

SPIS TREŚCI NUMERU 9(268)

Głębia ostrości <i>Grzegorz Derfel</i>	str. 1
Całkowite zwycięstwo <i>Marek Kordos</i>	str. 1
Przypadkowa prawidłowość czy prawo przyrody? <i>Tomasz Kwast</i>	str. 4
Patrz w niebo	str. 5
Najprostsze wypełnienie przestrzeni jednakowymi wielościanami <i>Małgorzata Dworska</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Autobus, balonik i trzepak	str. 9
Ferroelastyczne kompozyty <i>Stanisław Bednarek</i>	str.10
Zadania	str.11
Małe „conieco” dla Kubusia Puchatka <i>Krzysztof Rejmer</i>	str.12
Klub 44	str.14
XLVIII Olimpiada Matematyczna	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

Kondensacja Bosego–Einsteina

Okladkę wykonał
Krzysztof BIESAGA

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

Wybór artykułów z *Delt*
ukazuje się w języku angielskim
w sieci Internet pod adresem
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński
– wiceprzewodniczący
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmökł
Marta Kicińska-Habior
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Michał Różyczka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz SitarSKI
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wacław Zawadowski
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Krzysztof Rejmer
Anna Rudnik
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska
Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-41(-3) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem T_EX wykonała Redakcja

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1996 roku wynosi 2 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1996 r. wynosi 4 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1996 r. wynosi 6 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju:
 - a) jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób;
 - b) od osób zamieszkałych lub instytucji mających siedzibę w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH, wpłaty należy wnosić na konto „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 370044-16551-2700-1-06 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰; dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. na konto lub w kasach Oddziału. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną ze zleceniem dostawy za granicę od osób zamieszkałych w kraju:
 - do 5 XII na I kwartał roku następnego,
 - do 5 III na II kwartał,
 - do 5 VI na III kwartał,
 - do 5 IX na IV kwartał.
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-10-39, 620-10-19, 620-12-71 wewn. 2442, 2366.

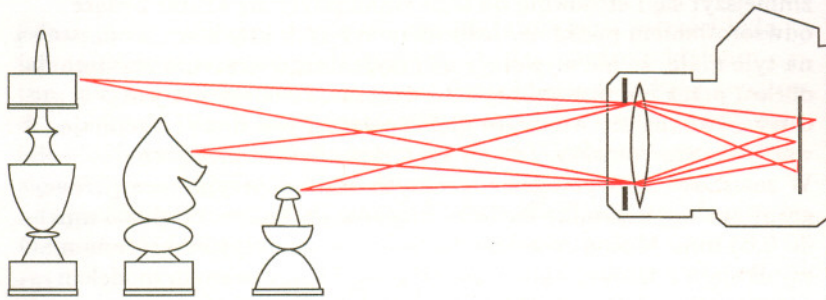
Cena 1 egzemplarza 2 zł, 20 000 zł

Głębia ostrości

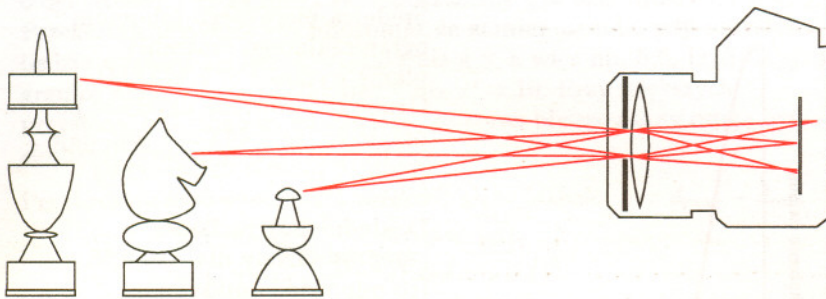
Grzegorz DERFEL

Operowanie głębią ostrości należy do podstawowych środków, jakimi dysponuje fotograf w celu osiągnięcia ekspresji zdjęcia. Mała głębia ostrości pozwala wydzielić fotografowany obiekt z tła, które w przeciwnym razie rozpraszałoby uwagę widza. Zdarzają się też sytuacje, w których pożądana jest jak największa głębia ostrości, niezbędna do wyraźnego przedstawienia obiektów położonych w różnych planach.

W artykule wyjaśnimy po pierwsze, dzięki czemu istnieje głębia ostrości, to jest dlaczego można uznać za ostro zobrazowane przedmioty leżące w pewnym (czasem bardzo szerokim) przedziale odległości od aparatu, a nie tylko te, które leżą w ściśle określonym planie, na który nastawiony jest obiektyw. Po drugie, wykazemy, jakie czynniki mają wpływ na szerokość tego przedziału. I po trzecie, przedstawimy sposoby obliczania głębi ostrości w zależności od ogniskowej obiektywu, przysłony i odległości do fotografowanego obiektu. Do wymienionych zagadnień będą zastosowane prawa optyki geometrycznej, które są dobrym przybliżeniem w praktyce fotograficznej.



Rys. 1



Rys. 2

Rysunki 1 i 2 przedstawiają sytuację, w której przedmiotem zdjęcia są trzy figury szachowe położone w różnych odległościach od aparatu: król, skoczek i pion. Oba rysunki ilustrują rolę wielkości otworu względnego przysłony. Czytelnikom nie parającym się fotografią pomocne będzie wyjaśnienie, że stosunek ogniskowej obiektywu f do średnicy otworu D , przez który do aparatu dostaje się światło, oznaczany jest liczbą przysłony P . Liczby te tworzą standardowo ciąg: 1; 1,4; 2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22; ... począwszy od otworu największego do najmniejszego. Ponieważ kolejne liczby ciągu oznaczają średnice różniące się w przybliżeniu o czynnik $\sqrt{2}$, a oświetlenie błony jest proporcjonalne do $(D/f)^2$, to zmienia się ono dwukrotnie przy zmianie przysłony o jedną „działkę”.

Przygody matematyki

wśród ludzi (IV)

(na podstawie wykładów wygłoszonych na antenie *Radia Bis*)

Całkowite zwycięstwo

Marek KORDOS

Podstawową zaletą matematyki dla starożytnych filozofów była pewność jej stwierdzeń. Żadna dyscyplina nauki tak ongiś, jak i dziś nie może się pochwalić tak niewątpliwą, niepodważalną prawdziwością swoich orzeczeń. Zaleta ta została matematyce dana przez greckich twórców jej kanonów, kanonów uzyskiwania jej twierdzeń, kanonów prowadzenia rozumowań.

Dla ludzi XVII wieku główny walor matematyki znajdował się gdzie indziej – matematyka stosowała się do każdej właściwie dyscypliny ludzkiej działalności, przynosząc każdej z nich nowe osiągnięcia praktyczne. Bardzo szeroko do dziś jest dyskutowana *zdmiewająca stosowalność matematyki w praktyce*. Istotnie – jest czemu się dziwić. Okazuje się bowiem, że stworzone na drodze intelektualnej spekulacji Starożytnych zasady, podstawy matematyki, zawierają istotnie to, co w nich widzieć chcieli pitagorejczycy: najgłębszą prawdę o Wszechświecie i zamieszkujących go ludziach. Pomysł, że nasi przodkowie sprzed 2,5 tysiąca lat umieli uchwycić to najistotniejsze, jest dość szokujący. Wymyślono dla uzasadnienia tego zjawiska wiele różnorodnych objaśnień. Sama sprawa skutecznej stosowalności matematyki uważana jest jednak ciągle za otwartą.

Niemniej, niezależnie od tego, czy umiemy przyczynę tego wyjaśnić, czy też nie, od siedemnastego wieku następuje (aż po wiek dwudziesty) bezustanna ekspansja metod matematycznych we wszystkich gałęziach ludzkiego działania. Najbardziej spektakularne jest przenoszenie nowych dyscyplin do matematyki. Zdanie to wymaga wyjaśnienia. Otóż powstające w XVII wieku akademie nauk miały w zasadzie dwa wydziały: matematykę i fizykę. Do matematyki zaliczano te wszystkie dziedziny wiedzy, w których dopracowano się bezwzględnie ścisłych metod pozyskiwania prawd. Była więc w matematyce np. geometria, była

od początku istnienia akademii optyka geometryczna. „Reszta” – jeszcze na początku XIX wieku np. elektryczność, magnetyzm, fizjologia, mineralogia – była w fizyce. Znamy konkretną datę przeniesienia mechaniki teoretycznej z fizyki do matematyki: jest to 1788 rok – osiem lat temu obchodzono nawet dwóchsetlecie tego wydarzenia (data ta to rok wydania *Mechaniki analitycznej* Lagrange’a). O surowości wymagań przy kwalifikowaniu do dyscyplin matematycznych może świadczyć fakt, że rezultaty Galileusza, Newtona, Bernoulliego czy d’Alemberta nie były dla takiego awansu mechaniki wystarczające.

Najbardziej spektakularnie matematyzował rozmaite dyscypliny do dziś nie mający sobie równych w płodności i wszechstronności Leonhard Euler (występuje zresztą z tego powodu w księdze Guinnessa). Euler – tu znów ciekawe zjawisko – reprezentował w nauce barwy (kolejno) Szwajcarii, Rosji, Prus i znów Rosji: uczonych do akademii nauk danego kraju kupowano tak, jak dziś kupuje się piłkarzy do renomowanych klubów. W przypadku Eulera zakupów dokonywali kolejno: Piotr Wielki, Fryderyk Wielki i Katarzyna Wielka, a więc nie było kto. Prace Eulera dotyczą właściwie wszystkiego – poza analizą matematyczną, algebrą czy teorią liczb mamy prace z teorii grafów, dynamiki tak punktu materialnego, jak i ciał sztywnych, prace z astronomii, hydrauliki, budowy okrętów, artylerii, optyki, muzyki. Jest nawet pierwsza książka popularnonaukowa, żeby było ciekawiej: dla dzieci – *Listy do księżniczki niemieckiej*.

Gdyby ktoś chciał porównać swoje, właściwie już prawie dwudziestopierwszowieczne umiejętności z umiejętnościami osiemnastowiecznego Eulera, niech spróbuje obliczyć, że siła kilkuletniego dziecka wystarczy, by zatrzymać nawet silny samochód za linkę w sytuacji, gdy jest ona kilkakrotnie (np. 5 razy) owinięta – ale nie zawiązana – wokół dostatecznie wytrzymałego słupka.

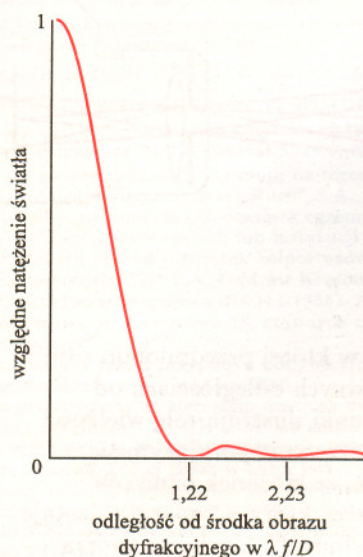
Efektowne przykłady mocy matematyki zostały uzyskane przez Gaussa. W noc sylwestrową 1800/1801 Piazzini odkrył niewielkie ruchome ciało niebieskie, pierwszą planetoidę. I została ona zagubiona, to znaczy po kilku dniach nikt nie umiał tej planetoidy na niebie odnaleźć. Gauss z notatek o jej kilkugodzinnej obserwacji odtworzył położenie Cerery (bo tak ją potem

Zwykle obiektywy fotograficzne są zespołami wielu soczewek; tu przyjmujemy, że obiektyw to pojedyncza, pozbawiona wad cienka soczewka o ogniskowej f .

Na rysunku 1 wybrano duży otwór względny przysłony, np. 2, a ostrość nastawiono na skoczka. Oznacza to, że obiektyw tak odsunięto od błony, aby światło dochodzące od pewnego punktu tej figury było skupione na błonie także w jednym punkcie. Dzięki temu odwzorowaniu punktu w punkt obraz jest ostry. Inaczej przedstawia się sprawa z królem lub pionem. Promienie wychodzące z punktu na powierzchni króla skupiają się przed błoną. Na filmie tworzą więc ślad w postaci krążka, a nie punktu. Podobny krążek na błonie utworzą promienie opuszczające punkt na powierzchni piona. Wskutek tego odwzorowania punktów w krążki obrazy króla i piona na filmie są nieostre. Można więc stwierdzić, że głębia ostrości jest za mała i nie objęła całej scenki.

Zwróćmy uwagę, od czego zależy wielkość powstałych krążków. Są one tym większe im większy jest kąt utworzony przez skrajne promienie przechodzące przez otwór w przysłonie i padające na błonę. Duży otwór przysłony z rysunku 1 dał więc ślady w postaci dużych krążków.

