłoszonych na antenie *Radia Bis*)

Skąd się wzięła nazwa „matematyka"?

Marek KORDOS

Matematyka zajmuje się trzema jeno obiektami: są to liczby, figury i nieskończoność. Tych wszystkich z Państwa, którzy zaprotestowali w tym miejscu, bo pamiętają, że pod tym hasłem uczono ich o całym mnóstwie innych rzeczy, pragnę uspokoić i poinformować, że wszystko inne w matematyce to tylko zmyślne kombinacje tych trzech obiektów: liczb, figur i nieskończoności. Kombinacje utworzone po to, by liczby, figury i nieskończoność badać było wygodniej, no i – co tu ukrywać – żeby nie było monotonnie, by było ciekawiej.

Matematycy najbardziej są dumni z owego badania nieskończoności, ona bowiem najpóźniej się w matematyce zadomowiła (bo dopiero niewiele ponad stulecie temu), choć zabiegała o to od co najmniej 2200 lat. Wacław Sierpiński, zmarły w 1969 roku, najbardziej bodaj znany matematyk polski, polecił nawet, by na grobie wyryto mu – jako jedyny obok imienia i nazwiska – napis *badacz nieskończoności.*

Nie każdy jednak, kto zajmuje się liczbami, figurami bądź nieskończonością, jest zaraz matematykiem. Księgowy czy informatyk zajmują się liczbami, architekt czy plastyk – figurami, teolog czy filozof – nieskończonością, a przecież są to zupełnie odrębne od matematyki formy ludzkiej działalności. Podobnie, tradycyjnie tylko – można powiedzieć przez grzeczność – nazywamy zainteresowanie liczbami i figurami mędrców chaldejskich i egipskich matematyką. To było coś zupełnie innego. Bo matematyka to bardzo określony sposób zajmowania się liczbami i figurami. W ogóle, każdą naukę określa nie tylko obiekt jej zainteresowań, lecz w większym nawet stopniu sposób badania, metodologia. I tak człowiekiem zajmuje się medycyna, psychologia, socjologia, ekonomia, historia, etyka i nikt nie ma wątpliwości, że są to różne dyscypliny.

Matematyka powstała jako odłam szerokiego, trwającego przynajmniej dwa tysiąclecia, ruchu intelektualnego zwanego pitagoreizmem. Jego wyznawcy w wieku –VI, czyli dwa i pół tysiąca lat temu, rozpropagowali doktrynę głoszącą, że w tym, iż świat nie rozpada się, musi być coś nadprzyrodzonego. Pełno przecież na świecie przeciwstawnych tendencji: ogień chce wszystko spalić, woda chce wszystko zatopić, żeby już nie wspominać o tym, co wyczyniają ludzie. Tą siłą nadrzędną, *którą się utrzymuje wszystko, nie wyłączając bogów* – jak mówili, jest *HARMONIA*. A celem życia człowieka jest badanie owej harmonii. I życie człowieka tym bardziej jest godziwe, im dalej na drodze badania tej harmonii zawędrował.

Nie sposób nie zwrócić uwagi na fakt – cudowny zgoła – że w owym (–VI) wieku pytanie o sens życia człowieka zostało postawione równocześnie na całej praktycznie kuli ziemskiej i w wielu jej miejscach udzielono na to pytanie bardzo ważkich odpowiedzi do dziś mających wielu wyznawców. I tak w Chinach żyli wtedy: Konfucjusz – twórca doktryny poszanowania zastanego i Lao–tsy – inicjator taoizmu, w Indiach Budda – twórca wielkiej religii wyrzeczenia (jak pisze papież: wielkiej religii ateistycznej) i Dżajna – twórca idei zwycięstwa nad sobą, jako celu człowieczego istnienia. Doktryny te to dziś idee życia ponad połowy ludzkości. Warto o tym pamiętać, że pitagoreizm, ustanawiający poznanie struktury świata jako sens istnienia, w takim właśnie powstał towarzystwie.

Narzędziem poznawania harmonii miała być dedukcja – pochodząca od Talesa idea wyprowadzenia drogą rozumowania wszelkiej wiedzy z niewielkiej liczby prostych i oczywistych założeń, zwanych aksjomatami. Wówczas pewność uzyskanej na tej drodze wiedzy była tak niepodważalna, jak oczywistość owych aksjomatów – była więc stosunkowo prosta do weryfikacji.

Pitagorejczycy twierdzili też, że wiedzą, gdzie najłatwiej harmonię jest dostrzec. Odpowiednimi dyscyplinami miały być: muzyka, arytmetyka, geometria i astronomia (używając ich dzisiejszych nazw). Co więcej – ich badania jeszcze we wspomnianym, –VI wieku, gdy byli jedynie grupką fanatyków zamieszkujących miasteczko na południu Półwyspu Apenińskiego – Krotonę – przyniosły wyniki potwierdzające trafność tego wyboru. Okazało się, że muzyka i arytmetyka są ściśle związane.

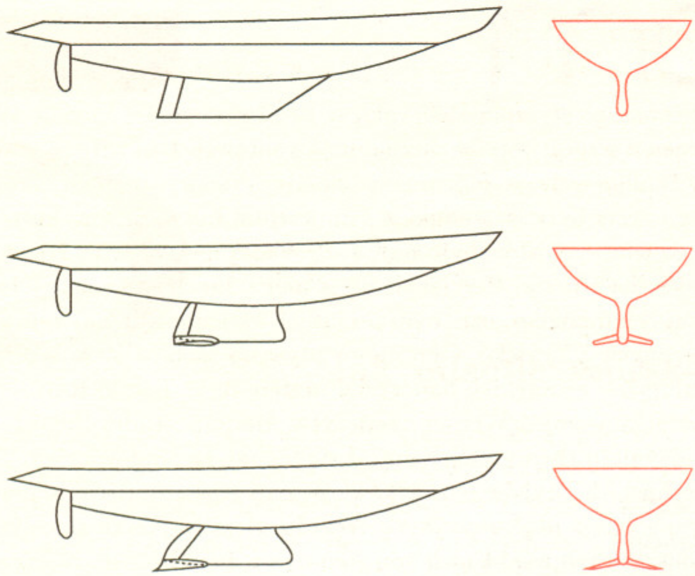
zarówno jacht krótki, lekki i o dużej powierzchni ożaglowania, jak i długi, ciężki, o małej powierzchni żagla. O tym, który z nich jest lepszy, decydują, oczywiście, obok wyszkolenia załogi, warunki meteorologiczne. Pierwsza konstrukcja jest lepsza na słabsze wiatry. Tak więc w zależności od rodzaju akwenu czy pory roku, raz jeden, a raz drugi typ konstrukcji będzie miał większe szanse na zwycięstwo. Co gorsza, przepisy regat wymagają dwóch niezależnych zawodów. W pierwszych, w których bierze udział wiele jachtów, wyłoniony zostaje „pretendent" do walki o tytuł. W kilka miesięcy później pretendent spotyka się z obrońcą pucharu w regatach jeden na jednego. Oczywiście, w tym czasie zazwyczaj ulegają zmianie warunki meteorologiczne i jacht, który z łatwością wygrał eliminacje, praktycznie może nie mieć szans na zwycięstwo we właściwych regatach. Taki układ ułatwia obronę. Wystarczy przygotować się tylko do typowych warunków meteo panujących w okresie „wielkiego finału". Biorąc to wszystko pod uwagę prace prowadzono wielotorowo. Podział zadań wyglądał następująco:

– opracowanie nowej konstrukcji jachtu,
– optymalizacja parametrów i założeń jednostki, dająca największe szanse na wygraną,
– zebranie danych meteorologicznych i ich opracowanie pod kątem ustalenia typowych warunków meteo panujących na akwenie w terminach regat.

Realizacja każdego z tych punktów byłaby niemożliwa bez wykorzystania najnowocześniejszych komputerów. W ostatnim przypadku zastosowanie jest oczywiste. W drugim działano poprzez teorię gier i programy obliczające poruszanie się modelowego jachtu w określonych warunkach. Z porównania z danymi uzyskanymi przy użyciu prototypów okazało się, że otrzymane z programów wyniki nie przewidują prawdziwych prędkości i innych parametrów ruchu, natomiast poprawnie oddają różnice między modelami. Pozwoliło to na właściwą modyfikację konstrukcji jachtów pod kątem zminimalizowania oporów: dynamicznego, indukowanego, tarcia itp. Pełna modyfikacja prowadząca do żądanych rezultatów była wynikiem złożenia drobnych poprawek, które możliwe były do oceny tylko dzięki modelowaniu komputerowemu, a więc wspomnianym programom.

Przy ostatecznej konstrukcji wykorzystano programy używane przy konstruowaniu samolotów – oczywiście, z pewnymi modyfikacjami. W obu przypadkach chodzi przecież o przepływ cieczy (gazu) wokół zadanych kształtów i minimalizację oporów przy utrzymaniu siły nośnej czy też bocznego oporu w przypadku jachtu. Po przebadaniu wielkiej liczby różnorodnych kształtów, szczególnie części zanurzonej kadłuba, okazało się, że najlepszy jest taki, jak wprowadzony w jachcie australijskim. W lotnictwie już od dawna było wiadomo, że minimalny opór przy zadanej sile nośnej otrzymuje się w układach wielopłaszczyznowych (samoloty wielopłatowe). W konstrukcji jachtu omawianej klasy wprowadzenie dwóch kilów jest niemożliwe. Ale przecież dodatkowa płaszczyzna może być prostopadła do głównej. Tak powstały „skrzydełka" przy kilu (patrz rysunek). Również w nowoczesnych konstrukcjach samolotów pasażerskich można zobaczyć takie „skrzydełka" prostopadłe do płatów i umieszczone na ich końcu. „Australijski" pomysł skrzydełek należało tylko zmodyfikować. Wyniki i porównanie ewolucji kształtu kilu przedstawiamy na rysunku.

Oczywiście, również „komputerowo" przeprowadzono optymalizację ożaglowania. Jacht ma wiele kompletów żagli, które wykorzystuje się w zależności od warunków meteorologicznych i kursu względem wiatru.



Konfiguracja kadłub-kil dla „12-metrowych" jachtów określona jest przepisami klasowymi, które pozwalają na dużą dowolność w konstrukcji kilu. Do 1983 roku standardem był kształt trapezoidalny (a). *Australia II* (b) zdobyła Puchar Ameryki w 1983 r. dzięki innowacyjnej konstrukcji kilu łączącej „skrzydełka" ze zmienionym kształtem kilu (odwrócony przedni skos). Kształt kilu jachtu *Stars & Stripes* (c) jeszcze bardziej podkreśla ten trend: silniejsze ścięcie czołowe, grubsza część najniższa oraz dłuższe i szerzej rozstawione „skrzydełka".

Wyższość techniki komputerowej nad klasycznym projektowaniem nie przejawia się tylko w możliwości uzyskania lepszych konstrukcji. Niebagatelne, a być może podstawowe znaczenie ma strona finansowa. Dla porównania: komputerowe przetestowanie modelu kosztuje około \$15, test na modelu w skali 1/3 kosztuje \$25 tys., badanie zaś prototypu \$0,5 mln do \$1 mln. W czasie prac badawczych wykonano 40 testów na modelach oraz przetestowano 5 modeli pełnowymiarowych. To daje skalę zaangażowanych środków finansowych i oszczędności możliwych dzięki modelowaniu komputerowemu.

Po kilku latach pracy (regaty odbywają się co 4 lata) powstała konstrukcja mająca sprostać zarówno umiarkowanym warunkom (wiatr i fala) eliminacji, jak i silnym wiatrom właściwych regat. W eliminacjach miał być użyty jacht z mniejszym balastem, czyli płycej zanurzony, a więc o krótszej linii wodnej i mniejszej powierzchni zmoczonej, ale o większej powierzchni ożaglowania. Następnie dzięki zwiększeniu balastu uzyskano jednostkę o dłuższej linii wodnej i zmniejszonym ożaglowaniu, czyli mogącą lepiej zachowywać się przy silnych wiatrach.

