20 września 1996 roku

zmarł w Warszawie

Paul Erdös

jeden z największych współczesnych matematyków

SPIS TREŚCI

NUMERU 11(270)

W następnym numerze:

Kartezjusz

Okładkę i ilustracje wykonał
Krzysztof BIESAGA

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

Wybór artykułów z *Delty* ukazuje się w języku angielskim w sieci Internet pod adresem
http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-41(-3) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 1997 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1997 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1997 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju:
   - a) jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób;
   - b) od osób zamieszkałych lub instytucji mających siedzibę w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH, wpłaty należy wnosić na konto „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 370044-16551-2700-1-06 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8^{00} – 14^{00}; dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską".
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH" S.A. na konto lub w kasach Oddziału. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną ze zleceniem dostawy za granicę od osób zamieszkałych w kraju:
   do 5 XII na I kwartał roku następnego,
   do 5 III na II kwartał,
   do 5 VI na III kwartał,
   do 5 IX na IV kwartał.
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-10-39, 620-10-19, 620-12-71 wewn. 2442, 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł, 20 000 zł

Rozszczepienie jąder uranu i datowanie skał

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Uran jest pierwiastkiem szeroko rozpowszechnionym w przyrodzie. Występuje w niewielkich ilościach w licznych minerałach jako mieszanina kilku izotopów. Przypomnę, że izotopy danego pierwiastka mają jądra atomowe o charakterystycznej dla niego liczbie protonów, która określa ładunek jądra, oraz różne liczby neutronów. Najczęściej występujące izotopy uranu, mającego 92 protony, to

$$^{234}\mathrm{U}\ \ (0{,}006\%)\,,\qquad ^{235}\mathrm{U}\ \ (0{,}720\%)\,,\qquad ^{238}\mathrm{U}\ \ (99{,}274\%)\,,$$

gdzie górny indeks oznacza liczbę masową, czyli łączną liczbę neutronów i protonów w jądrze; w nawiasie umieszczono średnie procentowe rozpowszechnienie danego izotopu.

Izotop $^{238}\mathrm{U}$ podlega samorzutnemu rozszczepieniu, tzn. bez żadnego zewnętrznego oddziaływania rozpada się na dwa mniejsze jądra

$$^{238}\mathrm{U} \rightarrow {}^{A_1}X_1 + {}^{A_2}X_2\,,$$

przy czym masa każdego z produktów jest bliska połowie masy $^{238}\mathrm{U}$. Suma mas jąder $^{A_1}X_1$ i $^{A_2}X_2$ jest mniejsza niż masa $^{238}\mathrm{U}$, więc energia równoważna różnicy mas zamienia się w energię kinetyczną produktów.

Gdy uran jest domieszką materiału krystalicznego, jądra pochodzące z procesu rozszczepienia powodują mikroskopijne uszkodzenia kryształu wzdłuż torów swojego ruchu. Ślady te są zwykle trwałe; dopiero stopienie kryształu i powtórna krystalizacja usuwa je. Dzięki temu badając próbkę minerału możemy określić liczbę jąder uranu, która uległa w nim rozszczepieniu. Jest ona zatem miarą czasu, jaki upłynął od momentu, gdy początkowo gorący materiał ostygł i nastąpiła krystalizacja. Wyprowadźmy odpowiednią zależność.

Niech $N(0)$ oznacza liczbę jąder $^{238}\mathrm{U}$ znajdujących się w próbce w momencie ostygnięcia. Z upływem czasu t ilość uranu zmniejszała się na skutek procesów rozszczepienia, zgodnie z wykładniczym prawem zaniku

$$N(t) = N(0)\, e^{-\lambda t}\,,$$

przy czym $\tau = 1/\lambda$ jest czasem równym $6 \cdot 10^{15}$ lat. Liczba jąder, które uległy samorzutnemu rozszczepieniu po czasie t, równa jest

$$N^R(t) = N(0) - N(t) = N(t)\,\left(\mathrm{e}^{\lambda t} - 1\right)\,.$$

Jeśli znamy $N^R(t)$ i $N(t)$, to czas t wyznaczamy jako

$$t = \tau \ln\left(1 + \frac{N^R(t)}{N(t)}\right)\,.$$

Ponieważ czas zaniku τ jest bardzo długi, dłuższy niż wiek Wszechświata, więc tylko niewielka część jąder uranu zdoła się rozszczepić, tzn. $N(t) \gg N^R(t)$. A zatem logarytm przybliżamy przez funkcję liniową i dostajemy

$$t = \tau\,\frac{N^R(t)}{N(t)}\,.$$

Liczbę jąder uranu, które uległy rozszczepieniu, znajdujemy licząc ślady po produktach rozpadu. W podobny sposób określamy również liczbę jąder, które przetrwały. Naświetlamy próbkę strumieniem neutronów pochodzących z reaktora, czym wywołujemy

Przygody matematyki wśród ludzi (V)

(na podstawie wykładów wygłoszonych na antenie *Radia Bis*)

Wygnana królowa

Marek KORDOS

W połowie ubiegłego stulecia, wieku pary i elektryczności, triumf techniki i wiara w jej wszechmoc były całkowite, przekonanie o potencjalnym braku granic poznawczych nauki powszechne, jak też głęboka wiara – że jądrem mądrości, królową, nauką nauk jest matematyka – była ugruntowana. Co więcej, prawie jawnie wypowiadano pogląd, że do odkrycia pozostały ledwie drugorzędne detale. Nastał więc czas porządkowania, doganiania w sensie precyzji sposobu uprawiania nauki, a konkretnie – matematyki, mistrzów ze Starożytnej Grecji. Zaczęło się niebezpieczne przeglądanie się matematyki w lustrze.

Inni twierdzą, że motywem owego zaglądania sobie przez matematyków w trzewia był najbardziej bulwersujący opinię publiczną spośród matematycznych wynalazków – odkrycie geometrii nieeuklidesowej. Okazało się mianowicie, że zmieniając nieznacznie niektóre z założeń, przyjmowanych za pewniki opisujące strukturę przestrzeni, można otrzymać teorię przestrzeni równie wdzięczną, równie poprawną, jak „zwyczajna" geometria. Co gorsza: najpierw powstała jedna taka „niezwyczajna" geometria (Łobaczewski i Bolyai), później (na wyraźne polecenie służbowe Gaussa) Bernhard Riemann wyprodukował ich nieprzebrane mrowie (słynna praca *O hipotezach leżących u podstaw geometrii*). Skoro więc dla przestrzeni można było wskazać wiele opisujących ją teorii, które wykluczały się wzajemnie, przekonanie, że matematyka jest wiedzą przyrodniczą, nie dawało się utrzymać. A przecież tak pitagorejczycy, jak ludzie XVII wieku, czyli ci, którzy matematykę ufundowali, mieli się za badaczy przyrody, natury.

Pogodzenie się matematyki z przyrodoznawstwem zaproponował Hermann Helmholtz – w pracy, o tytule naśladującym tytuł pracy Riemanna, *O faktach, które leżą u podstaw geometrii* pisze on, że geometria (i zresztą cała matematyka) są dla przyrodoznawstwa skrzynką z narzędziami – przyrodnik sięga po takie narzędzie, jakie jest mu w danej chwili potrzebne, lub – częściej – jakie bardziej lubi i umie stosować. W zasadzie to samo twierdził 2200 lat wcześniej Arystoteles, ale wtedy był zdecydowanie w mniejszości. Takie postawienie sprawy jednak jeszcze wyostrzyło pytanie, czym są i co opisują teorie matematyczne.

Czy jednak była to pycha matematyków, czy utrata związku z naturą przez matematykę, tak czy owak pytania o sens uprawianej dyscypliny stały się bardzo na czasie, a odpowiedzi na nie coraz bardziej konieczne. Nie sposób jest dziś stwierdzić, czy droga, jaką matematyka wybrała dla siebie, była najlepsza z możliwych. Sto lat temu jednak wybór został dokonany i dziś można już tylko odnotować jego konsekwencje.

Wybór ten kazał traktować matematykę jak najbardziej formalnie, wręcz jako teorię napisów, a za podstawową dyscyplinę matematyki (podstawową w tym sensie, że wszelkie inne w niej szukać mają potwierdzenia i kryteriów prawdziwości swoich stwierdzeń) uznano teorię mnogości, czyli teorię zbiorów. Wybór ten okazał się ze wszech miar nieszczęśliwy. Z tym jednak, że pierwsze nieodwracalne objawy nieszczęścia odnotowano dopiero w latach trzydziestych XX wieku (Kurt Gödel), a ostateczne ciosy padły w latach sześćdziesiątych (Paul Cohen).

Nieszczęścia te to zawiedzione nadzieje: okazało się, że nasze formalne teorie nigdy nie będą tak eleganckie, jak tego od nich zażądaliśmy, że prawdziwość stwierdzeń o całej matematyce musi być tak samo warunkowa, jak poszczególne twierdzenia tej matematyki (czyli: sami musimy przyjąć jakieś założenia i dopiero z nich w sposób pewny uzyskujemy następne fakty), wreszcie, że różnych matematyk jest tak samo wiele, jak samych teorii matematycznych w obrębie każdej z nich.

Z ewentualnych przyczyn wymienionych nieszczęść na pierwszym miejscu wymieniłem pychę, a to z dwóch powodów. Pierwszy to mądrość ludowa – pycha jest pierwszym i najcięższym grzechem: za nią to został szatan strącony do piekieł. Jest jednak i drugi powód, znacznie bardziej dla ogółu ludzi znaczący. Otóż znajdujący się w uprzywilejowanej sytuacji – tzn. nauczający najważniejszego, jak sądzono, przedmiotu – nauczyciele matematyki dali w przeciągu stulecia piękny pokaz tego, jak może się komu przewrócić w głowie. Od połowy XIX stulecia program powszechnego

procesy rozszczepienia, lecz nie samorzutnego, tylko indukowanego. Pewna komplikacja wiąże się z faktem, że rozszczepieniu spowodowanemu przez neutrony podlega izotop 235, nie zaś 238. (Ta własność sprawia, że uran wykorzystywany w reaktorach czy bombach atomowych jest wzbogacany, tzn. zawiera znacznie więcej izotopu 235 niż uran naturalny.) Znając liczbę neutronów, którymi naświetlono próbkę, oraz prawdopodobieństwo zajścia reakcji można wyznaczyć ilość uranu 235. Korzystając ze średniego stosunku zawartości ^{235}U do ^{238}U, który wynosi $7 \cdot 10^{-3}$, znajdujemy, jak dużo uranu 238 przetrwało w próbce.

A jak w praktyce wygląda wyznaczanie wieku minerału? Przygotowuje się niewielkie jego plasterki o starannie wypolerowanych powierzchniach. Ślady jąder pochodzących z procesów rozszczepienia ujawniają się zwykle po wytrawieniu powierzchni. Substancję trawiącą i sposób przeprowadzenia tej operacji (czas, temperatura, itd.) wybiera się w zależności od typu badanego minerału. Na przykład, dla apatytu, minerału fosforanowego występującego w skałach magmowych, stosuje się słaby roztwór kwasu azotowego, a trawienie w temperaturze pokojowej trwa kilka minut. Przeglądając pod mikroskopem wytrawione płytki wyznacza się liczbę śladów rozszczepienia na jednostkę powierzchni. Ślady mają kształt krótkich igiełek, więc płytka przypomina podłogę pod choinką. Następnie próbkę naświetla się neutronami z reaktora, powtórnie wytrawia i przegląda pod mikroskopem, aby ustalić, ile igiełek przybyło. Wiek minerału jest proporcjonalny do stosunku liczb śladów po samorzutnym i indukowanym rozszczepieniu.

W przeciwieństwie do innych metod radiochemicznego datowania skał, opisany sposób pozwala określić czas, jaki upłynął nie od powstania samego materiału, lecz od momentu, gdy materiał ten ostygł i skrystalizował. Dzięki temu badanie śladów po procesach rozszczepienia umożliwia, na przykład, odtworzenie geologicznej historii obszarów wulkanicznych.