Zobaczmy, co się dzieje, gdy otwór zostaje zmniejszony. Rysunek 2 przedstawia te same figury, ale fotografowane z przysłoną 16. Widać, że wspomniany kąt utworzony przez skrajne promienie, zmniejszył się i stosownie do tego zmniejszyły się krążki będące odwzorowaniem punktów. Jeśli rozmiary tych krążków na odbitce są na tyle małe, że nie wywołują nieprzyjemnego wrażenia rozmazania obrazu przez nie utworzonego, to uznamy, że obraz ten jest ostry. Stwierdzimy wtedy, że głębia ostrości jest duża i obejmuje wszystkie trzy obiekty. Jest to kryterium dość subiektywne. W zależności od wymagań stawianych odbitce przyjmuje się różne graniczne dopuszczalne średnice krążków na błonie: od 0,005 mm do 0,03 mm. Można rozważać też bardziej obiektywne kryterium wynikające z falowej natury światła. Wyidealizowanym modelem powstawania obrazu punktu jest dyfrakcja Fraunhofera na otworze kołowym. Rozkład natężenia światła ma centralne maksimum otoczone znacznie słabszymi pierścieniami (rys. 3).



Rys. 3

Średnica pierwszego minimum ograniczającego centralną plamę wynosi $c = 2,44\lambda f/D$. Grube oszacowanie uzyskane po przyjęciu, że $2,44\lambda = 1 \mu\text{m}$, daje średnicę plamki dyfrakcyjnej równą P mikrometrów. Dokładniejszy rachunek przeprowadzony dla $\lambda = 0,58 \mu\text{m}$ (co odpowiada maksimum natężenia w widmie światła białego) i $f/D = P = 8$, daje $c = 11,3 \mu\text{m}$. Usprawiedliwieni falową naturą światła możemy więc dopuścić rozmycie geometryczne obrazu o porównywalnych rozmiarach. Jest to dość wymagające kryterium ostrości, lecz staje się ono łagodniejsze ze wzrostem liczby przysłony.

Po tych jakościowych wyjaśnieniach podamy wzory przydatne do obliczenia maksymalnej i minimalnej odległości, między którymi znajdują się obiekty zostaną sfotografowane ostro.

Ich wyprowadzenie wymaga zastosowania równania soczewki $1/f = 1/x + 1/y$ oraz wykorzystania proporcjonalności boków odpowiednich trójkątów widocznych na rysunku 1. Tak więc odległość minimalna wyraża się wzorem

$$(1) \quad d_{\min} = \frac{df^2}{f^2 + Pc(d-f)},$$

a maksymalna wzorem

$$(2) \quad d_{\max} = \frac{df^2}{f^2 - Pc(d-f)},$$

gdzie c oznacza największą akceptowalną średnicę krążka nieostrości, a d – odległość, na jaką nastawiono ostrość aparatu. W praktyce mamy $d \gg f$ i wystarczy użycie wzorów przybliżonych

$$(3) \quad d_{\min} \approx \frac{df^2}{f^2 + Pcd},$$

$$(4) \quad d_{\max} \approx \frac{df^2}{f^2 - Pcd}.$$

Jeśli d i f są porównywalne (co może mieć miejsce przy wykonywaniu makrofotografii, np. $d = 500$ mm, $f = 135$ mm), sensowne może być użycie wzorów dokładnych. W przypadku, gdy wzory na d_{\max} dają wartość ujemną, plamka nieostrości jest mniejsza od założonej wartości c i należy przyjąć, że głębia ostrości sięga do nieskończoności.

Zdarzają się sytuacje, w których chcemy, aby głębia ostrości była jak największa i obejmowała zarówno obiekty bardzo oddalone (np. góry na horyzoncie, $d_{\max} = \infty$), jak i bliskie (np. kępę kwiatów, $d_{\min} = 2$ m). Warto wtedy nastawić obiektyw na pewną pośrednią odległość zwaną odległością hiperfokalną H . Głębina ostrości będzie się wtedy rozciągać od odległości minimalnej równej połowie odległości hiperfokalnej, $d_{\min} = H/2$, do nieskończoności, $d_{\max} = \infty$. Odległość hiperfokalną można obliczyć ze wzoru

$$(5) \quad H = f^2/Pc,$$

który łatwo znaleźć ze wzorów (1) lub (2). Załóżmy, że wspomniane kwiaty na tle gór fotografujemy obiektywem szerokokątnym o ogniskowej $f = 24$ mm i że dopuszczamy $c = 0,03$ mm.

Przekształcony wzór (5) informuje, że zamiar się uda, gdy przysłona będzie wyrażać się liczbą większą niż 4,8, a więc np. 5,6. Dyfrakcyjną granicę rozdzielczości osiągniemy dla $P = 10$. Przy większych przysłonach H maleje, co oznacza, że coraz bliższe plany mogą być sfotografowane możliwie najostrej.

Przytoczmy jeszcze wzór na wielkość głębi ostrości $g = d_{\max} - d_{\min}$

$$(6) \quad g = \frac{2dPc(d-f)}{f^2 - [Pc(d-f)/f]^2},$$

który w przybliżeniu $d \gg f$ przyjmuje postać

$$(7) \quad g \approx \frac{2d^2Pc}{f^2 - (Pcd/f)^2}.$$

(Ujemny wynik liczbowy oznacza ostrość od d_{\min} do ∞ .) Inne przybliżenie, warte stosowania w makrofotografii, słuszne gdy $f/Pc \gg d - f$, daje wzór

$$(8) \quad g = 2(k+1)kPc,$$

gdzie k jest stosunkiem rozmiarów przedmiotu do rozmiarów obrazu na błonie. W tym przybliżeniu g nie zależy od ogniskowej, jeśli tylko obraz zachowuje tę samą wielkość. W wielu dziedzinach makrofotografii warto posługiwać się obiektywem o nieco dłuższej ogniskowej niż standardowy (np. 80–135 mm), co pozwala utrzymać wygodną zwiększoną odległość od obiektu i zmniejszyć udział tła na zdjęciu, a nie ma wpływu na głębę ostrości.

nazwano) tak, że dała się ona odszukać. Podobną sprawnością popisał się półtora roku później (tym razem zaginęła planetoida Pallas odkryta przez Olbersa). Z tego rodzaju powodów najwyższa międzynarodowa nagroda astronomiczna jest imienia Gaussa. Ale gauss to również jednostka magnetyzmu. Od Gaussa pochodzi telegraf i używany do dzisiaj system map wojskowych. Doświadczalnicy będą mu zawsze wdzięczni za teorię błędów pomiarowych itd., itp.

Największą sławę przyniosło jednak matematyce wojsko. Jak wiadomo, od 1789 roku (czyli od rewolucji) do 1815 (czyli Waterloo) Francja toczyła – przez większą część czasu zwycięskie – wojny z całą Europą. Było to zdumiewające, że kraj, w którym dokonywała się rewolucja i zasadnicze zmiany wszystkiego były chlebem powszednim, miał tak sprawną armię i tak sprawne dla tej armii zaplecze przemysłowe, iż dawała radę wiele liczniejszym armiom ustabilizowanych państw. To, że w końcu przegrała, nie miało tu istotnego znaczenia. Dużym problemem dla obradujących na kongresie w Wiedniu była odpowiedź na pytanie, jak doszło do tego „wypadku przy pracy”. Odpowiedzi szukano we właściwym miejscu: zdecydowali o tym oficerowie armii i oficerowie przemysłu, czyli inżynierowie. Jeśli oni byli lepsi, to znaczy, że lepiej byli kształceni. Już pięćdziesiąt lat wcześniej Fryderyk Wielki wprowadził w Prusach i księstwach satelitarnych obowiązkowe i darmowe szkolnictwo podstawowe, gdyż twierdził, iż żołnierz umiejący czytać, pisać i rachować jest lepszym żołnierzem. Rewolucyjna Francja jakobinów od razu zadeklarowała powszechne szkolnictwo podstawowe i średnie, ale z tego – po likwidacji jakobinów – nic nie wyszło. Rozwinęły się natomiast bujnie szkoły wyższe, początkowo głównie oficerskie. Stało się tak, ponieważ jeszcze za Ludwika XVI w szkołach oficerskich szukała zatrudnienia duża część intelektualnej opozycji. Sprawy szkolnictwa wyższego połączone z kierowaniem przemysłem – cóż na to dzisiejsi władcy Rzeczypospolitej? – rewolucja powierzyła (i – o dziwo – nie zmieniano tego mimo zmian ekip rządzących) Gaspardowi Monge'owi, matematykowi, i Claude'owi Louisowi de Bertholletowi, chemikowi. Z tej racji, jak też z uwagi na zaangażowanie przez nich do reformy szkolnictwa matematyków tej klasy, co Lagrange i Laplace, matematyki w szkolnictwie wojskowym i inżynierskim było bardzo dużo. Nawiasem mówiąc, łączenie

kierowania szkolnictwem i przemysłem oraz powierzanie tej funkcji matematykowi utrzymało się we Francji aż do wojny francusko-pruskiej.

Dostrzeżenie dużego udziału matematyki w szkolnictwie wojskowym i technicznym i powiązanie tego z sukcesami armii stało się obowiązującą doktryną. Wszystkie zwycięskie państwa, a więc tak Anglia, jak nasi trzej rozbiornicy: Rosja, Prusy i Austria, uczyniły z nauczania matematyki sprawę strategiczną i to z tej racji nauczyciel matematyki stał się najważniejszy w szkole, a postawiona przez niego dwójka zaporą nie do przebycia. Prawie aż po dzień dzisiejszy. Powrócę do tego następnym razem.

Teraz jeszcze o determinizmie i losowości – doktrynie światopoglądowej praktycznie wszystkich dziewiętnastowiecznych użytkowników matematyki. Największym bodaj wydarzeniem wydawniczym przełomu XVIII i XIX wieku była *Mechanika nieba* Pierre’a Simona Laplace’a – ogromne pięciotomowe dzieło nie tylko o niebie, ale przede wszystkim o nowoczesnych metodach analizy matematycznej. Sam Laplace nie budził sympatii – potrafił zmieniać swoją przynależność polityczną z niewiarygodną szybkością. Jednak właśnie wypowiedzi tego, pogardzanego za brak kręgosłupa ideowego, uczonego wyznaczyły horyzonty światopoglądowe ludzi nauki i techniki. Laplace głosił, że gdyby mieć dostatecznie wiele danych o aktualnym stanie świata i gdyby móc dostatecznie szybko obliczać, to można by się dowiedzieć wszystkiego tak o przeszłości, jak i przyszłości (choć dziś jest tak jedynie w astronomii – dodawał). Taki pogląd nazywa się determinizmem. Nie jest on całościowo do obrony, bo przecież trudno sobie wyobrazić, jakby to było, gdybym wczoraj obliczył sobie, co powiem Państwu za minutę – dlaczego nie mógłbym (na złość) powiedzieć czegoś innego? Determinizm nie daje się pogodzić z żadną koncepcją etyczną czy religijną. A jednak jego podstawowa zaleta – oddzielenie pracy uczonego od wszelkich koniunkturalnych wpływów (i to mówił Laplace!) była tak nęcąca, że praktycznie wszyscy uczeni przyrodnicy ubiegłego stulecia głosili determinizm jako swoją ideologię, jako sztandar niezależności nauki. Determinizm uzupełniany był rachunkiem prawdopodobieństwa – to znów z dzieła Laplace’a *Rachunkowa teoria prawdopodobieństwa*. Prawdopodobieństwo ma stanowić protezę wiedzy pewnej

Przypadkowa prawidłowość czy prawo przyrody?

Tomasz KWAST

Od tzw. nauk ścisłych oczekuje się na ogół, że w każdej sytuacji dostarczą sposobu na przewidzenie (obliczenie) wyniku doświadczenia czy zjawiska, a jeżeli jest to niewykonalne dziś, to zapewne wkrótce ktoś taki sposób wynajdzie. Otóż niekoniecznie! Są mianowicie zjawiska i doświadczenia, których wyniki są zasadniczo nieprzewidywalne. Nie należy do nich tradycyjny rzut monetą, gdyby bowiem znać dokładnie siły działające na nią w czasie rzutu, opór powietrza itd., to można by przewidzieć, co wypadnie; tu wynik jest nie do przewidzenia z powodu braku pełnej informacji o zjawisku. Prawdę mówiąc, nawet gdyby taka informacja istniała, to nie wiadomo by było, co z nią zrobić. Są jednak takie zjawiska, o których wiadomo, że nigdy przewidywalne nie będą, np. w którym momencie rozpadnie się konkretny atom w promieniotwórczej próbce. O rozpadzie promieniotwórczym prawa przyrody mówią, że jeżeli nietrwałych atomów jest dużo, to w określonym czasie rozpadnie się ich połowa, nie wiadomo natomiast – które. I nigdy tego nie będzie wiadomo! Prawa przyrody przewidują tu wynik tylko statystyczny. Na tym przykładzie widać, że nie każda przypadkowość oznacza brak prawa przyrody.

Jest też odwrotnie: nie każda prawidłowość jest od razu prawem przyrody. Znamy bez liku rozmaitych wzorów empirycznych, a chyba jednym z najsłynniejszych jest reguła Titiusa-Bodego (orzeka ona, że promienie orbit kolejnych planet opisuje wzór $r_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^{n-1}$, gdzie $n = -\infty, 1, 2, 3, \dots$). Jej sukcesy były swego czasu zdumiewające: znaleziono planetoidy w miejscu, gdzie brakowało planety, pomogła w odkryciu Neptuna, choć potem okazało się, że akurat Neptun do niej nie pasuje. Podobne potęgowe wzory można zresztą znaleźć dla promieni orbit satelitów Jowisza czy Saturna. Choć zgodność takiej „teorii” z obserwacjami jest zaskakująca, nie zmienia to faktu, że reguła Titiusa-Bodego jest tylko zależnością empiryczną, a nie prawem przyrody jak np. którekolwiek z praw Keplera.