Opór tarcia daje 37% całkowitego oporu jachtu w czasie ruchu. Okazało się, że najlepiej sprawuje się czysta powierzchnia lakierowana i polerowana. Jednak dzięki specjalnym foliom firmy 3M o specjalnie ukształtowanych mikronowych rowkach udało się obniżyć i ten opór o 2% do 4%.

Jak pokazał ostateczny sprawdzian, założenia były słuszne i wykonanie prawidłowe. Jacht *Stars & Stripes* wygrał nie tylko eliminacje, ale i regaty główne i po krótkiej przerwie Puchar Ameryki powrócił w 1987 roku do Ameryki, a to dzięki fizyce, jak i komputerom. W tym roku (1995) trwa dalszy ciąg tej pasjonującej historii. W styczniu rozpoczęły się regaty eliminacyjne na wodach zachodniego wybrzeża Stanów Zjednoczonych.

Jeśli dwie jednakowe i napięte jednakową siłą struny mają stosunek długości 1:2, to równocześnie potrącone brzmią zgodnie, harmonijnie. Podobnie jest, gdy stosunek ten jest 2:3 czy 3:4. Nie jest tak jednak dla 4:5. Spostrzeżenie to (wymienione współbrzmienia dziś nazywamy oktawą, kwintą i kwartą) kazało ideologicznie nastrojonym pitagorejczykom zakrzyknąć: *wszystko jest liczbą*, co wykłada się tak, że harmonia realizuje się jako stosunek liczb naturalnych i tym jest pełniejsza, im liczby te są mniejsze. Wyciągnęli z tego pitagorejczycy mnóstwo poprawnych, lecz też i naciąganych wniosków, ale to już inna sprawa. Decydujące znaczenie ma fakt, że spotkało ich nieszczęście: jakiś zapalony badacz zaczął badać harmonię, jaką tworzą bok i przekątna kwadratu, i stwierdził, że – w sensie podanym przed chwilą – nie tworzą żadnej: ich stosunek nie jest stosunkiem żadnej pary liczb naturalnych.

Po ogromnym sukcesie – natychmiast niemal (odstęp był około pięćdziesięciu lat) całkowita klęska: któż bowiem ośmieliłby się odmówić kwadratowi harmonijnej budowy.

Klęska dzieli – pitagorejczycy (wówczas już ruch intelektualny obejmujący całą Grecję) podzielili się. Sposób podziału można było łatwo przewidzieć. Jedni uznali, że w tej klęsce kryje się mistyczna tajemnica niepoznawalności i należy wsłuchiwać się w naszeptywanie nadprzyrodzonego i poświęcić się medytacji odkrytej sprzeczności – nazwali się *akuzmatykami*, co tłumaczy się jako *nasłuchujący, uczniowie*. Drudzy byli zdania, że sprzeczność musi się dać rozwiązać siłą intelektu. Oni nazwali się *matematykami*, co po grecku znaczyło *uczeni, nauczyciele* – piękna, ale i zobowiązująca nazwa.

Matematycy zresztą też wyznawali dwie opcje. Jedni mówili *z tymi liczbami to pomyłka, liczby należy zostawić kupczykom – wszystko jest figurą*. Im zawdzięczamy np. wprowadzenie złotej proporcji podziału ciała w rzeźbie greckiej, jak też obecną na flagach większości państw gwiazdę pięcioramienną – symbol matematyków noszony potem przez stulecia jako medalik (taka gwiazda – pentagram – ma w sobie całe mnóstwo złotych proporcji).

Ale byli i drudzy. Ci twierdzili, że należy ulepszyć pojęcie liczby tak, aby przywrócić słuszność pierwotnemu zawołaniu pitagorejskiemu (nie kwestionując zresztą znaczenia proporcji figur).

Gdyby ta właśnie grupa nie zrealizowała swojego programu badawczego, najprawdopodobniej matematycy podzieliliby los akuzmatyków – zniknęliby po niespełna stuleciu. Program się jednak powiódł. Co więcej, zrealizowano go na dwa dobre, konkurencyjne sposoby.

Ich autorzy, zresztą „koledzy ze studiów" w Akademii Platońskiej, pokazali, jak określić liczby w ten sposób, by były to wszelkie możliwe wyniki dokonywania pomiarów. Nazywali się oni: Teajtetos i Eudoksos. Wymyślone przez nich liczby dziś nazywamy *liczbami rzeczywistymi*. Dokładniej – tak nazywamy liczby Eudoksosa, gdyż to jego pomysł został powszechnie przyjęty. Obie koncepcje liczb zostały podane pod osąd ówczesnego świata nauki około –370 roku. Koncepcja Eudoksosa wygrała prawdopodobnie dlatego, że uzyskał on więcej wyników w zakresie teorii miary, czyli nie tylko wymyślił liczby, ale też pokazał, jak z nich korzystać.

2050 lat później Izaak Newton w swoim dziele *Philosophiae naturalis principia mathematica*, gdzie wprowadza zasady dynamiki i dowodzi prawa powszechnego ciążenia, tak chwali Eudoksosa: *Najwspanialszym osiągnięciem nauk przyrodniczych jest możliwość używania do opisu najrozmaitszych wielkości jednych i tych samych liczb; pozwala to kojarzyć te wielkości ze sobą – bez sensu jest dzielenie drogi przez czas, ale głęboki sens ma dzielenie liczby odpowiadającej drodze przez liczbę wyrażającą czas: powstaje wtedy liczba dająca nam wyobrażenie o tempie ruchu.*

Idea, że wszystko jest liczbą, dała się obronić. I nie była to obrona pasywna – wymyślone zostało najpotężniejsze narzędzie przyrodoznawstwa, którego to narzędzia niejednokrotnie zazdroszczą nam humaniści (patrz np. *Antropologia strukturalna* Levi-Straussa). Wydaje się więc, że matematycy – przynajmniej w czasach przedaleksandryjskich – zasłużyli sobie na zarozumiałe miano, jakie sobie nadali.

Znaczenie słowa *matematyka* aż do połowy XIX wieku było bardziej greckie niż współczesne – obejmowało każdą dyscyplinę ścisłą. W 1800 roku do matematyki zaliczano obok tego, co dziś matematyką nazywamy, np. również mechanikę (dzięki pracom d'Alemberta, Lagrange'a czy Laplace'a). Reszta to była fizyka – tu mieściła się tak elektryczność, jak fizjologia czy botanika. Ale nadanie nazwom nauk ich dzisiejszego zakresu to już zupełnie inna historia.

Eugene Wigner

Pierwszego stycznia 1995 roku w Princeton zmarł Eugene Wigner, jeden z współtwórców mechaniki kwantowej. Urodził się w 1902 roku w Budapeszcie, w rodzinie żydowskiej. Niezwykle ważnym okresem jego życia były lata nauki w Gimnazjum Luterańskim, które wedle jego własnych słów było najlepszą szkołą nie tylko na Węgrzech, ale także na świecie. Przyjaźnił się w niej z Janosem (później Johnem) von Neumannem, uznanym po latach za jednego z najwybitniejszych uczonych XX wieku. Ogromny wpływ na osobowość obu młodych chłopców wywarł ich nauczyciel matematyki, László Rátz.
Za namową ojca Wigner ukończył w Berlinie studia chemii i inżynierii chemicznej, związał się jednak ze środowiskiem berlińskich fizyków teoretyków. W tym czasie w Berlinie przebywała spora grupa utalentowanych Węgrów utrzymujących ze sobą bliski kontakt; byli wśród nich von Neumann, Leo Szilard i Michael Polanyi. Dzięki temu ostatniemu Wigner uzyskał stanowisko asystenta przy Richardzie Beckerze, który zabrał go ze sobą do Getyngi, ówczesnej Mekki fizyki teoretycznej, gdzie ku swej radości Wigner znów spotkał się z von Neumannem. W tym czasie Wigner z ogromnym sukcesem wprowadził do fizyki metody oparte na teorii grup. Von Neumann już w połowie lat dwudziestych przewidział rozwój antysemityzmu w Niemczech i wybuch wojny. W 1929 roku uniwersytet w Princeton zaproponował mu stanowisko profesora. W rok później von Neumann ściągnął do Princeton swego przyjaciela z lat młodości. O ile von Neumann zaaklimatyzował się w Ameryce szybko i łatwo, to dla Wignera był to proces długi i bolesny, jednak wydarzenia w Europie (dojście Hitlera do władzy) zmusiły go do pozostania (jak się miało okazać, do końca życia) w USA. Lata 30. były okresem wytężonej pracy. Zajmował się w tym czasie fizyką ciała stałego, fizyką jądrową i teorią reprezentacji grupy Lorentza. Pionierskie prace w dziedzinie fizyki jądrowej (znów związane z zastosowaniem teorii grup) w 1963 roku zostały uhonorowane nagrodą Nobla. W przededniu drugiej wojny światowej Wigner nie pozostawał obojętny na wydarzenia polityczne. Gdy w 1939 roku odkryto rozszczepienie jądra atomowego, wraz z Fermim i Szilardem rozpoczął prace mające na celu zbudowanie pierwszego reaktora jądrowego, który osiągnął stan krytyczny w 1942 roku. W tym czasie Wigner wraz z niewielką grupą utalentowanych młodych fizyków pracował nad szczegółowymi planami konstrukcji wielkiego reaktora zbudowanego później w Hanford. Wiedza, którą zdobył w trakcie studiów chemicznych, okazała się bardzo przydatna. Przerażony użyciem broni jądrowej przeciw Japonii w 1945 roku podpisał protestacyjną petycję. Wraz z innymi fizykami ze swego zespołu w 1946 roku rozpoczął prace nad pokojowym wykorzystaniem reaktorów jądrowych (także powielających). Zorientowawszy się, że zagadnienie wykorzystania energii jądrowej zostało uwikłane w politykę, w 1947 roku powrócił do życia akademickiego. Zajmował się głównie fizyką teoretyczną i jądrową, służąc jednak jako doradca w problemach związanych z budową i zastosowaniem reaktorów jądrowych.

Krzysztof REJMER

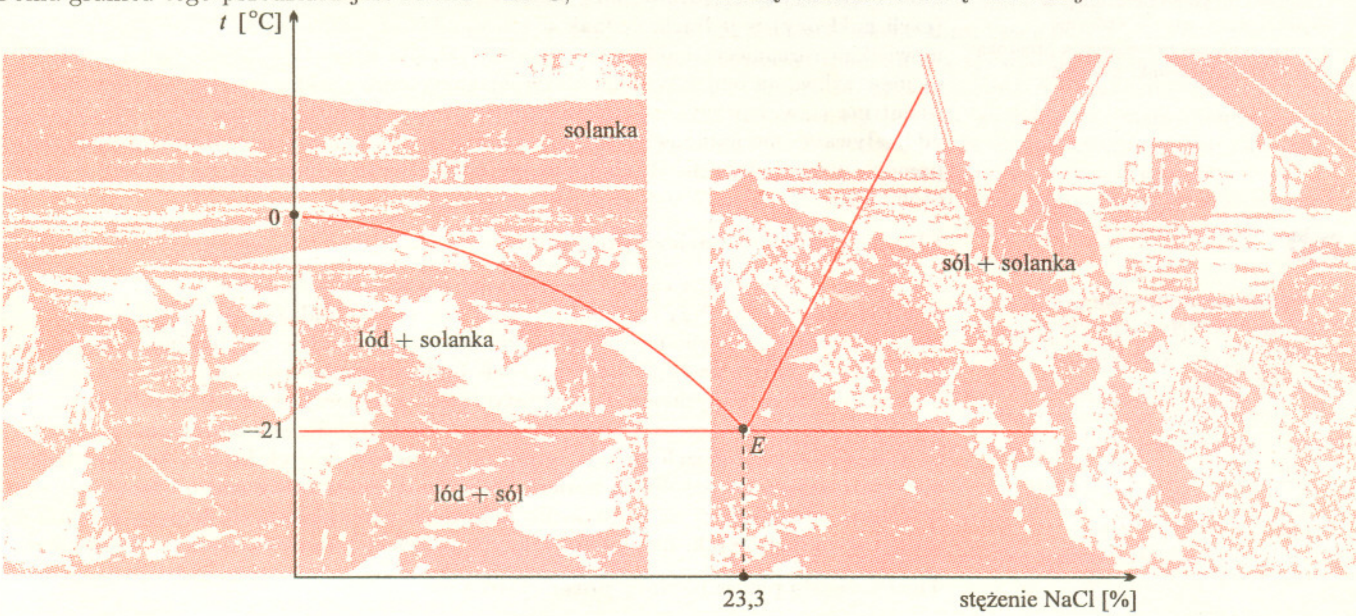
mała delta

Jak odsolić morską wodę?

