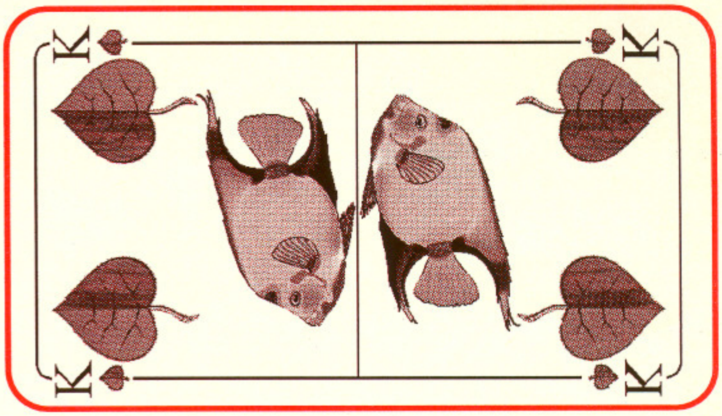


# SPIS TREŚCI

## NUMERU 1(272)



**W następnym numerze:**

Konwekcja


Okładkę i ilustracje wykonał
*Krzysztof BIESAGA*

Wybór artykułów z *Delty* ukazuje się w języku angielskim w sieci Internet pod adresem
http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.





Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL



Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.


**WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS**

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 1997 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1997 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

**WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u**

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1997 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską".
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 370044-16551-2700-1-06 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. $8^{00}$ – $14^{00}$. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

| krajową | ze zleceniem za granicę |
|---|---|
| 5 XII | 20 XI na I kwartał roku następnego, |
| 5 III | 20 II na II kwartał, |
| 5 VI | 20 V na III kwartał, |
| 5 IX | 20 VIII na IV kwartał. |

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

**Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr**

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.

# Szyfry klasyczne

*Wojciech GUZICKI*

W tym artykule zajmiemy się najprostszymi sposobami szyfrowania, znanymi od wielu stuleci i nie mającymi już większego znaczenia praktycznego. Zostaną one pokazane po to, by wyjaśnić, co nazywamy „klasycznym systemem kryptograficznym”. W kolejnym artykule (*Delta* 3/1997) opiszemy znacznie nowsze i lepsze sposoby szyfrowania, tzw. szyfry z publicznym kluczem.

Jeden z najstarszych sposobów szyfrowania pochodzi od Juliusza Cezara, który szyfrował swoją korespondencję z Cyceronem. Sposób ten polegał na tym, że zamiast każdej litery pisało się literę występującą w alfabecie trzy miejsca dalej. Tak więc, jeśli użyjemy dzisiejszego alfabetu łacińskiego:

`ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ`,

to zamiast litery `A` będziemy pisać `D`, zamiast `K` piszemy `N`, zamiast `Y` piszemy `B`. Widzimy więc, że alfabet traktujemy „cyklicznie”, tzn. po ostatniej literze `Z` następuje znów pierwsza `A` itd.

Słynne słowa Cezara `ALEA IACTA EST` zaszyfrowalibyśmy więc jako `DOHD LDFWD HVW`. Na tym przykładzie objaśnimy dwa ważne pojęcia kryptografii (czyli nauki o szyfrowaniu): systemu kryptograficznego i klucza. System kryptograficzny to, mówiąc nieprecyzyjnie, ogólny sposób szyfrowania. W naszym przykładzie polega on na tym, że zamiast danej litery alfabetu piszemy literę występującą w tym samym alfabecie ileś miejsc dalej. Cezar zdecydował się akurat na trzy miejsca dalej, ale równie dobrze mógłby pisać literę występującą siedem miejsc dalej. Sposób szyfrowania (tzn. system kryptograficzny) byłby w zasadzie ten sam, różniłby się tylko wyborem *klucza*, czyli liczby wskazującej, o ile miejsc dalej w alfabecie stoi litera, którą mam napisać. Można powiedzieć, że system kryptograficzny polega tu na pisaniu litery stojącej $k$ miejsc dalej, a liczba $k$ jest kluczem. Podsumujmy: szyfrowanie polega na wyborze ogólnego sposobu, algorytmu szyfrowania, zwanego systemem kryptograficznym i pewnych parametrów, od których ten algorytm jest zależny, nazywanych kluczem szyfrowania.

Każdą zaszyfrowaną wiadomość trzeba kiedyś rozszyfrować. W szyfrze Cezara znajdujemy literę stojącą w alfabecie trzy miejsca bliżej, czyli w istocie stosujemy ten sam algorytm szyfrowania z innym kluczem. Do szyfrowania używamy klucza $+3$, a do rozszyfrowywania klucza $-3$. Gdy znamy klucz szyfrowania, to znamy też klucz rozszyfrowywania. Tak naprawdę jest to ten sam klucz, jeśli pominiemy jego znak.

Szyfr Cezara bardzo łatwo jest opisać w sposób matematyczny. Kolejnym literom alfabetu łacińskiego przyporządkujemy liczby od 0 do 25. Przyjmijmy oznaczenie: $a \bmod b$ oznacza (zawsze nieujemną!) resztę z dzielenia liczby całkowitej $a$ przez dodatnią liczbę całkowitą $b$. System kryptograficzny Cezara może teraz być zdefiniowany wzorem

$$C = (P + k) \bmod 26,$$

gdzie $k$ jest kluczem szyfrowania, $P$ jest numerem litery, którą szyfrujemy, a $C$ jest numerem litery po zaszyfrowaniu. Rozszyfrowywanie odbywa się według wzoru

$$P = (C - k) \bmod 26.$$

Jeśli ktoś zadaje sobie tyle trudu, by szyfrować wiadomości wysyłane do kogoś innego, to pewnie dlatego, że nie chce, by inne, niepowołane do tego osoby, mogły tę wiadomości odczytać. I pewnie znajdą się te inne osoby, które chcą koniecznie przeczytać to, co zostało zaszyfrowane. Jeśli nie znają one sposobu szyfrowania, to muszą ten szyfr „złamać”. W jaki sposób można tego dokonać?

# Kartezjański przewrót w filozofii?

*Jan WASZKIEWICZ*

## Sen Kartezjusza

*Nowoczesny świat, nasz świat triumfującej racjonalności, narodził się 10 listopada 1619 roku, wraz z objawieniem i koszmarem nocnym.* Tak Philip J. Davis i Reuben Hersh rozpoczynają swą piękną książkę *Sen Kartezjusza* (z podtytułem *świat według matematyki*). To Kartezjusz bowiem, wówczas 23-letni oficer w służbie Maksymiliana Bawarskiego, owej nocy doznał olśnienia, które zmieniło nie tylko jego własne życie. Przez poprzedzające to przeżycie tygodnie zmagał się on z filozoficznym problemem zasadności naszego poznania. W czasie postoju w wiejskiej chacie, gdzieś koło niemieckiego miasta Ulm, w nagłym błysku intuicji dostrzega *podstawy zdumiewającej nauki*, po czym zapada w sen i śni trzy sny. Pierwsze dwa, wedle jego własnej interpretacji, zdają się kwestionować dotychczasowe życie Kartezjusza, trzeci – zdaje się dawać wskazówki co do przyszłego postępowania – unifikacji nauki dzięki systematycznemu i metodycznemu użyciu rozumu. Godzi się jeszcze dodać, że filozof w dowód wdzięczności za objawione prawdy zobowiązał się odbyć pieszą pielgrzymkę do sanktuarium Matki Boskiej w Loreto we Włoszech, którą istotnie odbył z czteroletnim opóźnieniem.

## Radykalne zwątpienie

Jaka była natura objawionej prawdy? Najlepiej chyba syntetyzuje ją początek pierwszej z *Medytacji o pierwszej filozofii* napisanej w 1630 r.: *Przed kilkoma już laty spostrzegłem, jak wiele rzeczy fałszywych uważałem w mojej młodości za prawdziwe i jak wątpliwe jest to wszystko, co później na ich podstawie zbudowałem; doszedłem więc do przekonania, że jeśli chcę nareszcie coś pewnego i trwałego w naukach ustalić, to trzeba raz w życiu z gruntu wszystko obalić i na nowo rozpocząć od pierwszych podstaw.* Program, który Kartezjusz realizował od chwili swojego olśnienia, polegał więc na poddaniu całej wiedzy testowi radykalnego sceptycyzmu i sprawdzeniu, co z niej pozostanie. Dopiero od tego fundamentu można było zacząć budowę gmachu wiedzy wolnej od złudzeń i przesądów. Oczywiście, z czego filozof zdaje sobie sprawę, analiza wszystkich poszczególnych stwierdzeń byłaby – jak to ujmuje – *nie kończącym się przedsięwzięciem*, proponuje więc drogę na skróty. Polega ona na kolejnym rozpatrzeniu całych kategorii twierdzeń i odrzucania ich, jeśli tylko znajdziemy powody do odrzucenia niektórych z nich. Poza tym, trzeba skupić się na fundamentalnych zasadach, gdyż *po zburzeniu fundamentów wszystko, co na nich zbudowane, samo upada*. Jako pierwsze ulegają zakwestionowaniu wszystkie stwierdzenia oparte na świadectwie zmysłów. Nietrudno bowiem podać przykłady, kiedy świadectwo owo zawodzi. Jasne jest, że tym bardziej kartezjuszowy test każe zakwestionować koncepcje wcześniejszych szkół filozoficznych. Każda z nich dostarcza zresztą argumentów za odrzuceniem konkurentów. Testu nie wytrzymują również twierdzenia teologiczne. Opierają się one bowiem na pewnych mniemaniach, dotyczących natury Boga, których zaprzeczenie również prowadzi do spójnych konsekwencji.

## Myślę, więc jestem

Co ostatecznie zostaje na pobojowisku? Otóż jedynym, co wytrzymuje krytykę, jest fakt krytycznego myślenia i myślący podmiot. Mam wątpliwości, być może jestem zwodzony przez zmysły albo nawet przez samego Stwórcę (nawet tak radykalną hipotezę rozpatrywał Kartezjusz), ale to jednak *ja istnieję, a co więcej – to ja wątpię*. Tej prawdy nie mogą obalić żadne argumenty. Gdyby bowiem jakiś argument doprowadził do mojego zwątpienia we własne istnienie, to jednak musiałby on dotrzeć do mnie i to poprzez proces myślowy. Potwierdziłby tym samym i to, że istnieję, i to, że jestem bytem myślącym. *Myślę, więc jestem* – podsumowuje ten stan rzeczy najbardziej chyba znany aforyzm filozoficzny wszechczasów.