No to jak odróżnić prawo przyrody od zależności empirycznej? Pytanie nie jest banalne, bo przecież np. Balmer swoje wzory na długości fal linii wodorowych znalazł metodą prób i błędów, a z czasem okazało się, że istotnie tak ma być i że wynika to z głębszych przyczyn, z praw bardziej fundamentalnych. Tak samo było w przypadku Keplera: on doszedł do swoich praw szukając harmonii w Układzie Słonecznym, przy czym, jak wiemy, robił to w sposób wręcz daleki od naukowego. I tak samo dopiero później okazało się, że również one wynikają ściśle z prawa bardziej podstawowego, mianowicie z prawa grawitacji. Można więc zaryzykować twierdzenie, że nowa prawidłowość jest prawem przyrody, jeżeli wynika z innych, bardziej ogólnych praw przyrody. Tylko że z pewnością nie znamy wszystkich fundamentalnych praw przyrody, nie wiemy, jak je znajdować, ile ich jeszcze mamy odkryć. Podejrzewam, że gdyby to było wiadome, można by badanie przyrody powierzyć automatom. Tymczasem nie zanoszą się na to i to wcale nie dlatego, że człowiek nie chce okazać się zbędnym. Jest bowiem gorzej: odkrycie nowego prawa fundamentalnego jest na ogół okupione obaleniem prawa uważanego dotychczas za fundamentalne, a tego nie pojmie żadna maszyna.

Patrz w niebo

Co jakiś czas przez tzw. szeroki ogół przechodzi fala zainteresowania niebem spowodowana domniemanym „ustawieniem planet na jednej linii” i związanymi z tym obawami. Kiedyś nawet telefonował ktoś do mnie do Obserwatorium Warszawskiego pytając, o której konkretnie godzinie planety tak się ustawią, bo on chciałby wtedy opuścić dom i przeczekać kataklizm na otwartej przestrzeni.

Tymczasem siłę oddziaływania planet na Ziemię każdy może z łatwością obliczyć. Bezpośrednie przyspieszenie Ziemi wywołane przyciąganiem przez planetę o masie M z odległości r wynosi, oczywiście, GM/r^2 . Masy niektórych planet są wprawdzie znacznie większe od masy Ziemi, ale planety te dzielą od Ziemi odległości wyrażające się setkami milionów kilometrów. Wszystkie te przyspieszenia okazują się bardzo małe w porównaniu z przyspieszeniem Ziemi wywołanym przez Słońce, a ono przecież rządzi ruchem Ziemi. No to może pływowe działanie planet jest niebezpieczne? W tym przypadku mechanika mówi, że różnica przyspieszeń grawitacyjnych na końcach obiektu (tu: Ziemi) o rozmiarach R wywołana obecnością innej planety o masie M w odległości r wynosi GMR/r^3 . Ta właśnie różnica przyspieszeń mogłaby rozerwać Ziemię, gdyby była dostatecznie duża. Ale znowu prosty rachunek przekonuje, że najsilniejsze działanie pływowe na Ziemię wywiera Księżyc, bo jest najbliżej, powodując zresztą raptem kilkumetrowe podnoszenie się wody w oceanach. Inne planety zupełnie tu się nie liczą, nawet gdyby połączyły swoje wysiłki i ustawiły się na jednej linii.

A tak naprawdę, dokładne ustawienie się planet w jednej linii nie daje się przewidzieć. Można jedynie określać szanse znalezienia się planet w jakimś kącie, gdyby je obserwować np. ze Słońca. W dodatku, im więcej planet dopuścić do tej konkurencji, tym mniejsza jest szansa znalezienia ich w małym kącie. W czasach nowożytnych planety grupowały się kilkakrotnie w kącie liczącym kilkadziesiąt stopni:

wrzesień 1126 r.	- 69°
październik 1304 r.	- 59°
listopad 1483 r.	- 58°
styczeń 1665 r.	- 45°
styczeń 1844 r.	- 86°
listopad 1982 r.	- 64°

W zasadzie poszukiwanie takich dziwnych konfiguracji planet jest w dzisiejszych czasach proste. Całkujemy mianowicie równania ruchu planet przy czasie biegnącym wstecz i komputer na życzenie znajduje, co trzeba. Tyle że rzadko to się robi, bo na ogół nie jest to specjalnie ciekawe. Jednak przynajmniej dwa takie przypadki okazały się bardzo ciekawe i brzemienne w skutki. Ustalono, chyba dość pewnie, że Gwiazdą Betlejemską mogła być właśnie koniunkcja Wenus i Jowisza, która nastąpiła bardzo blisko Regulusa (alfy Lwa). Na krótko przed początkiem – teraz tak przez nas nazywanej – nowej ery to rzadkie zjawisko zapowiedziało przyjście Mesjasza i – przy okazji – dało początek współczesnej rachubie czasu.

Drugi analogiczny przełom nastąpił, jak się wydaje, dawno w Chinach. Próby ustalenia, co było początkiem starożytnego chińskiego kalendarza (wykorzystującego okresowości w ruchach planet) doprowadziły do wyniku, że była nim data, we współczesnym zapisie, 5 marca 1953 p.n.e. (dzień może nie jest na sto procent pewny). Obliczenia przeprowadzone w JPL (Jet Propulsion Laboratory, Kalifornia) potwierdziły informację zawartą w dawnym chińskim zapisie, że tego dnia o wschodzie Słońca nad wschodnim horyzontem widać było Księżyc w fazie 2 dni przed nowiem oraz wszystkie pięć planet widocznych gołym okiem. Każda planeta od sąsiedniej była odległa nie więcej niż o 3°, a całe zjawisko zbiegło się jeszcze dość blisko z początkiem wiosny. Była to podobno najbardziej zwarta konfiguracja planet w ciągu ostatnich 6000 lat. Tak więc „ustawienie planet na jednej linii” wprawdzie trzęsień ziemi nie powoduje, lecz znaczenie dla kultury miewa ogromne.

Tomasz KWAST

w sytuacji, gdzie wymagana przez determinizm baza danych bądź moc obliczeniowa jest nie do osiągnięcia. Potencjalnie możemy wiedzieć wszystko na pewno, chwilowo tu i ówdzie musimy podierać się prawdopodobieństwem.

Taka była matematyka wtedy, gdy powszechnie za królową nauk była uważana. I gdy istotnie ofiarowała ludzkości postęp techniczny z niczym wcześniejszym nie mogący się równać. Być królową to sztuka – trzeba bardzo uważać, żeby się w głowie nie przewróciło. W przypadku matematyki jednak uważano za mało – i o tym następnym razem.



Rozwiązanie zadania F 435. Równanie ruchu cząstki

$$m \frac{dv}{dt} = qE + q(v \times B)$$

można zapisać w postaci

$$\frac{d\eta}{dt} - i\omega\eta = ae^{i\omega t},$$

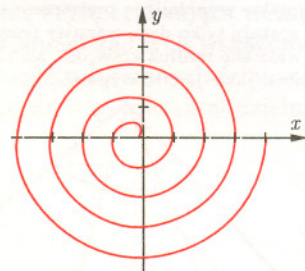
gdzie $\eta = v_x + iv_y$, $a = \frac{qE}{m}$. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$\eta(t) = ate^{i\omega t}.$$

Całkując ją otrzymujemy

$$(x + iy)(t) = \frac{a}{\omega^2} [(1 - i\omega t)e^{i\omega t} - 1].$$

Jest to linia spiralna na płaszczyźnie (x, y) , punkty na osiach są odległe o $\frac{2\pi a}{\omega^2}$, współrzędna z -owa cząstki nie zmienia się.



Energia kinetyczna wynosi

$$E_k = \frac{1}{2} m |\eta|^2 = \frac{1}{2} m q^2 E^2 t^2.$$



Rozwiązanie zadania F 436. Na podstawie drugiego prawa Keplera (zasada zachowania momentu pędu) możemy napisać:

$$Vb = ua(1 + e) = va(1 - e),$$

gdzie e jest mimośrodem elipsy. Dostajemy stąd

$$V^2 b^2 = u^2 a^2 (1 - e^2).$$

Ponieważ $1 - e^2 = b^2/a^2$, dostajemy

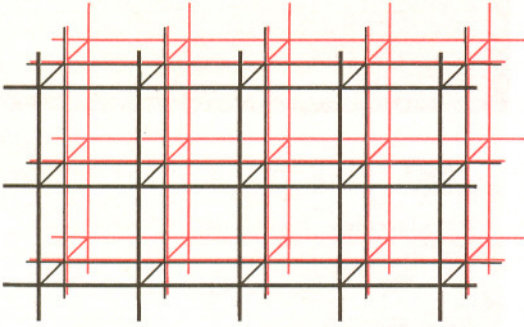
$$V = \sqrt{uv}.$$

Jest to jeszcze jeden przykład średniej geometrycznej w fizyce. O różnych rodzajach średnich w problemach fizycznych pisaliśmy w *Małej Delcie* (*Delta* 6/1994).

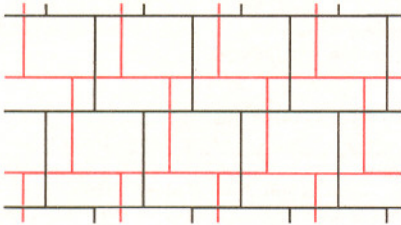
Najprostsze wypełnienie przestrzeni jednakowymi wielościanami

Małgorzata DWORSKA

Każdy zapytany o tytułowe wypełnienie przestrzeni wymieni równe ułożenie w niej sześciątów w ten sposób, by – jeśli już się dotykają – dotykały się wierzchołkami, całymi krawędziami lub całymi ścianami. Wypełnienie spełniające taki właśnie warunek na stykanie się wielościanów nazywa się *normalne* i uchodzi za regularniejsze, prostsze od innych wypełnień. Przedstawione na rysunku 1 wypełnienie sześciątami jest normalne, czego więc mu brakuje, by uznać, że jest ono najprostsze z możliwych?



Rys. 1. Normalne wypełnienie przestrzeni sześciątami.



Rys. 2. Minimalne wypełnienie przestrzeni sześciątami; narysowane zostały tylko dwie warstwy (czarna i kolorowa), na dodatek widziane wzdłuż krawędzi, ale chyba można wyobrazić sobie, jakie jest to wypełnienie.

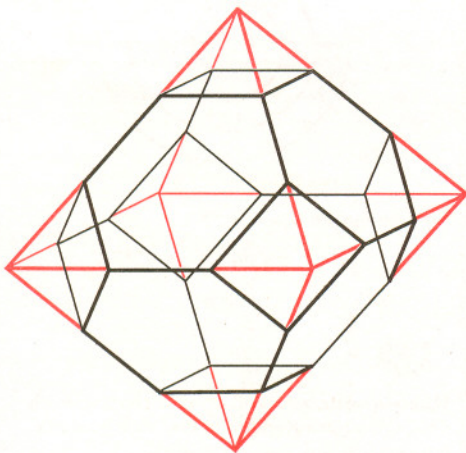
Wadą tą jest fakt stykania się w jednym punkcie przestrzeni aż ośmiu sześciątów. Czy istnieje takie wypełnienie przestrzeni jednakowymi wielościanami, że w żadnym punkcie nie styka się 8 wielościanów? Tak. Można nawet wskazać takie wypełnienie sześciątami – przesuniemy trochę kolejne warstwy wypełnienia, od którego zaczęliśmy nasze rozważania. Henri Lebesgue zauważył w 1911 roku (a z czasem i udowodnił), że przestrzeń euklidesową n -wymiarową można tak wypełnić wielościanami, by w każdym punkcie stykało się ich nie więcej niż $n + 1$, i liczby tej zmniejszyć już się nie da. Takie wypełnienie przestrzeni nazywa się *minimalne*. Dla zwykłej, trójwymiarowej przestrzeni oznacza to możliwość wypełnienia jej wielościanami w ten sposób, że w jednym punkcie spotykać się ich będzie co najwyżej cztery. To znów można zrealizować za pomocą sześciątów – trzeba je tylko poprzesuwać bardziej wymyślnie.

Widzimy jednak, że wypełnienie – co prawda – stało się minimalne, ale przestało być normalne. Czy zatem istnieje normalne i minimalne wypełnienie przestrzeni jednakowymi wielościanami? Ono właśnie zasługiwałoby na określenie *najprostsze*. Okazuje się, że wypełnienie takie istnieje i przedstawienie go jest celem tego artykułu.

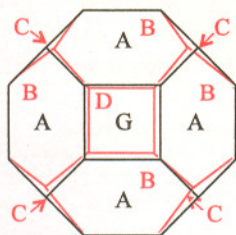
Oczywiście, nie będzie to wypełnienie sześciątami. Najpierw więc przedstawię odpowiedni wielościan.

Wyobraźmy sobie ośmiościan foremny o krawędzi 1, który ma naroża ścięte płaszczyznami przechodzącymi przez punkty leżące na krawędziach wychodzących z jednego wierzchołka w odległości $\frac{1}{3}$ od tego wierzchołka. Otrzymana figura (rys. 3) nosi nazwę *tetrakaidekahedron*, co znaczy, że ma 14 ścian, mianowicie 6 kwadratów i 8 foremnych sześciokątów (proszę sprawdzić).