Woda morska zawiera około 1,5% NaCl i z tego powodu nie nadaje się do picia. W krajach położonych nad Zatoką Perską, których zasoby słodkiej wody są ubogie, stosuje się bardzo kosztowne technologie odsalania wody morskiej. Najprostszy sposób polega na odparowaniu solanki, a następnie skropleniu uzyskanej pary wodnej. Drugi sposób polega na zamrożeniu wody morskiej, a następnie stopieniu uzyskanego w ten sposób lodu. Mimo ideowej prostoty oba sposoby są bardzo energochłonne, a zatem drogie.

Rysunek przedstawia diagram fazowy układu dwuskładnikowego $H_2O + NaCl$. Jeśli stężenie solanki nie przekracza 23,3%, to istnieje przedział temperatur, w których (dla danego stężenia) czysty chemicznie lód pozostaje w równowadze termodynamicznej z solanką. Dolna granica tego przedziału jest równa $-21°C$, górna zależy od stężenia roztworu, ale jest zawsze ujemna. Dla stężeń powyżej 23,3% solanka pozostaje w równowadze z solą, natomiast dla temperatur niższych od $-21°C$ występuje mieszanina lodu i soli. Proponuję Czytelnikom *Małej Delty*, by poeksperymentowali zamrażając w lodówce wodne roztwory soli kamiennej o różnych stężeniach.

Góry lodowe pływające po morzach w okolicach podbiegunowych są doskonałym rezerwuarem wody pitnej. Pamiętam, że kiedyś całkiem poważnie brano pod uwagę możliwość holowania ich do Zatoki Perskiej. Dostatecznie duża góra nie cała stopi się podczas transportu. Ostatecznie pomysł ten zarzucono i to nie z powodu protestów organizacji ekologicznych. Zapewne koszty jego realizacji okazały się większe niż koszty odsalania wody morskiej.



Wykres fazowy układu dwuskładnikowego $H_2O + NaCl$. Punkt E odpowiadający najniższej temperaturze, w której roztwór może być całkowicie ciekły, nosi nazwę punktu eutektycznego, a roztwór o najniższej temperaturze krzepnięcia nazywany jest eutektykiem.

Małą Deltę przygotował Krzysztof REJMER

O tunelowaniu w gwiazdach

Aleksander SCHWARZENBERG-CZERNY

Wydajność słonecznego źródła energii

Słońce musi mieć niebagatelny zapas energii. Wprawdzie na mocy wzoru Einsteina całkowity zapas energii Słońca, czyli jego tzw. energia spoczynkowa, wynosi $E = M_\odot c^2$, jednak jest to czysta teoria, bowiem jego wykorzystanie wymagałoby całkowitego zniszczenia materii słonecznej i jej zamiany na energię. W praktyce wszelkie znane i nie znane reakcje chemiczne nie są w stanie dostarczyć więcej niż 10^{-8} energii spoczynkowej, bo tyle tylko energii wiązania elektronów zawierają atomy. Energia cieplna gazu słonecznego jest jeszcze mniejsza. Wiek Słońca nie może być mniejszy niż wiek okrążającej je Ziemi. Geologowie określają wiek t najstarszych skał na Ziemi na prawie 4 miliardy lat ($t \approx 10^{17}$ s). Podstawą do określenia ich wieku jest porównanie w nich zawartości promieniotwórczych izotopów uranu i ich produktów rozpadu. Im więcej tych ostatnich, tym starsza jest skała. Jasność $L_\odot \approx 2 \times 10^{33}$ erg/s na pewno nie uległa znaczącej zmianie w ciągu ostatniego miliarda lat, gdyż byłoby to zabójcze dla rozwijającego się w tym czasie życia. W czasie t Słońce zdołało już zużyć $L_\odot t / M_\odot c^2 \approx 0{,}0002$ tej energii. Tak duży ułamek masy spoczynkowej może być zamieniony na energię w reakcjach atomowych, w których jest wyzwalana energia wiązania jąder.

Zamiana wodoru w hel

Uranu i podobnych ciężkich pierwiastków jest w Słońcu tak mało, że podobny do zachodzącego w reaktorach atomowych ich rozpad dałby jeszcze mniej energii niż reakcje chemiczne. Słońce, tak jak większość Wszechświata, składa się głównie z wodoru. Mało jest tam izotopów wodoru używanych w bombach termojądrowych, czyli deuteru i trytu, ale za to jest obfitość zwykłego wodoru, czyli po prostu protonów. Następne po protonie trwałe lekkie jądro to deuter. Jednak do powstania deuteru potrzebne są temperatury na tyle wysokie, że z łatwością zachodzą dalsze reakcje zamiany deuteru w hel. Efektem kilkuetapowej reakcji w Słońcu jest zatem zamiana protonów w hel. Ta reakcja termojądrowa jest też źródłem energii podtrzymującym świecenie Słońca.

Oddziaływania między cząstkami elementarnymi

Znamy cztery rodzaje podstawowych oddziaływań: grawitacyjne, elektromagnetyczne, słabe jądrowe i silne jądrowe. Grawitacja nie odgrywa roli w mikroświecie cząstek i więcej o niej nie wspomnimy. O elektromagnetyzmie będzie jeszcze mowa. Silne oddziaływanie jądrowe, niby super klej, trzyma razem protony i neutrony (czyli nukleony) w jądrach. Jednak siła tego oddziaływania spada do zera już po niewielkim rozsunięciu nukleonów, zupełnie jak siła kleju. Cząstki nie naładowane są niewrażliwe na oddziaływania elektromagnetyczne, a lekkie cząstki, jak elektrony i neutrina (tzw. leptony), są zupełnie niewrażliwe na oddziaływania silne. Wzajemne oddziaływanie nie naładowanych nukleonów i leptonów może się odbywać jedynie za pomocą tzw. sił słabych. Właśnie ten typ oddziaływań odpowiada za rozpady β jąder atomowych.

Elektrostatyczna bariera potencjału

Na dużych odległościach cząstki elementarne odczuwają jedynie siły elektromagnetyczne. Przy łączeniu się jąder siły te sprowadzają się do odpychania elektrostatycznego równoimiennych ładunków. Zanim dojdzie do zbliżenia reagujących jąder, tak by mogło nastąpić ich połączenie oddziaływaniem silnym, musi zostać pokonana bariera odpychania elektrostatycznego o typowej energii $V \approx 1000$ keV. Choć temperatura wnętrza Słońca, wynosząca około 10^7 K, jest olbrzymia, to dostępna w zderzeniach energia termicznych ruchów cząstek $kT \approx 1$ keV jest dalece niewystarczająca do pokonania bariery odpychania elektrostatycznego i bezpośredniego zetknięcia zderzających się cząstek. Do pokonania przez cząstki tej bariery, a zatem do reakcji termojądrowych, nie doszłoby, gdyby nie efekt kwantowy zwany tunelowaniem.

Tunelowanie przez barierę potencjału

Tak małe czastki jak jądra atomowe nie podlegają prawom fizyki klasycznej, lecz fizyce kwantowej. Na mocy jednej z zasad fizyki kwantowej, tzw. zasady nieoznaczoności Heisenberga, cząstkom kwantowym nie można ściśle przypisać jednej wartości energii E w jednym momencie t. Można jedynie powiedzieć, że w przedziale czasu Δt nieoznaczoność energii cząstki ΔE musi być taka, by spełniony był warunek

Rozwiązanie zadania M 750. Oznaczmy wynik n-tego rzutu przez X_n, a wynik całego eksperymentu przez X. Ponieważ $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$, więc $EX = EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_{10}$. Wykażemy, że EX_n nie zależy od wyboru liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ dla żadnego n, a zatem dobór tych liczb nie wpływa w ogóle na wartość EX. Istotnie, n-ty rzut wykonujemy z prawdopodobieństwem $(5/6)^{n-1}$ (tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy w żadnym z poprzednich rzutów nie zaszło zdarzenie $X_i = a_i$), zatem

$$EX_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{7}{2}.$$

Rozwiązanie zadania M 751. Tak. Połóżmy nasz prostokąt w dowolnym miejscu szachownicy w ten sposób, by jego boki tworzyły żądane kąty z krawędziami pól. Załóżmy, że ułożenie to nie spełnia warunków zadania, a więc na zakrytej powierzchni przeważa któryś z kolorów, powiedzmy, że biały. Przesuńmy prostokąt po szachownicy w kierunku równoległym do krawędzi jej pól o wektor równy długości boku pola szachownicy. Otrzymamy sytuację bliźniaczo podobną do wyjściowej, tyle że kolory pól „zamienią się miejscami". Na zakrytej powierzchni będzie teraz przeważał kolor czarny. Ponieważ jednak dokonaliśmy naszego przesunięcia w sposób ciągły, więc w którymś momencie podczas przesuwania prostokąt musiał spełniać warunki zadania.

Rozwiązanie zadania M 752. Zauważmy najpierw, że największy składnik sumy S, liczba $1995^{1995^{1995}}$, jest sześcianem liczby

$$a = 1995^{665 \cdot 1995^{1994}}.$$

Mamy też, oczywiście,

$$\sum_{n=1}^{1994} n^{n^n} < 1994 \cdot 1994^{1994^{1994}} = 1994^{1+1994^{1994}} < a.$$

Zatem

$$a^3 = 1995^{1995^{1995}} < S < a^3 + a < (a+1)^3.$$

Stąd już natychmiast wynika, że S nie jest sześcianem żadnej liczby naturalnej.
Uwaga. W podobny sposób można udowodnić, że liczba S nie jest piątą potęgą żadnej liczby naturalnej.

$\Delta E \Delta t \geq h$. Jedynie wartości średnie parametrów spełniają podstawowe prawa fizyki, jak np. prawo zachowania energii. Wynika z tego, że w dostatecznie krótkim czasie $\Delta t \approx h/V$ energia zderzających się jąder może różnić się od wartości średniej o więcej niż wynosi bariera potencjału $\Delta E \geq V$. Ponieważ energia ta może być zarówno większa jak i mniejsza, to prawdopodobieństwo uzyskania energii większej niż potrzeba do pokonania bariery elektrostatycznej V w czasie Δt nie może być większe niż $0{,}5 \approx \mathrm{e}^{-0{,}69}$. Z drugiej strony nie może być ono zbyt małe, bowiem średnia wartość amplitudy fluktuacji ΔE powinna być dostatecznie duża by spełniać zasadę nieoznaczoności. Z dokładnej teorii wynika, że prawdopodobieństwo to wynosi $P_{\Delta t} \approx \mathrm{e}^{-2\pi}$. Zauważmy też, że bariera potencjału wywołana odpychaniem ładunków jądrowych q jest dosyć rozległa; przy średniej wysokości V jej charakterystyczny promień wynosi $r \approx q^2/V$. Czas potrzebny do przebycia całej bariery wynosi zatem $\Delta T \approx r/v \approx q^2/Vv$, gdzie v jest średnią prędkością cząstki. Na ogół jest on znacznie dłuższy niż Δt. Aby więc cząstka mogła pokonać barierę potencjału, potrzeba by w $\Delta T/\Delta t$ kolejnych fluktuacjach energia cząstki odchylała się od wartości średniej o co najmniej V. Prawdopodobieństwo serii takich zdarzeń, czyli prawdopodobieństwo tunelowania całej bariery, jest iloczynem prawdopodobieństw, a więc wynosi $P_{\Delta T} \approx (P_{\Delta T})^{(\Delta T/\Delta t)} \approx \mathrm{e}^{-2\pi q^2/hv}$. Wyrażone w zależności od energii kinetycznej $E = mv^2/2$ prawdopodobieństwo to wynosi $P_{\Delta t} \approx \mathrm{e}^{-\sqrt{E_G/E}}$, gdzie energia $E_G = 2(\pi q^2/hc)^2 mc^2$ na cześć twórcy teorii jest zwana energią Gamowa, a tzw. masa zredukowana cząstek $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ uwzględnia przeniesienie układu odniesienia do ich środka masy.