Rozwiązanie zadania F 439. Z równania

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$$

otrzymujemy

$$(E - m_0c^2)(E + m_0c^2) = p^2c^2 .$$

Ponieważ $E_k = E - m_0c^2$, otrzymujemy

$$E_k = \frac{p^2}{m_0 + \frac{E}{c^2}} .$$

W szczególnej teorii względności mamy

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{oraz} \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} ,$$

otrzymujemy więc wzór, który należało udowodnić. W granicy małych prędkości ($v/c \ll 1$) przechodzi on we wzór

$$E_k \approx \frac{p^2}{2m_0} ,$$

gdzie $p = m_0 v$. Z kolei w granicy $v \to c$ otrzymujemy

$$E_k \approx mc^2 .$$

Śnieg z komputera

Eugeniusz JAKUBAS

Z dużym zainteresowaniem przeczytałem artykuł o płatkach śniegu w *Delcie* 2/1996. Po jego lekturze pomyślałem sobie, że nie tylko Natura potrafi budować tak wiele różnorodnych obiektów, w tym nieskończenie różnorodną ilość płatków śniegu. Potrafi to również zrobić Układ Iterowanych Odwzorowań, znany w matematyce pod nazwą IFS – Iterated Function System. Można powiedzieć, że badając IFS poznajemy Naturę lub że Natura działa zgodnie z IFS.

Zasada IFS jest bardzo prosta. Wystarczy wziąć dowolny punkt płaszczyzny i kilka odwzorowań afinicznych postaci

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = d_1x + e_1y + f_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = a_2x + b_2y + c_2 \\ y'' = d_2x + e_2y + f_2 \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \text{itd.}$$

Następnie należy przekształcić obrany punkt przez każde przekształcenie tego układu, otrzymane punkty znów przekształcić przez każde z tych przekształceń, itd. W zależności od wartości współczynników $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2$, itd. otrzymamy jakiś obiekt geometryczny. Aby był to płatek śniegu, należy dobrać odpowiednio współczynniki, co wymaga trochę pracy i cierpliwości. Oczywiście, może za nas zrobić to komputer. Odpowiedni do tego program w Turbo Pascalu wygląda następująco:

```
program IFS;
uses graph,crt;
var karta,tryb,nrPrz:integer;
  x,y,xNowe,yNowe:real;
const t:array[1..6,1..6] of real=
    ((0.3,0.7,0,-0.3,0.7,0),(0.3,-0.7,0,0.3,0.7),(0.3,0,0,0,0.6,0.4),
     (0.3,0,0,0,0.6,-0.4),(0.7,0,-0.3,0,0.3,0),(0.7,0,0.3,0,0.3,0));
begin
 karta:=detect; initGraph(karta,tryb,'');
 randomize;
 x:=0; y:=0;
 repeat
   nrPrz:=random(6)+1;
   xNowe:=t[nrPrz,1]*x+t[nrPrz,2]*y+t[nrPrz,3];
   yNowe:=t[nrPrz,4]*x+t[nrPrz,5]*y+t[nrPrz,6];
   putPixel(round(xNowe*200+320),round(-yNowe*200+240),nrPrz+8);
   x:=xNowe;
   y:=yNowe;
   until keyPressed;
   closeGraph;
end.
```

Wydruki płatków śniegu otrzymane za pomocą tego programu prezentujemy na ostatniej stronie okładki.

Pisane 166 lat temu

Każda próba zastosowania metod matematycznych w badaniach chemicznych musi być traktowana jako głęboko irracjonalna i sprzeczna z duchem chemii. Gdyby jednak analiza matematyczna mogła kiedykolwiek odegrać w chemii istotną rolę – aberracja, która szczęśliwie jest prawie niemożliwa – stałoby się to powodem szybkiej i rozprzestrzeniającej się degeneracji tej nauki.

A. COMTE
„Cours de philosophie positive"

nauczania matematyki ewoluuje nie ku tematom z jakiegoś tam powodu ważnym czy to w praktycznej działalności, czy też w dalszej nauce bądź studiach. Nie – ewoluuje ku specjalnie skonstruowanym tematom, z których wygodnie się odpytuje. A im wygodniej się odpytuje, tym czyni się to bardziej bestialsko – okazja nie tylko złodzieja czyni, bodaj częściej czyni sadystę. I właśnie jako niezrozumiały sadysta jawi się nauczyciel matematyki w dwudziestowiecznej literaturze, nawet tak niewinnej, jak *Ania z Zielonego Wzgórza* czy *Szatan z siódmej klasy*.

W tej sytuacji społeczeństwo, w którym każdy był uczniem i prawie każdy rodzicem, protestuje przeciw przemocy. A bronić matematyki nie ma kto. Królowa matematyka tak bowiem zajęła się wpatrywaniem w lustro i tak głęboko przejęły ją niuanse formalizmów, że o zastosowaniach aktualnie „obrabianej" problematyki w dającej się przewidzieć przyszłości nie ma co marzyć. Tak więc obrona powszechnego nauczania matematyki staje się coraz bardziej typu konfucjańsko–ekologicznego: po pierwsze – zawsze jej uczono i było dobrze, a po drugie – żaden gatunek nie powinien ginąć (jaka szkoda np. że nie umiemy już krzesać ognia za pomocą dwóch patyczków). To nie są ani dobre, ani mocne argumenty.

Znacznie poważniejszą sprawą jest zerwanie również arystotelesowsko-helmholtzowskiego kontraktu z przyrodoznawstwem. Matematyka pod koniec ubiegłego stulecia zajęła się sobą i nawet fizyka musiała już niejednokrotnie dorabiać sobie sama pojęcia matematyczne, bez których obejść się nie mogła. Gdy np. było niezbędne uogólnienie pojęcia funkcji, tak zwane dystrybucje, musiał je stworzyć elektryk Heaviside; oczywiście, matematycy potem pojęcie to dopracowali. Choć nie wiem, czy słusznie powiedziałem „oczywiście": teorię czasoprzestrzeni stworzył, na prośbę Einsteina, jego profesor z politechniki, Hermann Minkowski; w terminologii matematycznej jest to przestrzeń pseudoriemannowska, ale ta nazwa to bodaj wszystko, co do niej wnieśli matematycy: rozwija się tylko te jej części, które fizykom są niezbędne. Fizyka statystyczna, a nawet jej największy twórca, Boltzmann, to czasy wyprzedzające o kilkadziesiąt lat opanowanie rachunku prawdopodobieństwa przez matematyków (1933, Kołmogorow). Do dziś pełno jest rozmaitych specyficznie fizycznych, choć z całą pewnością wadliwych matematycznie, matematycznych tworów stworzonych w przypływie rozpaczy przez fizyków, jak np. całki Feynmana.

Daleko gorzej jest tam, gdzie dyscypliny domagające się matematyki są zdecydowanie w możliwości matematyczne uboższe. W ekonometrii, psychometrii, socjometrii itp. króluje krzywa Gaussa, jako *panaceum* na każdą chorobę.

Lęgną się też obłędnie rozbudzone nadzieje, że oto zjawi się cud i coś, znienacka, przyniesione z matematyki dokona zasadniczego przełomu. Aktualnie takim – z całą pewnością (mówię w swoim imieniu) – czystym nadużyciem jest czynienie nadziei chemikom na przełom, jakiego w ich dyscyplinie może dokonać teoria grafów (jest już parę doktoratów opartych na tej nadziei, patrz opinia Comte'a na poprzedniej stronie). W latach sześćdziesiątych wszystko (kryzysy ekonomiczne, zawały serca, załamania psychiczne, stresy zbiorowe itp.) miało zostać uzdrowione za pomocą teorii katastrof René Thoma. Dziś podobną rolę pełnią fraktale, czyli – w dobrym przybliżeniu – figury samopodobne (tj. takie, że oglądane w dużym powiększeniu prezentują naszym oczom ten sam widok, jak bez tego powiększenia); nikt nie wie, dlaczego tak miałoby być, ale czemu nie?

Społeczną pozycję matematyki obniża jeszcze jej własne dziecko – informatyka. Od chwili odkrycia tranzystora (1949 r.) jej podstawowe narzędzie – komputer – może zdjąć z pleców matki praktycznie wszystkie kłopoty obliczeniowe. W oczach wielu nic więcej w matematyce nie ma – nic więc dla niej nie pozostaje.

Mówiąc o konkretach. Dziś w szkole, najlepszym zwierciadle opinii społecznej, matematyka z pierwszego miejsca spadła, jeśli chodzi o prestiż, w najlepszym razie na trzecie (za angielskim i informatyką). Na studiach jest w środku drugiej dziesiątki (dochodzi prawo, zarządzanie, przeróżne marketingi itp.). Zjawisko to matematyków boli, wielu ludzi – szczególnie starszych – przeraża. Należy jednak pamiętać o jednym: matematyka w centrum zainteresowania społecznego nie znajdowała się prawie nigdy – trzy stulecia Starożytnej Grecji, dwa stulecia dominacji arabskiej, ostatnie trzy stulecia Europy. I to wszystko. Zapewne musi teraz poczekać, aż z jej krystalicznej głębi wyłoni się znów jakaś propozycja, która pociągnie za sobą rzesze fanów. Bo bieżące rachowanie może spokojnie zostawić komputerom.

Jeszcze o Achillesie i żółwiu. Czy Zenon z Elei miał rację?

Tadeusz KRASIŃSKI

Jednym z wielu problemów, które dotarły do nas ze starożytności, są paradoksy Zenona z Elei (żył prawdopodobnie w latach 490–430 p.n.e.). Był on uczniem wybitnego filozofa starożytności Parmenidesa, twórcy szkoły filozoficznej eleatów. Zarówno nauczyciel, jak i jego uczeń wyznawali zasadę filozoficzną, że byt jest jeden, wieczny, nieruchomy, niezmienny i niepodzielny. Doprowadziło ich do tego poglądu czysto dedukcyjne rozumowanie wyprowadzone z jednej podstawowej przesłanki, że byt jest jeden, a niebytu nie ma. Poznanie zmysłowe, które stało w jawnej sprzeczności z ich poglądami, uważali za złudne, niepewne i niewiarygodne. Aby przekonać o tym przeciwników swoich poglądów, Zenon z Elei podał wiele rozumowań, w których wykazywał, że w pojęciach wszelkiej zmiany (np. ruchu) lub mnogości tkwią sprzeczności. Rozumowania te, zwane w starożytności aporiami, znane są pod nazwą paradoksów Zenona. Najbardziej znanymi są paradoksy Zenona o ruchu: Achillesa i żółwia, dychotomii, lecącej strzały oraz stadionu, mające wykazywać, że ruch jest niemożliwy, gdyż zawiera w sobie sprzeczności.

Zajmiemy się jednym z nich, a mianowicie paradoksem Achillesa i żółwia, na który spojrzymy trochę inaczej niż robiono to dotychczas. Teza Zenona z Elei była następująca: szybkonogi Achilles nigdy nie dogoni żółwia, o ile żółw wyruszy do biegu wcześniej (oczywiście, zakładamy, że Achilles biegnie szybciej od żółwia). Wniosek ten wyciągał na podstawie następującego rozumowania: jeśli żółw wyruszy do biegu wcześniej, to w momencie startu Achillesa pokona pewną drogę, powiedzmy a. Gdy drogę a przebędzie Achilles, to żółw w tym czasie przesunie się kawałek dalej, powiedzmy o b. Gdy z kolei Achilles przebędzie odcinek b, to żółw przesunie się o odcinek c itd. Zatem, jak wnioskuje Zenon z Elei, Achilles nigdy nie dogoni żółwia, gdyż to rozumowanie możemy powtórzyć nieskończenie wiele razy. Ponieważ w opinii eleatów jedynie czystym dedukcyjnym rozumowaniem możemy dochodzić do prawdy (a takim było powyższe), więc potoczne doświadczenie ruchu jest złudne. W konsekwencji, ruch nie istnieje.