Podejrzewam, że zdecydowana większość osób, które obejrzą rysunek 3 lub wezmą do ręki model czternastościanu, na pytanie *czy da się takimi bryłami szczelnie wypełnić przestrzeń?* odpowie NIE. Można, oczywiście, zaproponować wtedy wykonanie kilkunastu modeli (np. sklejonych z tekturki) i podjęcie doświadczeń.



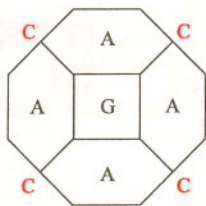
Rys. 3. Otrzymywanie tetrakaidekahedronu z ośmiościanu.



Rys. 4.

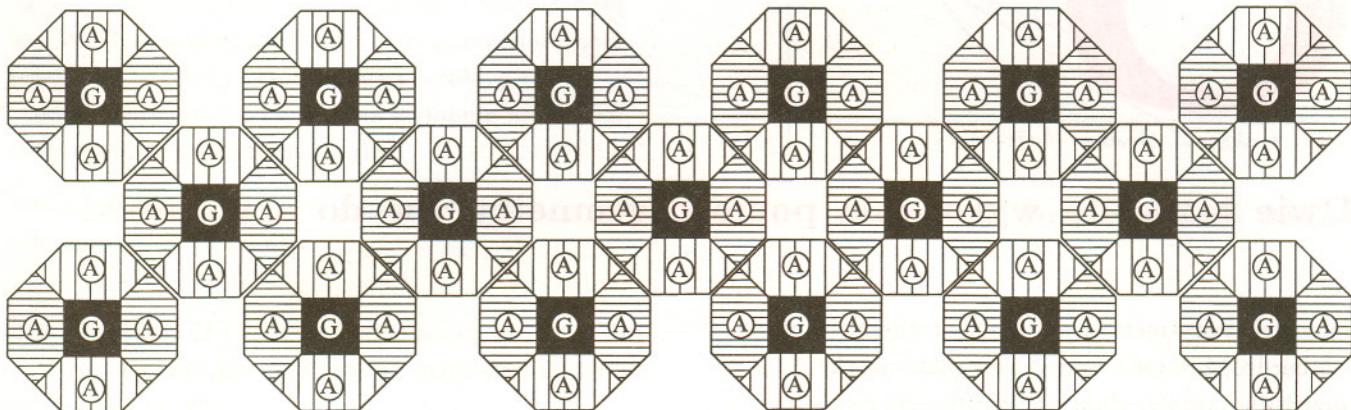
Jak jednak przekonać się bez wykonywania modeli (bo dla wielu sklejenie choćby kilku takich wielościanów może okazać się zbyt pracochłonne), że prawidłowa odpowiedź na to pytanie brzmi TAK?

Dla usprawnienia dalszych rozważań oznaczymy ściany czternastościanu w następujący sposób: sześciokąty widziane na rysunku 4 jako górne będą nosiły literę A, a widziane jako dolne – literę B, kwadraty dolny i górny odpowiednio literę D i G, wszystkie zaś kwadraty boczne – C.



Rys. 5. Rzut prostokątny tetrakaidekahedronu.

Przyjrzyjmy się rzutowi prostokątnemu czternastościanu na płaszczyznę jego ściany D . Jest to osmiokąt. Można z takich osmiokątów ułożyć posadzkę na płaszczyźnie. Mianowicie ułożymy osmiokąty w ten sposób, by stykały się **bokami** C . Otrzymana posadzka nie będzie szczelna – pomiędzy jej kafelkami pozostaną kwadratowe otwory (rys. 6). Ta sama posadzka to widok z góry czternastościanów ustawionych (na płaszczyźnie, np. na stole) obok siebie w ten sposób, by stykały się **ścianami** C . Wygląda to trochę tak, jak kartonowe panele używane w sklepach do jajek.

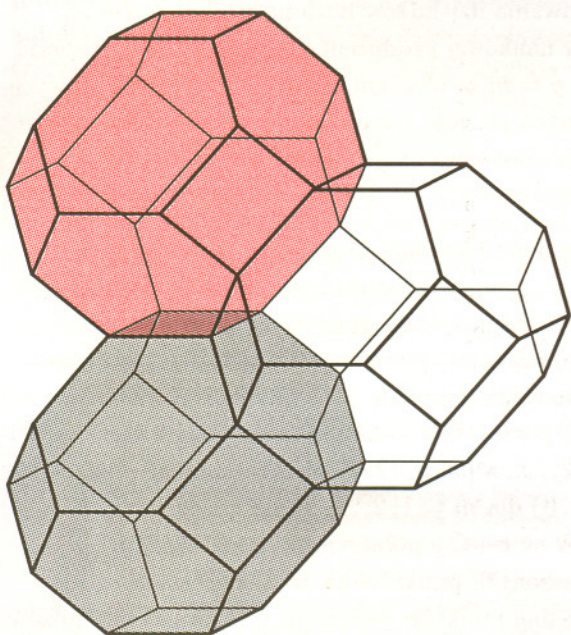


Rys. 6.

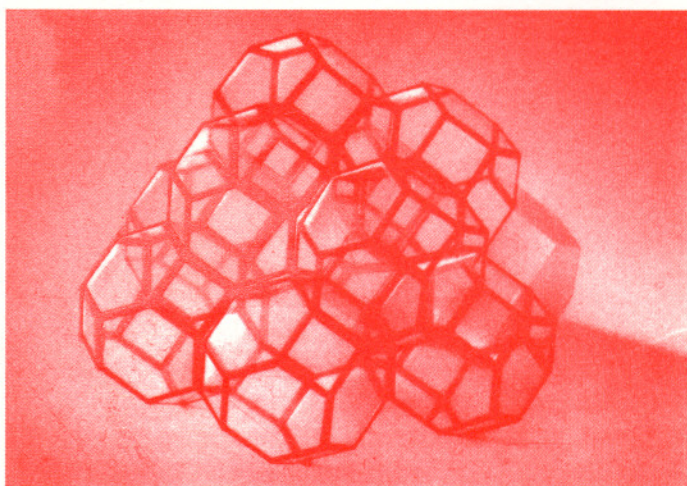
Przy tym wgłębienia są dokładnie takie same jak wypukłości. Biorąc zatem identyczną drugą warstwę czternastościanów można ją tak ułożyć na pierwszej, by w miejsce wolnych kwadratów dolnej warstwy weszły ściany D warstwy górnej, otwory zaś w drugiej warstwie były od dołu zatkane ścianami G dolnej warstwy. Ściany A dolnej warstwy będą dokładnie przylegać do ścian B warstwy górnej. I tak możemy dodawać nowe warstwy bez końca.

Na zakończenie wypada spróbować przedstawić rzecz przestrzennie. Rysunek 7 przedstawia trzy sąsiadujące czternastościany, a rysunek 8 większą ich liczbę. Ten ostatni jest zdjęciem modelu tej sytuacji zamieszczonym w *Kalejdoskopie Matematycznym* Hugona Steinhausa. Tam można też znaleźć sugestię, jak można wpaść na pomysł, że czternastościan jest bryłą realizującą minimalne wypełnienie normalne przestrzeni. Nie ma natomiast żadnych wskazówek sugerujących, jak wykazać, że jest to jedyna bryła o foremnych ścianach spełniająca oba te żądania. Pozostaje to zatem do zupełnie samodzielnych dociekań Czytelnika.

Fakt, że tetrakaidekahedron wypełnia szczelnie przestrzeń, jest dobrze znany biologom, którzy zajmują się strukturą komórek roślinnych, gdyż niektóre z nich mają właśnie taki kształt.



Rys. 7. Można wyobrazić sobie, że każdy z narysowanych czternastościanów należy do innej warstwy budowanego wypełnienia.



Rys. 8.



Dwie łatwe do wykonania pomoce geometryczne do arytmetyki

Geometria i arytmetyka wydają się różnymi światami.

Tak bardzo, że często nauczyciele matematyki uprzedzają, którego dnia na lekcji będzie geometria, a którego „reszta”. Zobaczmy więc, jak geometria może wyrażać fakty wybitnie arytmetyczne.

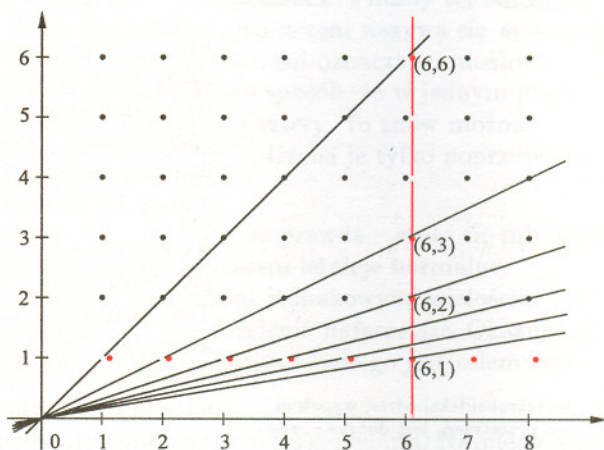
Poszukamy na płaszczyźnie najpierw dzielników dowolnej liczby naturalnej, a potem znajdziemy wszystkie liczby złożone (a co za tym idzie także wszystkie liczby pierwsze).

Zacznijmy od zaznaczenia na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych wszystkich punktów, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi. No dobrze, zaznaczcie tylko tyle, na ile Wam cierpliwości starczy, ale spróbujcie objąć wyobraźnią jak największy obszar płaszczyzny. Takie punkty nazywane są punktami *kratowymi*.

Teraz przez każdy punkt postaci $(k, 1)$, gdzie k jest dodatnią liczbą naturalną, poprowadźcie prostą przechodzącą przez punkt $(0, 0)$ (zgadzam się na ograniczenie: tyle, ile zdążycie poprowadzić przed obiadem). Taką prostą przechodzącą przez punkt $(k, 1)$ nazwijmy p_k . I już pierwsza pomoc naukowa jest gotowa. Chcecie sprawdzić, jakie dzielniki ma liczba 457? To proste. Poprowadźcie z punktu $(457, 0)$ prostą pionową. Punkty kratowe, w których ta prosta przecina proste p_k , wyznaczają dzielniki 457 (wszystkie, jeśli zdążycie poprowadzić wszystkie proste p_k od p_1 aż do p_{457}): są nimi rzędne owych kratowych punktów przecięcia.

Dlaczego? To jasne. Każda prosta p_k ma równanie $y = \frac{x}{k}$, więc jeśli prosta $x = 457$ przecina prostą p_k w punkcie $(457, m)$, to $m = \frac{457}{k}$, czyli m jest dzielnikiem 457. I odwrotnie: jeśli m jest dzielnikiem 457, to dla pewnej liczby naturalnej k ,

$457 = m \cdot k$, co oznacza, że punkt $(457, m)$ jest punktem wspólnym prostej $x = 457$ i prostej p_k .

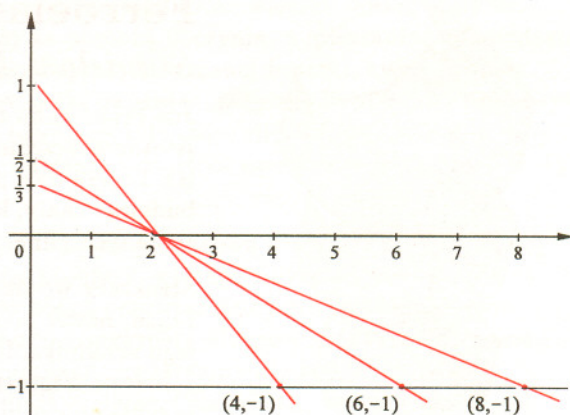


Otrzymaliśmy zatem prostą (!?) tablicę do wyszukiwania dzielników liczb naturalnych. Do tej pomocy naukowej producent dodaje premię: przecięcie prostej $y = m$ ze zbiorem punktów kratowych leżących na prostych p_k daje wszystkie wielokrotności liczby m . Ot, taka nieskończona geometryczna tabliczka mnożenia.

Druga pomoc naukowa, którą chcę Wam dzisiaj ofiarować, pomoże wyszukać wszystkie liczby pierwsze (są w świecie instytucje gotowe wiele zapłacić za bardzo dużą liczbę pierwszą; takie liczby są potrzebne do szyfrowania danych). Otóż tym razem zaznaczcie na osi Oy wszystkie punkty postaci $(0, \frac{1}{k})$ dla $k = 1, 2, \dots$, a na osi Ox wszystkie punkty postaci $(m + 1, 0)$ dla $m = 1, 2, \dots$. Teraz każdy z takich punktów na osi Oy połączcie prostą z każdym z wyznaczonych punktów na osi Ox . Pierwsze współrzędne punktów przecięcia tych prostych z prostą $y = -1$ dadzą zbiór wszystkich liczb złożonych.