Szybkość tunelowania

Liczba zachodzących reakcji będzie zależała od iloczynu prawdopodobieństwa tunelowania i liczby cząstek o odpowiedniej energii, $R \approx P_{\Delta T}\Delta N$. Z kinetycznej teorii gazów wiadomo, że składowe prędkości cząstek mają rozkład normalny, czyli Gaussa. Odpowiada to rozkładowi Boltzmanna kwadratów prędkości, czyli energii kinetycznej E. Wtedy liczba cząstek ΔN o energii zawartej w przedziale ΔE wokół wartości E jest proporcjonalna przede wszystkim do $\mathrm{e}^{-E/kT}$; inne czynniki zależne od E pomijamy tu jako znacznie wolniej zmienne wraz z E od czynnika wykładniczego. Największy wkład do liczby reakcji będą dawały zderzenia o tej energii, dla której iloczyn prawdopodobieństwa tunelowania i liczby cząstek $R \sim \mathrm{e}^{-\sqrt{E_G/E}-E/kT}$ jest największy. Należy więc znaleźć maksimum wyrażenia w wykładniku poprzez szukanie miejsca, gdzie pochodna wykładnika się zeruje: $\mathrm{d}\ln R/\mathrm{d}E = 0$. Maksymalna wartość osiągana jest przy energii $W \approx (kT)^{2/3}E_G^{1/3}$. O ile cząstki o energii kT nie mają szans na pokonanie bariery, a cząstek o energii V praktycznie nie ma, to przy pośredniej energii W zarówno prawdopodobieństwo tunelowania, jak i liczba zderzeń są znaczące. Niestety, maksymalna wartość R jest nadal bardzo mała: $R_{\max} \approx \mathrm{e}^{-20}$. Tak duża bezwzględna wartość wykładnika ma poważne konsekwencje. Po pierwsze, niewielki, powiedzmy jednoprocentowy, wzrost temperatury spowoduje zmianę wykładnika też mniej więcej o 1%, czyli o 0,2, czemu odpowiada wzrost R i liczby reakcji o $\mathrm{e}^{0{,}2}$, czyli o około 20%. Oznacza to, że liczba reakcji jest bardzo czuła na zmiany temperatury, mianowicie zależy od niej jak T^{20}. Po drugie, E_G zależy od kwadratu ładunku, jeśli więc ładunek zderzających się cząstek będzie większy, to reakcji z udziałem tych cząstek będzie zachodzić znacznie mniej, bo wykładnik będzie duży. Po trzecie, choć w całej masie Słońca reakcji zachodzi dużo, to w małej masie w laboratorium reakcje będą tak niezwykle rzadkie, że ich pomiar jest niemożliwy.

W normalnym gazie, takim jak w Słońcu, elektrony trzymają się z dala od jąder atomowych. Istnieją jednak gwiazdy, w których wnętrzach materia jest tak ściśnięta, że elektrony chcąc nie chcąc muszą przebywać tak blisko reagujących jąder, że ich oddziaływanie należy uwzględnić. Obecność ujemnych elektronów w pobliżu dodatnich jąder neutralizuje nieco ich odpychanie elektrostatyczne, ułatwiając tunelowanie. Ten efekt, zwany ekranowaniem, prowadzi do przyspieszenia reakcji w gwiazdach o dużych gęstościach w centrum.

Zakończenie

Przeniknięcie przez barierę potencjału umożliwia zajście reakcji, ale wcale jeszcze tego nie gwarantuje. Istotne są tu jeszcze siły oddziaływań wewnątrzjądrowych. To już jest temat na inną okazję, natomiast z powyższych rozważań wynika dobitnie, że każdy z docierających do nas promieni słonecznych został wyprodukowany dzięki naruszeniu klasycznej zasady zachowania energii o czynnik – bagatelka – 20 razy. Oznacza to nie tyle, że zasadę zachowania energii należy wyrzucić na śmietnik, ale że w opisującej cząstki fizyce kwantowej zasadzie tej podlegają – powtarzamy – jedynie wartości średnie (a nie chwilowe) energii.

Rozwiązanie zadania F 413. Jedyne siły działające na oba punkty to siły reakcji więzów, które nie zmieniają całkowitej energii układu. Różniczkując względem czasu równanie

$$x^2 + y^2 = A^2$$

otrzymujemy

$$\dot{y} = -\frac{\dot{x}x}{y} = -\frac{\dot{x}x}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

Całkowita energia jest równa

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}mA^2\frac{\dot{x}^2}{A^2 - x^2} = \frac{1}{2}mu^2,$$

gdzie u jest prędkością punktu przechodzącego przez początek układu współrzędnych (drugi w tym czasie spoczywa). Różniczkując ostatnie równanie względem czasu dostajemy

$$\ddot{x} + \left(\frac{u}{A}\right)^2 x = 0.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego o częstości drgań

$$\omega = \frac{u}{A}.$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że A jest amplitudą drgań. Ponieważ u możemy wybrać dowolnie, częstość drgań paradoksalnie zależy od amplitudy, inaczej niż dla „zwykłego" oscylatora harmonicznego.

Rozwiązanie zadania F 414. Oznaczmy przez S pole powierzchni okładek, przez x odległość między nimi. Siła przyciągania między okładkami jest równa

$$F = \frac{1}{2}QE,$$

gdzie Q jest ładunkiem na okładce, E – natężeniem pola. Zgodnie z prawem Gaussa $Q = \varepsilon_0 ES$, a zatem

$$F = \frac{1}{2}\varepsilon_0 SE^2.$$

Natężenie pola jest równe $E = U/x$, czyli

$$(*) \qquad F = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2x^2}.$$

Siła przyciągania elektrostatycznego jest równoważona przez siłę parcia gazu $F = pS$. Dostajemy więc

$$pV^2 = \frac{\varepsilon_0 U^2 S^2}{2} = \mathrm{const}.$$

Z pierwszej zasady termodynamiki dla jednego mola gazu mamy

$$\mathrm{d}Q = c_V\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V.$$

Korzystając z równania przemiany i równania Clapeyrona dostajemy

$$p\,\mathrm{d}V = -\mathrm{R}\,\mathrm{d}T,$$

czyli

$$\mathrm{d}Q = (c_V - \mathrm{R})\,\mathrm{d}T.$$

Ciepło przemiany wynosi więc $c_V - \mathrm{R} > 0$.

Uwaga. Równanie $(*)$ można otrzymać także różniczkując względem x energię pola elektrostatycznego kondensatora.

Konsekwencje prostej uwagi i dwumianu Newtona

Józef BANAŚ

W wielu sytuacjach zdarza się, że prosta, a nawet trywialna obserwacja pociąga za sobą daleko idące konsekwencje, umożliwiając znaczne uproszczenie dowodów i skomplikowanych rozumowań.

Niżej chciałbym przedstawić przykład ilustrujący wypowiedziany pogląd.

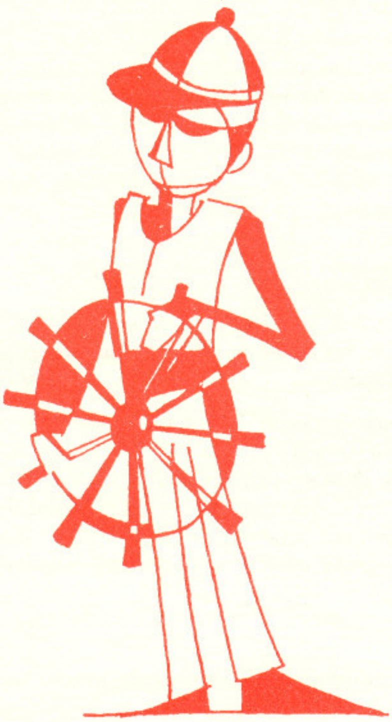
Otóż, w matematyce bardzo ważne są różnego typu równości i tożsamości pozwalające wyrazić skomplikowane wyrażenia przez wyrażenia znacznie prostsze. Przykładami takich równości mogą być wypisane niżej wzory zaczerpnięte ze znakomitego zbioru zadań [1].

1. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b oraz dla dowolnego naturalnego n zachodzi równość
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k a^k b^{n-k} = na(a+b)^{n-1}.$$

2. Dla dowolnej liczby naturalnej n jest
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}.$$

3. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b oraz dla dowolnego naturalnego $n > 1$ zachodzi równość
$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) a^k b^{n-k} = n(n-1)a^2(a+b)^{n-2}.$$

4. Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ jest
$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) = n(n-1)2^{n-2}.$$



Autorzy książki [1] przeprowadzają dowody powyższych równości kilkoma sposobami. I tak np. dowody przeprowadzone metodą indukcji matematycznej są bardzo długie i zawiłe rachunkowo. Można też, co zrobiono w [1], użyć metod rachunku różniczkowego do dowodów równości 1 i 3, natomiast równości 2 i 4 wywnioskować jako szczególne przypadki 1 i 3 dla $a = b = 1$. Sposób ten, choć krótki, nie jest jednak naturalny, ponieważ w sytuacji, gdybyśmy chcieli „wystartować” np. tylko od równości 2, bardzo trudno byłoby domyślić się, że jest to szczególny przypadek jakiejś ogólniejszej tożsamości, której dowód jest prosty.

Okazuje się, że dowody wszystkich wypisanych wyżej równości można przeprowadzić bardzo prosto i naturalnie wychodząc od łatwego do wykazania wzoru

(1) $$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},$$

słusznego dla wszystkich takich liczb naturalnych n, k, że $k \leq n$. Potrzebny nam będzie również dobrze znany z nauki szkolnej **wzór dwumianowy Newtona**:

(2) $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

który jest prawdziwy dla dowolnych rzeczywistych a, b oraz dowolnego całkowitego, nieujemnego n. Warto również przypomnieć dwa interesujące i użyteczne przypadki szczególne wzoru (2). Otóż, kładąc w nim kolejno $a = b = 1$ oraz $a = -1$, $b = 1$, otrzymujemy

(3) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} = 0 .$$

Przejdźmy teraz do zapowiedzianych wcześniej dowodów. Otóż, żeby udowodnić równość (1), skorzystajmy ze wzoru (1) i trochę porachujmy:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k a^k b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} k a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} a a^{k-1} b^{(n-1)-(k-1)} = na \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^{k-1} b^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= na \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} a^p b^{(n-1)-p} .$$

Korzystając teraz ze wzoru (2) (gdzie n zastępujemy przez $n-1$) otrzymujemy równość 1.

Żeby udowodnić równość 2 (bez odwoływania się do równości 1) postępujemy zupełnie analogicznie: korzystamy z równości (1) i ze wzoru (3). Mamy:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} k = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} =$$

$$= n \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} = n 2^{n-1} .$$

Zauważmy dalej, że tą samą metodą „pójdzie” dowód równości 3. Wystarczy nadal posługiwać się tylko trywialnym wzorem (1) (dwukrotnie) i dwumianem Newtona (2). W szczegółach wygląda to następująco:

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) a^k b^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} k(k-1) a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} n \binom{n-1}{k-1} (k-1) a a^{k-1} b^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= na \sum_{p=1}^{n-1} p \binom{n-1}{p} a^p b^{(n-1)-p} = na \sum_{p=1}^{n-1} p \frac{n-1}{p} \binom{n-2}{p-1} a a^{p-1} b^{(n-2)-(p-1)} =$$

$$= n(n-1)a^2 \sum_{q=0}^{n-2} \binom{n-2}{q} a^q b^{(n-2)-q} = n(n-1)a^2(a+b)^{n-2} .$$

Czytelnik bez trudu udowodni już teraz równość 4, nawet jeżeli nie zauważy, że jest to szczególny przypadek równości 3.