Od tego fundamentu Kartezjusz odbudowuje gmach swojej wiedzy, a ponieważ w różnych punktach wychodzi daleko poza ustalenia swoich poprzedników, ukazuje również potęgę swojego systemu, swej metody i jej głównego narzędzia – sceptycznie nastawionego ludzkiego rozumu.

Jak jednak wygląda rekonstrukcja? Co włącza Kartezjusz do obszaru niewątpliwej wiedzy? Wiedza ta, jeśli ma być doskonalsza od odrzuconych mniemań, musi być z góry odporna na test

Po pierwsze, będziemy zakładać, że osoba łamiąca szyfr zna system kryptograficzny i nie zna tylko klucza. Dlaczego przyjmujemy takie założenie? Wśród wielu powodów można wymienić ten, że system kryptograficzny na ogół trudniej zmienić niż klucz. Używa się więc tego samego systemu na tyle długo, że osoby niepowołane mogą wykraść informacje o samym systemie. Bezpieczeństwo szyfrowania będzie zapewnione dzięki częstym zmianom kluczy. Innym powodem jest ten, że często tego samego systemu używa bardzo wiele osób i sam system jest dobrze wszystkim znany.

A jak w takim razie zdobyć klucz, jeśli dysponuje się tylko tekstem zaszyfrowanym? Czasami nie jest to trudne. Np. szyfr Cezara można złamać bardzo łatwo. Przecież ma on tylko 26 kluczy. Wystarczy spróbować wszystkich, by przekonać się, że tylko jedna wiadomość brzmi sensownie, a pozostałe stanowią niezrozumiały bełkot. Klucz użyty w tym rozszyfrowywaniu jest właściwym kluczem. Widzimy więc, że system kryptograficzny dopuszczający niewiele kluczy nie jest bezpieczny i łatwo taki szyfr złamać. Kiedyś myślano, że bezpieczeństwo szyfru zależy po prostu od liczby kluczy. Girolamo Cardano, wybitny uczony XVI wieku, pisał, że niemożliwy do złamania jest nieco inny szyfr, polegający na tym, że zamiast każdej litery alfabetu piszemy ustaloną inną literę. Wyjaśni to najlepiej przykład. Przyjmijmy, że zamiast litery `A` piszemy `Q`, zamiast `B` piszemy `W` itd. według następującego schematu:

```
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
QWERTYUIOPASDFGHJKLZXCVBNM
```

(zamiast litery stojącej w górnym wierszu piszemy literę znajdującą się pod nią w dolnym wierszu). Zdanie `ALEA IACTA EST` zostanie teraz zaszyfrowane jako `QSTQ OQEZQ TLZ`. System kryptograficzny polega tu na zastępowaniu każdej litery inną, a kluczem jest stojąca w dolnym wierszu permutacja liter alfabetu. Kluczem rozszyfrowywania jest oczywiście permutacja odwrotna, którą nietrudno wypisać:

```
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
KXVMCNOPHQRSZYIJADLEGWBUFT
```

Liczba kluczy jest ogromna. Jest ich 26!, czyli 403291461126605635584000000. Oczywiście, przeszukanie wszystkich możliwych kluczy nie jest wykonalne, trwałoby zbyt długo. Jak więc można złamać ten szyfr? Sięgamy do metod statystycznych. Okazuje się, że w tekstach napisanych w danym języku poszczególne litery nie występują z tą samą częstotliwością. I tak, na przykład, w języku angielskim najczęściej występuje litera `E` (około 13% wszystkich liter odpowiednio długiego tekstu). Drugą z kolei jest litera `T` (około 9%), następnymi są `A`, `O`, `N`, `I`, `R`. W języku polskim nie ma litery tak bardzo wyróżniającej się od innych i dlatego łamanie zaszyfrowanego tekstu napisanego po polsku będzie nieco trudniejsze. Najczęściej występują litery `A` oraz `I` (po około 9%), a po nich `E` i `O` (po około 7,5%).

Taki sposób łamania szyfru opisał w opowiadaniu „Tańczące sylwetki" Artur Conan Doyle. Czytelnik-koneser może sprawdzić, czy Sherlock Holmes korzystał z odpowiednich rozkładów częstości.

Przypuśćmy teraz, że mamy dany tekst zaszyfrowany za pomocą opisanego wyżej systemu. Musimy, oczywiście, wiedzieć, w jakim języku napisano zaszyfrowaną wiadomość i znać rozkład częstości występowania liter alfabetu w tekstach napisanych w tym języku. Jeśli nasz tekst jest wystarczająco długi (wystarczy już kilkaset liter), to rozkład częstości jego liter powinien być podobny. Najczęściej występujące litery w tekście zaszyfrowanym powinny odpowiadać najczęstszym literom danego języka (choć niekoniecznie w tej samej kolejności). Próbujemy przypisać te litery sobie; po kilku próbach okaże się, że dość łatwo możemy domyśleć się znaczenia następnych liter, potem jeszcze następnych, aż wreszcie domyślamy się znaczenia wszystkich liter klucza i odczytujemy cały tekst. Duża liczba kluczy nie jest więc warunkiem wystarczającym bezpieczeństwa szyfru.

Przyjrzymy się jeszcze jednemu systemowi kryptograficznemu. Od poprzedniego systemu będzie się on różnić tym, że ta sama litera może być zaszyfrowana w różny sposób, w zależności od tego, w którym miejscu tekstu występuje. Weźmy ciąg kilku liczb mniejszych od 26, na przykład $(3, 7, 1, 11, 2)$. Sposób szyfrowania polega teraz na tym, że zamiast pierwszej litery tekstu piszemy literę znajdującą się w alfabecie 3 miejsca dalej, zamiast drugiej litery tekstu piszemy literę znajdującą się w alfabecie 7 miejsc dalej, zamiast trzeciej literę znajdującą się 1 miejsce dalej, potem literę znajdującą się 11 miejsc dalej, potem 2 miejsca i zaczynamy od początku: 3 miejsca, 7 miejsc, 1 miejsce itd. A więc zdanie `ALEA IACTA EST` po zaszyfrowaniu będzie brzmiało `DSFL KDJUL GVA`. Zauważmy, że litery `A` w pierwszym słowie zostały zaszyfrowane inaczej. Natomiast pierwsza litera `A` i druga w drugim słowie zostały zaszyfrowane tak samo – dlatego, że druga z nich występuje w tekście pięć miejsc dalej i klucz ma pięć liczb. Ten system kryptograficzny, nazywany szyfrem Vigenère'a, jest więc jakby kombinacją wielu systemów Cezara, a kluczem szyfrowania jest odpowiedni ciąg liczb. Klucze, oczywiście, mogą być dowolnej długości. Często zapamiętujemy klucz w postaci słowa. Na przykład słowo `CEZAR` odpowiada ciągowi $(3, 5, 26, 1, 18)$: litera `C` jest trzecią literą alfabetu, litera `E` piątą itd. Liczba kluczy w tym systemie jest naprawdę olbrzymia. Kluczy długości 26, a więc takiej długości jak permutacje w poprzednim systemie, jest $26^{26}$; ta liczba jest znacznie większa niż $26!$. A jednak ten szyfr też można łatwo złamać.

Łamanie polega na tym, by najpierw odgadnąć długość klucza. Następnie łatwo już odgadnąć liczbę stojącą w kluczu na każdym miejscu. Na przykład, odgadliśmy, że klucz ma długość 5. Zliczamy litery stojące na co piątym miejscu: na pierwszym, szóstym, jedenastym itd. Rozkład częstości tych liter powinien być przesuniętym o kilka miejsc rozkładem częstości występowania liter danego alfabetu. Te dwa rozkłady można bardzo łatwo do siebie „dopasować" i w ten sposób odnajdujemy liczbę stojącą w kluczu na pierwszym miejscu. Potem tak samo odnajdujemy liczbę stojącą na drugim miejscu, na trzecim itd.

A jak odgadnąć długość klucza? Można po prostu próbować po kolei: najpierw przypuścić, że klucz ma długość 2 i spróbować dopasować odpowiednie rozkłady. Jeśli się nie uda, to próbujemy długości 3, potem 4 i tak dalej, dotąd, aż znajdziemy właściwą długość. Istnieją zresztą metody statystyczne, dzięki którym można tę długość wyznaczyć z dość dobrym przybliżeniem. Tak więc ten system kryptograficzny też nie jest bezpieczny.

Przyjrzyjmy się sposobom łamania tych dwóch szyfrów. W obu przypadkach próbowaliśmy znaleźć klucz szyfrowania. Wydaje się, że ten sposób postępowania jest najbardziej naturalny. Jeśli znajdziemy klucz szyfrowania, to łatwo odzyskamy z niego klucz rozszyfrowywania i odczytamy zaszyfrowaną wiadomość. Ale czy jest to jedyny sposób łamania szyfru? Czy odczytanie zaszyfrowanej

wątpliwości. Możemy więc akceptować jedynie te sądy, które stanowią *pewne, jasne i wyraźne ujęcie tego, co twierdzę.* Co więcej, owa *jasność i pewność* musi być cechą wszystkich elementów akceptowanego stwierdzenia. Możemy więc przy ich konstrukcji odwoływać się jedynie do tego, co przez radykalny test zostało dopuszczone. Konstrukcja przypomina więc budowanie gmachu matematyki od pojęć pierwotnych i dotyczących ich pewników (proszę zauważyć, że słowo to jest jakby zapożyczone ze słownika Kartezjusza!) do coraz mniej oczywistych stwierdzeń, mających wszakże za sobą sankcję ścisłego rozumowania, w którym odczucie oczywistości odgrywa istotną rolę.