Wyjaśnienie znów nie jest skomplikowane. Prosta przechodząca przez punkty $(0, \frac{1}{k})$ i $(m+1, 0)$ ma równanie $\frac{x}{m+1} + ky = 1$, a zatem punktem przecięcia tej prostej z prostą $y = -1$ jest punkt, którego pierwszą współrzędną jest $(m+1) \cdot (k+1)$. Otrzymaliśmy zatem liczbę złożoną. Z kolei jeśli n jest liczbą złożoną, to dla pewnych liczb naturalnych m i k jest $n = (m+1) \cdot (k+1)$, zatem n jest pierwszą współrzędną punktu przecięcia prostej przechodzącej przez punkty $(0, \frac{1}{k})$ i $(m+1, 0)$ z prostą $y = -1$. Zatem przedstawiona tu metoda wylapuje wszystkie liczby złożone i tylko takie liczby.

A skąd wziąć wszystkie liczby pierwsze? Cóż, należałoby się zastanowić...



Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL

Autobus, balonik i trzepak

Kiedy autobus gwałtownie hamuje, wszyscy pasażerowie doznają działania siły skierowanej do przodu, kiedy rusza – do tyłu. Gdy skręca w prawo, siła działa w lewo, gdy skręca w lewo, siła działa w prawo. Jest to siła bezwładności, jej istnienie wynika nie z oddziaływania innych ciał, ale z tego, że poruszający się ruchem zmiennym autobus jest nieinercyjnym układem odniesienia. W rzeczywistości pasażerowie cały czas poruszają się w ten sam sposób; to autobus przesuwają się „pod nimi”. Siła pozorną działającą na pasażera o masie m dana jest równaniem $\vec{F} = -m\vec{a}$, gdzie \vec{a} jest przyspieszeniem autobusu względem inercyjnego układu odniesienia. Oczywiście, na pasażerów w autobusie działają także i inne siły (choćby tarcie), które po pewnym czasie „dostosują” ich ruch do ruchu autobusu.

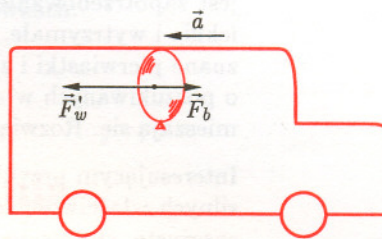
A co będzie się działo z balonikiem unoszącym się pod dachem autobusu? Także i na niego zadziała siła bezwładności. To jednak nie wszystko. Kiedy balonik unosi się tylko w polu grawitacyjnym, prócz siły ciężkości działa na niego także siła wyporu. Siła bezwładności jest jakby dodatkowym ciężarem, tyle, że skierowanym poziomo. Obecność powietrza skutkuje powstaniem dodatkowej siły wyporu skierowanej



Wypadkowa siły wyporu i ciężaru balonika wypełnionego gazem lżejszym od powietrza jest skierowana pionowo do góry i ma wartość

$$F_w - F_g = (\rho - \rho_b)vg,$$

v – objętość balonika, ρ – gęstość powietrza, ρ_b – gęstość gazu w baloniku, g – przyspieszenie grawitacyjne.



Siły działające na balonik w hamującym autobusie

$$F'_w - F_b = (\rho - \rho_b)va,$$

gdzie a jest przyspieszeniem autobusu. Wypadkowa sił F'_w i F_g jest zrównoważona przez siłę reakcji dachu autobusu.

przeciwnie niż siła bezwładności i większej od niej, jeśli tylko balonik wypełniono gazem lżejszym od powietrza. Tak więc podczas gdy w hamującym autobusie pasażerowie poddani działaniu siły bezwładności będą przesuwali się do przodu, balonik poddany działaniu wypadkowej siły bezwładności i „antybezwładnościowego” wyporu przesunie się do tyłu. A co się stanie z płomieniem świecy w podobnej sytuacji?

Innego przykładu działania sił bezwładności możemy się dopatrzeć (uwaga na oczy!) podczas trzepania dywanu. Uderzając w dywan trzepaczką nadajemy mu przyspieszenie. Na cząsteczki kurzu i piasku, tkwiące w jego włóknach, zadziała siła bezwładności o takim samym kierunku, jak uderzenie trzepaczką, ale o przeciwnym zwrocie. Jeśli cząsteczki piasku i kurzu są mocno zaklinowane, to – aby je usunąć – potrzebujemy dużej siły, ponieważ musimy pokonać spore siły tarcia. Dlatego siła bezwładności powinna być większa od maksymalnej wartości tarcia statycznego działającego na niepożądane cząsteczki. Dywan musi uzyskać duże przyspieszenie, te zaś jest odwrotnie proporcjonalne do jego (zazwyczaj dość dużej) masy. Wszystko to sprawia, że trzepanie jest takie męczące!

Krzysztof REJMER

Ferroelastyczne kompozyty

Stanisław BEDNAREK

Już przed kilku tysiącami lat człowiek zaczął wytwarzać materiały złożone. Istotne znaczenie dla rozwoju naszej cywilizacji miała epoka brązu, a materiał ten tworzą dwa pierwiastki – miedź i cyna. Również bardzo dawno zaczęto budować chaty, których ściany składały się z wyschniętych łodyg roślin spajanych gliną.

Struktury wewnętrzne tych materiałów różnią się zasadniczo. Oglądając kawałek brązu, nawet pod dużym powiększeniem, trudno jest wyróżnić granicę między jego składnikami. W przypadku drugiego materiału już gołym okiem można zobaczyć fragmenty roślin i łączącą je glinę. Pierwszy z tych materiałów jest przykładem stopu, a drugi – kompozytu. Dokładniej: kompozytem nazywa się materiał złożony z połączonych ze sobą różnych substancji lub materiałów, pomiędzy którymi daje się wyróżnić określone granice.

Niektóre kompozyty człowiek produkował mniej lub bardziej świadomie od dawna, inne wytwarza sama Przyroda. Naturalnym kompozytem jest np. drewno. Gwałtowny wzrost zainteresowania kompozytami nastąpił jednak około 40 lat temu, kiedy zaczęła powstawać nowa, interdyscyplinarna dziedzina badań, nazywana obecnie nauką o materiałach.

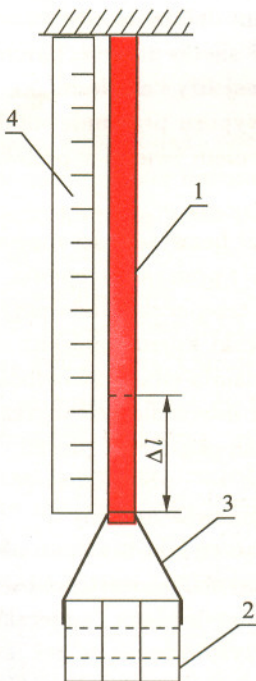
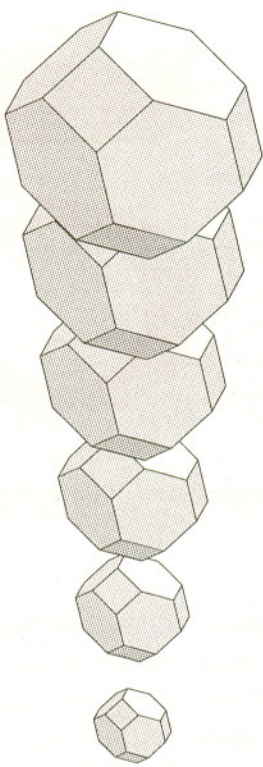
Głównym powodem, dla którego wytwarza się i bada wciąż nowe kompozyty, jest zapotrzebowanie na materiały o specjalnych właściwościach, np. bardzo lekkie i wytrzymałe. Często się zdarza, że pożądanymi właściwościami nie mają znane pierwiastki i związki chemiczne. Nie da się również uzyskać stopu o poszukiwanych właściwościach, bowiem nie wszystkie metale w stanie ciekłym mieszają się. Rozwiązanie problemu może dać wówczas sporządzenie kompozytu.

Interesującym przykładem kompozytów są ferroelastyki, czyli materiały o dość silnych właściwościach magnetycznych i dużej podatności na odkształcenia sprężyste, stosowane np. w czujnikach i przetwornikach elektromechanicznych.

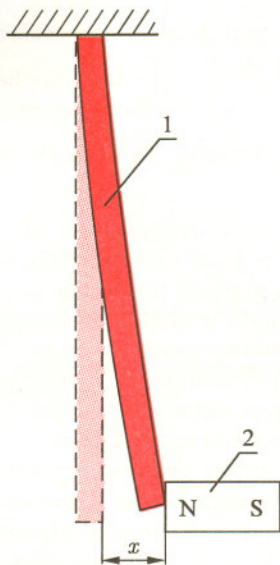
Ferromagnetyki są mało podatne na odkształcenia. Żeby zwiększyć o 0,2% długość stalowego pręta o średnicy 1 cm, potrzebna jest siła około $3,4 \cdot 10^4$ N. Przy tym wydłużeniu pręt naprężony jest prawie do granic wytrzymałości, ponieważ siła $3,9 \cdot 10^4$ N spowoduje już jego rozerwanie. Niektóre stopy ferromagnetyczne są kruche i ulegają zniszczeniu przy jeszcze mniejszych odkształceniach. Istnieją jednak materiały wytrzymujące wydłużenie nawet 10 razy większe od ich długości początkowej. Są to tzw. elastomery, np. kauczuki chloroprenowe lub silikonowe. Materiały te wykazują bardzo słabe właściwości magnetyczne.

Ferroelastyk otrzymamy umieszczając cząstkę ferromagnetyka wewnątrz elastomeru. Wytworzenie takiego materiału kompozytowego i zbadanie niektórych jego właściwości jest możliwe w warunkach amatorskich. Do tego celu potrzebne będą: kilkadziesiąt gramów drobnych opiłków stalowych, tubka silikonu, strzykawka lekarska, podstawka do szklanki, drewniana łożatka, linijka, małe naczynie – naparstek albo kieliszek do lekarstw, niewielki magnes, np. od zatrzasku meblowego lub tablicy magnetycznej, nici oraz kilka dużych, jednakowych nakrętek. Silikon można kupić w sklepie chemicznym, ponieważ jest powszechnie stosowany jako masa klejąco-uszczelniająca. Ma on konsystencję pasty ulegającej samoistnej polimeryzacji w kontakcie z powietrzem. W wyniku tego otrzymuje się bardzo elastyczne ciało stałe podobne do gumy.

Od strzykawki odcinamy końcówkę do nakładania igły, uzyskując w ten sposób powiększony otwór wylotowy o średnicy 3–4 mm. Wyjmujemy tłok strzykawki i wyciskamy do niej z tuby 3–4 cm³ silikonu. Następnie wkładamy tłok, strzykawkę przesuwamy powoli i jednostajnie nad kartką papieru wyciskając silikon. W ten sposób powstaje włókno o przekroju kołowym, które pozostawiamy na kilka godzin do spolimeryzowania. Będzie to nasza próbka kontrolna. Tym samym sposobem sporządzamy kilka próbek używając



Rys. 1. Pomiar wydłużenia próbki Δl :
1 – próbka, 2 – nakrętka, 3 – nić,
4 – linijka.

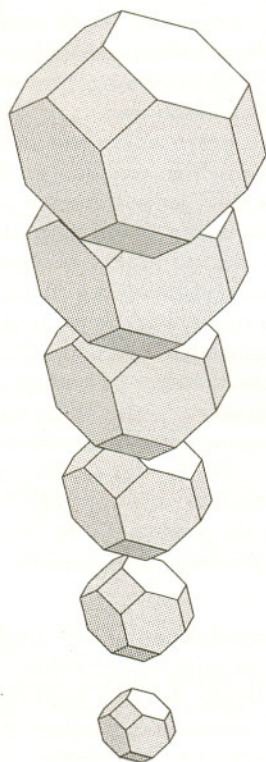


Rys. 2. Badanie właściwości magnetycznych próbek: 1 – próbka, 2 – magnes.

zamiast czystego silikonu jego mieszaniny z coraz większą ilością opiłków. Objętości opiłków odmierzymy za pomocą naczynia, a mieszaninę sporządzamy na podstawie do szklanki korzystając z drewnianej łopatki, którą również wkładamy mieszaninę do strzykawki uważając, żeby nie było w niej pęcherzyków powietrza. Za każdym razem używamy tyle samo silikonu wyciskając z tuby słupki o jednakowej długości, natomiast objętość opiłków zwiększamy o stałą wartość, np. o $0,5 \text{ cm}^3$.

Spolimeryzowane próbki przycinamy na jednakową długość i przystępujemy do badania. Najpierw bierzemy próbkę z czystego silikonu i zawieszamy za jeden koniec, a do jej drugiego końca przywiązujemy kolejno jedną, dwie, trzy... nakrętki (rys. 1). Mierzmy przyrosty długości próbki spowodowane tymi obciążeniami. Te same pomiary powtarzamy dla kolejnych próbek zawierających coraz większe ilości opiłków. Okazuje się, że im większa jest zawartość opiłków, tym mniejsze są przyrosty długości próbek spowodowane tym samym obciążeniem.

Następnie oceniamy właściwości magnetyczne. W tym celu do swobodnie zwisającego końca próbki zbliżamy powoli magnes i mierzymy, z jakiej odległości przyciągnął on koniec próbki (rys. 2). Próbki o optymalnych właściwościach magnetycznych i elastycznych otrzymuje się przy średniej zawartości opiłków. Jeżeli do sporządzenia kompozytu użyjemy opiłków stali magnetycznie twardej, możemy próbki trwale namagnesować. Uzyskamy w ten sposób elastyczne magnesy przydatne do różnych interesujących doświadczeń i stosowane nieraz, np. jako uszczelki w lodówkach.