Paradoks ten wyjaśniano używając do tego elementów teorii szeregów. Mianowicie, nie można z powyższego rozumowania wyciągnąć wniosku, że **nigdy** Achilles nie dogoni żółwia. Prostym rozumowaniem wykażemy, że rzeczywiście Achilles nie dogoni żółwia, ale tylko do określonego miejsca i czasu, po przekroczeniu którego Achilles będzie już z przodu. Mianowicie, jeśli przyjmiemy, że Achilles jest k razy szybszy od żółwia (oczywiście, $k > 1$), to gdy Achilles pokona pierwszy odcinek a, to żółw w tym czasie przesunie się o odcinek $b = \frac{a}{k}$; gdy Achilles pokona drugi odcinek $b = \frac{a}{k}$, to żółw przesunie się o $c = \frac{b}{k} = \frac{a}{k^2}$ itd. Suma nieskończona pokonywanych odcinków nie jest nieskończona, gdyż, jak wiemy,

$$a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \ldots = a\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \ldots\right) = a\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = a\frac{k}{k-1}.$$

Podobnie rozumujemy z czasem. Jeśli Achilles pokona pierwszy odcinek a w czasie t, to czas pokonania wszystkich odcinków wyniesie $t\frac{k}{k-1}$. Gdy przyjmiemy, że np. $k = 2$, tzn. Achilles jest dwa razy szybszy od żółwia, to rzeczywiście żółw będzie z przodu do punktu odległego od startu o $2a$ i do czasu $2t$, a nie – jak twierdzi Zenon z Elei – do dowolnego punktu i do dowolnego czasu.

Wyjaśnienie to jest powszechnie przyjmowane i nie budzi żadnych wątpliwości (oprócz filozoficznych – jak to jest możliwe pokonanie nieskończenie wielu odcinków w skończonym czasie). Ale spójrzmy na to z innej strony. W paradoksie Zenona jest tylko jedno ogólne założenie, że Achilles biegnie szybciej od żółwia, lecz nie jest podane, jaki jest wzajemny stosunek ich prędkości. Powyżej przyjęliśmy, że prędkości ich są stałe i nie zmieniają się w czasie. A co będzie, gdy będą oni mieli prędkości zmienne? Okazuje się, że wtedy teoria szeregów nieskończonych daje nam zaskakującą (można powiedzieć paradoksalną) odpowiedź. Można tak dobrać prędkości Achillesa i żółwia (oczywiście, będzie spełnione podstawowe założenie, że w każdym momencie prędkość Achilles jest większa od prędkości żółwia), że Achilles **nigdy** (ani w czasie, ani w przestrzeni) nie dogoni żółwia. Przyjmijmy mianowicie, że prędkość Achillesa jest stała, żółwia zaś z odcinka na odcinek nieznacznie się zwiększa (również można tak dobrać prędkości, że obie będą się zmniejszać) w następujący sposób: niech żółw pokona odcinek o długości 1 i wtedy wystartuje Achilles. Niech prędkości ich będą w takiej relacji: gdy Achilles pokona ten odcinek w czasie 1 s, to żółw w tym czasie odcinek o długości $\frac{1}{2}$. Następnie, gdy Achilles pokona odcinek o długości $\frac{1}{2}$ (w czasie $\frac{1}{2}$ s), to żółw odcinek o długości $\frac{1}{3}$ itd. Każdy kolejny odcinek (o długości $\frac{1}{n}$) Achilles pokonuje w czasie $\frac{1}{n}$ s, żółw zaś w tym czasie odcinek o długości $\frac{1}{n+1}$. Oczywiście, ogólne założenie o prędkościach jest spełnione. Spróbujmy obliczyć odcinek, jaki pokonają oni w tym przypadku. Podobnie jak w pierwszym rozumowaniu, żółw będzie z przodu aż do punktu równego sumie szeregu $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ (z definicji sumy szeregu jest to granica ciągu (s_n) sum częściowych tego szeregu, gdzie $s_1=1$, $s_2=1+\frac{1}{2}$, $s_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots$).

Okazuje się, że suma tego szeregu, zwanego szeregiem harmonicznym, równa jest nieskończoności (na zakończenie artykułu podamy elementarny dowód tego faktu). Wniosek z tego jest następujący: przy dobranych powyżej prędkościach, dla dowolnie długiego odcinka, Achilles i żółw dobiegną do jego końca i żółw nadal będzie z przodu. Zatem przy odpowiednio dobranych prędkościach wniosek Zenona z Elei jest uzasadniony. Chociaż nie wynika z tego sprzeczność z pojęciem ruchu, to musimy przyznać rację Zenonowi z Elei: Achilles może biec szybciej od żółwia w każdym momencie ruchu i nigdy go nie dogoni!

Podamy teraz dowód faktu, że suma szeregu harmonicznego jest równa nieskończoności. Ponieważ ciąg (s_n), $s_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, sum częściowych tego szeregu jest rosnący, więc ma granicę, skończoną lub nieskończoną. Wykluczymy pierwszą możliwość poprzez doprowadzenie do sprzeczności. Przypuśćmy zatem, że jest zbieżny do granicy skończonej A, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$.

Wówczas szeregi $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots$ i $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots$ są również zbieżne, bo ich sumy częściowe $b_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}$ i $c_n=1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$ są rosnące (tzn. $b_n \le b_{n+1}$, $c_n \le c_{n+1}$ dla każdego n) i mniejsze od sum częściowych szeregu harmonicznego (tzn. $b_n \le s_n$ i $c_n \le s_n$ dla każdego n). Oznaczmy sumy tych szeregów odpowiednio przez B i C, tzn. $B=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i $C=\lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Liczby A, B i C związane są równościami:

1. $B+C=A$ (bo $B+C=\lim\limits_{n\to\infty} b_n+\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n+c_n)=\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}=A$),

2. $2B=A$ (bo $2B=2\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} 2b_n=\lim\limits_{n\to\infty} s_n=A$).

Z obu tych równości wynika, że $B=C$. Ale dla sum częściowych b_n i c_n tych szeregów mamy:

$$c_n-b_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2n}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\ge\frac{1}{2}.$$

Zatem w granicy $C-B\ge\frac{1}{2}$, co przeczy równości $C=B$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=+\infty$.

Liczby Catalana

Włodzimierz BIELIŃSKI, Krzysztof PAROL

Prawidłowymi rozmieszczeniami nawiasów są np. $(x_1x_2)(x_3x_4)$ i $(x_1(x_2x_3))x_4$, nie są zaś następujące: $(x_1x_2x_3)x_4$ i $x_1(((x_2x_3))x_4)$

Liczbą Catalana c_n nazwiemy liczbę różnych rozmieszczeń nawiasów w iloczynie $x_1x_2\ldots x_n$, przy założeniu, że nie ma zbędnych nawiasów, a kolejność wykonywania działań jest określona w sposób jednoznaczny. Takie rozmieszczenie nawiasów będziemy nazywali *prawidłowym*. Łatwo zauważyć, że $c_1 = c_2 = 1$ (żadne nawiasy nie są potrzebne). Zauważmy też, że dla $n > 2$ nasze wyrażenie musi być postaci fg, gdzie f i g oznaczają odpowiednio iloczyny początkowych oraz końcowych zmiennych z wyznaczoną kolejnością wykonywania mnożenia. Przez k oznaczmy liczbę zmiennych w wyrażeniu f. Wtedy g składa się z $n-k$ zmiennych. Nietrudno stwierdzić, że dla ustalonego k liczba wyrażeń tego typu jest równa c_kc_{n-k} (musimy prawidłowo rozmieścić nawiasy w każdym z wyrażeń f i g). Liczba zmiennych w f może się zmieniać od 1 do $n-1$. Możemy więc napisać równanie rekurencyjne

(1) $$c_n = c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \cdots + c_{n-1}c_1\,.$$

Powyższy wzór pozwala wyznaczyć dowolną liczbę Catalana.

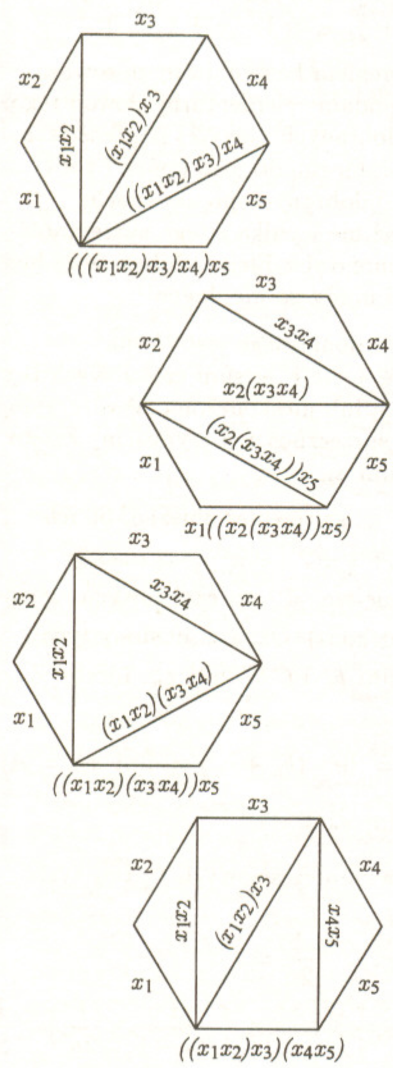
Dla dużych wartości n korzystanie z rekurencyjnego wzoru (1) jest jednak trochę kłopotliwe. Nierekurencyjny wzór na liczbę c_n można znaleźć wykorzystując teorię funkcji tworzących (Czytelnik może dowiedzieć się szczegółów z artykułu W. Bielińskiego „Co to są funkcje tworzące?”, *Delta* 7/1996).

W *Delcie* 10/1995 pisaliśmy o kolejkach do kasy kina, w którym bilety kosztują 5 zł. Powiemy, że kolejka jest typu (p,d), jeśli znajduje się w niej p osób z pięciozłotówkami i d osób z dziesięciozłotówkami. Kolejkę typu (p,d) nazwiemy *dobrą*, jeśli nie zatrzyma się podczas sprzedaży biletów (dla każdego i na pierwszych i miejscach kolejki liczba osób z dziesięciozłotówkami nie przekracza liczby osób z pięciozłotówkami). Udowodniliśmy wtedy, że liczba $K(p,d)$ wszystkich dobrych kolejek typu (p,d) wyraża się wzorem $K(p,d) = \frac{p-d+1}{p+1}\binom{p+d}{p}$.

Rozważmy teraz dowolną dobrą kolejkę typu (k,k). Dodajmy na jej początek osobę z pięciozłotówką. Na przykład, dla $k=2$ z kolejki postaci $x*x*$ otrzymamy kolejkę $xx*x*$ (x oznacza osobę z pięciozłotówką, $*$ – osobę z dziesięciozłotówką). Oznaczenia nie są tu przypadkowe. Potraktujmy tak otrzymaną kolejkę jako wyrażenie zapisane w odwrotnej notacji polskiej (ONP), wynalezionej przez słynnego polskiego logika Jana Łukasiewicza. ONP polega na tym, że najpierw podajemy argumenty operacji, a później jej symbol (np. $2*3$ to w odwrotnej notacji polskiej $2\,3\,*$, $(2*3)*4$ to $2\,3\,*\,4\,*$, a $2*(3*4)$ to $2\,3\,4\,*\,*$). Zauważmy, że dla różnych dobrych kolejek typu (k,k) otrzymamy różne napisy w ONP, a co się z tym wiąże, różne prawidłowe rozmieszczenia nawiasów w iloczynie $k+1$ liczb. I odwrotnie. Stąd wnioskujemy, że $c_n = K(n-1,n-1)$, czyli

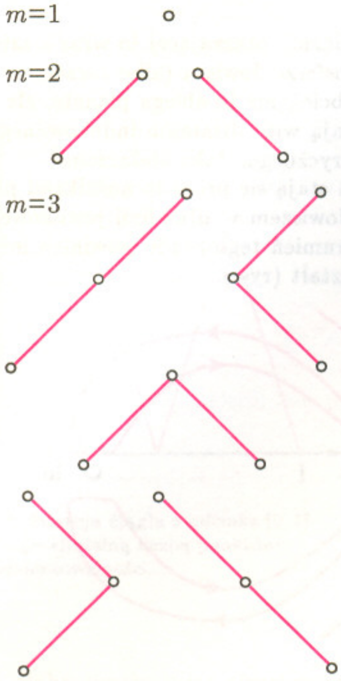
$$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

(bardzo prosty wzór!). Podamy teraz kilka na pozór odległych problemów, w których pojawiają się liczby Catalana.