Proponujemy również Czytelnikowi przeprowadzić dowody wypisanych poniżej równości. Wszędzie radzimy korzystać z prostej uwagi wyrażonej wzorem (1) oraz ze wzorów (2), (3) i (4).

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} , \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k = 0 ,$$

$$\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k(k-1) = 0 ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 a^k b^{n-k} = nb(a+nb)(a+b)^{n-2} ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 = n(n+1)2^{n-2} , \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^2 = 0 .$$

Literatura

[1] L. Jeśmanowicz i J. Łoś, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1975.

Ankiety ciąg dalszy

Wywiad z profesorem *Andrzejem BIAŁYNICKIM-BIRULĄ* (Instytut Matematyki UW) jest kontynuacją dyskusji z numeru 250 *Delty* (3/1995).

Przypominamy pytania przedstawione przez redakcję z prośbą o ustosunkowanie się do problematyki w nich zawartej.

1. Jaką korzyść może odnieść ktoś zajmujący się np. hodowlą karpi lub malarstwem abstrakcyjnym ze znajomości małego twierdzenia Fermata, reguły Oersteda czy stałej Hubble'a?

2. Skoro byle kalkulator liczy szybciej i lepiej od człowieka, to po co uczyć człowieka liczenia?

3. Nie ma na świecie gazu doskonałego, próżni, prostokąta ani liczby e itd. Czemu więc z takim uporem o takich właśnie obiektach idealnych mówią wszystkie nauki ścisłe?

4. Fizyka – znaczy to po grecku *rzeczy widzialne, rzeczy naturalne, zjawiska przyrody*. Czemu nazwa ta uznawana jest dziś za trafną dla nauki o obiektach będących wytworami ludzkiego umysłu, jakimi są w szczególności cząstki elementarne i pola?

5. O lotach kosmicznych marzyli przed laty wszyscy. Dlaczego, gdy pierwsi ludzie wylądowali na Księżycu, sprawy podróży pozaziemskich przestały – praktycznie wszystkich – obchodzić?

6. Dlaczego *w dobrym tonie* jest chwalić się szkolnymi niepowodzeniami w nauce matematyki czy fizyki, a nie wypada przyznawać się do niewydolności w humanistyce?

7. Czemu zawdzięcza w chwili obecnej paranauka swoją przewagę nad nauką?

Prof. Andrzej Białynicki-Birula: Na wstępie chciałem zauważyć, iż pytania Waszej ankiety są raczej prowokacyjne niż głębokie.

Paweł Strzelecki: No cóż, być może należy najpierw wyobrazić sobie stan ducha tego, kto te pytania układał, a dopiero potem udzielać odpowiedzi...

A.B-B.: W takim razie zacznijmy odpowiadać po kolei. Odpowiedź na pierwsze pytanie jest prosta: żadnej. Może przydałby mu się wzór na obliczanie pola prostokąta, gdyby chciał znać powierzchnię swego stawu. Ale roli matematyki nie można sprowadzać do znajomości wzorów i faktów. Sądzę, że ważna jest szkoła myślenia, którą daje matematyka każdemu, pewna dyscyplina formułowania i wypowiadania poglądów i argumentów. Brak takiej dyscypliny może bardzo w życiu przeszkadzać. Weźmy jako przykład naszego Prezydenta. Z powodu niejasności swych wypowiedzi Wałęsa z wieloma osobami nie nawiązuje kontaktu; dzieje się tak być może dlatego, że w młodości nie miał dobrego nauczyciela matematyki i nie przeszedł przez odpowiednią szkołę ścisłego myślenia.

P.S.: Czy nie jest to przypadkiem nasza, matematyków, wina?

A.B-B.: W tym konkretnym przypadku może (choć nie musi) być to kwestia nauczyciela lub wpływu środowiska. Wśród polityków można wymienić również wzorce pozytywne, lokujące się na przeciwnym krańcu skali ścisłości i klarowności wypowiedzi – na przykład Balcerowicza czy Brzezińskiego. Rad bym myśleć, choć może to zbytni optymizm, że do takiego ukształtowania ich osobowości przyczynił się dobry nauczyciel matematyki.

Przejdźmy do następnego pytania. Skłonny jestem zgodzić się z poglądem, że za pomocą kalkulatora liczy się szybciej niż w pamięci. Moim zdaniem najważniejszy cel nauki liczenia to danie *wyobrażenia o liczbach*, takiej świadomości, że dziesięć razy piętnaście to więcej niż sto, ale mniej niż dwieście.

P.S.: Podobno współczesne nastolatki amerykańskie nie są w stanie oszacować wartości iloczynu dwóch liczb dwucyfrowych bez pomocy kalkulatora.

A.B-B.: To jest smutny przykład, jak człowiek może stać się niewolnikiem rzeczy. Taki nastolatek, gdy mu się kalkulator zepsuje, jest całkowicie bezradny. Tymczasem prawie każdy ma w życiu jakiś kontakt z liczbami, np. podczas robienia zakupów w sklepie: powinien wtedy przewidzieć, ile mniej więcej zażąda kasjerka. Nie jestem entuzjastą słupków, ale nie jestem też ich wrogiem, jeśli dawkowane są w rozsądnej ilości. W szkole uczono mnie dzielenia pisemnego, uczono również wyciągania pierwiastków kwadratowych i trzeciego stopnia ... co jest już przesadą.

P.S.: Naprawdę?

A.B-B.: Tak; robił to łacinnik uczący również matematyki (nawiasem mówiąc, nie wiem, czy sam rozumiał, dlaczego odpowiednie algorytmy działają). To wyciąganie pierwiastków w szkole jest przejawem magii liczenia obecnej w dawnej matematyce szkolnej.

Odpowiedź na kolejne, trzecie pytanie też jest banalna. Te idealne modele: gaz doskonały, prostokąt, próżnia, całkiem dobrze przybliżają ich realne odpowiedniki (w każdym razie pod pewnymi względami). A ze względu na swą prostotę i logiczną strukturę modele te mogą być poddawane intelektualnym eksperymentom i badaniom. Wykonywane na nich w myśli doświadczenia są łatwiejsze, niż doświadczenia wykonywane w rzeczywistości.

Z treści pytania wynika, że pytający uważa, iż tych idealnych modeli na świecie nie ma. To zależy od tego, do jakiego świata się odwołujemy, w jakim świecie tych modeli szukamy. Tę uwagę traktuję jako żart, ale może nie całkiem...

P.S.: Przejdźmy do kolejnego pytania – o zanik fascynacji lotami kosmicznymi.

A.B-B.: No właśnie, czy to nie przesada z tą fascynacją? Ja nie pamiętam wcale żadnej powszechnej fascynacji marzeniami o lotach kosmicznych.

P.S.: A ogromna popularność powieści Stanisława Lema?

A.B-B.: Cóż, moje pokolenie wychowało się raczej na książkach Verne'a niż Lema. Ale może rzeczywiście coś w tym jest...

Może kiedyś w sferze pozaziemskiej było więcej miejsca na wyobraźnię. Osiemdziesiąt lat temu ludzie czytywali powieści Jerzego Żuławskiego z wypiekami na twarzy – dziś Księżyc odarty jest z wszelkiej tajemniczości, a Żuławski trąci myszką. Nieznanego trzeba szukać znacznie dalej. Poza tym, Einstein uświadomił nam ludzkie i materialne ograniczenia: nie da się podróżować szybciej niż z prędkością światła. Wreszcie, niedalekie podróże kosmiczne stały się w pewnym sensie codziennością; dlatego doniesienia o nich są prozaiczne: kwestia wody, żywności, wielotygodniowej mrówczej pracy w stacjach orbitalnych, radzenia sobie z ludzką fizjologią.

Do zmniejszenia tej fascynacji przykładają się też problemy bardziej ziemskie: nasze zasoby nie są nieograniczone. Wydaje się, że w takiej sytuacji np. ochronę środowiska należy postawić przed podbojem przestrzeni kosmicznej.

Nie znaczy to wcale, że znika z naszego życia fascynacja. Fascynują po prostu inne rzeczy, np. komputery czy inżynieria genetyczna.

P.S.: A co z chwaleniem się szkolnymi niepowodzeniami w dziedzinie nauk ścisłych? Każdy z nas mógłby przecież podać wiele przykładów tego zjawiska. Skąd się to bierze?

A.B-B.: No tak, znam rektorów wyższych uczelni, którzy chętnie przyznają się do kłopotów ze szkolną matematyką.

Łatwiej jest może zbagatelizować swe kiepskie postępy w matematyce czy fizyce, niż przyznać się do porażki. Porażki, której nie da się często usprawiedliwiać niechęcią czy niesprawiedliwością nauczyciela, bo kryteria ocen w naukach ścisłych trudno jest podważać. Pozostaje więc udawanie, że nie traktuje się tych przedmiotów poważnie, a potem tak to wchodzi w krew, że zapomina się, iż to było tylko udawanie.

P.S.: Zapytajmy ponownie o to samo: czy w takim stanie rzeczy nie ma naszej, matematyków, winy?

A.B-B.: Istotnie. Nudne, nieciekawe lekcje wywołują u uczniów odruch obronny i lekceważącą postawę, która poprzez swą powszechność wchodzi do obiegowej tradycji. Czy jednak jest to wyłącznie nasza wina?

P.S.: A czy jest to nasza specyficznie polska specjalność?

A.B-B.: Nie. W Rosji, gdzie poziom matematyki szkolnej jest stosunkowo wysoki, też można spotkać osoby opowiadające o swych kłopotach z matematyką. W innych krajach jest podobnie.

P.S.: A czy to się może zmienić?

A.B-B.: Myślę, że w Polsce to się już zmienia, za sprawą powstającego rynku pracy i presji ekonomicznej. Nikt rozsądny nie pochwali się potencjalnemu pracodawcy kłopotami z tabliczką mnożenia czy słabiutką trójczyną z matematyki. Wielu pracodawców zwraca uwagę na osiągnięcia z przedmiotów ścisłych w szkole i na studiach, uznając je za dobrą prognozę tego, czy przyszły pracownik będzie umiał logicznie myśleć oraz samodzielnie i skutecznie rozwiązywać problemy. Czysto humanistyczne wykształcenie, nieuzupełnione umiejętnościami matematycznymi, nie jest najlepszym z atutów kogoś, kto szuka pracy.

P.S.: Zostało nam ostatnie pytanie ankiety, o przyczynę przewag paranauki.

A.B-B.: Nauka jest narzędziem potężnym. W dużej mierze jej właśnie ludzkość zawdzięcza zdobycze cywilizacji: komputery, prognozy pogody, telewizję, i całą masę innych rzeczy.

Z drugiej strony, uczeni mówią o granicach ludzkiego poznania. Ludzie nie chcą tego zaakceptować. W ten sposób pojawia się miejsce dla paranauki, która daje odpowiedzi na niektóre nierozstrzygnięte pytania.

W paranauce może przy tym niekiedy *coś* być, choćby wskazanie na pewne problemy. Może też się zdarzyć, że metody i teorie uznawane przez pewien czas za paranaukowe zdobywają sobie stopniowo status rzetelnej wiedzy. By się o tym przekonać, wystarczy spojrzeć na ewolucję poglądów środowisk lekarskich na akupunkturę.

P.S.: Bardzo Panu Profesorowi dziękuję za rozmowę.

wypowiedź *Krzysztofa CIESIELSKIEGO*, doktoranta z UMCS.