Zgoda, że zarówno określenia *pewne, jasne, wyraźne*, jak też dyrektywa oparcia na nich poznania mogą budzić wątpliwości. Zauważmy jednak, że tę samą dyrektywę możemy sformułować w sposób mniej kontrowersyjny. Otóż Kartezjusz przeciwny był uznaniu *czegokolwiek, co do czego nie mamy pewności, co nie jest dla nas jasne, czego nie potrafimy wyraziście przedstawić* (chciałoby się użyć potocznego określenia: był przeciwny mętniactwu). I nie ulega wątpliwości, że taka dyrektywa przyświecała całemu nowożytnemu rozwojowi nauki.

### Rekonstrukcja obrazu świata

Co więc Kartezjusz włączył w swój obraz świata? Pewne konsekwencje pociąga za sobą akceptacja istnienia mnie samego. Jeśli bowiem istnieję, to jako ktoś przeżywający pewne doświadczenia zmysłowe, z których niektóre są jasne i wyraźne (jak ból zęba). To samo dotyczy najbardziej oczywistych myśli – na przykład tych, które odnoszą się do idei matematycznych. Obszar pewności, a więc po kartezjuszowsku pojmowanej prawdy, poszerza się stopniowo. Pojawiają się w nim idee wrodzone (jako jasne i wyraźne), wśród których jest idea Boga. Kartezjusz idzie dalej i wykazuje, że istnieje nie tylko idea Boga, ale i Bóg, jako byt doskonały. Ułomny ludzki umysł nie może być twórcą tej idei, gdyż rzecz doskonała nie może powstać z niedoskonałych. Źródło więc idei bytu doskonałego musi być co najmniej tak doskonałe, jak owa idea. To kończy dowód.

Tak konstruowana rzeczywistość Kartezjusza rozpada się więc na dwa obszary: myślący umysł i świat materialny. Cechą pierwszego jest myślenie, cechą drugiego – rozciągłość w przestrzeni i ruch mający mechaniczny charakter. Jakie wszakże związki łączą obie te dziedziny? Komentatorzy wskazują, że pojęcie Boga było Kartezjuszowi niezbędne do załatania istniejącej tu właśnie dziury w tworzonym systemie. Jak bowiem miał on uzasadnić związek między doświadczeniem a powstającą racjonalną rekonstrukcją rzeczywistości? Bóg, jako byt doskonały, stawał się poręczycielem prawdziwości konstrukcji rozumowych. Muszą one odpowiadać stworzonemu światu, gdyż w przeciwnym przypadku jego Stwórca, jako zwodziciel czy oszust, nie zasługiwałby na przypisywany mu atrybut doskonałości. Między zasadniczą strukturą rzeczywistości (w pewnej mierze potwierdzaną w doświadczeniu) a jej racjonalną rekonstrukcją zachodzi więc zasadnicza zgodność.

Z tą chwilą pojawia się możliwość pogodzenia się z obiektywną rzeczywistością, choć akceptowane z niej będzie tylko to, co przetrwa test radykalnego wątpienia bądź da się rozumowo – w sposób jasny i oczywisty! – wyprowadzić z zaakceptowanych już elementów. Na pewno zaś należy z gmachu wiedzy usuwać wszystko, co opiera się na ideach niejasnych i niewyraźnych i na sądach nie wytrzymujących krytyki.

Jeśli weźmiemy pod uwagę, jak zbudowany był obraz świata przed Kartezjuszem, w jakim stopniu zasiedlony był przez różne, pochodzące z niejasnych źródeł *byty widzialne i niewidzialne*, to zobaczymy, do jakiego stopnia świat kartezjański stał się prostszy, a w perspektywie mógł ulegać dalszym uproszczeniom. Jakim? To już zależało od tego, kto i w jakim celu puszczał w ruch wypracowane przez filozofa narzędzia. On sam zakwestionował, jako nie wytrzymujące racjonalnej krytyki, pojęcia próżni i oddziaływania na odległość. Dlatego jego racjonalna konstrukcja fizyki, która miała tłumaczyć fakty odkryte i analizowane przez Galileusza i innych wielkich badaczy owego okresu, opierała się na całym szeregu założeń, które raczej oddalały niż przybliżały newtonowską syntezę. Co ważniejsze, fizyka Kartezjusza była znacznie mniej zmatematyzowana od tego, co robił Galileusz i pod tym względem lepiej mieści się w tradycji arystotelesowskiej.

Tak więc, radykalny racjonalizm Kartezjusza nie we wszystkich obszarach był równie owocny. Zastosowany do matematyki przyniósł konstrukcję geometrii analitycznej, co dało dalszemu rozwojowi matematyki silny impuls.

wiadomości musi być równoważne znalezieniu klucza? Dla tych dwóch systemów kryptograficznych jest to równoważne. Przypuśćmy bowiem, że otrzymaliśmy jednocześnie tekst jawny (tzn. tekst oryginalny, przed zaszyfrowaniem) i tekst zaszyfrowany. Bez trudu w obu przypadkach wyznaczymy klucz, a właściwie oba klucze: szyfrowania i rozszyfrowywania. Wystarczy przyjrzeć się, jakie litery w tekście zaszyfrowanym odpowiadają kolejnym literom tekstu jawnego. Czy jednak tak będzie dla wszystkich innych systemów kryptograficznych? Spróbujmy sformułować wyraźnie pytania, które się narzucają.

Po pierwsze, jeśli poznamy klucz szyfrowania, to czy łatwo możemy odtworzyć z niego klucz rozszyfrowywania? We wszystkich powyższych przykładach było to oczywiste, ale nie zawsze musi tak być. Po drugie, jeśli mamy jednocześnie tekst jawny i tekst zaszyfrowany, to czy umiemy odtworzyć klucz szyfrowania (lub rozszyfrowywania)? Znów okaże się, że nie zawsze będziemy umieli to zrobić.

Klasyczne systemy kryptograficzne to właśnie takie systemy, których złamanie polega w istocie na znalezieniu klucza szyfrowania i tym samym klucza rozszyfrowywania. W następnym artykule poznamy tzw. szyfry z publicznym kluczem. Polegają one na tym, że klucz szyfrowania może być powszechnie znany i każdy będzie mógł go użyć do zaszyfrowania dowolnej wiadomości. Klucz rozszyfrowywania będzie jednak tajny i tylko jego „właściciel" będzie mógł z niego skorzystać. W tych systemach kryptograficznych znajomość klucza szyfrowania nie wystarczy do rozszyfrowania tekstu zaszyfrowanego. Potrzebna jest jeszcze pewna dodatkowa informacja, której nie udostępnia się publicznie i której w praktyce nie można uzyskać, jeśli zna się tylko klucz szyfrowania. Do skonstruowania takich szyfrów wykorzystano subtelne metody teorii liczb, algebry, geometrii algebraicznej i kombinatoryki.

# Wycieczka w wirtualną przestrzeń

*Jan BARANOWSKI*

W *Delcie* 9/1996 Małgorzata Dworska opisywała *Najprostsze wypełnienie przestrzeni wielościanami*. Była tam mowa o pewnym wielościanie archimedesowym. Zamiast użytej tam nazwy *tetrakaidekahedron* wolałbym nazwę *ośmiościan ścięty*. Ta pierwsza nazwa to (po grecku) *czternastościan*, a różnych czternastościanów może być dużo (na przykład sześcian ścięty czy inny: sześcio-ośmiościan, znalazł się w *Małej Galerii Matematycznej* Zdzisława Pogody). Ośmiościan ścięty jest jeden – powstaje przez sprytne obcięcie naroży ośmiościanu foremnego, takie, że po narożach zostają kwadratowe ślady, ze ścian trójkątnych zaś – sześciokąty foremne. Cały wspomniany numer *Delty* jest pełen podobizn ośmiościanu ściętego.

W artykule Małgorzaty Dworskiej przedstawiona jest argumentacja przekonująca, że ośmiościan ścięty wypełnia przestrzeń. Rozumowanie odwołuje się do intuicji płaskiej. Proponuję przyjrzenie się temu w przestrzeni. Może się uda w wyobraźni, bez ani jednego rysunku?

„ – Co się tyczy rycin, to zaraz mogę ci wyrysować smoka z oczami z tysiąca słońc każde – jeśli rysunek masz za dowód prawdy – rzekł Klapaucjusz na to."
(Stanisław Lem, *Cyberiada, Wyprawa szósta*)

Widać, że zarówno Klapaucjusz, jak Lem podzielają opinię Autora o rysunkach. (Red.)

Wyobraź sobie, Drogi Czytelniku, sześcian i jego przekątną łączącą przeciwległe wierzchołki. Poprowadźmy taką płaszczyznę prostopadłą do tej przekątnej, żeby dzieliła sześcian na połowy. Taka płaszczyzna przecina 6 krawędzi, każdą w połowie. Uzyskaliśmy znany przekrój sześcianu – sześciokąt foremny. Czy widzisz go? Kiedyś Krzysztof Nowiński rysował w *Delcie* piękne przekroje brył foremnych w anaglifach... Mamy dwie połówki sześcianu.

Jak wygląda jedna taka połówka? Ma jedną ścianę sześciokątną, trzy ściany to kwadraty z odciętymi narożami i trzy małe ścianki – takie jak te naroża, trójkąty prostokątne równoramienne. Kiedy ustawimy taką bryłkę na ścianie sześciokątnej, może przypominać statek kosmiczny. Tam, gdzie spotykają się kwadraty bez naroży (pięciokąty), jest wierzchołek, zupełnie nienaruszony wierzchołek sześcianu.

Ustawmy teraz osiem „statków kosmicznych", żeby spotkały się w jednym punkcie tymi właśnie wierzchołkami. Jest to możliwe tak samo, jak jest to możliwe z sześcianami. Bryła, która powstała, ma osiem ścian sześciokątnych... Jeśli nie widzisz, że to ośmiościan ścięty, zamiast „statków kosmicznych" wstaw całe sześciany. Osiem sześcianów tworzy kostkę $2 \times 2 \times 2$. Trójkąciki – ściany „statków kosmicznych" – leżą na ścianach tej kostki i zbiegają się po cztery na środkach.

Wygodnie jest teraz operować całymi takimi kostkami, po osiem sześcianów, w każdej siedzi w środku ośmiościan ścięty. Jako sześciany – oczywiście wypełniają przestrzeń szczelnie. Weźmy pod uwagę wypełnienie *normalne*, co w tym przypadku znaczy, że w wierzchołkach spotyka się zawsze osiem kostek.