Rys. 1

1. Znajdziemy liczbę podziałów $(n+1)$-kąta wypukłego na trójkąty za pomocą $n-2$ nieprzecinających się przekątnych. Przyporządkujmy kolejnym bokom wielokąta etykiety $x_1, \ldots, x_n$ (ostatniego boku nie etykietujemy). Przekątnym wielokąta oraz ostatniemu bokowi przypiszmy wyrażenia zgodnie z następującą regułą: jeśli α oraz β są przypisane dwóm bokom pewnego trójkąta, to trzeciemu bokowi przyporządkujemy wyrażenie $(\alpha)(\beta)$, $\alpha(\beta)$, lub $(\alpha)\beta$ – w zależności od tego, czy α (odpowiednio β) jest jedną z etykiet x_i (nie stawiamy wtedy nawiasu), czy też dłuższym wyrażeniem (stawiamy nawias). Postępując w ten sposób przypiszemy ostatniemu bokowi pewne (prawidłowe) rozmieszczenie nawiasów w iloczynie $x_1x_2\ldots x_n$. W dodatku ta odpowiedniość między rozmieszczeniami $n-2$ nieprzecinających się przekątnych a prawidłowymi rozmieszczeniami nawiasów w iloczynie n symboli jest, jak można wykazać, wzajemnie jednoznaczna. Zatem szukana liczba podziałów jest równa c_n.



Rys. 2

2. Powróćmy na chwilę do kolejek typu (n, n). Z każdą taką kolejką możemy związać pewną ścieżkę w kartezjańskim układzie współrzędnych, zaczynającą się w punkcie $(0,0)$ i kończącą się w punkcie (n,n). Mianowicie, jeśli do kasy przychodzi osoba z pięciozłotówką, poruszamy się o jednostkę w kierunku osi OX, jeśli zaś osoba z dziesięciozłotówką – o jednostkę w kierunku osi OY. Łatwo zauważyć, że aby kolejka była dobra, potrzeba i wystarcza, by utworzona w ten sposób ścieżka nie miała punktów powyżej prostej $y = x$ (wtedy do kasy przyszłoby w pewnym momencie więcej osób z dziesięciozłotówkami). Widzimy więc, że liczba zdefiniowanych wyżej ścieżek jest równa c_{n+1}.

Zauważmy, że dla każdej takiej ścieżki zbiór leżących na niej punktów kratowych możemy traktować jako wykres pewnej funkcji f ze zbioru $X = \{0, 1, \ldots, n\}$ w ten sam zbiór X. Oczywiście, f musi być funkcją niemalejącą spełniającą warunek $f(i) \leq i$ dla każdego $i \in X$ (to kolejna interpretacja liczb Catalana).

Z powyższych rozważań wynika wzór

$$c_{n+1} = \sum_{i_{n-1}=n-1}^{n} \; \sum_{i_{n-2}=n-2}^{i_{n-1}} \ldots \sum_{i_2=2}^{i_3} \; \sum_{i_1=1}^{i_2} 1 \, .$$

3. Rozpatrzmy następujący problem. Mamy $2n$ różnych liczb rzeczywistych; na ile sposobów można je podzielić na dwa ściśle rosnące ciągi $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ spełniające warunek $a_i < b_i$?

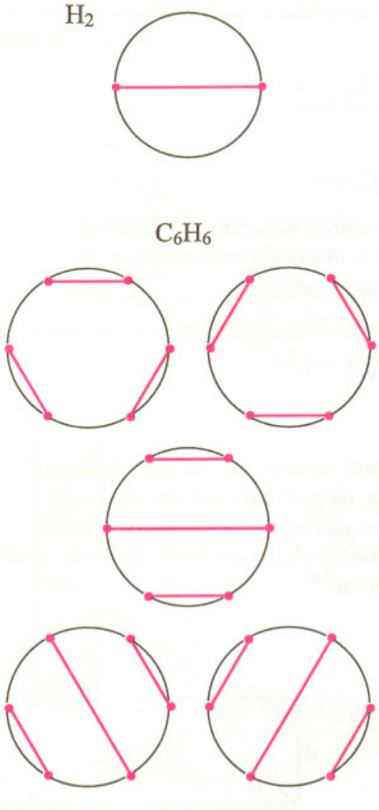
Każdej liczbie z ciągu a przyporządkujmy pięciozłotówkę, każdej liczbie z ciągu b – dziesięciozłotówkę. Następnie uporządkujmy te liczby. Zgodnie z warunkami zadania otrzymamy dobrą kolejkę typu (n, n). Dla różnych ciągów a i b otrzymamy różne dobre kolejki. Odwrotnie, ustawmy wszystkie liczby w ciąg rosnący. Każdej liczbie przyporządkujmy banknot dziesięciozłotowy lub monetę pięciozłotową tak, aby otrzymać dobrą kolejkę typu (n, n). Teraz liczby, którym przyporządkowane są pięciozłotówki, tworzą ciąg a, pozostałe zaś ciąg b. Znowu łatwo zauważyć, że tak utworzone ciągi spełniają warunki zadania. Co więcej, dla różnych dobrych kolejek otrzymujemy różne pary ciągów (a, b). Liczba opisanych wyżej podziałów jest więc równa c_{n+1}.

Czytelnik bez trudu rozwiąże teraz (o ile do tej pory tego nie zrobił) zadanie o harcerzach z artykułu o kolejkach (patrz *Delta* 10/1995).

4. Drzewem binarnym o n wierzchołkach nazywamy drzewo puste, gdy $n = 0$, lub trójkę (L, r, P), gdzie r jest wyróżnionym wierzchołkiem zwanym korzeniem drzewa, a L i P są drzewami binarnymi (odpowiednio lewym i prawym drzewem binarnym) łączącymi się w wierzchołku r – rysunek 2. W L oraz P jest w sumie $n-1$ wierzchołków. Przez t_n oznaczmy liczbę różnych drzew binarnych o n wierzchołkach. Przyjmiemy $t_0 = 1$. Łatwo zauważyć, że $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Rozważmy dowolne drzewo binarne o n wierzchołkach. Jeśli jego lewe poddrzewo zawiera i wierzchołków, to prawe poddrzewo ma $n - i - 1$ wierzchołków. Liczba wierzchołków w lewym poddrzewie może być równa 0, 1, …, $n-1$. Mamy więc zależność rekurencyjną

(2) $$t_n = t_0 t_{n-1} + t_1 t_{n-2} + \cdots + t_{n-1} t_0 \, .$$

Jest ona identyczna z zależnością (1) (żeby się o tym przekonać, wystarczy w (1) zastąpić n przez $n+1$). Mamy $t_0 = c_1$, $t_1 = c_2$. Stąd $t_n = c_{n+1}$ dla dowolnego n.



Rys. 3

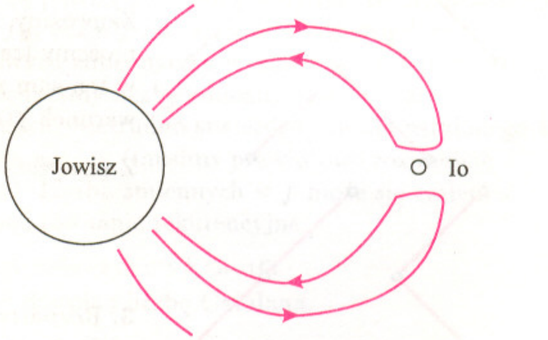
5. Liczby Catalana występują również w pewnych zagadnieniach w chemii kwantowej. Rozpatrzmy mianowicie układ $2n$ takich atomów, że każdy z nich ma wolny jeden elektron walencyjny. Między atomami tworzą się wiązania – atomy łączą się w pary. Najtrwalsza konfiguracja odpowiada maksymalnej liczbie wiązań. Powstaje pytanie: ile jest różnych takich konfiguracji? Okazuje się, że problem można, w uproszczeniu, zobrazować w następujący sposób: na okręgu umieszczamy $2n$ punktów (orbitale) i łączymy je n nieprzecinającymi się odcinkami (wiązania). Czytelnikowi pozostawiamy dowód faktu, że szukana liczba jest równa c_{n+1}. Dla przykładu pokazane zostały cząsteczki wodoru oraz benzenu.

Patrz w niebo

Wszystkie ciała niebieskie łączy wszechobecna grawitacja. Dzięki niej np. planety obiegają Słońce i satelity swoje planety. Doskonale to wiemy. Mniej zrozumiały bywa inny, subtelniejszy, przejaw grawitacji, mianowicie tzw. działanie pływowe. Polega ono w skrócie na tym, że – na przykładzie Ziemi – zwrócona ku Księżycowi strona naszego globu jest przezeń przyciągana trochę silniej (bo znajduje się bliżej niego) niż strona przeciwna. Ta pozornie niewielka różnica księżycowej grawitacji powoduje jednak pływy oceaniczne, w wyniku których rozproszeniu ulega energia ruchu obrotowego Ziemi, a więc doba staje się coraz dłuższa. Ziemia również działa pływowo na Księżyc, czego skutki widzimy praktycznie gołym okiem: ruch obrotowy Księżyca, jaki by nie był w przeszłości, został już całkiem wyhamowany i Księżyc zwrócony jest ku Ziemi stale tą samą stroną. Mówimy, że Księżyc jest satelitą synchronicznym.

Ten sam mechanizm doprowadził do synchronizmu cztery największe satelity Jowisza. Najbardziej wewnętrzny z nich – Io – zasłynął w naszych już czasach jako glob o najsilniejszej w Układzie Słonecznym aktywności wulkanicznej. Fontanny bogatej w siarkę magmy tryskające z wulkanów na Io przekraczają wysokość 200 km. Przyczyną tego jest efekt jeszcze subtelniejszy: zmienne działanie pływowe macierzystej planety. Temu zmiennemu działaniu Io podlega dlatego, że obiega Jowisza po orbicie lekko wydłużonej. Wskutek tego skorupa Io ulega deformacji zmiennej w czasie, przez to się ogrzewa i tak podtrzymuje intensywny wulkanizm.

Jak się okazuje, ma to dalsze konsekwencje. W 1964 roku australijski astronom E.K. Bigg stwierdził, że natężenie pewnej składowej radiowego promieniowania Jowisza zależy nie od ustawienia planety względem Ziemi, lecz od położenia Io. Teoretycy wymyślili następnie mechanizm tego zjawiska. Cząstki plazmy otaczającej Io wraz z satelitą poruszają się w magnetosferze Jowisza (albo raczej magnetosfera rotuje szybciej, niż Io obiega planetę, ale to wszystko jedno), podlegają więc działaniu indukowanego w tej sytuacji pola elektrycznego. Jako obdarzone ładunkiem elektrycznym stają się przez to nośnikami prądu płynącego między Io a Jowiszem wzdłuż linii jowiszowego pola magnetycznego. Strumień tego prądu powinien mieć zatem dość określony kształt (rys.).



Próba bezpośredniego sprawdzenia tej teorii nie udała się – w 1979 roku Voyager 1 miał przelecieć przez ten strumień prądu, ale chybił, aczkolwiek przeleciał na tyle blisko niego, że pośrednio dało się oszacować jego natężenie na 5 000 000 A, a pełną moc traconą w tym „obwodzie” na 2 bln W. Za to około dwóch lat temu zaobserwowano – z Ziemi! – inny skutek tego prądu, mianowicie świecenie (coś w rodzaju zorzy) atmosfery Jowisza w miejscach, gdzie wnikają do niej strumienie tego prądu. „Świecenie” to, pochodzące od jonów trójatomowej cząsteczki wodoru H_3^+, ujawniło się na uzyskanych w zakresie mikrofalowym obrazach tarczy Jowisza, przez co obserwacje Bigga sprzed 30 lat zostały na nowo potwierdzone, a model zjawiska zyskał poważne poparcie.