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 783. Udowodnić, że jeśli wszystkie płaskie przekroje środkowosymetrycznego wielościanu wypukłego K mają pole powierzchni nie większe niż 2, to jego objętość jest mniejsza niż 4.

Rozwiązanie na str. 14

M 784. Czy jeśli dwie bryły środkowo-symetryczne mają takie same pola wszystkich przekrojów płaszczyznami przechodzącymi przez środek symetrii, to muszą mieć jednakową objętość?

Rozwiązanie na str. 13

M 785. Udowodnić, że z dowolnej bryły o objętości 1000 można wybrać 200 punktów, z których żadne dwa nie są odległe o mniej niż 1.

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Krzysztof REJMER

F 435. Cząstka o masie m i ładunku q znajduje się w skrzyżowanych polach: elektrycznym i magnetycznym:

$$\mathbf{E} = E_0(\mathbf{i} \cos \omega t + \mathbf{j} \sin \omega t),$$

$$\mathbf{B} = -B_0 \mathbf{k},$$

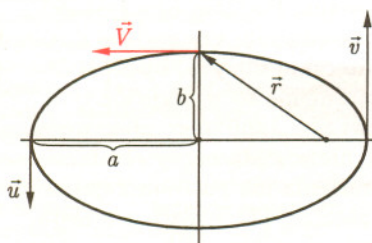
gdzie $\omega = \frac{qB}{m}$ ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ są wersorami kartezjańskiego układu współrzędnych). W chwili początkowej ($t_0 = 0$) cząstka spoczywa w początku układu współrzędnych. Znaleźć jej trajektorię i energię kinetyczną w chwili t .

Uwaga: przyjmujemy, że pole E jest wolnozmiennie i zanedbujemy efekty związane z promieniowaniem.

Rozwiązanie na str. 5

F 436. Prędkość planety w perihelium jest równa v , natomiast w aphelium jest równa u . Obliczyć prędkość V tej planety w chwili, gdy znajdzie się ona na małej osi elipsy będącej jej trajektorią.

Rozwiązanie na str. 5



Małe „conieco” dla Kubusia Puchatka

Krzysztof REJMER

W rodzinie naszej mawiano, że ojciec po zjedzeniu gruszki miał ręce mokre aż do łokci, a po chlebie z miodem potrzebna mu była kąpiel.

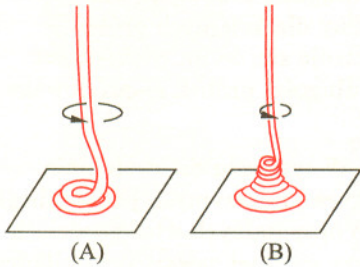
Christopher Milne
Zaczarowane miejsca

Tak po latach scharakteryzował swego ojca dawny bohater *Kubusia Puchatka*, już nie mały Krzys, ale dorosły Christopher.

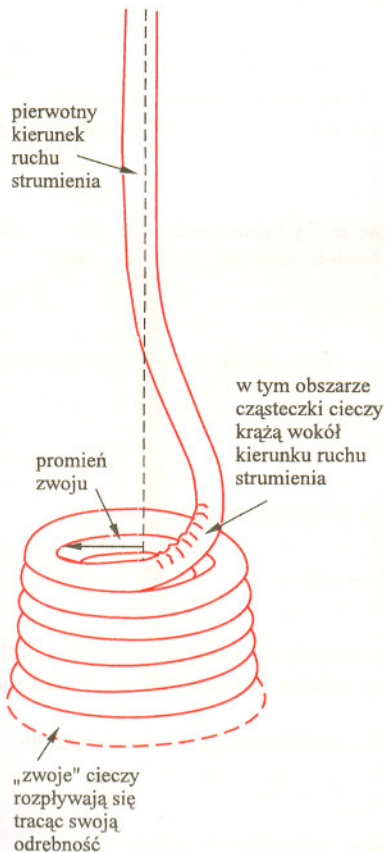
Jedzenie miodu może być nie tylko przyjemnością (lub utrapieniem), ale także pretekstem do obserwacji własności płynów o dużej lepkości. Strumień płynnego miodu spadający z pewnej wysokości na płaszczyznę (może nią być zarówno kanapka, jak i swobodna powierzchnia miodu w słoiku) zachowuje się zupełnie inaczej niż woda. Jeśli strumień ma kołowy przekrój, to po zbliżeniu się do płaszczyzny odchyła się od pionu i wykonuje ruch okrężny wokół pierwotnego kierunku spadania. Strużka płynu układa się na płaszczyźnie w stożek przypominający zwoje liny ułożone jeden na drugim. Dół stożka powoli rozplywa się po powierzchni, jednak w najwyższej części zwoje są wyraźnie rozdzielone, a w środku stożka tworzy się niewielkie zagłębienie. Zjawisko to jest charakterystyczne nie tylko dla miodu, ale także dla innych płynów o dużej lepkości: smoły, gliceryny, syropów czy niektórych rodzajów oleju. Szczególnie ładne zwoje o dużym promieniu i na dodatek nie rozplywające się po płaszczyźnie można uzyskać posługując się prawie pustym pojemnikiem z żelem do golenia.

Zanim zastanowimy się nad tym pozornie niezwykłym zjawiskiem, dokonajmy podziału płynów na dwie grupy. Do pierwszej należą płyny, których lepkość zależy jedynie od temperatury (maleje z jej wzrostem); są to płyny newtonowskie. Druga grupa to płyny nienewtonowskie, których lepkość zależy nie tylko od temperatury, ale także od naprężeń w płynie – na ogół im większe jest naprężenie, tym mniejsza lepkość. Z płynami nienewtonowskimi o dużej lepkości mamy do czynienia na co dzień, najlepszym przykładem jest masło czy margaryna, które w niezbyt wysokich temperaturach ze względu na dużą lepkość same nie rozplywają się po powierzchni kanapki, jednak można je rozsmarować nożem, gdyż pod naciskiem ich lepkość w znacznym stopniu zmniejsza się. Płynami nienewtonowskimi są liczne inne produkty spożywcze: ketchup, majonez, musztarda, roztwory żelatyny oraz tytułowy miód. Są nimi także krochmal oraz farby, które nie powinny same rozplywać się po malowanej powierzchni, powinny natomiast łatwo dać się rozprowadzić pędzlem. Nie potrafimy do końca odpowiedzieć na pytanie, jaki mechanizm powoduje zmiany lepkości pod wpływem naprężenia. Prawdopodobnie istotną rolę odgrywa tu struktura cząsteczkowa; płyny nienewtonowskie mają zwykle duże cząsteczki o złożonej budowie. Pod wpływem naprężenia cząsteczki te ulegają rozciągnięciu i wyprostowaniu w kierunku działającej siły, co powoduje zmniejszenie wewnętrznego tarcia. Gdy naprężenie znika, cząsteczki powracają do swoich pierwotnych kształtów. Zmniejszenie się lepkości wywołane naprężeniem ułatwia także wyciskanie lepkiego płynu z tubki.

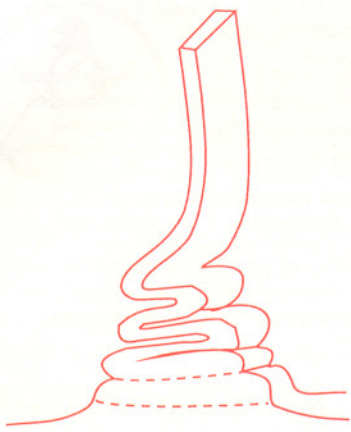
Własnościami nienewtonowskich płynów najprawdopodobniej należy tłumaczyć zjawisko znane jako „cud Św. Januarego”. Święty ten miał zostać zabity na początku czwartego wieku za odmowę zaparcia się wiary. Jedną z jego relikwii jest krew umieszczona w oprawnej w złoto szklanej ampułce, przechowywanej w Neapolu, którego San Gennaro jest patronem. Regularnie dwa razy w roku, a także w sytuacjach szczególnych zakrzepła bryłka krwi upłynnia się; jest to zjawisko bardzo dobrze udokumentowane. Podczas uroczystości ampułka wielokrotnie jest odwracana w celu sprawdzenia, czy cud się dokonał. Może to spowodować powstanie naprężeń dostatecznie dużych, by lepkość substancji uległa znacznemu zmniejszeniu. Wyjaśnienie to wydaje się tym bardziej prawdopodobne, że upłynnienie się krwi Św. Januarego obserwowano także podczas reperacji ampułki. Jej zawartość nie została nigdy zbadana. Neapolitańczycy nie przyjęli do wiadomości skreślenia ich patrona z listy świętych, a komisję papieską, która miała cud zbadać, przepędzili z miasta. Zjawiska tego rodzaju, polegające na upłynnianiu się niektórych żeli podczas



Rys. 1. Strumień cieczy o dużej lepkości zatrzymany na płaszczyźnie tworzy stożek.
(A) gruby strumień „zwija się” w stożek powoli, tworząc stożek o dużym promieniu i niewielkiej wysokości.
(B) wąski strumień „zwija się” w stożek znacznie szybciej, tworząc wysoki stożek o małym promieniu.



Rys. 2. Stożek cieczy o dużej lepkości.



Rys. 3. Płaski strumień lepkiej cieczy układa się „w harmonijkę”.

mieszania lub wstrząsania, a potem zestalaniu się, kiedy pozostawić je w spokoju, nazywane są tiksotropią. Znane są żele, które upłynniają się już przy bardzo małych zaburzeniach.

Powróćmy jednak do spadającego na płaszczyznę strumienia płynu. Jeśli jego prędkość jest większa niż prędkość, z jaką może się on rozpląnąć po płaszczyźnie, w miejscu zetknięcia się płynu z płaszczyzną tworzy się stożek. Wyhamowanie płynu powoduje powstanie w nim naprężenia, które jest odpowiedzialne za wygięcie i wirowy ruch strumienia. Dokładny opis tego zjawiska nie istnieje, posłużmy się więc analogią. Jeśli sprężysty pręt postawimy pionowo na płaskim podłożu i podziałamy na niego siłą skierowaną pionowo w dół, to w przypadku twardego podłoża pod wpływem naprężenia pręt może się wygiąć w bok, a nawet pęknąć. W którą stronę się wygnie, tego określić nie można, decydują o tym drobne niejednorodności pręta oraz możliwe nieznaczne odchylenia od pionu. Podobnie jest w przypadku liny i strumienia lepkiej cieczy, z tą różnicą, że nie są to ciała sprężyste, więc ich odkształcenie ma inny charakter. Ale także i w tym przypadku istniejące w strumieniu niejednorodności decydują o tym, w którą stronę strumień zacznie się wyginać.

Strumień cieczy spadającej w polu grawitacyjnym w trakcie spadania zężeja się. Wytlumaczenie tego jest proste. Przez każdy poprzeczny przekrój strumienia w jednostce czasu przepływa taka sama objętość cieczy, skoro jednak wzrasta jej prędkość, musi zmniejszyć się pole jej przekroju. Im węższy jest strumień (a więc im większa jest jego prędkość), tym węższy i wyższy stożek powstaje na płaszczyźnie i większa jest częstotliwość wirowania strumienia. W przypadku płynów nienewtonowskich przebieg zjawiska jest bardziej skomplikowany; duża prędkość strumienia oznacza, że w trakcie hamowania przy zderzeniu z płaszczyzną powstaje w nim duże naprężenie, a zatem duży jest też spadek lepkości i znacznie szybsze rozpląwanie się po płaszczyźnie. Interesujące nas zjawisko może wtedy wcale się nie pojawić. Jeśli przekrój strumienia nie jest kołem, zjawisko także przebiega inaczej. Płaski strumień zachowuje się jak tasiemka – zwija się w harmonijkę. Strumień nieregularny wije się w chaotyczny sposób układając jedną warstwę na drugiej, ale w różne strony.

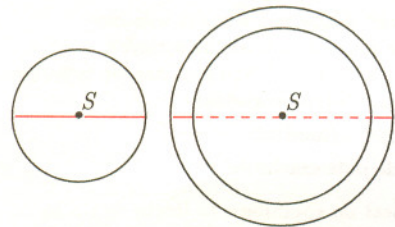
Wirowy ruch strumienia w obszarze znajdującym się bezpośrednio nad stożkiem na pozór może się wydawać sprzeczny z zasadą zachowania momentu pędu; tak jednak nie jest. Kiedy strumień odchyli się od pionu, cząsteczki płynu nie tylko poruszają się wzdłuż strumienia, ale także wykonują ruch obrotowy wokół kierunku spadania; przyczyną tego ruchu jest działanie momentów sił ciężkości i bezwładności. Istnienie tego ruchu jest trudne do zaobserwowania, a w warunkach domowych raczej niemożliwe. Najprostszy sposób polega na dodaniu do płynu drobnych cząsteczek, na przykład metalowych opiłków i śledzeniu ich ruchu z wykorzystaniem stroboskopu.