Jak w tych kostkach ustawione są nasze ośmiościany ścięte? Spotykają się ścianami kwadratowymi. Do każdej ściany sześciokątnej przylega połówka sześcianika. Tak jest w każdej sąsiedniej kostce. W wierzchołkach kostek (za każdym razem ośmiu) spotykają się połówki sześcianów będące na zewnątrz ośmiościanów ściętych. Za każdym razem jest ich osiem.

Jeżeli jeszcze chcesz wyobrażać sobie cokolwiek – widzimy dwie uzupełniające się, przystające struktury złożone z ośmiościanów ściętych stykających się ścianami kwadratowymi. Struktury te dotykają się ścianami sześciokątnymi.

Wydaje mi się, że taka argumentacja jest bardziej przekonująca, bowiem rozumowanie na rzucie może być złudne. Obracanie bryłami w wyobraźni może jest trudniejsze, ale w tym przypadku pewniejsze.

Ciekawe jest, że ośmiościany ścięte wypełniające przestrzeń możemy inaczej ustawić w dwie uzupełniające się, przystające struktury. Wybierzmy tak cztery ściany ośmiościanu ściętego, by żadna para nie miała wspólnej krawędzi (są fragmentami ścian czworościanu foremnego, który można by na nim opisać). Jeżeli będziemy teraz sklejać kolejne ośmiościany ścięte tylko tymi wybranymi ścianami (pilnując, by kwadratowe ściany były zawsze pionowe lub poziome), uzyskamy strukturę, która przypomina z grubsza strukturę diamentu. Wolna przestrzeń między sklejonymi bryłami ma dokładnie ten sam kształt, co one.

Zachęcam do takiego wyobrażania sobie przestrzennych faktów. Udane wycieczki po „wirtualnych" bryłach przynoszą dużo satysfakcji.

Odniesiony do funkcjonowania organizmu ludzkiego prowadził do wizji organizmu jako układu mechanicznego, dominującej co najmniej do XIX wieku. Można by wspomnieć też o przyczynkach Kartezjusza w innych obszarach nauki. Inna sprawa, że znaczna część spuścizny została dość późno opublikowana i jej wpływ na rozwój nauki był mniejszy niż powinien.

Trwały był ton nadany ludzkiemu dążeniu do poznania prawdy: zaufanie do ludzkiego rozumu, żądanie klarowności konstrukcji intelektualnych, poddawanie wszystkich elementów wiedzy testowi radykalnego wątpienia.

## Jestem, więc muszę myśleć

Taki napis pojawił się kilka lat temu na wrocławskich murach. Dobrze oddaje on współczesną pozycję kartezjańskiego racjonalizmu. Nadaje się on do formułowania nostalgicznych żartów, ale nie przemawia do wyobraźni. Można nań spojrzeć jak na pewien program badawczy, który wyczerpał swoje możliwości. Polegał on na radykalnym kwestionowaniu wcześniej akceptowanych praw i prawidłowości, na zaczynaniu niejako wszystkiego ciągle od nowa, bez oglądania się na poprzedników i uznane autorytety. Ostatecznymi sędziami pozostawały rozum, myślenie i poczucie oczywistości.

Kartezjusz mógł jeszcze uważać, że te podstawy systemu są jednakowe dla wszystkich i dlatego jego analizy mają uniwersalną wartość. Z każdym kolejnym kartezjanistą sprawa stawała się coraz mniej oczywista. Na francuskiego filozofa powoływały się bowiem wszystkie bez mała późniejsze systemy filozoficzne. Każdy ich twórca zaczynał od radykalnego zakwestionowania dokonań poprzedników, każdy przeciwstawiał im własne rozumowania i własne odczucie oczywistości, a wnioski bywały diametralnie różne.

Dodatkowo, w ostatnich dekadach – i to przez nauki ścisłe – zmuszeni zostaliśmy do akceptacji sądów dalekich od oczywistości i zgodzić się na stosowanie pojęć niejasnych dla laików. Dla uratowania racjonalnego obrazu świata konieczne stało się odwołanie do autorytetów! Co gorsza, straciliśmy wiele z pewności siebie. Nie bardzo wiemy, co oznacza słowo *ja*, a i termin *myślenie* nie jest tak jednoznaczny, jak kiedyś. Przyczyniły się do tego nauki szczegółowe – psychologia (z psychoanalizą), lingwistyka, antropologia, logika...

Nie możemy więc wyjść z systematycznego stosowania kartezjuszowego zwątpienia w tym samym punkcie co on – na gruncie stwierdzenia oczywistości: *myślę, więc jestem*. Tym bardziej że i z poczuciem oczywistości nie jest najlepiej. Zwątpienie dokonało swojego dzieła – zakwestionowało niemal wszystko, co zakwestionować było można, a co gorsza – nie podsuwa żadnego punktu oparcia dla odbudowy obrazu świata.

Tu może leżeć jeden z powodów tego, że w 400 lat od chwili urodzenia się twórcy nowożytnego racjonalizmu widać regres racjonalizmu jako filozoficznej i życiowej postawy. Jeśli rację mieli cytowani na wstępie Davis i Hersh, to, być może, oznacza to i koniec nowoczesności – postmodernizm, jak zwie się modny obecnie prąd filozoficzny i kulturowy. Towarzyszy mu przypływ postaw irracjonalnych (tarot, kabała, astrologia, znachorstwo...).

Zresztą może nie warto zapominać, że wszystko zaczęło się od olśnienia, snu i pielgrzymki filozofa.

## Patrz w niebo

Teoria ewolucji gwiazd głosi, że każda gwiazda po wyczerpaniu swoich zapasów wodoru zwiększa rozmiary stając się chłodnym czerwonym olbrzymem. Jeżeli masa gwiazdy jest zbliżona do słonecznej, to zewnętrzne warstwy gwiazdy oderwą się tworząc tzw. mgławicę planetarną. Odbywa się to łagodnie, tzn. nie w wyniku eksplozji, lecz raczej w wyniku silnego wiatru gwiazdowego. Niezbyt szczęśliwie sformułowana nazwa – mgławica planetarna – pochodzi, jak wiadomo, stąd, że pierwszym obserwatorom niektóre, bardziej regularne z tych mgławic przypominały tarcze planet.

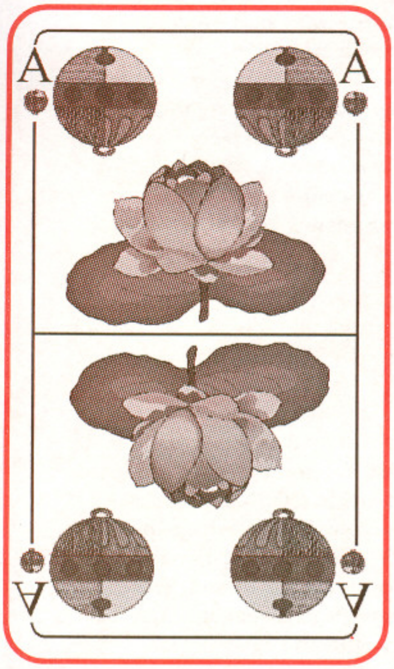
Gdy wziąć dosłownie przedstawiony tu w zarysie opis powstawania mgławicy planetarnej, można by się spodziewać, że oglądając ją z dowolnego kierunku powinno się widzieć pierścień – jako zbiór tych miejsc sferycznej rozszerzającej się otoczki, gdzie wzrok przenika przez najgrubszą warstwę materii, czyli w przybliżeniu na obrzeżu mgławicy. Przynajmniej tak powinna mgławica wyglądać w swojej młodości, gdyż napotykając różne przeszkody w ośrodku międzygwiazdowym powinna z biegiem czasu tracić symetrię i rozpływać się w przestrzeni.

Tymczasem skrupulatne obserwacje ruchów gazu w najsłynniejszej chyba mgławicy planetarnej M57, czyli Pierścienia w Lutni, przeprowadzone kilka lat temu w obserwatorium na Wyspach Kanaryjskich wykazały, że nie jest ona po prostu rozszerzającą się sferą. Wykryto w niej dwa wyraźne strumienie gazu, jeden ku obserwatorowi i drugi w przeciwną stronę, wypływające z centrum mgławicy. Mechanizm powstawania takiego obiektu może wyglądać następująco. Gwiazda pęcznieje do stadium czerwonego olbrzyma, ale wiatr gwiazdowy jest najsilniejszy w płaszczyźnie równika. Gwiazda otacza się więc rzeczywiście pierścieniem materii, który staje się przeszkodą dla dalszych fal wiatru gwiazdowego. W późniejszym więc okresie materia będzie łatwiej wypływać wzdłuż osi obrotu gwiazdy. W sumie powstanie obiekt o wyróżnionej osi symetrii, który oglądany właśnie z kierunku osi będzie wyglądał jak pierścień – np. mgławica M57. Gdyby oglądać ten sam obiekt w płaszczyźnie równika, to byłoby widać owe dwa płynące osiowo strumienie materii. I takie mgławice też się obserwuje.

Zdawałoby się, że nic w tym nadzwyczajnego: niesferyczny wypływ materii powoduje powstanie niesferycznego obiektu; ale godne uwagi chyba jest, że jeden mechanizm może wytłumaczyć wygląd całej klasy obiektów, przy czym to, co widać na niebie, zależy tylko od „punktu widzenia".