Tomasz KWAST

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 789. Dane są wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ o długości 1 i takie liczby nieujemne $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le 1$. Udowodnić, że istnieje taka prosta, iż długość rzutu prostokątnego wektora $\mathbf{v}_i$ na nią jest nie mniejsza od a_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$.
Rozwiązanie na str. 14

M 790. Niech S będzie skończonym zbiorem punktów płaszczyzny o tej własności, że dla dowolnych $A, B \in S$ na prostej AB leży pewien punkt $C \in S$ różny od A i B. Udowodnić, że wszystkie punkty zbioru S są współliniowe.
Rozwiązanie na str. 13

M 791. Niech p będzie liczbą pierwszą, a x i y liczbami naturalnymi. Udowodnić – nie korzystając z jednoznaczności rozkładu – że jeśli p jest dzielnikiem xy, to jest również dzielnikiem x lub y.
Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Krzysztof REJMER

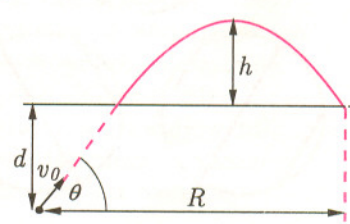
F 439. Wykazać, że energię kinetyczną swobodnej, relatywistycznej cząstki o masie (spoczynkowej) m_0 i prędkości v można zapisać jako: $E_k = \frac{p^2}{m_0+m}$, gdzie pęd $p = mv$ oraz $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ jest tak zwaną masą relatywistyczną.
Rozwiązanie na str. 2

F 440. Z łodzi podwodnej zanurzonej na głębokości d wystrzelono z prędkością v_0 pod kątem θ do poziomu pocisk o średniej gęstości równej gęstości wody. Znaleźć zasięg pocisku i jego maksymalną wysokość, jeśli siła oporu w wodzie dana jest wzorem:

(a) $F_{\text{op}} = cv$,

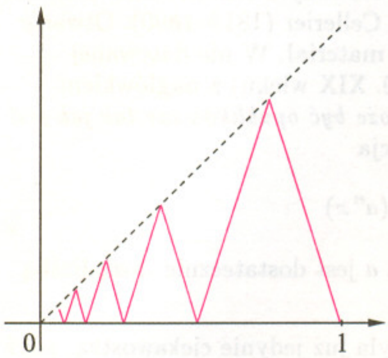
(b) $F_{\text{op}} = bv^2$,

gdzie v jest chwilową prędkością pocisku, a c i b są stałymi. Opór powietrza zaniedbujemy.
Rozwiązanie na str. 12



Zwariowane funkcje

Janusz OLSZEWSKI



Rys. 1. Funkcja ciągła z odcinka $[0,1]$ w $\mathbf{R}$ z przeliczalną liczbą punktów nieróżniczkowalności.

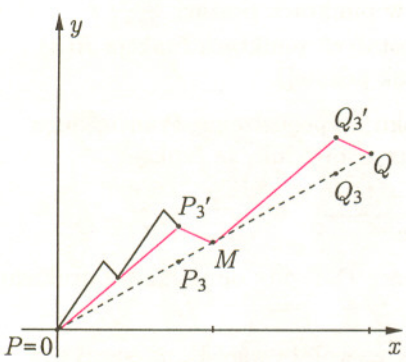
Czytelnicy *Delty* wiedzą zapewne, że **funkcja, która w pewnym punkcie przedziału ma pochodną, jest w tym punkcie ciągła**. Fakt odwrotny nie jest prawdziwy. Łatwo podać stosowny przykład: funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła na całej prostej rzeczywistej, ale w punkcie $x = 0$ nie ma pochodnej. Ogólnie, dowolna funkcja nie jest różniczkowalna w tych punktach, w których jej wykres ma „dziobki". Korzystając z tej obserwacji, nietrudno skonstruować funkcję ciągłą na odcinku (powiedzmy $[0, 1]$), która ma nieskończoną liczbę punktów nieróżniczkowalności (patrz rys. 1).

Wszystkie przykłady funkcji ciągłych, jakie podpowiada nam intuicja, są w „większości" punktów różniczkowalne. Niemniej jednak istnieją zwariowane funkcje ciągłe, które są nieróżniczkowalne w każdym punkcie. Historia ich odkrycia jest długa i obfituje w wiele niespodzianek.

Matematycy w XVII i XVIII wieku nie interesowali się pytaniem o istnienie pochodnej zadanej funkcji $f(x)$, tylko po prostu $f'(x)$ obliczali – co prawie zawsze im się udawało. Jedną z pierwszych świadomych prób dowodzenia ogólnych twierdzeń w rachunku różniczkowym była praca Ampère'a z 1806 roku, poświęcona teorii „dowolnych" funkcji. Ampère udowodnił w niej, że dowolna funkcja, niekoniecznie ciągła, ma pochodną w każdym punkcie swojej dziedziny, z wyjątkiem niektórych „wyjątkowych i izolowanych" wartości argumentu.

Wiara w wynik Ampère'a przez długi czas (około 70 lat) była tak wielka, że z chwilą wprowadzenia przez Cauchy'ego w 1821 roku pojęcia funkcji ciągłej pojawiły się natychmiast wnioski z twierdzenia Ampère'a, dotyczące istnienia pochodnej funkcji ciągłej (formułowali je m.in. L. Raabe, S.F. Lacroix, E. Galois, J.M.C. Duhamel, C. Freycinet, J. Bertrand, J.A. Serret, R. Rubini). A gdy dodamy do tego, że nawet po opublikowaniu pierwszych przykładów funkcji ciągłych nigdzie nieróżniczkowalnych ukazywały się „dowody" twierdzeń typu Ampère'a (wśród ich autorów wspomnimy tylko Bertranda, Garceta i Königsbergera – ucznia Weierstrassa!), to i tak nie uzyskamy pełnego obrazu tego, jak głęboko w ludzkiej świadomości zakorzenione były wcześniejsze poglądy.

Pierwszym matematykiem, dla którego było całkowicie jasne, że ciągłość nie implikuje różniczkowalności, był zapewne czeski duchowny i filozof Bernard Bolzano. Około 1830 roku, w rękopisie, który odnaleziono i opublikowano prawie sto lat później, Bolzano nie tylko zaznacza, że oba pojęcia są słabo związane, lecz konstruuje przykład funkcji ciągłej i dowodzi jej nieróżniczkowalności na gęstym podzbiorze przedziału (Bolzano uważał, że w pozostałych punktach przedziału jego funkcja jest różniczkowalna). Definicja Bolzano jest geometryczna i opiera się na następującej podstawowej operacji.

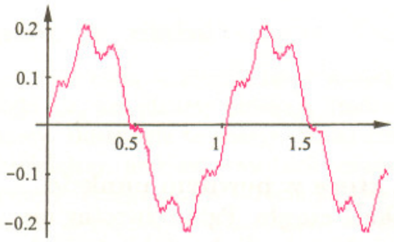


Rys. 2. Krzywa B_0, krzywa B_1 (kolor) i fragment krzywej B_2 (czarny).

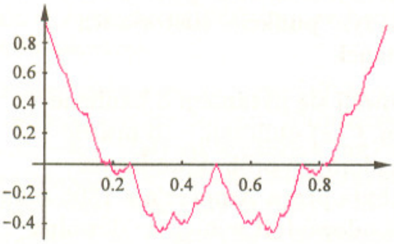
Niech PQ (krzywa B_0) będzie odcinkiem nachylonym pod kątem ostrym do osi OX (patrz rys. 2). Podzielmy go punktem M na połowy, a następnie każdy z odcinków PM i MQ podzielmy na cztery równe części. Punkty podziału oznaczmy P_1, P_2, P_3 i Q_1, Q_2, Q_3. Niech P_3' będzie odbiciem P_3 względem prostej poziomej przechodzącej przez M, a Q_3' – odbiciem Q_3 względem prostej poziomej przechodzącej przez Q. Linię łamaną $PP_3'MQ_3'Q$ nazwiemy B_1.

Stosując powyższą operację do każdego z czterech odcinków łamanej B_1 otrzymamy linię łamaną B_2 złożoną z 4^2 odcinków. Kontynuując ten proces, otrzymamy nieskończony ciąg krzywych B_0, B_1, B_2,... zbieżny do pewnej krzywej B, którą nazywamy krzywą Bolzano.

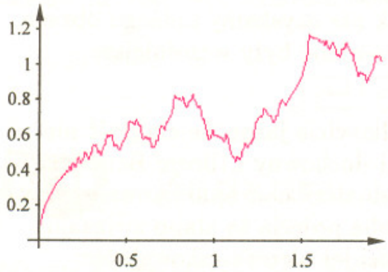
Wkrótce po odnalezieniu rękopisów Bolzano udowodniono (V. Jarnik, K. Rychlik, G. Kowalewski, A.N. Singh), że funkcja, której wykresem jest krzywa B, jest nigdzie nieróżniczkowalna. Tak więc w pierwszej połowie



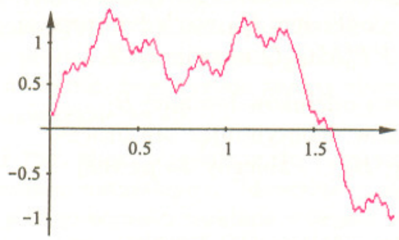
Rys. 3. Wykres sumy pierwszych dwudziestu wyrazów szeregu $C(x)$ dla $a = 6$.



Rys. 4. Wykres sumy pierwszych dwudziestu wyrazów szeregu $W(x)$ dla $a^{-1} = b = 2$ (jak wykazał Hardy, funkcja Weierstrassa jest nieróżniczkowalna w każdym punkcie dla $ab \geq 1$).



Rys. 5. Wykres sumy pierwszych dwudziestu wyrazów szeregu $R(x)$.



Rys. 6. Wykres sumy pierwszych dwudziestu wyrazów szeregu $D(x)$.

XIX wieku był już skonstruowany przykład funkcji ciągłej nigdzie nieróżniczkowalnej, jednak nikt o nim nie wiedział, podobnie jak mało kto słyszał o księdzu Bolzano.

Bardziej radykalne od Bolzano poglądy w dyskutowanym temacie miał nieznany za swego życia matematyk szwajcarski Charles Cellerier (1818–1890). Otwarte po jego śmierci rękopisy zawierały rewelacyjny materiał. W nie datowanej teczce (według historyków pochodzącej z lat 50. XIX wieku) z nagłówkiem *„Bardzo ważne i myślę, że nowe. Poprawne. Może być opublikowane tak jak jest napisane."* znajdował się dowód faktu, że funkcja

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \sin(a^n x)$$

jest ciągła, lecz nigdzie nieróżniczkowalna, jeśli a jest dostatecznie dużą liczbą parzystą.

Publikacja przykładu Celleriera w 1890 roku była już jedynie ciekawostką, gdyż od co najmniej 15 lat znana była powszechnie funkcja Weierstrassa

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

ciągła i nigdzie nieróżniczkowalna dla $0 < a < 1$ i takich nieparzystych b, że $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Prawie nie do uwierzenia jest fakt, że sam Weierstrass nigdy nie opublikował swego odkrycia, chociaż przedstawił je Berlińskiej Akademii Nauk 18 lipca 1872 roku. Świat dowiedział się o funkcji $W(x)$ z pracy Paula du Bois Reymonda opublikowanej w 1875 roku.

Wygłaszając odczyt o swojej funkcji Weierstrass powiedział m.in.

Jak dowiedziałem się od niektórych uczniów Riemanna, on jako pierwszy (około roku 1861 lub wcześniej) wskazał myśl przedstawienia kontrprzykładu [dla twierdzenia Ampère'a — przyp. aut.]*; na przykład funkcja*

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

nie spełnia tego twierdzenia. Niestety, dowód Riemanna nie był publikowany i wydaje mi się, że nie znajduje się w jego notatkach ani w ustnych przekazach (...). Uważam, że Riemann miał na myśli funkcje [ciągłe]*, które nie mają pochodnej dla żadnej wartości argumentu. Dowód tego faktu wydaje mi się w pewnej mierze trudny...*

O trudnościach, jakie nastręcza analiza przykładu Riemanna, świadczy nie tylko powyższe zdanie Weierstrassa, lecz także i to, że do końca XIX wieku nie pojawił się dowód lub kontrprzykład do twierdzenia Riemanna (o tym, że funkcja $R(x)$ jest nigdzie nieróżniczkowalna). Dopiero w 1916 roku G.H. Hardy wykazał, że funkcja Riemanna nie ma pochodnej w punktach postaci πy, gdzie y jest liczbą niewymierną, bądź wymierną postaci $\frac{2m}{4n+1}$ lub $\frac{2m+1}{2(2n+1)}$ ($m, n \in \mathbf{Z}$). Natomiast w 1970 roku, a więc ponad sto lat po śmierci Riemanna, Joseph Gerver obliczył, że w punktach postaci $\frac{2m+1}{2n+1}\pi$ funkcja $R(x)$ ma pochodną równą $-\frac{1}{2}$ (w pozostałych punktach funkcja $R(x)$ jest nieróżniczkowalna, co Gerver udowodnił rok później).