Kuchnia jest doskonałym miejscem do zabaw z lepкими płynami, trzeba jednak uważać, by nie stać się obiektem podobnych żartów jak A.A. Milne. Bardziej wyrafinowane, choć podobne eksperymenty można wykonać ze strumieniem lepkiej cieczy spadającym w innej cieczy o mniejszej lepkości. Najciekawszy jest ruch strumienia w warstwie podwójnej, w której ciecz o mniejszej gęstości znajduje się nad cieczą o gęstości większej (na przykład benzyna nad wodą). Przyspieszenie strumienia jest większe w warstwie górnej, dlatego gdy trafi on na granicę warstw, ulega wyhamowaniu, a powstające w nim naprężenie – jeśli jest dostatecznie duże – powoduje, że ruch strumienia przestaje być stabilny, strumień wygina się i zaczyna krążyć wokół pionu.

Na koniec wspomnijmy o czymś tylko pozornie odległym. Wiele ciał stałych, poddanych działaniu naprężeń, zachowuje się podobnie jak nienewtonowski, lepki płyn – zmniejsza się ich tarcie wewnętrzne. Należą do nich miękkie skały, na przykład piaskowce. To właśnie tą cechą, a nie precyzyjnym wykonaniem (nie umniejszając w niczym inżynierskich umiejętności starożytnych Egipcjan), należy tłumaczyć świetne dopasowanie skalnych bloków, z których zbudowane są piramidy. Ciśnienie u podnóża piramidy, wywołane jej ciężarem, jest przecież ogromne; w tych warunkach następuje znaczne zmniejszenie się wewnętrznego tarcia i miękka skała zachowuje się jak ciało plastyczne.



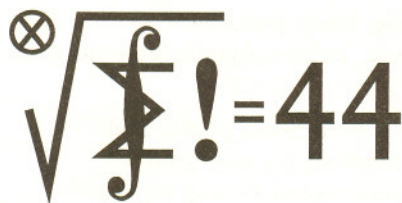
Rozwiązanie zadania M 784. Nie. Rozważmy kulę o promieniu 3 i kulę o promieniu 5 z usuniętą z jej wnętrza koncentryczną z nią kulę o promieniu 4.



Przekroje płaszczyznami przechodzącymi przez środki symetrii tych brył mają pola odpowiednio 9π i $(25 - 16)\pi$, a więc równe, jednakże objętość pierwszej bryły wynosi 36π , drugiej zaś – aż $\frac{234}{3}\pi$.



Rozwiązanie zadania M 785. Wyboru dokonamy indukcyjnie. Pierwszy punkt możemy wybrać dowolnie. Załóżmy, że wybraliśmy już z bryły $n < 200$ punktów, z których żadne dwa nie są oddalone mniej niż o 1. Rozważmy zbiór będący sumą kulek o środkach w tych punktach i promieniach równych 1. Objętość tego zbioru nie przekracza $\frac{4}{3}\pi n < 5n < 1000$, zatem nie może on zawierać całej bryły. Wybierzmy dowolny punkt bryły nie należący do tego zbioru – będzie on odległy od każdego z wybranych przednio punktów o co najmniej 1. Indukcję można więc prowadzić aż do osiągnięcia $n = 200$, co kończy dowód.



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1996

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 311 ($WT=2,13$) i 312 ($WT=2,71$)
z numeru 12/1995

Jerzy Witkowski	-	Włodzisław Śl.	46,10
Piotr Lipiński	-	Radom	41,89
Henryk Kornacki	-	Augustów	40,45
Tadeusz Józefczyk	-	Poznań	38,10
Krzysztof Zapisek	-	Warszawa	37,54

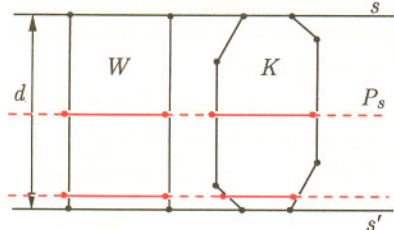
Pan Witkowski: numer 79

w Klubie 44 M.



Rozwiązanie zadania M 783.

Oznaczmy objętość wielościanu K przez V . Niech s będzie płaszczyzną zawierającą jedną ze ścian K , s' zaś jej obrazem w symetrii względem środka symetrii wielościanu. Oznaczmy przez P_s pas przestrzeni zawarty między płaszczyznami s i s' . Niech d oznacza szerokość pasa P_s , czyli odległość między płaszczyznami s i s' , a W niech będzie walcem o polu podstawy 2 i podstawach zawartych w płaszczyznach s i s' .



Przekrój K dowolną płaszczyzną równoległą do s ma pole nie większe niż 2, czyli niż jej przekrój W , więc na mocy zasady Cavalieriego objętość wielościanu K nie przekracza objętości walca W ; zatem $2d \geq V$, co oznacza, że kula o promieniu $\frac{V}{4}$ i środku w środku symetrii wielościanu K zawiera się w pasie P_s . Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnej ściany wielościanu, więc kula ta zawiera się w przecięciu pasów przedłużających wszystkie pary równoległych ścian, czyli w samym wielościanie K . Stąd wynika oczywista nierówność między objętościami kuli i wielościanu:

$$\frac{4}{3}\pi \left(\frac{V}{4}\right)^3 \leq V,$$

skąd $V \leq \sqrt{\frac{48}{\pi}} < 4$, co kończy dowód.

Z twierdzenia Andersona (patrz zadanie M 732, *Delta* 3/1995) wynika, że w założeniach zadania wystarczy rozpatrywać przekroje płaszczyznami przechodzącymi przez środek symetrii wielościanu. Czytelnik zechce zastanowić się, czy podobne szacowania zachodzą dla wielościanów niesymetrycznych.

Skróć regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Zadania z matematyki nr 325, 326

Redaguje Marcin E. KUCZMA

325. Okrąg wpisany w trójkąt ostrokątny ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach P i Q . Prosta przechodząca przez jego środek i równoległa do boku BC przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach K i L . Odcinki KQ i LP przecinają się w punkcie S . Odcinek SN jest wysokością w trójkącie KLS . Dowiedź, że $\angle PNS = \angle QNS$.

326. Udowodnić, że dla liczb $\alpha, \beta \in (-\pi/2; \pi/2)$ zachodzi nierówność

$$\ln \frac{1 - \sin \alpha}{1 - \sin \beta} \cdot \ln \frac{1 + \sin \beta}{1 + \sin \alpha} \geq (\beta - \alpha)^2.$$

Zadanie 326 zaproponował pan Krzysztof Zapisek z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1996

Przypominamy treść zadań:

321. Po nieskończonej szachownicy porusza się (m, n) -koń, czyli figura, która w każdym ruchu przemieszcza się o m pól poziomo i n pól pionowo – lub odwrotnie. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych $m, n \geq 1$, dla których (m, n) -koń, startując z dowolnego pola szachownicy, może osiągnąć każde inne pole.

322. Dane są liczby naturalne $m, q > 1$ oraz liczba p określona przez równanie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Obliczyć część całkowitą sumy $1^{-1/p} + 2^{-1/p} + \dots + (m^q - 1)^{-1/p}$.

321. Przyjmijmy, że (m, n) -koń startuje z pola $(0, 0)$. Jeśli liczby m i n mają wspólny dzielnik $d > 1$, to (m, n) -koń porusza się tylko po polach (x, y) o obu współrzędnych podzielnych przez d . Jeśli suma $m + n$ jest liczbą parzystą, to (m, n) -koń porusza się tylko po polach (x, y) o obu współrzędnych jednakowej parzystości. Zatem warunek:

$$(*) \quad \text{NWD}(m, n) = 1; \quad m + n \equiv 1 \pmod{2}$$

jest konieczny na to, aby (m, n) -koń mógł osiągnąć każde pole szachownicy.

Wykażemy, że jest to także warunek dostateczny. Jeśli jest on spełniony, to liczby m i n są różnej parzystości – można przyjąć, że n jest liczbą parzystą, a m nieparzystą – oraz istnieją liczby naturalne k, l spełniające równość $kn - lm = 1$. Weźmy pod uwagę liczby naturalne

$$c_1 = \frac{1}{2}(m+1)k, \quad c_2 = \frac{1}{2}(m+1)l, \quad c_3 = \frac{1}{2}nk, \quad c_4 = \frac{1}{2}nl$$

oraz wektory

$$\mathbf{v}_1 = [n, m], \quad \mathbf{v}_2 = [-n, m], \quad \mathbf{v}_3 = [-m, n], \quad \mathbf{v}_4 = [m, n].$$

Dzielny nasz koń jest w stanie przemieścić się o każdy z wektorów $\pm \mathbf{v}_i$, więc także i o wektor

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= c_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + c_2(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + c_3(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) + c_4(-\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_4 = \\ &= [kn(m+1) - lm(m+1) - m, (kn - lm - 1)n] = [1, 0] \end{aligned}$$

– więc także i o każdy z wektorów $[0, 1]$, $[-1, 0]$, $[0, -1]$. To znaczy, że jest w stanie osiągnąć każde pole szachownicy. Zatem warunek $(*)$ charakteryzuje szukane pary (m, n) .

322. Funkcja $f(x) = x^{-1/p}$ jest ciągła oraz malejąca na przedziale $(0; \infty)$. Niech $n = m^q$. Rozważana w zadaniu suma S spełnia zależność:

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) > \int_1^n f(x) dx > \sum_{k=2}^n f(k) > S - f(1) = S - 1.$$

A ponieważ

$$\int_1^n f(x) dx = qx^{1/q} \Big|_1^n = q(m-1),$$

otrzymujemy stąd dwustronne oszacowanie $q(m-1) < S < q(m-1) + 1$, które pokazuje, że część całkowita liczby S równa się $q(m-1)$.



223. Na powierzchni wody pływa:

a) prostopadłościan o bokach a , b i h , przy czym krawędź h jest pionowa.

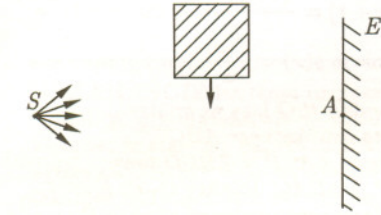
b) walec o promieniu r i wysokości (pionowej) h ,

c) stożek o kącie rozwarcia 2α i wysokości h , podstawą do góry.

Jeśli wszystkie bryły są jednorodne, to jakie warunki muszą spełniać gęstość ρ oraz wymienione parametry, aby w tej pozycji równowaga była stabilna, tzn. aby po małym wychyleniu bryła powracała do pozycji początkowej?

Wystarczy podanie jednego z trzech rozwiązań, przy czym maksymalna ocena wynosi 0,8 w przypadku a), 0,9 w przypadku b) i 1 w przypadku c).

224. Punktowe źródło światła S oświetla ekran E (rys. 1). Czy wstawienie między źródło a ekran płaskorównoległej, płytki szklanej spowoduje wzrost natężenia oświetlenia środkowej części ekranu (okolice punktu A), czy spadek, czy też natężenie oświetlenia nie zmienia się? Jeśli wystąpi zmiana, to czy będzie ona silniejsza, gdy płytkę o ustalonej grubości wsuniemy bliżej źródła, czy bliżej ekranu? Zakładamy, że płytkę jest pokryta warstwą przeciwodblaskową eliminującą odbicie, a szkło jest doskonale przezroczyste.



Rys. 1.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1996

Przypominamy treść zadań:

219. Jeden koniec nierozciągliwej i nieważkiej nitki o długości l jest przymocowany do pewnego punktu na powierzchni bocznej walca o promieniu r , a drugi koniec – do małej kulki znajdującej się w odległości $l+r$ od osi walca (rys. 2). W chwili początkowej kulka była nieruchoma, a walec wprawiono w ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową ω wokół jego osi. Gdy nitka się nawinie, z jaką prędkością kulka uderzy w walec? Na kulkę działa tylko siła wywierana przez nitkę (pomijamy siłę ciężkości i opory ruchu).



Rys. 2

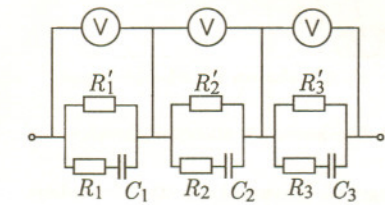
219. Zastosujmy zasadę zachowania energii w układzie nieinercyjnym obracającym się razem z walcem. W tym układzie na kulkę znajdującą się w odległości r' od osi działa siła odśrodkowa $m\omega^2 r'$, której można przypisać „potencjalną energię odśrodkową” – wyższą bliżej osi, a niższą z dala od niej. Standardowe całkowanie prowadzi do wzoru na tę energię: $E_{odśr} = -(1/2)m\omega^2 r'^2$. Ponadto na kulkę działa też siła Coriolisa, ale – podobnie jak siła napięcia nitki – jest ona skierowana prostopadle do kierunku ruchu kulki, więc nie wykonuje nad nią pracy i w bilansie energii można ją pominąć. Ponieważ w chwili początkowej kulka w układzie inercyjnym była nieruchoma, więc w układzie obracającym się jej prędkość wynosiła $\omega r'$ (gdzie $r' = l+r$) i widzimy, że energia kinetyczna była równa energii odśrodkowej z przeciwnym znakiem, czyli całkowita energia jest równa zeru. Tak samo będzie i w chwili uderzenia kulki o walec, gdy odległość od osi będzie równa r – zatem prędkość uderzenia wyniesie $v = \omega r$. Prędkość ta będzie skierowana prostopadle do powierzchni walca, czyli w układzie inercyjnym prędkość kulki będzie miała także składową styczną o tej samej wartości ωr .