Kilka lat temu, gdy chodziłem jeszcze do szkoły średniej, byłem stałym i wiernym Czytelnikiem *Delty*. Okres studiów przyniósł pewne rozluźnienie moich kontaktów z tym interesującym miesięcznikiem. Obecnie skończyłem już studia i jestem słuchaczem pierwszego roku Studium Doktoranckiego Fizyki UMCS. Jako osoba ściśle związana ze współczesną nauką, a szczególnie z fizyką, postanowiłem odpowiedzieć na Państwa zaproszenie do dyskusji i podzielić się swoimi refleksjami związanymi z poruszonymi przez Państwa problemami.

1. Na pytanie pierwsze nasuwa mi się tylko jedna odpowiedź: znajomość wymienionych w tym punkcie wielkości i zjawisk nie jest do niczego potrzebna ani hodowcy karpi, ani malarzowi abstrakcjoniście. Nawet ja, który pretenduję do miana fizyka, nie znam dobrze małego twierdzenia Fermata, regułę Oersteda znam na poziomie umożliwiającym mi objaśnienie jej studentom, a o stałej Hubble'a nie mam zielonego pojęcia. I nie wstydzę się do tego przyznać, gdyż są to pojęcia specjalistyczne, ściśle związane z określonymi kierunkami fizyki i matematyki. Podobnie nie mam pojęcia o hodowli karpi i o technikach w malarstwie abstrakcyjnym. Uważam, że każdy zawód ma swój specyficzny zasób wiedzy specjalistycznej, a stopień zaawansowania dzisiejszej wiedzy uniemożliwia biegłe opanowanie kilku dziedzin nie związanych ze sobą. Ważne jest, by specjalista-fizyk szanował specjalistę-hodowcę karpi i vice versa.

2. Pytanie drugie prosi się o odpowiedź: trzeba uczyć człowieka liczenia, bo może zdarzyć się sytuacja, że trzeba będzie coś obliczyć, a akurat pod ręką nie będzie kalkulatora. A poza tym wcale nie uważam, jakoby kalkulator liczył lepiej od człowieka. Szybciej – owszem, ale nie lepiej. Pewien znajomy informatyk z Politechniki Gdańskiej nazwał kiedyś komputer „szybkim idiotą" i nie sposób odmówić mu racji.

3. Odpowiedź na pytanie trzecie jest trywialna: łatwiej przecież obliczyć całkę dla kuli i dodać do niej pewien czynnik uwzględniający odchylenie rzeczywistego kształtu od ideału, niż od początku do końca, wychodząc z definicji, obliczać tę samą całkę dla tworu, którego nawet nie możemy zapisać w postaci funkcji. A jak długo opis przybliżony daje nam dobry obraz otaczającego nas świata, tak długo możemy z niego korzystać.

4. Pytanie czwarte zdziwiło mnie bardzo. W Komitecie Redakcyjnym i kolegium redagującym *Deltę* tylu znanych fizyków, a tu taki kwiatek. Od kiedy to pola i cząstki są wymysłami ludzkiego umysłu? Zawodowo zajmuję się anihilacją pozytonów i muszę stwierdzić, że są to cząstki jak najbardziej realne. Mają masę, ładunek, oddziałują z otoczeniem. Po prostu są. Są też naturalne i widzialne. A mówiąc „widzialne" mam na myśli obserwowalne. Oko ludzkie jest w stanie zobaczyć tylko niewielki wycinek otaczającego nas świata, do dokładniejszej obserwacji służą nam lunety, radioteleskopy, mikroskopy czy inne detektory. To, co widzimy za ich pomocą, jest równie realne, jak to, co widzimy gołym okiem, może nawet realniejsze, bo oko ludzkie łatwo można oszukać.

5. Myślę, że o lotach kosmicznych ludzie marzą w dalszym ciągu. Brak im tylko dla tych marzeń pożywki. Po początkowym okresie sukcesów, takich jak pierwszy lot w Kosmos i lądowanie na Księżycu, pojawił się okres stagnacji. Trwa regularna eksploracja okolic naszej planety, a ta nie jest już tak efektowna. Kolejnym spektakularnym wydarzeniem będzie lądowanie na Marsie lub Wenus, a zanim to nastąpi trwać będzie stan zmniejszonego zainteresowania astronautyką. Podobnie było chociażby z lotami przez Atlantyk. Ile było wrzawy, gdy Lindberg jako jeden z pierwszych przeleciał samolotem przez ocean – te wywiady, artykuły, nagrody. A teraz? Dziennie podobny lot odbywany jest w obie strony po kilkanaście, jeśli nie kilkadziesiąt razy i nikt, poza pasażerami i obsługą, się tym nie interesuje. Czasami jeszcze podobne loty wzbudzają zainteresowanie terrorystów, ale to już zupełnie inna historia.

A wracając do lotów kosmicznych, to nawet teraz interesuje się nimi całkiem spora grupa ludzi: naukowcy i technicy od aeronautyki i astrofizyki, kosmonauci, technolodzy, a przede wszystkim politycy, którzy decydują o przyznawaniu funduszy.

6. Docieramy do problemu, jak mi się zdaje, najistotniejszego. Moim zdaniem, na cywilizację składa się zarówno wiedza, jak i kultura. Może nawet w większym stopniu ta druga. Cywilizację bez kultury, opartą tylko na wiedzy, przedstawił George Orwell w *Wojnie światów*. Nie taką cywilizację chcemy chyba tworzyć. Fizyka, matematyka czy chemia to dziedziny wiedzy i to bardzo wyspecjalizowane. Ich biegła znajomość niezbędna jest tylko wąskiej grupie fachowców. Inna sprawa to brak szacunku okazywany naukom ścisłym. Być może jest to wina systemu oświaty, w którym nauki te „wykładane" są w zbyt szerokim zakresie, nie tylko niepotrzebnym, ale wręcz niemożliwym do opanowania przez przeciętnego człowieka, który przez pogardę dla „jajogłowych" odreagowuje własne, szkolne niepowodzenia. Co do nauk tzw. humanistycznych, to tutaj sprawy mają się zupełnie inaczej. Można doskonale sobie radzić nie znając np. reguły Oersteda czy małego twierdzenia Fermata, a nawet być uznawanym za fachowca, np. być znakomitym lekarzem. Czy można jednak uchodzić za człowieka w pełnym tego słowa znaczeniu, gdy nie zna się własnych korzeni, jakie stanowi historia danego kraju, regionu czy miasta? A cóż to za człowiek, który nie potrafi posługiwać się biegle własnym językiem ojczystym? I nie zgodzę się tu z Panem Ryszardem Tadeusiewiczem, który twierdzi, że to matematycy, fizycy i technicy są prawdziwymi twórcami współczesnej cywilizacji. To przecież fizycy, matematycy i technicy dali światu bombę atomową, a tylko ludziom takim jak Chopin, Picasso czy Eco, którzy rozwinęli w nas wrażliwość i poczucie zamiłowania do dobra i wstrętu do zła, zawdzięczamy, że ludzkość jeszcze istnieje, a nie została unicestwiona w nuklearnej hekatombie. Na zakończenie mojej wypowiedzi na temat oznaczony numerem szóstym pozwolę sobie przytoczyć krótki wiersz Kazimierza Przerwy-Tetmajera i zadedykować go Panu Ryszardowi Tadeusiewiczowi:

> Nie rzucajcie się z krzykiem na piękno,
> Nie żądajcie, by czar w życiu znikł.
> Równie świętą jak i nieśmiertelną
> Wenus z Milo, jak Spartaka krzyk.

7. Paranauka jest o wiele prostsza i przystępniejsza dla przeciętnego człowieka niż prawdziwa nauka. Ludzie chcą wiedzieć możliwie dużo o świecie, o życiu, o samym sensie istnienia. Tymczasem rzetelna nauka jest trudna, a przez to elitarna. Wykorzystują to różnego rodzaju „prorocy", którzy dają naiwnym ludziom namiastkę wiedzy. Chociaż może to zbyt mocne słowa. Paranauka przypomina trochę ludową medycynę. Jest to swojego rodzaju błądzenie po omacku w poszukiwaniu prawdy. A nie jest też wykluczone, że niektóre z pojęć czy zjawisk paranauki są rzeczywistymi, a nie poznanymi jeszcze prawami przyrody. Jak wielkim cudem w czasach Mojżesza była zamiana wody w krew, a dziś każdy nastolatek wie, że wystarczy do tego odrobina nadmanganianu potasu. Tak było z wieloma zjawiskami, które musiały przejść etap herezji, zanim stały się prawdami. Zatem my, jako ci, którym „objawiona" została prawda, musimy być wyrozumiali dla paranauki i jej adeptów. Należy bezwzględnie demaskować fałsz i tępić hochsztaplerów, ale jednocześnie dokładnie sprawdzać, co jest fałszem i hochsztaplerstwem, a co nie.

To chyba wszystko, co miałbym do powiedzenia w ramach jubileuszowej ankiety *Delty*. Pragnę dołączyć serdeczne życzenia dla wszystkich, którzy przyczynili się do powstania i istnienia tego wartościowego pisma oraz życzyć kolejnych 250 numerów. Chciałbym również podziękować za istnienie *Delty*, gdyż pomagała mi ona poszerzać horyzonty wiedzy i szlifować umiejętności w okresie, gdy dopiero kształtowałem się nie tylko jako naukowiec, ale przede wszystkim jako człowiek. Za to jeszcze raz serdecznie dziękuję.

Wszystkiego Najlepszego

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1996

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Zadania z matematyki nr 307, 308

Redaguje Marcin E. KUCZMA

307. Liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówność
$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4).$$
Dowieść, że są one długościami boków pewnego trójkąta.

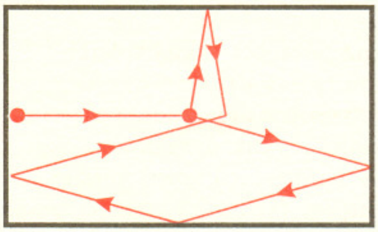
308. Dane są funkcje $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o następujących własnościach: f jest funkcją różniczkowalną, $f'(x) = g(f(x))$ dla $x \in \mathbf{R}$. Czy funkcja f musi być monotoniczna (niemalejąca lub nierosnąca)?

Zadanie **308** zaproponował pan Przemysław Gadziński ze Środy Śląskiej.

Zadania z fizyki nr 205, 206

Redaguje Jerzy B. BROJAN

205. Małe naładowane ciało krąży po okręgu o promieniu r_0 w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B_0. Jeśli pole magnetyczne nie zmieniając kierunku bardzo powoli wzrośnie lub zmaleje do wartości B_1, to ciało nadal będzie krążyć po okręgu. Znaleźć wzór na promień r_1 nowego okręgu.
Wskazówka: Nie pomijać efektów wirowego pola elektrycznego (powstającego wskutek zmian B).



206. Na prostokątnym stole bilardowym o wymiarach $a \times b$ ($a = 1$ m, $b = 2$ m) znajdują się dwie jednakowe bile o średnicy $d = 6$ cm – jedna na środku stołu, a druga przy środku krótszego boku. Chcemy tak uderzyć w drugą bilę, aby trafiła ona w środkową, dalej jedna z bil odbiła się od dłuższego boku stołu, a druga kolejno od krótszego, dłuższego i znów krótszego, po czym zderzyły się ponownie (rys.) Ocenić niezbędną do tego dokładność kierunku uderzenia początkowego (w stopniach).