Niezależnie od Weierstrassa, 19 marca 1873 roku na posiedzeniu Francuskiego Towarzystwa Matematycznego Gaston Darboux udowodnił, że funkcja

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\big((n+1)!x\big)}{n!}$$

jest ciągła i nigdzie nieróżniczkowalna. Swą pracę Darboux opublikował drukiem w 1875 roku.

Publikacja przykładów Weierstrassa i Darboux wywołała wśród matematyków popłoch i zamieszanie. *W jaki sposób intuicja mogła nas zawodzić do tego stopnia?* – pytał Henri Poincaré. Jeszcze drastyczniej zareagował inny matematyk francuski, Charles Hermite:

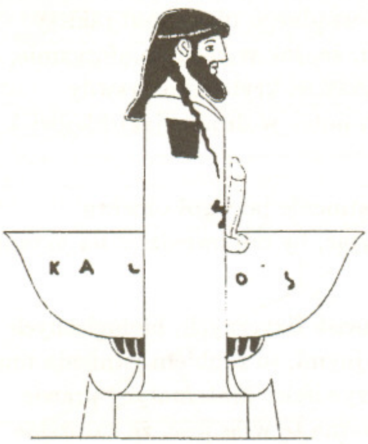
Odwracam się ze wstrętem i przerażeniem od tych godnych opłakiwania wrzodów, funkcji ciągłych nigdzie nieróżniczkowalnych...

Zaś du Bois Reymond pisał o funkcji Weierstrassa tak:

...jest to jeden z najbardziej poruszających wyników współczesnej matematyki, że jedna funkcja może być we wszystkich punktach swego przedziału ciągła, nie mając dla żadnego punktu tego przedziału pochodnej.

Dalej jednak przestrzegał:

Wydaje mi się, że w metafizyce funkcji Weierstrassa tkwi jakaś zagadka i nie mogę uchronić się przed myślą, że zagłębienie się w ten przykład doprowadzi do granicy naszego intelektu.



Wbrew przestrogom du Bois Reymonda matematycy intensywnie badali funkcje ciągłe nigdzie nieróżniczkowalne, i to z niezłym skutkiem. Ukazało się wiele prac, w których ulepszano i uogólniano stare wyniki, konstruowano nowe przykłady oraz całe klasy przykładów, badano strukturę zbioru funkcji ciągłych nigdzie nieróżniczkowalnych. Warto zaznaczyć, że istotny wkład w rozwój tych badań wnieśli matematycy polscy (wśród nich Auerbach, Banach, Kaczmarz, Marcinkiewicz, Mazurkiewicz, Orlicz, Ruziewicz, Saks, Sierpiński, Steinhaus i Zygmund). Okazało się, na przykład (to polski wynik), że tytułowych bohaterek (tzn. funkcji ciągłych bez pochodnej w żadnym punkcie) jest wśród funkcji ciągłych w pewnym sensie o wiele więcej, niż porządnych funkcji różniczkowalnych choćby w jednym punkcie. Funkcje ciągłe nigdzie nieróżniczkowalne mają też swoją realizację w naturze, np. jako trajektorie ruchów Browna.

Podkreślmy na koniec, że funkcje ciągłe bez pochodnych nie są obecnie tematem prac tylko z historii matematyki. W rozwijającej się teorii chaosu czy w badaniach fraktali takie funkcje pojawiają się w naturalny sposób. Wiele ich własności pozostaje jeszcze do odkrycia. Poszukiwacze laurów i sławy mogą np. spróbować udowodnić otwartą hipotezę głoszącą, że wymiar Hausdorffa wykresu funkcji $W(x)$ jest równy $2 + \frac{\log a}{\log b}$.

Polecamy *Foton*

Od kilku lat Zofia Gołąb-Meyer, przy wsparciu Instytutu Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie, wydaje dwumiesięcznik *Foton* – pismo dla nauczycieli fizyki i ich uczniów. W lutym 1996 roku ukazał się już 40. numer *Fotonu.* Warto w nim polecić artykuł Andrzeja Warczaka o Röntgenie (z okazji 100. rocznicy odkrycia promieni rentgenowskich) i Barbary Blicharskiej o oddziaływaniu promieniowania elektromagnetycznego na organizmy żywe oraz zbiór podstawowych wielkości fizycznych i jednostek stosowanych w dozymetrii. Michał Praszałowicz w postaci autodialogu przedstawił Studia Matematyczno-Przyrodnicze na UJ. Numer 41 nosi nazwę *Info-foton.* Jego tematem wiodącym są fraktale oraz zastosowania komputerów w matematyce i fizyce. Andrzej Dyrek przedstawił program „Mathematica – System do uprawiania matematyki na komputerach". Stałe działy: Co nowego w fizyce?, Listy, Zadania, Co czytać, Różności itp., czynią z *Fotonu* pismo godne polecenia uczniom i nauczycielom fizyki. *Foton* można zaprenumerować wysyłając 10 zł za kolejnych sześć numerów na konto: *Foton* – Zofia Gołąb-Meyer, PBK SA w Warszawie, III Oddział w Krakowie, nr rachunku 373407-412294-136 lub przekazem pocztowym pod adresem: Zofia Gołąb-Meyer, 30-327 Kraków, ul. Biała Droga 5.

Istnienie i nieistnienie w matematyce

Wiktor BARTOL

Filozof i logik angielski Bertrand Russell określił matematykę jako dziedzinę, w której „nie wiadomo, o czym się mówi i czy to, co się mówi, jest prawdą". Ten zgrabny opis miał wyrażać – w skrócie właściwym aforyzmom – fakt, iż matematyka jest nauką abstrakcyjną, niezależną od rzeczywistości i zajmującą się wyprowadzaniem (dowodzeniem) twierdzeń na podstawie ściśle określonego sposobu wnioskowania, nie interesuje jej natomiast związek tych twierdzeń z tzw. życiem. Przemilczmy tu, na razie – bardzo ciekawe! – pytania i wątpliwości, jakie może rodzić takie postawienie sprawy (zauważmy tylko, że bez matematyki nie dałoby się zbudować porządnego mostu ani rakiety kosmicznej). Poprzestańmy tu na stwierdzeniu, że, jak w każdym aforyzmie, jest w określeniu Russella część prawdy. Mianowicie, kryterium prawdy w matematyce nie przewiduje potwierdzania hipotez w drodze jakichkolwiek obserwacji.

Cóż zatem może w ogóle oznaczać pytanie o istnienie jakiegoś obiektu matematycznego? Jakie kryterium należy przyjąć, by odpowiedzieć na pytanie o istnienie np. zbioru nieskończonego?

Jeśli matematyka jest nauką niezależną od zjawisk fizycznych, biologicznych itp., a jej obiekty są tworami czysto abstrakcyjnymi, to problem istnienia musi znajdować rozstrzygnięcie w niej samej. I rzeczywiście. Matematycy prawie powszechnie uznają, że istnieje wszystko to, co ma tę własność, że założenie o jego istnieniu nie prowadzi do sprzeczności. Mówiąc nieco dokładniej, owa własność polega na tym, że jeśli do twierdzeń określonej teorii matematycznej dołączymy zdanie mówiące o istnieniu pewnego obiektu, to możemy uznać owo istnienie, jeśli z tak rozszerzonej teorii nie da się wyprowadzić dwóch twierdzeń, z których każde jest negacją drugiego. Inaczej mówiąc, gdy założenie o istnieniu obiektu nie prowadzi do sprzeczności z daną teorią. Na przykład, gwarancją niesprzeczności jest dowód istnienia postulowanego obiektu.

Zależność między niesprzecznością a istnieniem wyraża twierdzenie Gödla z 1930 roku, które stwierdza, że każdy niesprzeczny zbiór zdań ma model przeliczalny, czyli istnieje struktura, „realizująca" każde zdanie z niesprzecznego zbioru. Prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne: jeśli istnieje struktura, która realizuje każde zdanie z jakiegoś zbioru zdań, to ów zbiór jest niesprzeczny.

Poszukajmy ilustracji opisanego tu podejścia. Zapewne większość Czytelników słyszała lub czytała (np. w *Delcie*) o geometriach nieeuklidesowych. Geometrie te zrodziły się z prób sprawdzenia, czy tzw. V postulat Euklidesa nie wynika aby z pozostałych czterech. Okazało się, że przyjęcie (zamiast V postulatu) założenia innego niż to, które przyjął Euklides, daje całkiem spójną, całkowicie pozbawioną sprzeczności teorię. Jaką? To zależy od postaci owego dodatkowego założenia. Można w ten sposób otrzymać teorię, w której istnieje nieskończenie wiele prostych przechodzących przez punkt nie leżący na danej prostej i równoległych do niej, a można (zmieniając nieco bardziej założenia) otrzymać i taką, w której przez punkt zewnętrzny do prostej nie przechodzi żadna prosta równoległa do niej. Stąd wniosek, stanowiący niezbywalny dorobek matematyki: istnieją geometrie nieeuklidesowe. I – przy okazji – wniosek drugi: istnienie lub nieistnienie ma sens tylko na gruncie wyraźnie określonego systemu. To, co istnieje w jednym (przy pewnych założeniach), może nie istnieć w innym (przy odmiennych założeniach).

Rozwiązanie zadania F 440. Ponieważ średnia gęstość pocisku jest równa gęstości wody, siła wyporu w wodzie równoważy jego ciężar. Z tego powodu pocisk porusza się w wodzie po linii prostej. W powietrzu pocisk porusza się po paraboli. Zasięg i wysokość toru dane są wzorami

$$R = d\operatorname{ctg}\theta + \frac{v_1^2 \sin 2\theta}{g},$$

$$h = \frac{v_1^2 \sin^2\theta}{2g},$$

gdzie v_1 jest prędkością, z jaką pocisk wylatuje z wody. Musimy tę prędkość obliczyć. Równanie ruchu pocisku w wodzie ma postać

$$m\frac{dv}{dt} = -cv$$

w przypadku (a)
oraz

$$m\frac{dv}{dt} = -bv^2$$

w przypadku (b).

Zapiszmy przyspieszenie jako:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds},$$

gdzie s jest drogą przebytą przez pocisk.

W przypadku (a) mamy

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{c}{m}.$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy

$$v_1 = v_0 - \frac{cd}{m\sin\theta}.$$

W przypadku (b) otrzymujemy

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{b}{m}v.$$

Rozwiązując to równanie dostajemy

$$v_1 = v_0 \cdot e^{-\frac{bd}{m\sin\theta}}.$$

A jak stwierdzić, że coś, jakiś pomyślany obiekt, nie istnieje? Z tego, co powiedzieliśmy do tej pory, wynika to jasno: należy wykazać, że założenie o istnieniu tego obiektu prowadzi do sprzeczności. Być może czytając w *Delcie* 4/1996 artykuły o nieistniejących obiektach matematycznych, zauważyliście, że wszystkie dowody nieistnienia zaczynają się od zdania w rodzaju: „Przypuśćmy, że (tu nazwa obiektu) istnieje...", a kończą stwierdzeniem sprzeczności, do której to założenie doprowadziło. Bywa zresztą i tak, że w podobny sposób dowodzi się istnienia: „Przypuśćmy, że (i tu znów nazwa odpowiedniego obiektu) nie istnieje...". Jeśli z tego założenia da się wyprowadzić sprzeczność, pozostaje przyjąć, że obiekt istnieje.

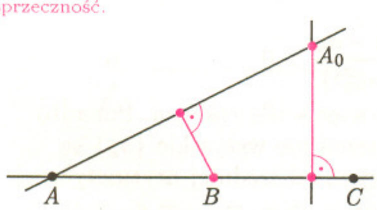
Dla pełności obrazu należy dodać, że nie zawsze i nie wszyscy matematycy skłonni są przyjąć taki punkt widzenia. Mniej więcej 60–70 lat temu zrodził się wśród matematyków kierunek myślenia zwany *intuicjonizmem*, odrzucający dowody istnienia nie wskazujące wyraźnie na obiekt, którego istnienie jest postulowane. O istnieniu można zatem mówić tylko wtedy, gdy można „pokazać palcem", czyli skonstruować, odpowiedni obiekt. Jeśli nawet można zrozumieć taką tęsknotę do sprawdzenia wszystkiego przez ogląd bezpośredni, filozofia intuicjonistów – i szerzej: konstruktywistów – nie przyjęła się w matematyce. Z prostego powodu: wymagałaby odrzucenia ogromnej części matematyki, która przecież nie najgorzej dawała i daje sobie radę nie tylko ze sobą, ale i z rzeczywistością. Co prawda, ostatnio rzeczywistość nieco się skomplikowała i np. teoretycy informatyki przykładają bardzo duże znaczenie do konstruowalności różnych obiektów, ale to już jest specyfika tej dziedziny.