Alternatywną metodą rozwiązania jest zastosowanie zasad zachowania energii i momentu pędu w układzie inercyjnym, przy czym początkowo należy przyjąć, że walec ma pewien dany moment bezwładności I , po czym przejść do granicy $I \rightarrow \infty$ (lub $m \rightarrow 0$, gdzie m – masa kulki).

220. Rozwiązaniem może być obwód przedstawiony na rysunku 3, przy czym zakładamy, że $R'_1 \gg R_1$, $R'_2 \gg R_2$, $R'_3 \gg R_3$. Początkowo prąd płynie głównie przez dolną gałąź wszystkich trzech „czarnych skrzynek”, a dopóki kondensatory się nie naładują w znaczącym stopniu, dopóty napięcia będą proporcjonalne do oporów R_1 , R_2 i R_3 . Zgodność z pierwszą serią danych osiągniemy więc kładąc $R_3 = 3R_1$ oraz $R_2 = 2R_1$. Po pewnym czasie kondensatory naładują się jednakowym ładunkiem i – jeśli wciąż można pominąć górne gałęzie – prąd przestanie płynąć. Wtedy napięcia będą odwrotnie proporcjonalne do pojemności kondensatorów – przyjmijmy więc $C_3 = 1,5C_1$ i $C_2 = 3C_1$. Wreszcie po odpowiednio długim czasie będziemy mieli do czynienia tylko z bardzo małym prądem płynącym w górnej gałęzi, a napięcia będą proporcjonalne do oporów „primowanych” – należy zatem położyć $R'_1 = 2R'_3$, $R'_2 = 3R'_3$.

Czas charakterystyczny dla przejścia od pierwszego do drugiego zestawu wskazań woltomierzy jest równy $\tau = R_z C_z$, gdzie R_z jest oporem zastępczym trzech dolnych oporników połączonych szeregowo, a C_z – analogiczną pojemnością zastępczą. Oznacza to, że dojście do drugiego zestawu wskazań nastąpi po czasie rzędu kilku (3–5) τ . Czas charakterystyczny dla „włączenia się” górnej gałęzi jest rzędu $R'_1 C_1$ (lub $R'_2 C_2$, lub $R'_3 C_3$; dla uproszczenia zaniedbajmy różnice). Oczywiście, ten czas powinien być znacznie dłuższy od τ , a ustalenie się stanu końcowego nastąpi po czasie jeszcze kilka razy dłuższym.

Zgodnie z podaną wskazówką należało założyć, że opór wewnętrzny woltomierzy jest bardzo wielki (znacznie większy od wszystkich innych oporów). Ewentualnie można również przyjąć, że ten opór jest podobnego rzędu co opory „primowane” i uwzględnić go (w sensie połączenia równoległego) przy obliczaniu wartości R'_1 , R'_2 i R'_3 .



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 211 (WT=1,19) i 212 (WT=3,02)
z numeru 1/1996

Jarosław Łazuka	- Warszawa	38,77
Aleksander Surma	- Myszków	36,60
Przemysław Gworys	- Częstochowa	31,80
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	27,87

XLVIII OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x \cdot |x| + y \cdot |y| = 1, \\ [x] + [y] = 1. \end{cases}$$

Uwaga. $[t]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od t .

2. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\angle ABP = \angle ADP$. Wykazać, że $\angle PAB = \angle PCB$.

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b \geq 1$, $c \geq 0$ oraz dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność $(ab + c)^n - c \leq ((b + c)^n - c)a^n$.

4. Udowodnić, że liczba naturalna $n \geq 2$ jest złożona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne $a, b, x, y \geq 1$ spełniające warunki: $a + b = n$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

II seria

5. Dwieścienne kątów wewnętrznych A, B, C trójkąta ABC przecinają przeciwległe boki odpowiednio w punktach D, E, F , a okrąg opisany na trójkącie ABC – odpowiednio w punktach K, L, M . Dowieść, że

$$\frac{AD}{DK} + \frac{BE}{EL} + \frac{CF}{FM} \geq 9.$$

6. Wielomian $P(x)$ stopnia n spełnia warunek

$$P(k) = \frac{1}{k} \quad \text{dla } k = 1, 2, 4, 8, \dots, 2^n.$$

Obliczyć $P(0)$.

7. Obliczyć kres górny objętości czworościanów zawartych w kuli o danym promieniu R , których jedną z krawędzi jest średnica tej kuli.

8. Niech a_n będzie liczbą wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 6n\}$, których suma elementów daje przy dzieleniu przez 6 resztę 5 oraz niech b_n będzie liczbą wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 7n\}$, których iloczyn elementów daje przy dzieleniu przez 7 resztę 5. Obliczyć iloraz a_n/b_n .

III seria

9. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: (1; \infty) \rightarrow (1; \infty)$ spełniające następujące warunki:

(i) $f(x+1) = \frac{(f(x))^2 - 1}{x}$ dla $x \geq 1$;

(ii) funkcja $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ jest ograniczona.

10. Punkty P, Q leżą wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym $\angle ACP = \angle BCQ$ oraz $\angle CAP = \angle BAQ$. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB . Dowieść, że kąt DEF jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy punkt Q jest punktem przecięcia wysokości trójkąta BDF .

11. Dana jest liczba naturalna $m \geq 1$ oraz wielomian $P(x)$ stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych mający co najmniej trzy różne pierwiastki całkowite. Dowieść, że wielomian $P(x) + 5^m$ ma co najwyżej jeden pierwiastek całkowity.

12. Grupa złożona z n osób stwierdziła, że codziennie przez pewien okres czasu trzy z nich mogą wspólnie zjeść obiad w restauracji, przy czym każde dwie z nich spotkają się na dokładnie jednym obiedzie. Dowieść, że liczba n przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1 lub 3.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

10 października 1996 r.

10 listopada 1996 r.

10 grudnia 1996 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy komitetów okręgowych Olimpiady Matematycznej

Dla województwa elbląskiego, gdańskiego i słupskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa bielskiego, częstochowskiego i katowickiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

Dla województwa krakowskiego, krośnieńskiego, nowosądeckiego i tarnowskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa białkopodlaskiego, chełmskiego, lubelskiego, przemyskiego, rzeszowskiego, siedleckiego, tarnobrzeskiego i zamojskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 323, 20-031 Lublin.

Dla województwa kieleckiego, łódzkiego, piotrkowskiego, radomskiego, sieradzkiego i skierniewickiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa konińskiego, leszczyńskiego, pilskiego, poznańskiego i zielonogórskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Matejki 48/49, pok. 24, 60-769 Poznań.

Dla województwa gorzowskiego, koszalińskiego i szczecińskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa bydgoskiego, ciechanowskiego, olsztyńskiego, płockiego, toruńskiego i włocławskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa białostockiego, łomżyńskiego, ostrołęckiego, suwalskiego i warszawskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa jeleniogórskiego, kaliskiego, legnickiego, opolskiego, wałbrzyskiego i wrocławskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

KILKANAŚCIE lat temu rozpoczęła się wielka kariera fraktali. W przeciwieństwie do wielu innych matematycznych obiektów, te stały się bardzo szeroko znane poza matematyką. Szybko zaczęły być wykorzystywane do rozmaitych ilustracji, plakatów... Tymczasem okazuje się, że wystarczyło śledzić dokładnie twórczość naszych wybitnych literatów, by poznać fraktale znacznie wcześniej. Nie wierzyście?

„Obłok Magellana” to jedna z pierwszych powieści Stanisława Lema. Wśród jej bohaterów był młody matematyk, który postanowił wyprowadzić ścisłą formułę piękna – wzór, z którego można by otrzymać wszystkie przypadki piękna pojawiające się w sztuce i w naturze, tak, jak z równań Maxwella wyprowadza się wszystkie prawa rządzące elektromagnetyzmem lub równaniem Einsteina opisuje się grawitację. Praca była niezwykle trudna, wymagała zapoznania się z całą dotychczasową twórczością malarską i rzeźbiarską ludzkości. Po wielu miesiącach katorżniczej pracy i wielu nieprzespanych nocach formuła była gotowa; należało teraz sprawdzić jej przydatność.

Po wprowadzeniu do komputera odpowiedniego programu powinno się otrzymać dzieło niemal idealne – kwintesencję piękna. Gdy komputer zrealizował program, matematyk spojrzal na wydruk i zobaczył, że:

Powierzchnię wypełniał zawity, powtarzający się rytmicznie deseń. Nieskończona mnogość arabesk mrowiła się w oczach; każda rozpadała się na roje coraz drobniejszych i cała ta przestrzeń zabudowana wedle żelaznej konsekwencji praw wynikających z formuły, stanowiła tło, z którego występował w samym środku właściwy twór tej martwo zrodzonej kompozycji; puste, idealnie okrągłe, białe koło.

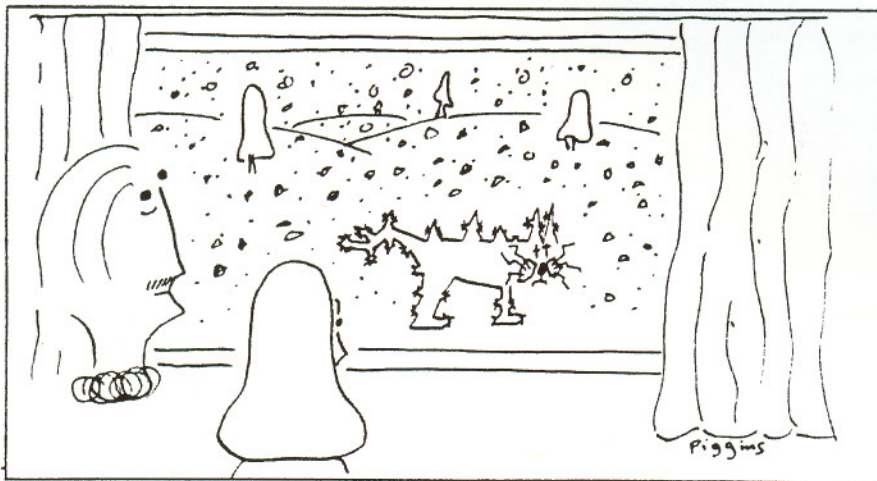
A oto przykład kolejny – wiersz Juliana Tuwima, zaczerpnięty z rozdziału ”Z rękopisów” w tomie ”Poezje”.

SPOSTRZEŻENIE

W naturze nie ma linii prostej,
Ludzki to wymysł sztuczny.
Patrząc w skłębione żyworosty,
Chaosu, chaosu się uczmy.
Pogięty, kręty i strzępiasty
Jest każdy stwór w naturze,
A prostą linią łączą gwiazdy
Głupce i tchórze.

Wiersz Tuwima przysłał nam stały współpracownik *EPSILONA*, Dariusz Miklaszewski z Torunia.

Może Czytelnicy znają jeszcze inne „fraktalne utwory z czasów przedfraktalnych”? Czekamy na listy!



– No cóż, zawsze w taką pogodę robi się trochę fraktalny.

Copyright *The Mathematical Intelligencer* – przedruk za zgodą Redakcji czasopisma.

rys. David Piggins

Obchodzimy właśnie dziesiątą rocznicę pewnego wydarzenia, bo było to we wrześniu 1986; jest zatem dobra okazja, by opowiedzieć tę historię szerszemu gronu.

Otóż jubileuszowy, 150. numer *Delty* (6/1986) był numerem specjalnym – znalazło się w nim 150 „drobiazgów”. Pozycja nr 115 brzmiała następująco:

Niektórzy nazywają twierdzenie o trzech ciągach (jeśli $a_n \leq c_n \leq b_n$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$, to ciąg (c_n) jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$) twierdzeniem o milicjantach

i formułują je tak: Jeśli znajdziesz się między dwoma milicjantami idącymi do tego samego komisariatu, to też tam trafisz.

Wiele zdarzeń wykazuje niezbieżność, że Polacy mają krótką pamięć... Dziś w tym cytacie nie widać nic niezwykłego,

ale wówczas na przykład my (jeszcze nie autorzy *Delty*), w Krakowie, podziwialiśmy (oprócz dobrego dowcipu) odwagę Redakcji, zadziwialiśmy nas, że cenzura puściła... *Delte* czytali wtedy i liczni studenci, a we wrześniu IV rok matematyki miał praktykę w szkole. Studentowi M., nie pozbawionemu poczucia humoru i cywilnej odwagi, przyszło mówić uczniom o tym właśnie twierdzeniu. Student M. zapowiedział zatem koleżankom (odbywającym praktykę w tej samej szkole), że powtórzy na lekcji dowcip *Delty*. I rzeczywiście, powiedział na lekcji o twierdzeniu o milicjantach, po lekcji zaś podszedł dumnie do koleżanek obserwujących jego (oceniając) lekcję i spytał dumnie:

– No i co?

A koleżanki:

– Ale dlaczego im nie powiedziałaś, że to twierdzenie naprawdę nazywa się twierdzeniem o trzech ciągach?