*Tomasz KWAST*

## Zadania




*Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ*

**M 795.** Funkcja $f : [0,1] \to [0,\infty)$ ma tę własność, iż dla dowolnych liczb nieujemnych $x$, $y$, których suma nie przekracza 1, spełniona jest nierówność $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$. Ponadto $f(1) = 1$. Udowodnić, że dla każdej liczby $x \in [0,1]$ spełniona jest nierówność $f(x) \leq 2x$.
Rozwiązanie na str. 15

**M 796.** Czy przy założeniach poprzedniego zadania można udowodnić, że dla każdej liczby $x \in [0,1]$ spełniona jest także nierówność $f(x) \leq 1{,}99x$?
Rozwiązanie na str. 15

**M 797.** Dana jest liczba naturalna $n > 1$. Znaleźć wszystkie wielomiany $P$ o współczynnikach rzeczywistych spełniające równość $P(x^n) = P(x)^n$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $x$.
Rozwiązanie na str. 13

*Redaguje Krzysztof REJMER*

**F 443.** Znaleźć kształt orbity cząstki o masie $m$ poruszającej się w polu centralnym o potencjale

$$V(r) = -\frac{\lambda}{r^4} \quad (\lambda > 0)\,,$$

jeśli całkowita energia cząstki ma wartość równą zero.
Rozwiązanie na str. 16

**F 444.** Oszacować rozmiary kropli kapiących podczas deszczu z sufitu w domu, którego dach przecieka. Gęstość wody jest równa $\varrho = 10^3$ kg/m$^3$, napięcie powierzchniowe zaś $\sigma = 7{,}3 \cdot 10^{-2}$ N/m.
Rozwiązanie na str. 16

# mała delta

## Alkohol i kostka lodu

W piosence *Wyznanie barmana* zespołu *Pod Budą* słyszymy następujące słowa: *– ... a już wpadłeś jak oliwka do Martini, wytrawnego, z kostką lodu gdzieś na dnie.*

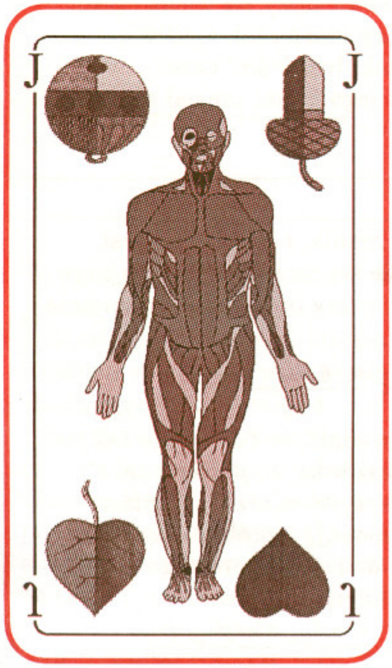
Ładnie powiedziane, ale lód na dnie? Przecież wiadomo, że lód pływa po powierzchni wody. No dobrze, ale napoje alkoholowe to nie sama woda...

Postanowiłem więc całą sprawę wyjaśnić dokładniej. Już po chwili siedziałem nad kartką z wypisanymi gęstościami: woda – 1,0, lód – 0,92, alkohol etylowy – 0,79 g/cm$^3$. No tak, kostka lodu na pewno utonie w czystym spirytusie. Po dalszej chwili poszukiwań znalazłem wykres gęstości roztworów etanolu w wodzie (Witold Mierski, *Tablice chemiczne*, Wyd. Adamantan, Warszawa 1993) i odczytałem, że gęstość lodu osiągana jest przez roztwór o stężeniu około 46% wagowych etanolu.

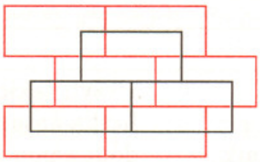
Skoro tak, to znaczy, że kostka lodu będzie tonąć tylko w bardzo stężonych trunkach. Polecam eksperymentalne sprawdzenie tych rozważań – ze zdobyciem materiałów nie powinno być większych problemów.

Można więc powiedzieć, że skoro ktoś pije drinka *z kostką lodu gdzieś na dnie*, to musi to być mocna wódka (a jeśli zawiera cukier – to bardzo mocna). Swoją drogą jest to ciekawy sposób przemycenia informacji o stężeniu alkoholu. Kolejny raz potwierdza się, że teksty niektórych piosenek skłaniają do refleksji ...

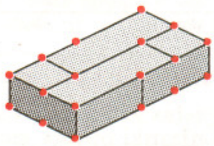
*Małą Deltę opracował Jarosław CHOJNACKI*



**Aby zamknąć** ostatecznie kwestię tłumaczenia, *jak wpaść na to, że przestrzeń można szczelnie wypełnić wieloma jednakowymi czternastościanami półforemnymi*, dorzućmy do wyjaśnień p. Dworskiej (*Delta* 9/1996) i p. Baranowskiego (str. 4 w tym numerze *Delty*) jeszcze jedno, pochodzące z *Kalejdoskopu Matematycznego* Hugona Steinhausa.



Rys. 1

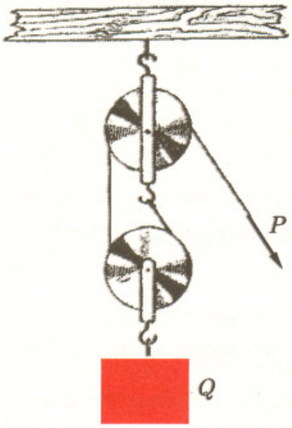


Rys. 2

Rozpatrzmy wielowarstwowy, rozchodzący się we wszystkie strony mur z cegieł, taki, jak na rysunku 1. Czarną kreską zaznaczone są cegły z jednej warstwy, kolorową – z drugiej; cegły trzeciej warstwy leżą dokładnie nad cegłami z pierwszej warstwy itd. Każdy widzi, że w tym murze dowolna cegła sąsiaduje z $4+6+4=14$ innymi. Wyjmując z muru jedną cegłę ujrzelibyśmy na jej ścianach 14 wieloboków (rys. 2) zarysowanych przez krawędzie cegieł sąsiednich. Sześć z nich ma po cztery „wierzchołki" – to są „kwadraty"; pozostałe osiem ma po 6 „wierzchołków", i to są „sześciokąty". Zatem, jak widać, ktoś złośliwy po prostu „spłaszczył" wszystkie czternastościany.

*P.S.*

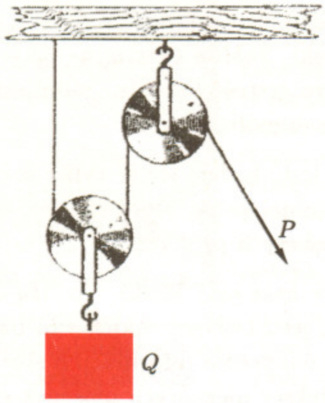
## Czy można zrobić na złość?



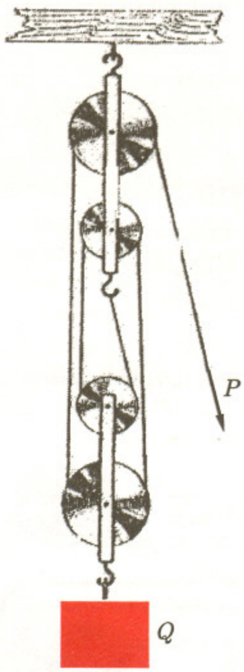

Rys. 1

W starym podręczniku (Prof. dr Adolf Kadesch, *Zarys fizyki, kurs niższy*, spolszczył Jan Babiński, Warszawa 1907, cena kart. 1 rub.) znajduje się definicja wielokrążka zwykłego i stosowne o nim informacje. Cytujemy:

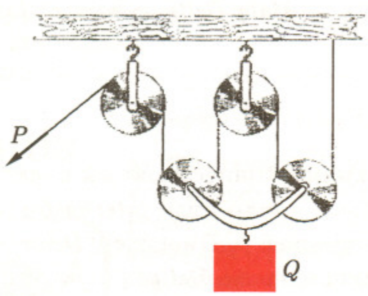
*Jeżeli mamy siłę skierowaną w dół, wówczas chcąc by takowa działała na blok ruchomy, uciec się musimy do pośrednictwa bloku stałego. Przytwierdzając sznur bloku ruchomego do nożyc bloku nieruchomego otrzymamy tzw.* ***wielokrążek zwykły*** *z jednym blokiem ruchomym i jednym nieruchomym* (rys. 1). *Wielokrążek zwykły składać się również może z kilku bloków stałych i kilku ruchomych. Wszystkie bloki stałe posiadają jedne nożyce wspólne, podobnież wszystkie bloki ruchome. Sznur kieruje się (od nożyc stałych począwszy) na dół, przechodzi najpierw dokoła pierwszego bloku ruchomego, następnie owija u góry pierwszy blok stały, kieruje się następnie ku dołowi, przechodzi dokoła drugiego bloku ruchomego itd.* (rys. 2). *W wielokrążku zwykłym – ciężar (opór) rozkłada się równomiernie na tyle części sznura, ile bloków znajduje się w wielokrążku....*




Rys. 3




Rys. 2




Rys. 4

Zatem uczeń, mając do czynienia z wielokrążkiem zwykłym, mógł niczego w zadaniu o wielokrążku nie obliczać, a jedynie policzyć liczbę widocznych na obrazku kółek. Jest jednak tutaj peszące słowo *zwykły*, które sugeruje, że przed tak bezmyślnym – a skutecznym przecież – postępowaniem powinniśmy zorientować się, czy umieszczony w zadaniu przez nauczyciela wielokrążek jest zwykły, czy też nie. A może to słowo *zwykły* jest dodane tylko tak, dla zwiększenia naukowości, powiedzmy?

Rysunki 3 i 4 nie przedstawiają, dosłownie rzecz biorąc, zwykłych wielokrążków – w każdym bądź razie różnią się od tych z rysunków 1 i 2. Rysunek 3 pochodzi z cytowanego podręcznika, rysunek 4 jest narysowany 90 lat później, ale do obu stosuje się podany wyżej przepis. Czy zatem w ogóle istnieją wielokrążki, gdzie zliczanie kółek nie prowadzi natychmiast do informacji o wielkości siły utrzymującej dany, zawieszony na wielokrążku ciężar w równowadze? Czy można tak złośliwie zaprojektować wielokrążek, by biedny uczeń rozwiązujący zadanie na jego temat musiał się zmusić do myślenia?