Tak więc mówiąc w skrócie: istnienie to niesprzeczność, nieistnienie to sprzeczność. Wydawałoby się zatem, że matematyka ma z tzw. życiem niewiele wspólnego i sama siebie rozlicza ze swoich pojęć. Czy rzeczywiście? Wystarczy rozejrzeć się wokół siebie. Co byśmy zobaczyli, gdyby z naszego otoczenia zniknęły wszystkie obiekty, przy których tworzeniu człowiek wykorzystał pojęcia, prawa i metody matematyki? A przecież mosty (na ogół) stoją, rakiety kosmiczne (na ogół) lecą, a niekiedy nawet planety znajdują się w miejscach, wskazanych przez wyniki obliczeń matematycznych. Wyjaśnienie tego frapującego stanu rzeczy zależy w dużej mierze od przyjmowanych założeń filozoficznych (choćby od odpowiedzi na pytanie, czy matematycy odkrywają nowe pojęcia i prawa, czy je wymyślają?). Tu poprzestańmy na ogólnym stwierdzeniu, że matematyka powstawała i rozwijała się jako język opisu rzeczywistości, język, który ukształtował swoje własne reguły i stosuje swoiste metody weryfikowania formułowanych w nim zdań. Historia tego języka sprawia, że jest on skutecznym narzędziem działania w świecie rzeczywistym; jego reguły i metody nadają twierdzeniom charakter prawd niezależnych od tego świata.

Aha, warto może na koniec powiedzieć jeszcze i to: od 1931 roku wiadomo (znów dzięki Gödlowi), że niesprzeczności żadnej niezbyt trywialnej teorii nie da się udowodnić jej własnymi narzędziami. Tak więc np. do dowodu niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych (zakładającej istnienie takich liczb) trzeba się odwołać do założenia o niesprzeczności teorii mnogości, jej niesprzeczności można dowodzić na gruncie innej teorii... Wynikiem takiego postępowania może być zatem tylko tzw. względna niesprzeczność danej teorii, zależna od niesprzeczności teorii wyższej. A to znaczy – jeśli o istnieniu w matematyce mowa – że absolutna niesprzeczność **nie istnieje**! W takim razie, czy istnieje matematyka???

Rozwiązanie zadania M 790. Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa. Oznaczmy przez X zbiór wszystkich par postaci (p, A), gdzie p jest prostą przechodzącą przez pewne dwa punkty zbioru S, A zaś punktem zbioru S nie należącym do p. Niech funkcja $f: X \to (0, +\infty)$ przyporządkowuje parze (p, A) odległość A od p. Ponieważ zbiór X jest skończony, więc funkcja f osiąga swe (dodatnie) minimum m w pewnym punkcie $(p_0, A_0) \in X$.

Zgodnie z założeniem o S, na prostej p_0 leżą przynajmniej trzy różne punkty A, B i C zbioru S. Przynajmniej dwa z nich – bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że są to A i B – leżą po tej samej stronie prostej l przechodzącej przez A_0 i prostopadłej do p. Bez zmniejszenia ogólności przyjmijmy także, że odległość B od l jest mniejsza, niż odległość A od l. Wtedy jednak odległość B od prostej AA_0 jest mniejsza od m, a to jest sprzeczność.



Rozwiązanie zadania M 791. Niech m będzie taką liczbą całkowitą, że $mp = xy$. Przypuśćmy, że p nie dzieli x. Na mocy własności największego wspólnego dzielnika mamy wówczas

$$1 = \mathrm{NWD}(p, x) = ap + bx$$

dla pewnych a, b całkowitych. Mnożąc stronami przez y otrzymujemy

$$y = apy + bxy = p(ay + bm),$$

a więc p dzieli y.

Kącik olimpijski (19)

Jeszcze raz średnia geometryczna i arytmetyczna

Warto pamiętać, że istnieje prosty sposób dowodzenia nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną,

$$(1)\qquad \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

Oznaczmy średnią arytmetyczną liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ przez a i niech $a_k(t) = a_k + t(a - a_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $t \in [0, 1]$. W takim razie $a_k(0) = a_k$ i $a_k(1) = a$. Zwróćmy uwagę, iż dla każdego $t \in [0, 1]$ średnia arytmetyczna liczb $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)$ jest równa a, a więc nie zależy od t.

Przez $f(t)$ oznaczmy iloczyn liczb $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)$. Korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu n funkcji

$$(f_1f_2f_3\ldots f_n)' = f_1'f_2f_3\ldots f_n + f_1f_2'f_3\ldots f_n + \ldots + f_1f_2f_3\ldots f_n'$$

łatwo obliczyć, że:

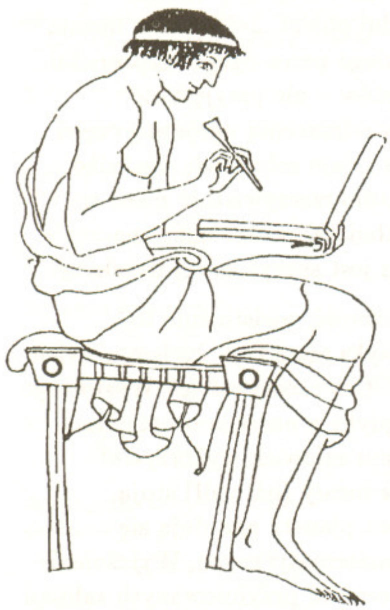
$$(2)\qquad f'(t) = a_1(t)a_2(t)\ldots a_n(t)\left[\frac{a-a_1}{a_1(t)} + \frac{a-a_2}{a_2(t)} + \ldots + \frac{a-a_n}{a_n(t)}\right].$$

Zauważmy, iż jeżeli $a_k \ne a$, to wyrażenie postaci

$$\frac{a-a_k}{a_k(t)} = \frac{a-a_k}{a_k + t(a-a_k)}$$

jest funkcją ściśle malejącą zmiennej t, a ponadto dla $t = 1$ wartość sumy wyrażeń stojących w nawiasie kwadratowym w (2) jest równa zeru. Wnioskujemy stąd, że o ile nie wszystkie spośród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są równe a, to dla każdego $t \in [0, 1)$ jest

$$\frac{a-a_1}{a_1(t)} + \frac{a-a_2}{a_2(t)} + \ldots + \frac{a-a_n}{a_n(t)} > 0$$



i w takim przypadku $f'(t) > 0$. Funkcja $f(t)$ jest więc ściśle rosnąca. Ponadto $f(1) = a^n$, a $f(0) = a_1a_2\ldots a_n$. Wynika stąd, iż jeżeli nie wszystkie $\{a_k\}$ są równe a, to średnia geometryczna jest ostro mniejsza od średniej arytmetycznej, a równość we wzorze (1) zachodzi tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$.

Wadą powyższej metody jest konieczność stosowania rachunku pochodnych. Zwykle w szkole najpierw poznajemy nierówność (1), a dopiero dużo później uczymy się pochodnych.

Radzimy Czytelnikowi, aby w podobny sposób udowodnił, że

$$\frac{a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p}{n} \ge \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^p,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, a p jest ustaloną liczbą rzeczywistą większą od 1.

Grzegorz RZĄDKOWSKI

Rozwiązanie zadania M 789. Dla ciągu liczb $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \{-1, 1\}$ określmy wektor $\mathbf{w}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = e_1a_1\mathbf{v}_1 + e_2a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + e_na_n\mathbf{v}_n$. Z nierówności trójkąta wynika, że $|\mathbf{w}(e_1, e_2, \ldots, e_n)| \le a_1|\mathbf{v}_1| + a_2|\mathbf{v}_2| + \ldots + a_n|\mathbf{v}_n| \le 1$. Zdefiniujmy funkcję $f : \{-1, 1\}^n \to \mathbf{R}$ wzorem $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (\mathbf{w}(e_1, e_2, \ldots, e_n))^2$. Ponieważ zbiór $\{-1, 1\}^n$ ma skończoną liczbę elementów, więc dla pewnego ciągu $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \{-1, 1\}$ funkcja f osiąga maksimum. Zatem $f(E_1, E_2, \ldots, E_n) \ge f(E_1, \ldots, E_{i-1}, -E_i, E_{i+1}, \ldots, E_n)$ dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Stąd

$$\begin{aligned}0 \le{}& \mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n)^2 - \mathbf{w}(E_1, \ldots, E_{i-1}, -E_i, E_{i+1}, \ldots, E_n)^2 = \\ ={}& \mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n)^2 - (\mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n) - 2E_ia_i\mathbf{v}_i)^2 = \\ ={}& 4E_ia_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n)\rangle - 4E_i^2a_i^2|\mathbf{v}_i|^2 \le \\ \le{}& 4a_i|\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n)\rangle| - 4a_i^2,\end{aligned}$$

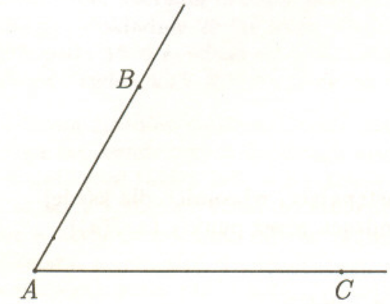
czyli $|\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n)\rangle| \ge a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Jak stwierdziliśmy wcześniej, $|\mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n)| \le 1$, a zatem prosta mająca ten sam kierunek co wektor $\mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ spełnia warunki zadania.

mała delta

Trysekcja kąta

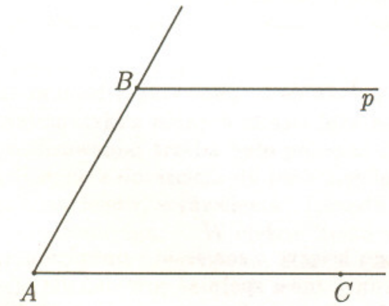
Niemal każdy słyszał, że trysekcji kąta nie da się wykonać za pomocą cyrkla i linijki. Matematyk, przy którym wspomni się o wykonywaniu trysekcji cyrklem i linijką, otrząśnie się ze wstrętem i nie będzie w ogóle chciał o tym dyskutować.

Gdy ołówek, którym kreślimy linie, wykorzystamy do zaznaczenia na linijce długości jednego odcinka, to trysekcja będzie możliwa. O tym wie już zapewne mniej osób. Tymczasem konstrukcja jest bardzo łatwa.



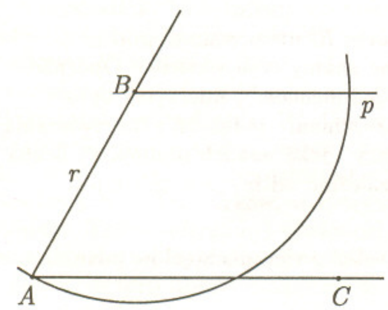
Rys. 1

Na ramionach danego kąta obieramy punkty B i C, a wierzchołek kąta oznaczamy przez A (rys. 1). Przez punkt B prowadzimy półprostą p równoległą do ramienia AC (patrz rys. 2). W punkcie B wbijamy nóżkę cyrkla i rysujemy okrąg o promieniu $r = BA$ (rys. 3). Teraz następuje kluczowy moment konstrukcji: na linijce zaznaczamy odcinek o długości AB. Następnie rysujemy taką prostą k przechodzącą przez punkt A, żeby odcinek DE (patrz rys. 4) miał taką samą długość, jak odcinek AB. (Tego kroku konstrukcji nie dałoby się wykonać zwyczajną linijką).