Zadania

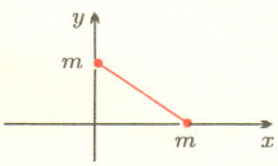
Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 750. Niech liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wykonujemy następujący eksperyment losowy: rzucamy dziesięć razy kostką sześcienną i sumujemy wyniki rzutów, jednakże jeśli w n-tym rzucie wypadnie a_n oczek, to nie bierzemy pod uwagę żadnego z następujących po nim rzutów (przyjmujemy, że ich wyniki są zerowe). Jak dobrać liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, by wartość oczekiwana sumy otrzymywanej w naszym eksperymencie była największa?
Rozwiązanie na str. 6

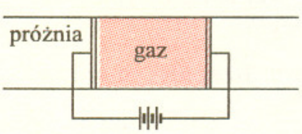
M 751. Na nieskończonej czarno-białej szachownicy tak kładziemy prostokąt, że dokładnie połowa nakrytej nim powierzchni jest biała; żądamy przy tym, by prosta zawierająca jeden z boków prostokąta przecinała krawędzie pól szachownicy pod ustalonym z góry kątem. Czy jest to możliwe niezależnie od wymiarów prostokąta?
Rozwiązanie na str. 6

M 752. Udowodnić, że liczba $S = \sum_{n=1}^{1995} n^{n^n}$ nie jest sześcianem żadnej liczby naturalnej.
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje Krzysztof REJMER



F 413. Dwa punkty materialne o masie m każdy poruszają się bez tarcia: jeden wzdłuż osi x, drugi wzdłuż osi y kartezjańskiego układu współrzędnych. Punkty połączono sztywnym nieważkim prętem o długości A. Wykazać, że ruch obu punktów jest ruchem harmonicznym i znaleźć częstotliwość drgań punktów.
Autorem tego problemu jest Jorge B. Sztrajman (Universidad de Buenos Aires).
Rozwiązanie na str. 7



F 414. Pomiędzy ruchomymi okładkami kondensatora płaskiego znajduje się gaz doskonały. Okładki połączone są ze źródłem o stałym napięciu U. Znaleźć równanie przemiany, jakiej podlega ten gaz podczas ogrzewania oraz ciepło molowe tej przemiany. Efekty brzegowe zaniedbujemy.
Rozwiązanie na str. 7

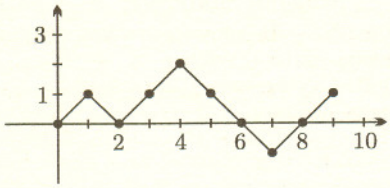
O kolejkach

Włodzimierz BIELIŃSKI, Krzysztof PAROL

Z każdą kolejką można (jednoznacznie) powiązać wykres w kształcie łamanej przedstawiający zmiany liczby pięciozłotówek w kasie podczas obsługiwania kolejki. Kolejka jest zła wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający jej wykres ma fragmenty leżące poniżej osi OX.

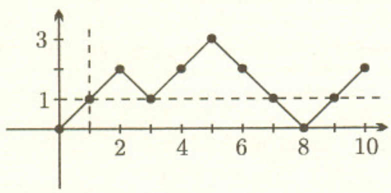
W artykule zajmiemy się następującym zadaniem:
Przed kasą kina stoi $(p+d)$-osobowa kolejka, przy czym p osób ma monety pięciozłotowe, natomiast d osób ma banknoty dziesięciozłotowe. Bilety kosztują pięć złotych. Przed rozpoczęciem sprzedaży w kasie nie ma pieniędzy. Na ile sposobów można ustawić kolejkę, aby sprzedaż nie uległa zahamowaniu, tzn. aby żadna osoba nie musiała czekać na resztę?

W naszym rozwiązaniu będziemy zakładać, że osoby są nierozróżnialne. Aby otrzymać wynik w przypadku osób rozróżnialnych, należy naszą odpowiedź pomnożyć przez $p!d!$.



Rys. 1. Zła kolejka typu (5,4). Siódmemu klientowi kasjer nie może wydać reszty ($s=7$).

Powiemy, że kolejka jest typu (p,d), jeśli jest długości $p+d$ oraz p osób ma pięciozłotówki, a pozostałe osoby mają dziesięciozłotówki. Kolejkę nazwiemy *dobrą*, jeśli sprzedaż biletów nie ulegnie zahamowaniu, w przeciwnym przypadku kolejkę nazwiemy złą. Oznaczmy szukaną liczbę przez $K(p,d)$. Oczywiście, $K(p,d)=0$ dla $p<d$. Możemy więc założyć, że $p\geq d$. Liczbę $K(p,d)$ znajdziemy odejmując od wszystkich ustawień $p+d$ osób ustawienia złe, tzn. takie, dla których kolejka utknie. Łatwo zauważyć, że liczba wszystkich kolejek jest równa $\binom{p+d}{p}$ (spośród wszystkich $p+d$ miejsc wybieramy p i na nich ustawiamy posiadaczy pięciozłotówek).



Rys. 2. Kolejka z rysunku 1 po dodaniu na początku osoby z pięciozłotówką. Na pierwszych $s+1=8$ miejscach połowa osób ma dziesięciozłotówki.

Wykażemy, że liczba złych kolejek typu (p,d) jest równa $\binom{p+d}{p+1}$. Niech s oznacza numer osoby, na której zatrzyma się kolejka. Łatwo zauważyć, że s musi być liczbą nieparzystą, gdyż wcześniej do kasy musiało trafić tyle pięciozłotówek, co dziesięciozłotówek. Dodajmy na początek takiej kolejki osobę z pięciozłotówką, tworząc nową kolejkę typu $(p+1,d)$. Mamy teraz w kolejce na pierwszych $s+1$ miejscach tyle samo osób z monetami 5 zł i banknotami 10 zł. Dokonajmy operacji drastycznej z punktu widzenia posiadaczy dziesięciozłotówek. Na pierwszych $s+1$ miejscach nowej kolejki zamieńmy wszystkim nominały posiadanych pieniędzy (kto miał x zł, po zmianie ma $15-x$ zł). Łatwo zauważyć, że ta operacja nie zmieni typu kolejki.
Po „wymianie pieniędzy" na pierwszym miejscu naszej kolejki typu $(p+1,d)$ stoi osoba z banknotem dziesięciozłotowym.

Kto nie wierzy, że opisane przekształcenie jest bijekcją, niech obejrzy w skupieniu rysunki 1, 2 i 3.

Opisane wyżej przekształcenie złej kolejki typu (p,d) na kolejkę typu $(p+1,d)$ zaczynającą się od osoby z dziesięciozłotówką jest, oczywiście, bijekcją. Zatem, liczba złych kolejek typu (p,d) jest równa liczbie takich kolejek typu $(p+1,d)$, które zaczynają się od osoby z dziesięciozłotówką. Łatwo zauważyć, że powyższych kolejek jest $\binom{(p+1)+(d-1)}{p+1}$, gdyż na pierwszym miejscu stoi osoba z dziesięciozłotówką, a $p+1$ osób z pięciozłotówkami możemy w dowolny sposób ustawić na pozostałych $p+d$ miejscach. Ostatecznie otrzymujemy

$$K(p,d)=\binom{p+d}{p}-\binom{p+d}{p+1}=\frac{(p+d)!}{p!d!}-\frac{(p+d)!}{(p+1)!(d-1)!}=$$
$$=\frac{(p+d)!}{p!d!}-\frac{(p+d)!}{p!d!}\cdot\frac{d}{p+1}=\frac{p-d+1}{p+1}\cdot\binom{p+d}{p}.$$

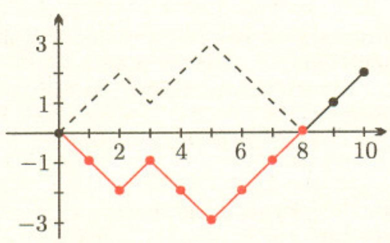
Podamy teraz kilka własności liczb $K(p,d)$.

1. $K(n,0)=1$.

2. $K(n,1)=n$. Osoba z dziesięciozłotówką nie może stać na początku kolejki; mamy dla niej do dyspozycji $(n+1)-1=n$ miejsc.

3. $K(n,n)=K(n,n-1)$. Łatwo zauważyć, że w dobrej kolejce typu (n,n) na końcu musi stać osoba z banknotem dziesięciozłotowym.

4. $K(p,d)=K(p,d-1)+K(p-1,d)$, gdy $p\geq d>0$. Rozpatrzymy dwa przypadki.



Rys. 3. Kolejka z rysunku 2 po „wymianie nominałów" u pierwszych ośmiu osób.

(a) $p = d$. Nie istnieją wtedy dobre kolejki typu $(p-1, d)$, czyli $K(p-1, d) = 0$. Zatem, teza wynika z punktu 3.

(b) $p > d$. Czytelnik zechce zauważyć, że w tym przypadku operacja wyrzucania z kolejki ostatniej osoby jest bijekcją pomiędzy zbiorem dobrych kolejek typu (p, d) a sumą zbiorów dobrych kolejek typu $(p-1, d)$ i dobrych kolejek typu $(p, d-1)$. Jest to, oczywiście, operacja różnowartościowa. Operacją odwrotną jest dodanie odpowiedniej osoby na końcu kolejki:

- do dobrej kolejki typu $(p-1, d)$ dostawiamy osobę z pięciozłotówką (oczywiście, otrzymamy dobrą kolejkę typu (p, d));
- do dobrej kolejki typu $(p, d-1)$ dodajemy osobę z dziesięciozłotówką (i w tym przypadku dostaniemy dobrą kolejkę typu (p, d), gdyż $d < p$ i po obsłużeniu całej kolejki typu $(p, d-1)$ w kasie zostanie przynajmniej jedna pięciozłotówka).

Z powyższych spostrzeżeń mamy $K(p, d) = K(p, d-1) + K(p-1, d)$.

5. $K(p, d) = \sum_{i=0}^{d} K(p-1, i)$ dla $p > 0$ i $0 \leq d \leq p$.
Dowód prowadzimy przez indukcję względem d (przy ustalonym p).
Dla $d = 0$ mamy $K(p, 0) = 1 = K(p-1, 0)$. Niech $d \geq 1$. Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla wszystkich liczb naturalnych mniejszych od d. Na podstawie punktu 4 mamy

$$K(p,d)=K(p,d-1)+K(p-1,d)=\sum_{i=0}^{d-1} K(p-1,i)+K(p-1,d)=\sum_{i=0}^{d} K(p-1,i)\,.$$

6. $K(p, d) = \sum_{i=d}^{p} K(i, d-1)$. Dowód przez indukcję względem p przy ustalonym d przebiega podobnie jak poprzedni.

7. $K(p, d) = \sum_{k=0}^{d} K(d, k)\binom{p-k-1}{d-k}$. Ustawmy najpierw w kolejkę osoby z pięciozłotówkami. Podzielmy teraz te osoby na dwie części: od pozycji 1 do d i od pozycji $d+1$ do p. Następnie, dostawiamy do kolejki d osób z dziesięciozłotówkami. Do pierwszej części kolejki możemy wstawić k osób ($k \leq d$), w taki sposób, by powstała dobra kolejka typu (d, k). Można to zrobić na $K(d, k)$ sposobów. Pozostałe $d-k$ osób możemy wstawić w dowolny sposób do drugiej części kolejki. Da się to zrobić na $\binom{(p-d)+(d-k)-1}{d-k}$ sposobów, gdyż mamy do dyspozycji $p-d$ miejsc, na których trzeba umieścić $d-k$ osób z dziesięciozłotówkami, przy czym na jednym miejscu możemy ustawić więcej niż jedną osobę. Są to więc kombinacje z powtórzeniami (liczba j-elementowych kombinacji z powtórzeniami wybieranych ze zbioru n-elementowego jest równa $\binom{n+j-1}{j}$). Otrzymujemy więc

$$K(p,d)=\sum_{k=0}^{d} K(d,k)\binom{(p-d)+(d-k)-1}{d-k}=\sum_{k=0}^{d} K(d,k)\binom{p-k-1}{d-k}\,.$$

8. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i K(2n-i, i) = 0$. Dowód tego wzoru polega na nietrudnych przekształceniach (z wykorzystaniem własności 4); Czytelnik zechce go przeprowadzić samodzielnie.