---

## Dlaczego nie liczyć prościej?

Każdy wie, że ułamki mnoży się bardzo prosto: licznik przez licznik, mianownik przez mianownik i już. Natomiast dodaje się o wiele bardziej zawile:

$$\frac{a}{b}+\frac{p}{q}=\frac{a\cdot q+p\cdot b}{b\cdot q}.$$

Zastanówmy się, co by było, gdybyśmy dodawali ułamki tak, jak je mnożymy, a więc, gdyby sumą ułamków takich, jak we wzorze wyżej, było

$$\frac{a+p}{b+q}.$$

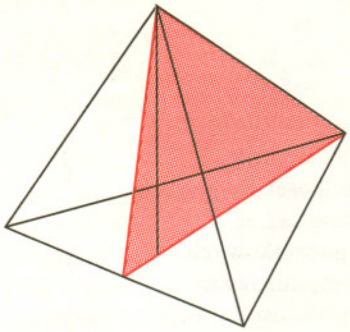
Nazwijmy takie dodawanie **dodawaniem prostym**. Jeżeli ograniczymy się do najprostszych ułamków – czyli takich, których i licznik, i mianownik jest liczbą naturalną, to okaże się, że wynik zwyczajnego dodawania jest zawsze większy od wyniku dodawania prostego:

$$\frac{a+p}{b+q}<\frac{a\cdot q+p\cdot b}{b\cdot q}.$$

Spróbuj, Czytelniku, uzasadnić, że faktycznie tak jest. Jeżeli nie pogardzisz wskazówką, to jest ona taka, jak to się w matematyce często zdarza – zamiast dowodzić tego, co Ci proponują, spróbuj udowodnić coś mocniejszego: wynik dodawania prostego zawsze mieści się między dodawanymi ułamkami, czyli

[*] $\quad$ gdy $\frac{a}{b}\le\frac{p}{q}$, to $\frac{a}{b}\le\frac{a+p}{b+q}\le\frac{p}{q}$.

## Okazuje się, że sposobów jest nieskończenie wiele



Rys. 1

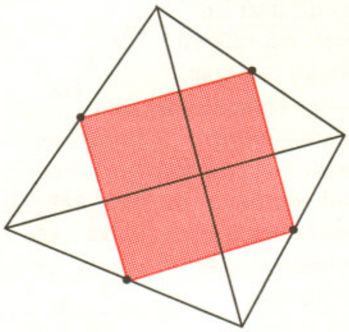
Co bardziej sprytni i obdarzeni wyobraźnią przestrzenną Czytelnicy bez trudu odpowiedzą twierdząco na pytanie *czy można czworościan foremny przeciąć tak, by obie powstałe w ten sposób części były jednakowe?*, jak również przecząco na pytanie *czy jest tylko jedna taka możliwość?* Istotnie, można czworościan rozciąć płaszczyzną przechodzącą przez jedną z krawędzi i przez mającą z nią wspólny koniec wysokość czworościanu – otrzyma się wtedy dwa przystające czworościany (rys. 1). Niezależnie od tego, czy zaliczymy to rozwiązanie jako jedno, czy jako sześć (bo tyle jest krawędzi), to istnieje jeszcze inny sposób – przeciąć przez środki czterech, parami skośnych krawędzi. Otrzymuje się wtedy dwie bryły nie mające (chyba) standardowej szkolnej nazwy, a mające dwie ściany trójkątne, dwie trapezowe i jedną kwadratową (rys. 2).

A czy istnieją jeszcze inne rozwiązania tego zadania? Istnieją, i każdy, kto miałby trudności z ich znalezieniem, powinien po przeczytaniu następnego zdania spłonąć rumieńcem.

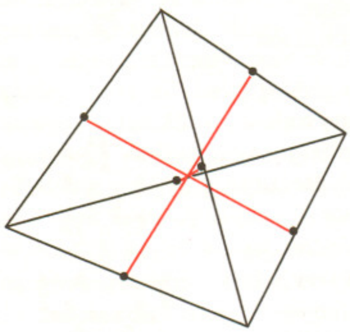
**Każda płaszczyzna przechodząca przez środek bądź oś symetrii wielościanu dzieli go na dwie przystające części.**

Właściwie nie ma tu nawet nad czym myśleć – owa symetria nakłada jedną z części na drugą.

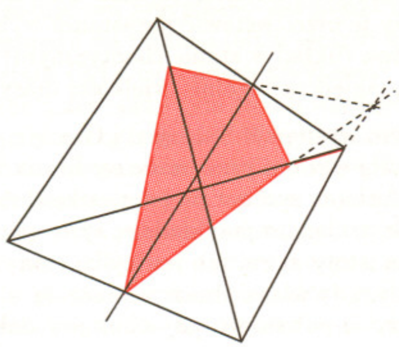
Czworościan foremny nie ma środka symetrii, ma natomiast trzy osie symetrii: proste łączące środki skośnych krawędzi (prawda?). Każda płaszczyzna przechodząca przez taką oś dzieli ten czworościan na jednakowe części (rys. 3). Nasze zadanie ma zatem nieskończenie wiele istotnie różnych rozwiązań.



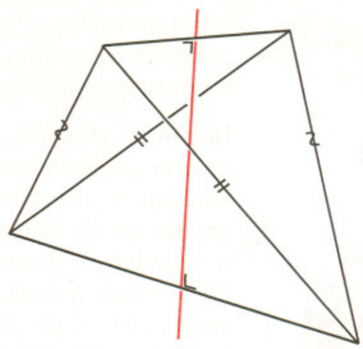
Rys. 2. Przecięć kwadratowych jest 3.



Rys. 3. Osie symetrii czworościanu foremnego.



Rys. 4. Każde płaskie przecięcie połowiące czworościan foremny zawiera przynajmniej jedną jego oś symetrii, gdy nie jest trójkątem, jest deltoidem.



Rys. 5. Oś symetrii mają nie tylko foremne czworościany. Ma ją każdy czworościan, w którym prosta łącząca środki jednej z par krawędzi skośnych jest do nich obu prostopadła.

---

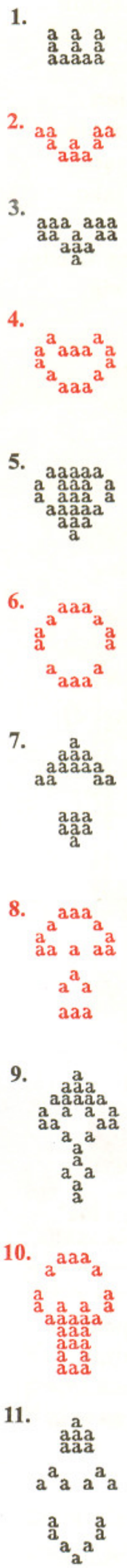
To powinno się lepiej poddać dowodzeniu. Nasuwa się jednak, rzecz jasna, pytanie:
*jeśli między, to gdzie, w którym punkcie odcinka osi liczbowej mającego końce w punktach odpowiadających dodawanym ułamkom?*
I tu odpowiedź jest naprawdę zaskakująca: otóż miejsca tego nie da się ustalić. Zależy ono od postaci ułamka. Rozszerzając jeden z ułamków (a drugi pozostawiając bez zmian) przesuwamy wynik w jego stronę. Uzasadnienie znów pozostawiamy Czytelnikom, tu tylko kilka liczbowych przykładów:

$$\frac{1}{2} < \frac{4+2}{8+3} < \frac{2+2}{4+3} < \frac{1+2}{2+3} < \frac{1+4}{2+6} < \frac{1+6}{2+9} < \frac{2}{3}.$$

Taka sytuacja, gdy wynik działania zależy od postaci ułamków, na których je wykonujemy, jest zupełnie nie do przyjęcia. Dlatego też pozostaniemy, niestety, przy tradycyjnym, niewygodnym sposobie dodawania ułamków.

Aby jednak na koniec było coś pozytywnego, zauważmy, że
**dodawanie proste jednakowych ułamków daje jako wynik ten sam ułamek**
(to wynika bezpośrednio z nierówności [*]). Jeżeli słowo *ułamek* zastąpić tyle samo znaczącym słowem *proporcja*, to nasze spostrzeżenie może przynieść wiele korzyści. Np. w geometrii, gdzie proporcji jest bez liku.

52 momenty z życia leżącej litery E



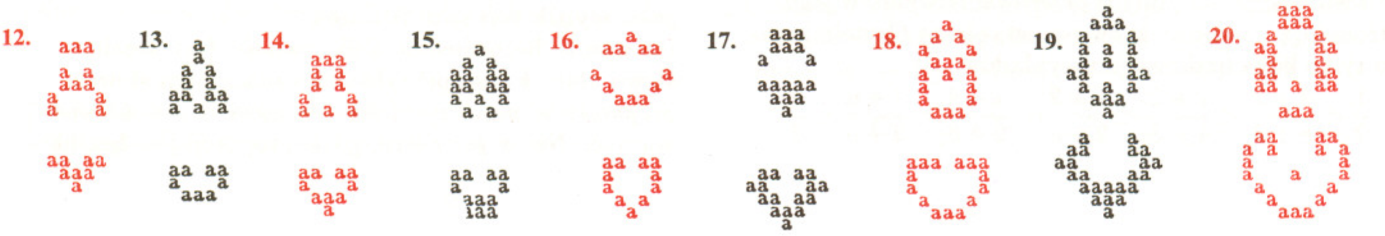
# Samozorganizowane stany krytyczne: od badań sterty piasku do modeli ewolucji

*Lech SZYMANOWSKI*

Samozorganizowana krytyczność oznacza dążenie dużych układów dynamicznych do ich samoczynnej ewolucji do stanu krytycznego, w toku której występują fluktuacje o rozmiarach porównywalnych ze wszystkimi skalami wielkości charakteryzującymi dany układ. Określenie *samozorganizowana* oznacza, że układ ewoluuje do stanu krytycznego niezależnie od warunków początkowych tej ewolucji, zadanych przez zaburzenie stanu krytycznego. Samozorganizowane stany krytyczne (SSK) są czasami określane jako „stany na granicy chaosu". Powstaje więc pytanie: gdzie występują SSK?