Rys. 2

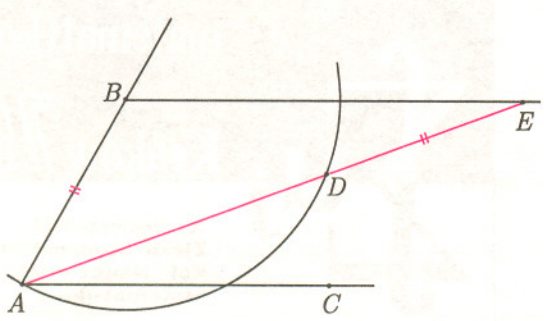
I to już koniec, kąt EAC jest równy jednej trzeciej kąta BAC. Żeby udowodnić poprawność konstrukcji, dorysujmy jeszcze jedną kreskę (proszę spojrzeć na rys. 5). Kąty EAC i AEB są oba równe pewnemu kątowi α (jako kąty naprzemianległe przy prostych równoległych). Ze sposobu konstrukcji wynika, że trzy odcinki AB, DE i BD mają długości równe promieniowi r narysowanego okręgu. Zatem trójkąty ADB i BED są równoramienne. Stąd wynika, że $\angle ADB = \angle DAB = 2\alpha$, a więc kąt $BAC = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$ jest trzy razy większy od kąta EAC.



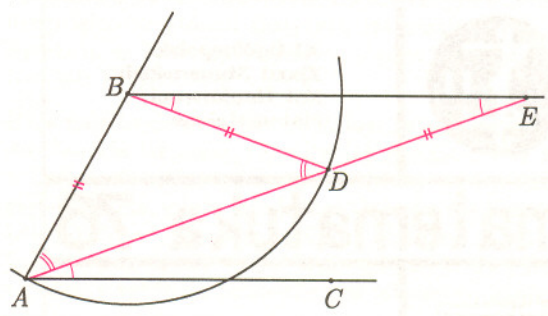
Rys. 3

Uwaga. Konstrukcję trysekcji kąta wymagającą kreślenia oprócz prostych i okręgów także tzw. konchoidy Nikomedesa, czyli konchoidy prostej, znano już w starożytności; jej opis można odnaleźć np. w książce Marka Kordosa *Wykłady z historii matematyki*. Konchoida (dosłownie: krzywa muszlowa) to krzywa, którą można rysować taką właśnie linijką z zaznaczonymi dwoma punktami. Gdy linijka przechodzi przez ustalony punkt, a jednym z zaznaczonych punktów wodzimy po danej krzywej, to drugi z zaznaczonych punktów zakreśla konchoidę tej krzywej.

Nietrudno zauważyć, że w konstrukcji zaprezentowanej powyżej zamiast konchoidy prostej używa się konchoidy okręgu, zwanej ślimakiem Pascala: najważniejszy punkt, E, leży właśnie na przecięciu półprostej p i jednej z konchoid okręgu $O(B, r)$.



Rys. 4



Rys. 5

Małą Deltę przygotował Paweł STRZELECKI

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Termin nadsyłania rozwiązań: 1 I 1997

Zadania z matematyki nr 329, 330

Redaguje Marcin E. KUCZMA

329. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o następującej własności: dla każdej pary różnych liczb rzeczywistych a, b prosta przechodząca przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ przecina oś rzędnych w punkcie $(0, -ab)$.

330. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba

$$N = \prod_{j=0}^{n-1} (2^n - 2^j)$$

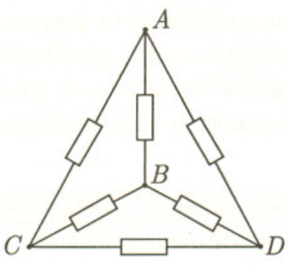
jest podzielna przez $n!$.

Zadanie **330** zaproponował pan Henryk Pawłowski z Torunia.

Zadania z fizyki nr 227, 228

Redaguje Jerzy B. BROJAN

227. Wokół planety o masie M porusza się po okręgu księżyc o masie m i promieniu r, zwrócony do planety stale tą samą stroną. Jaki warunek musi spełniać promień R orbity księżyca (tzn. odległość środków obu ciał), aby kamienie leżące na powierzchni księżyca nie odrywały się od niego? Przyjąć, że planeta i księżyc są kuliste, $M \gg m$ i $R \gg r$.



228. Z pięciu oporników o oporze R i jednego o oporze R' utworzono obwód przedstawiony na rysunku; wiemy, że $R \neq R'$, ale nie znamy tych wartości. Oporniki wyglądają identycznie, więc aby ustalić, który jest „odmieńcem", mierzymy opór obwodu między dowolnie wybranymi węzłami (bez rozcinania połączeń i bez zwierania węzłów). W jaki sposób należy wykonywać te pomiary i jaka jest ich minimalna liczba gwarantująca możliwość wskazania opornika R' niezależnie od miejsca, gdzie jest ukryty?

Pytanie „poza konkursem": czy dopuszczenie możliwości zwierania węzłów pozwoli wykonać zadanie mniejszą liczbą pomiarów?

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 315 (WT=2,45) i 316 (WT=2,08) z numeru 2/1996

Piotr Lipiński	– Radom	44,83
Henryk Kornacki	– Augustów	42,07
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	40,29

Okrągła liczba: 80. Tylu członków liczy Klub 44 M po przyjęciu doń pana Lipińskiego.

Uwaga. Sprostowanie: W numerze 6/1996 błędnie podano WT = 3,84 dla zadania 305; powinno być 2,84. Na pomyłkę zwrócił uwagę pan Lesław Skrzypek. Dziękujemy, a Czytelników przepraszamy.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 213 (WT=3,22) i 214 (WT=3,28) z numeru 2/1996

Jarosław Łazuka	– Warszawa	39,74
Aleksander Surma	– Myszków	38,89
Przemysław Gworys	– Częstochowa	32,45
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	27,87
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	16,69

11/96
(68)

Ostatni Zjazd

I znowu epsilonowy tekst ma charakter rocznicowy.

Zdarzenie, któremu chcemy poświęcić trochę uwagi, miało miejsce dokładnie 20 lat temu. Otóż w dniach 15–17 listopada 1976 r. odbył się w Krakowie XI Ogólnopolski Zjazd Studenckich Kół Naukowych Matematyków.

Historia zjazdów studenckich kół matematycznych sięga lat dwudziestych bieżącego stulecia, gdy w Polsce istniało pięć takich kół: w Krakowie, Lwowie, Warszawie, Poznaniu i Wilnie. Wówczas studenckie zjazdy odbywały się w zasadzie co roku; młodzi matematycy wygłaszali referaty, wymieniali doświadczenia, sprzedawali skrypty wydawane przez różne koła. Po wojnie też takie zjazdy miały miejsce, przy czym numerację rozpoczęto od nowa. Do połowy lat sześćdziesiątych zjazdy były organizowane stosunkowo regularnie; niemniej jednak raz któryś ze zjazdów nie doszedł do skutku – i nastąpiła długa przerwa.

Po pewnym czasie w Krakowie paru entuzjastów wpadło na pomysł reaktywowania miłej idei spotkań studentów matematyki z różnych miast. Idea nie była łatwa do zrealizowania; trzeba było pokonać rozmaite problemy związane z dotarciem do poszczególnych kół, załatwieniem sali, noclegów, wyżywienia i (przede wszystkim) dofinansowania... W efekcie Zjazd odbył się parę lat po rozpoczęciu przygotowań, a zorganizowali go praktycznie inni ludzie niż pomysłodawcy – po prostu nowa ekipa władz Koła Matematyków Studentów UJ.

Zjazd trwał trzy dni. Uroczyste otwarcie miało miejsce w poniedziałek, 15 listopada po południu. Tego dnia referaty były tylko trzy, ale za to jakie! Na początek ówczesny Dyrektor Instytutu Matematyki UJ, prof. Jacek Szarski, opowiedział o Stanisławie Zarembie, patronie Koła Matematyków Studentów UJ. Ówczesny Prezes Oddziału Krakowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego, doc. Andrzej Pelczar, opowiedział o Zjeździe Kół Naukowych Matematyków, w którym brał udział jako student. Trzeci referat był studencki, a w zasadzie *postudencki*, bo wygłaszał go młody magister – jeden z głównych inicjatorów krakowskiego zjazdu.

Studenckie referaty wygłaszane były przez pół wtorku i całą środę. We wtorek wieczorem uczestnicy obejrzeli spektakl w teatrze, we wtorek zaś po południu odbyło się bardzo ciekawe „spotkanie robocze". Tam wymieniono liczne doświadczenia z pracy poszczególnych kół, poszczególne reprezentacje opowiadały, co robią ich koła i jakimi działami matematyki studenci interesują się przede wszystkim. Spotkanie było tak ciekawe, że ledwie zdążono do teatru.

Kto wziął udział w Zjeździe? Przedstawiciele kół z ośmiu uczelni. Uniwersytetów: Warszawskiego, Łódzkiego, Śląskiego, Mikołaja Kopernika w Toruniu, im. Marii Curie–Skłodowskiej w Lublinie i Jagiellońskiego, Politechniki Śląskiej i Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie. W specjalnym spotkaniu pół roku później wziął jeszcze udział przedstawiciel Wrocławia.

Co miało miejsce pół roku później? Otóż w listopadzie uchwalono, że warto reaktywować zwyczaj częstych, najlepiej corocznych zjazdów studenckich. Do tego trzeba było mieć możliwości dofinansowania, wsparcie pieniężne zaś uzyskać było można wyłącznie za pośrednictwem Jedynej Masowej Organizacji Studenckiej. Z doświadczeń kół innych nauk wynikało zaś niezbicie, że niezbędnym do tych starań tworem jest Studencki Komitet Koordynacyjny Kół Naukowych Danej Specjalności. Zdecydowano więc taki Komitet powołać. Później okazało się jednak, że brak doświadczenia organizatorów i uczestników Zjazdu spowodował niewypełnienie pewnych wymogów formalnych i w efekcie wiosną 1977 r. przedstawiciele Kół musieli się spotkać w Krakowie jeszcze raz.

Powróćmy jednak do listopada 1976 r. W Zjeździe wzięło udział około 80 osób, z czego mniej więcej połowa spoza Krakowa. Niektórzy z uczestników są dziś dobrze znanymi na świecie matematykami! Organizatorom udało się wydać specjalne plakaty (w dwóch wersjach; kopie obu na sąsiedniej stronie) i pamiątkowe znaczki dla uczestników (miniaturki plakatów). O braku wprawy organizacyjnej może świadczyć to, że Prezes Koła krakowskiego, osobiście projektując plakat, pomylił się w nazwie własnego koła – a potem już było za późno na zmianę... Znaczki wykonane były całkowicie samodzielnie przez organizatorów – obrady miały się zacząć za pół godziny, a jeszcze w czytelni Instytutu Matematyki Zarząd pracowicie ogrzewał specjalne agrafki nad świeczką i wkłuwał je w znaczki. Zdobycie różnego rodzaju surowców do wykonania tych emblematów też było nie lada problemem.

Warto powiedzieć coś o referatach. Jak można się spodziewać, były i ciekawe, i nudne. Studenci raczej rzadko przedstawiali własne wyniki, częściej mówili o rezultatach innych. Najbardziej utkwił w pamięci referat kolegi ze stolicy; miał mówić przez pół godziny, mówił ponad 90 minut i nie udało się odebrać mu głosu. Nawet kategoryczne protesty prowadzącego obrady nic nie dały. Wysoką klasę pokazał za to następny prelegent, też z Warszawy: skrócił swoje wystąpienie z 30 do 15 minut. A ten referat akurat był jednym z najciekawszych.

Może jeszcze parę słów o organizatorach. Jak to zwykle bywa, cały ciężar przedsięwzięcia spoczął na barkach kilku osób. Ale też i potem większość z nich porobiła – nie wahajmy się użyć tego słowa – kariery! Jeden jest profesorem na renomowanym zagranicznym uniwersytecie, drugi wicedyrektorem Instytutu Matematyki UJ, trzeci dyrektorem Telewizji Kablowej, dwóch wchodzi w skład redakcji *EPSILONA*...

Ktoś mógłby powiedzieć: no dobrze, zjazd jak zjazd, dwadzieścia lat temu, rocznica jak rocznica. Czy warto w ogóle na to zwracać uwagę? I byłaby to, być może, głęboka racja, gdyby nie jedno. Otóż ów krakowski Zjazd był, jak dotąd, ostatnim. Mimo ambitnych planów ani jeden więcej się nie odbył! Może gdzieś, kiedyś, jacyś zapaleńcy spróbują ponownie coś takiego zorganizować?

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.