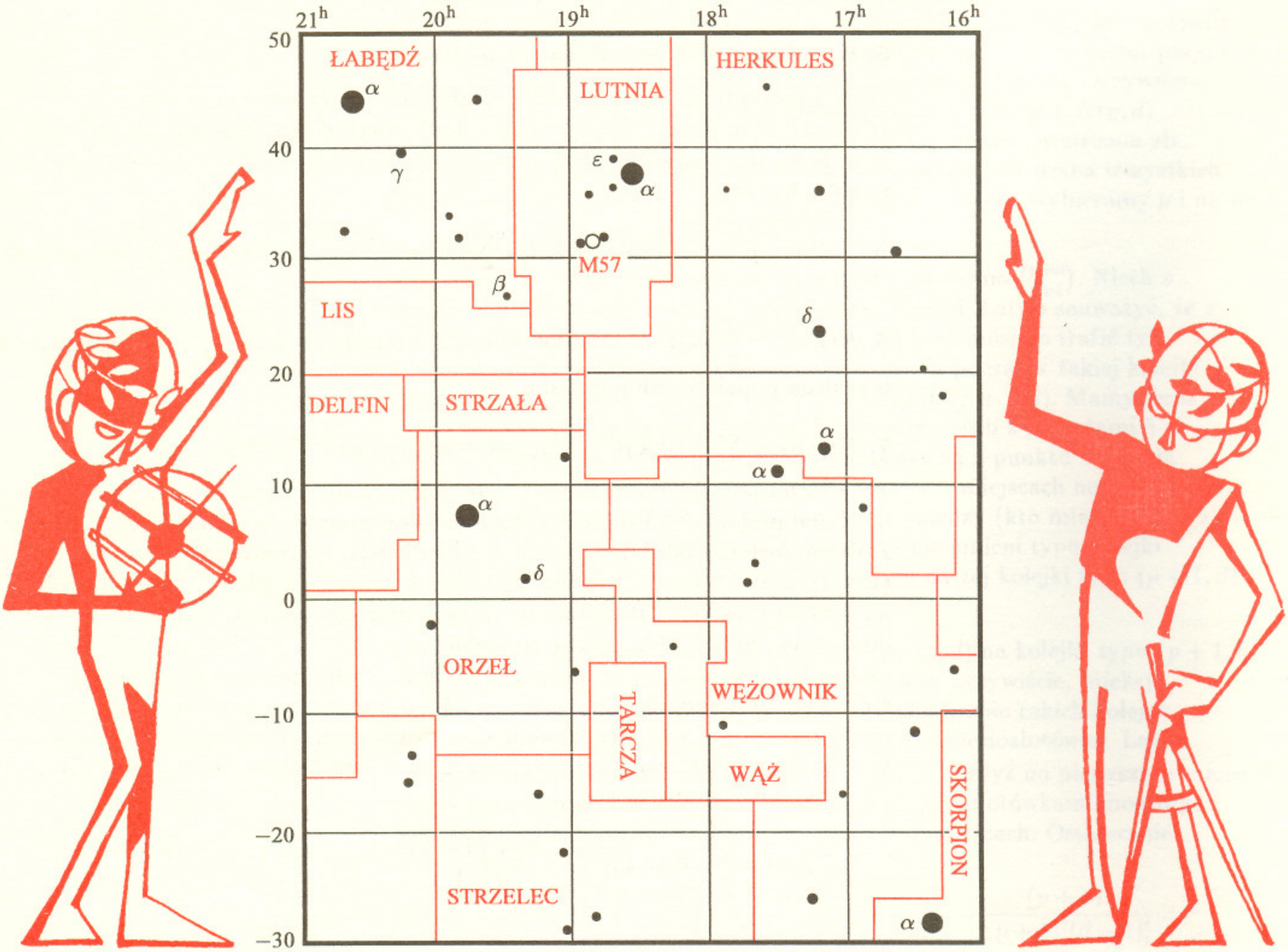
9. Liczba $K(n, n)$ jest równa tzw. $(n+1)$-szej liczbie Catalana. Jak to wykazać i co to są liczby Catalana, opowiemy Czytelnikom *Delty* przy innej okazji.

Na zakończenie proponujemy Czytelnikom samodzielne rozwiązanie (z wykorzystaniem liczb $K(p, d)$) następującego zadania:
Na ile sposobów można ustawić w dwuszeregu $2n$-osobową drużynę harcerską, aby w każdym szeregu harcerze byli ustawieni według wzrostu oraz aby za każdym harcerzem z pierwszego szeregu stał harcerz od niego wyższy? (W tym zadaniu zakładamy, że harcerze są rozróżnialni.)

Niebo przez lornetkę

Wieczorem na letnim niebie dominują trzy jasne gwiazdy: wysoko w pobliżu zenitu Deneb – α Łabędzia i Wega – α Lutni oraz niżej w kierunku południowym Altair – α Orła. Przez Łabędzia i Orła przechodzi Droga Mleczna, Lutnia jest trochę poza nią ale blisko. W południowej części widocznej w sierpniu Drogi Mlecznej, nisko przy horyzoncie na granicy Strzelca, Wężownika i Skorpiona leży centrum naszej Galaktyki. Przy czystym powietrzu widać wyraźnie poszerzenie Drogi Mlecznej w tamtej okolicy, a przez lornetkę szczególne nagromadzenie chmur gwiazdowych.

Gwiazdozbiór Lutni to charakterystyczny równoległobok czterech średnio jasnych gwiazd leżący tuż obok Wegi. Już przy niewielkim powiększeniu widać, że piąta, mniej więcej tak samo jasna gwiazda, również leżąca obok Wegi, jest gwiazdą podwójną. To ε Lutni odległa od nas o 70 pc. Jej składniki odległe są na niebie o $3',5$, a więc w przestrzeni o co najmniej 45 000 jednostek astronomicznych. Ale ponadto każda z gwiazd składowych jest też parą gwiazd odległych w przestrzeni o 280 i 150 jednostek, a na niebie o $3''$ i $2''$. Tak więc, niestety, poczwórności ε Lutni zwykłą lornetką nie zobaczymy.



Drugi wart uwagi obiekt w Lutni to tzw. Pierścień, mgławica planetarna M57 położona między gwiazdami β i γ. Przy dobrych warunkach atmosferycznych widać ją w lornetce jako bladą tarczkę o średnicy nieco przekraczającej $1'$, co przy odległości 700 pc odpowiada średnicy rzeczywistej 50 000 jednostek astronomicznych. Jak zapewne wiemy, jest to przedostatni etap życia gwiazdy.

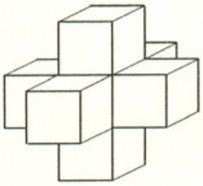
Mianowicie, dostatecznie masywne gwiazdy po zużyciu paliwa jądrowego pozbywają się swoich zewnętrznych warstw, które ekspandując tworzą przez kilka tysięcy lat taką właśnie dość regularną mgławicę. Z czasem rozpływa się ona w przestrzeni, a pozostałość po jej macierzystej gwieździe zamienia się w stygnącego powoli białego karła. Oczywiście, mgławice takie nie mają nic wspólnego z planetami – nazwane zostały tak dawniej wskutek podobieństwa do tarczy planety i ta niefortunna nazwa tak już została.

Tomasz KWAST

10/95
(55)

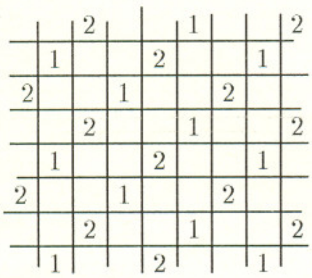
Przestrzenny parkietaż

Parę lat temu, przeglądając zbiór zadań *Zarubieżnyje matematiczeskije olimpiady*, natknąłem się na następujące zadanie:
Do każdej ściany sześcianu o krawędzi 1 dobudowujemy sześcian przystający do danego. Otrzymamy więc przestrzenny „krzyż" taki, jak na rysunku 1. Czy takimi krzyżami można wypełnić szczelnie całą przestrzeń?



Rys. 1

Zadanie to bardzo mi się spodobało, byłem ogromnie ciekawy jaka jest odpowiedź. Niestety, w owym zbiorku rozwiązanie tego zadania nie zostało opublikowane. Parę miesięcy później to samo zadanie znalazłem w innym zbiorku, również rosyjskim, tym razem jednak autorzy umieścili rozwiązanie. Odnalazłem więc je i przeczytałem – było zadziwiająco krótkie! Oto ono:
Można. Rozbijmy przestrzeń na „warstwy", każda grubości 1, *a każdą warstwę rozbijmy na jednostkowe sześciany* (*jedna z tych warstw – widok z góry – jest przedstawiona na rysunku* 2). *Ponumerujmy warstwy od dołu do góry; jeśli warstwa jest oznaczona numerem nieparzystym, to krzyże o środkach w tej warstwie umieśćmy tak, by ich środkowe sześciany pokrywały się z sześcianami o numerach* 1, *jeśli zaś warstwa ma numer parzysty, to umieśćmy środki krzyży tam, gdzie znajdują się sześciany oznaczone numerem* 2.



Rys. 2

Rozwiązanie wydało mi się nietrywialne i bardzo eleganckie. Postanowiłem więc podzielić się zadaniem z moimi paroma kolegami.

Fragmenty listów czytelników do gazety „Polityka", opublikowanych w dniu 28.07.1984

„Im bardziej wgłębiałam się w tajniki matematyki, tym więcej rósł mój niepokój. Poczucie absurdu, bezsensu..."

„Znałem kilku doskonałych matematyków (podobno sam byłem w tym kierunku uzdolniony), ale na ogół byli to ludzie życiowo nieporadni, a nawet (co gorsza) nie znający podstawowych zasad współżycia międzyludzkiego, co w najlepszym razie lokowało ich w kategorii dziwaków."

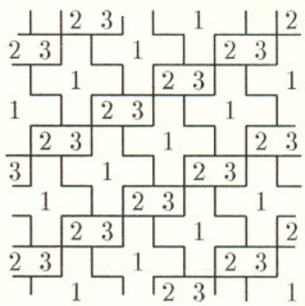
„Kto chce się zajmować matematyką dla niej samej, niech się zajmuje, ale niech nie twierdzi, że bez znajomości geometrii Łobaczewskiego czy Riemanna, bez znajomości całki Lebesgue'a, przestrzeni Banacha i płaszczyzn Hilberta nie można się nauczyć logicznego myślenia. Wręcz przeciwnie, jałowe trawienie czasu nad nieprzydatnymi w praktyce przemyśleniami, prowadzi do patrzenia na ten sam przedmiot z takiej wysokości, że poza niewyraźnym konturem obserwowanego przedmiotu widać tylko siną dal, w którą ulotniła się logika."

„Kończąc, chciałbym rozprawić się z rozpropagowanym przez fetyszystów matematyki mitem, jakoby matematyka była królową nauk."

Gdy parę dni później tłumaczyłem rozwiązanie jednemu z nich, zająknąłem się w pewnym momencie i stwierdziłem, że chyba jednak nie pamiętam rozwiązania. Po powrocie do domu odnalazłem je w owym zbiorku i okazało się, że jest ono nieprawidłowe! Zachęcam Czytelników do przyjrzenia się powyższemu „rozwiązaniu" i odnalezienia dość subtelnie ukrytego błędu.

Znowu więc zacząłem się zastanawiać, jaka jest odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie. Tym razem jednak postanowiłem przyjrzeć się bliżej zadaniu i w efekcie udało mi się je rozwiązać, a w zasadzie poprawić powyższe „rozwiązanie". Spróbujmy więc zabudować przestrzeń naszymi krzyżami.

Podobnie jak wyżej, zbudujemy najpierw warstwy, którymi później wypełnimy szczelnie przestrzeń. W tym celu umieśćmy środki krzyży w miejscach oznaczonych na rysunku 3 numerem 1. Otrzymamy więc warstwę, która ma otwory w kształcie kostek domina (na rysunku 3 liczby 2 i 3) oraz wystające z obu stron sześciany jednostkowe (w miejscach, gdzie na rysunku 3 jest liczba 1). Pozostało więc szczelnie złączyć warstwy, co pozostawiam Czytelnikowi.



Rys. 3

Waldemar POMPE

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.