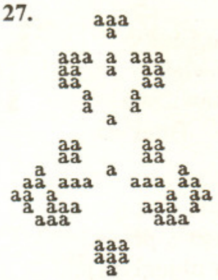
Najczęściej przytaczanym przykładem, w którym występuje SSK, jest budowa sterty piasku. Układ ten jest przedmiotem wielu modeli teoretycznych. Jest on również przedmiotem doświadczenia, które chciałbym krótko omówić. Na talerzu o danym promieniu (rzędu kilku centymetrów) buduje się stertę piasku dodając do układu po jednym ziarenku. Po osiągnięciu masy krytycznej masa piasku dalej nie wzrasta, lecz zaczyna fluktuować w następstwie występowania lawin o różnej wielkości. Przedmiotem badań są właśnie te fluktuacje masy sterty piasku. Struktura tych fluktuacji ma charakter fraktalny, z okresami oscylacji zmian masy sterty piasku (mierzonymi liczbą ziaren dodanych do układu), zmieniającymi się od jednego do tysiąca ziaren. Wielkość lawin zaobserwowanych w doświadczeniu jest również bardzo różnorodna i zmienia się od jednego do kilkuset ziaren. Prawdopodobieństwo wystąpienia lawiny o danej masie maleje wraz z jej wzrostem tak, jak funkcja potęgowa z pewnym wykładnikiem krytycznym. Takie zachowanie jest charakterystyczne dla układu będącego w stanie krytycznym. Należy je przeciwstawić narastaniu wykładniczemu rozkładu prawdopodobieństwa (układ w stanie chaotycznym) lub rozkładowi z wyraźnym maksimum dla jakiejś szczególnej wielkości masy.

Innym przykładem, w którym występuje SSK, jest „Gra życia". Rozgrywa się ona na płaskiej sieci, której węzłom przypisane są: liczba 1, symbolizująca istnienie w nich życia, lub liczba 0, symbolizująca pustkę (brak życia). Reguły gry zadaje się lokalnie. I tak, w danym przykładzie, życie zaniknie, gdy w sąsiednich węzłach nie ma istoty żywej lub jest tylko jedna (odsłonięcie). Życie zaniknie również wtedy, gdy w sąsiednich węzłach są więcej niż trzy istoty żywe (zatłoczenie). Z kolei życie powstanie, gdy obok jest dokładnie trzech sąsiadów. „Grę życia" rozpoczyna się przypisaniem węzłom sieci w sposób przypadkowy liczb 0 lub 1 (na tej i trzech następnych stronach odbywa się jedna gra; jako 1 jest a, natomiast jako 0 nic nie ma). Po tym następuje ewolucja, która przebiega według powyższych reguł. Po dłuższym okresie przejściowym układ znajdzie się w stanie stacjonarnym, charakteryzującym się występowaniem prostych cykli złożonych z węzłów, w których istnieje życie. Ten układ stacjonarny podlega następnie zaburzeniu, polegającemu na przypisaniu liczby 1 pustemu węzłowi sieci, wybranemu w sposób przypadkowy. Po zakończeniu ewolucji układu, wywołanej tym zaburzeniem, układ znowu zaburza się. Po wielu zaburzeniach ewolucja układu do stanu stacjonarnego nie zależy już od pierwotnego przypisania węzłom sieci liczb 0 lub 1. Przedmiotem badań są ewolucje układu będące następstwem zaburzeń stanu stacjonarnego. Jedną z charakterystyk tej ewolucji jest aktywność układu, zdefiniowana jako całkowita liczba „urodzin" i „zgonów" mających miejsce od zaburzenia układu



26.

27.



28.

29.

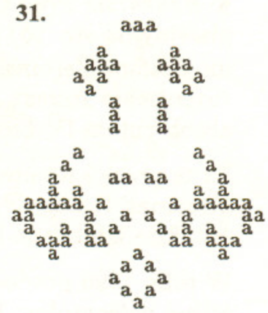
30.

do czasu osiągnięcia przez niego stanu stacjonarnego. Rozkład prawdopodobieństwa wystąpienia ewolucji o zadanej aktywności ma postać charakterystyczną dla układu znajdującego się w stanie krytycznym. Prawdopodobieństwo to maleje wraz ze wzrostem aktywności tak, jak funkcja potęgowa z pewnym wykładnikiem krytycznym. Taką samą postać ma rozkład prawdopodobieństwa wystąpienia ewolucji o zadanym czasie jej trwania, który również maleje potęgowo wraz ze wzrostem czasu trwania ewolucji. Obie te cechy świadczą, że życie i śmierć w „Grze życia" są skorelowane w czasie i przestrzeni. Obserwowana aktywność zmienia się o kilka rzędów wielkości. To samo dotyczy obserwowanych czasów trwania ewolucji. Wszystko to świadczy o tym, że układ znajduje się w SSK.

Ostatnio wysunięto przypuszczenie, że przy opisie ewolucji biologicznej mogą mieć zastosowanie SSK. Wiąże się to z pytaniem dotyczącym sposobu, w jaki przebiega ewolucja biologiczna: czy jest ona jednostajna, czy też przebiega w sposób niejednostajny, a okresy wielkiej aktywności są poprzeplatane okresami małej aktywności? Ostatnie dane geologiczne dotyczące przeżywalności wielu gatunków zwierząt morskich w ciągu minionych 600 mln lat sugerują, że proces wymierania tych zwierząt przebiegał bardzo niejednorodnie.

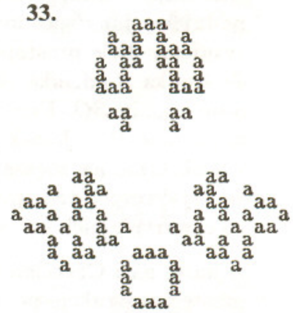
Model Baka-Sneppena (BS) jest teoretycznym modelem ewolucji biologicznej, w którym wykorzystano SSK. Oczywiście, jest on modelem zbyt uproszczonym, aby uznać go za realistyczny. Niemniej pewne jego własności mogą odzwierciedlać cechy ewolucji rzeczywistej. W modelu BS każdemu gatunkowi przypisany jest punkt na sieci jednowymiarowej. Miarą skłonności gatunku do mutacji jest wysokość bariery, która w modelu przyjmuje wartości z przedziału (0,1). Im bariera przypisana gatunkowi jest mniejsza, tym łatwiej podlega on mutacji. Jest przy tym rzeczą bardzo ważną, że mutacja danego gatunku ma wpływ na mutację innych gatunków. W praktyce ewolucja układu przebiega według poniższych zasad. Po przypisaniu w sposób przypadkowy punktom reprezentującym gatunki wysokości ich barier szuka się węzła z najmniejszą barierą, którą zmienia się w sposób przypadkowy, jednocześnie zmieniając w podobny sposób wysokości barier w sąsiednich węzłach sieci. Po okresie przejściowym, w którym mutacje są nieskorelowane, układ znajdzie się w stanie stacjonarnym, który jest obiektem badań. W stanie stacjonarnym najbardziej prawdopodobne są przypadki, w których kolejnym mutacjom podlegają gatunki w sąsiednich węzłach, czyli mutacje są skorelowane. Śledząc ewolucję wybranego gatunku w czasie (mierzonym całkowitą liczbą mutacji zachodzących w układzie) widać, że mutacje tego gatunku zachodzą w bardzo niejednorodny sposób: okresy spokoju są poprzeplatane okresami dużej skłonności do mutacji. W tym sensie model BS odtwarza pewne cechy ewolucji obserwowane w badaniach geologicznych. Ewolucja w modelu BS dąży do zwiększenia wysokości barier przypisanych poszczególnym gatunkom. W stanie stacjonarnym wysokość większości barier jest większa niż pewna wartość progowa i ich rozkład powyżej tej wartości jest jednorodny. Warto to przeciwstawić modelowi ewolucji bez oddziaływania na sąsiadów, w którym ewolucja ulega zakończeniu po osiągnięciu przez wszystkie gatunki barier o wysokości jednakowej i równej 1. Ciekawe wyniki w modelu BS dotyczą wielkości lawin, zdefiniowanych jako liczba kolejnych mutacji z barierami mniejszymi od zadanej wartości progowej. Rozkład wielkości tych lawin opisuje funkcja potęgowa, która maleje wraz ze wzrostem wielkości lawiny w sposób określony przez wartość wykładnika krytycznego. Ponadto wielkości lawin, które występują w układzie, różnią się między sobą o wiele rzędów wielkości, od bardzo małych do przybierających formę katastrof. Stanowi to ilustrację podstawowej własności SSK, jaką jest samoczynne występowanie w nim zjawisk o różnych stopniach natężenia, bez konieczności odwoływania się do wpływu czynnika zewnętrznego.

31.



32.

33.



34.

## Znowu sukces!

W Helsinkach, od 25 do 28 września 1996 roku, odbyły się kolejne, już ósme finały Konkursu Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej. Startowali przedstawiciele 14 państw Unii (bez Luksemburga) oraz zapraszani już systematycznie przedstawiciele Islandii, Norwegii, Polski, Szwajcarii, Ukrainy i Węgier, a także – gościnnie – finaliści Amerykańskiego Konkursu Prac Naukowych i Technicznych.

W Konkursie mogą startować młodzi ludzie w wieku 15–21 lat, uczący się nie wyżej niż na pierwszym roku studiów. Każdy kraj ma prawo wystawić do Konkursu 3 prace. Polskę reprezentowały w tym roku dwie prace: matematyczna (jak i w roku ubiegłym) i biologiczna.

Praca matematyczna to rozszerzenie nagrodzonej w 1995 roku złotym medalem w *Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki* ZG PTM i *Delty* (o Konkursie w 1996 roku piszemy na str. 16) pracy **Tomasza Osmana**, absolwenta I Liceum Ogólnokształcącego im. Stefana Żeromskiego w Kielcach, pod tytułem *Wielowymiarowe uogólnienie twierdzenia Bezout.* Rozszerzenie zostało dokonane wspólnie z **Maciejem Kurowskim**, absolwentem IV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu.

Za tę pracę i jej prezentację (w języku angielskim) Tomasz Osman i Maciej Kurowski otrzymali II nagrodę (3000 ECU). Przypomnijmy, że w 1995 roku (inni) Polacy zdobyli w tymże konkursie III nagrodę również za pracę matematyczną.

W roku 1996 powiodło się Polakom jeszcze lepiej – do matematyków dołączył biolog, ściślej paleontolog. **Radosław Skibiński** z Rzeszowa, student Politechniki Wrocławskiej, uzyskał za pracę pod tytułem *Próba odtworzenia wyglądu i trybu życia oraz ustalenia przynależności systematycznej wymarłego gatunku ryby oligoceńskiej z terenu dzisiejszych Karpat na podstawie samodzielnie zebranych skamieniałości z Rudawki Rymanowskiej* III nagrodę (1500 ECU).

GRATULUJEMY!

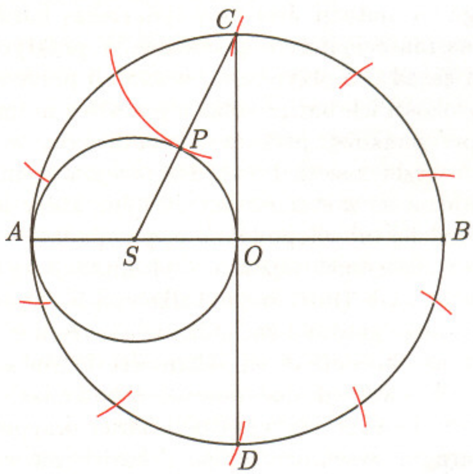
Szerzej o Konkursie Prac Młodych Naukowców napiszemy w numerze marcowym.

## Pentagram do zapamiętania

W *Delcie* 10/1996, w *EPSILONIE* 10(67) znajduje się opis konstrukcji pentagramu, jedyny, który został zapamiętany przez *D.C.*

Dla mających inną strukturę pamięci podajemy inny sposób: w okręgu o środku $O$ rysujemy dwie prostopadłe średnice $AB$ i $CD$. Ze środka $S$ odcinka $AO$ zakreślamy okrąg o promieniu $SO$. Przecina on odcinek $CS$ w punkcie $P$. Odcinek $CP$ odkładamy wielokrotnie na większym okręgu. Okaże się, że uzyskamy w ten sposób 10 punktów. Łącząc co czwarty z nich otrzymamy pentagram.

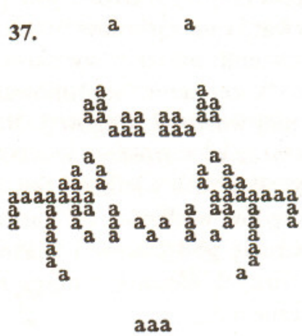
A może nasi Czytelnicy znają jeszcze inne, proste konstrukcje pentagramu?

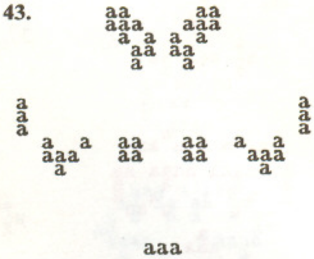



*MK*

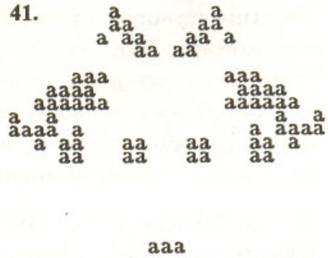
35.

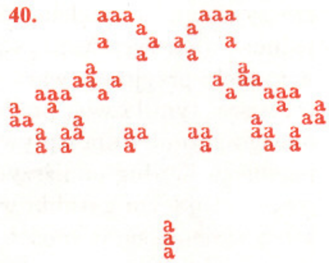

36.

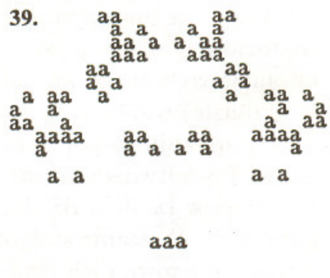

37.


43.


42.


41.


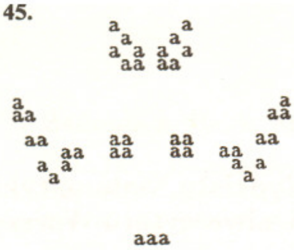
40.


39.


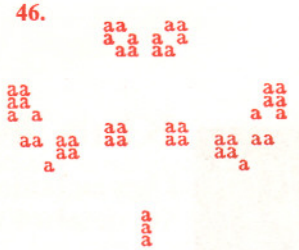
38.


44.

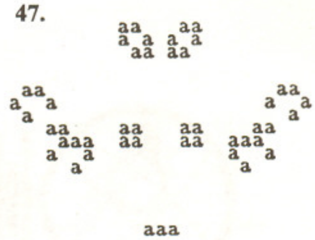
45.



46.



47.



**Rozwiązanie zadania M 797.** Przez prostą indukcję wykazujemy, że dla dowolnej liczby naturalnej $k$ i dowolnej liczby rzeczywistej $x$ mamy

$$P(x^{n^k}) = P\left(\left(x^{n^{k-1}}\right)^n\right) = P\left(x^{n^{k-1}}\right)^n = \ldots = P(x)^{n^k}.$$

Rozważmy dwa przypadki. Jeśli wielomian $P$ jest stały, $P(x) \equiv c$, to $c = c^n$, czyli $c = 0$, $c = 1$, lub, o ile $n$ jest liczbą nieparzystą, $c = -1$. Jeśli natomiast $P$ nie jest wielomianem stałym, to $\lim\limits_{x\to\infty} |P(x)| = \infty$, a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|P(x)|}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \log_x |P(x)| = \deg P.$$

Niech więc $y > 1$ będzie taką liczbą, że $|P(y)| > 1$; wówczas ciąg $x_k = y^{n^k}$ jest rozbieżny do nieskończoności i na mocy dowiedzionego na początku wzoru jest

$$|P(x_k)| = |P(y^{n^k})| = |P(y)|^{n^k} = \left(y^{\log_y|P(y)|}\right)^{n^k} = \left(y^{n^k}\right)^{\log_y|P(y)|} = (x_k)^{\log_y|P(y)|},$$

a zatem $\deg P = \lim\limits_{k\to\infty} \log_{x_k} |P(x_k)| = \log_y |P(y)|$. Stąd

$$|P(y)| = y^{\deg P}$$

dla dostatecznie dużych liczb $y$. Ponieważ wielomian jest funkcją ciągłą, więc $P(y) = y^{\deg P}$ dla dostatecznie dużych $y$ lub $P(y) = -y^{\deg P}$ dla dostatecznie dużych $y$. Wiadomo, że wielomiany zmiennej rzeczywistej zgodne w nieskończenie wielu punktach są równe (bo ich różnica ma nieskończenie wiele zer, więc jest wielomianem zerowym). Przeto $P(y) \equiv y^{\deg P}$ lub $P(y) \equiv -y^{\deg P}$. Jak poprzednio, łatwo sprawdzić, że ten drugi przypadek zachodzić może tylko dla $n$ nieparzystych. Ostateczna odpowiedź brzmi więc: warunki zadania spełniają wielomiany stałe 0 i 1, wszystkie wielomiany postaci $x^m$, a jeśli $n$ jest liczbą nieparzystą, to także wielomian stały $-1$ i wszystkie wielomiany postaci $-x^m$.

Czytelnikom proponujemy zastanowienie się nad tym, jakie pary wielomianów mają tę własność, że $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $x$.

## Foton

Chcemy polecić Waszej uwadze *Foton* – ciekawy miesięcznik dla nauczycieli fizyki i ich uczniów, sponsorowany przez Instytut Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego i w nim wydawany. Spełnia on też funkcję biuletynu informacyjnego Sekcji Nauczycielskiej Polskiego Towarzystwa Fizycznego. Znajdziecie w nim nowości ze świata nauki, wywiady, kącik eksperymentatora, zadania z komputerem, informacje o konferencjach, warsztatach, pokazach, konkursach itp. W *Fotonie* ukazują się artykuły dydaktyczne dotyczące nauczania fizyki i – ogólnie biorąc – edukacji (np. reforma nauczania).

Oprócz normalnych zeszytów (do tej pory 45), zaczęła się ukazywać seria niebieska – fizyka z komputerem oraz seria żółta – dla nauczycieli fizyki i studentów.

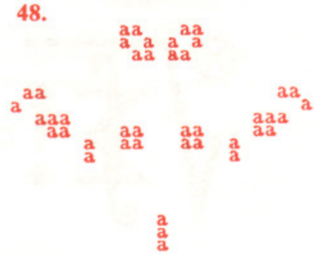
Zeszyt 44 zawiera, między innymi, artykuły: „Po co badamy strukturę materii i cząstki elementarne?” – Jacka Turnaua; „W poszukiwaniu granic struktury materii, czyli co to znaczy, że coś się z czegoś składa?” – Krzysztofa Fiałkowskiego; „Dlaczego noce są ciemne i jaki ma to związek z początkiem Wszechświata?” – Edwarda Malca; wywiady z G. Bednorzem, laureatem Nagrody Nobla, i M. Turałą (CERN).

Numer 46 – „doświadczalny” będzie zawierać: artykuł „Zagadka neutrin słonecznych” (M. Wójcik); rozmowy i wywiady z fizykami na temat ważnych doświadczeń w fizyce (K. Fiałkowski, T. Dohnalik, A. Szytuła); doświadczenia, pokazy, zagadki i ciekawostki (B. Warczak).

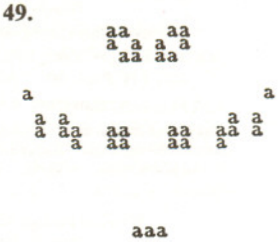
Polecamy zeszyty dydaktyczne: 43 – Wkład psychologii w nauczanie fizyki; 45 – O przeszkodach poznawczych w nauczaniu fizyki; 47 – O rozwiązywaniu zadań z fizyki; oraz zeszyt niebieski *Fizyka z komputerem*, a w nim: „Fraktalna nieznośność bytu, czyli historia demonów Mandelbrota” (E. Gudowska-Nowak); „Fizyka statystyczna – to nie takie trudne” (P. Pawłowski); „Rysujemy fraktale”, „Komputerowe bilardy”, „Cykloida” (A. Dyrek).

*Foton* można zamówić listownie: Instytut Fizyki, 30-059 Kraków, ul. Reymonta 4 (12 zł za sześć numerów).

48.

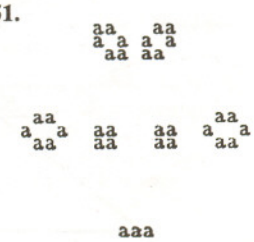


49.

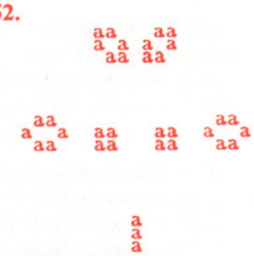


50.

51.



52.



a dalej było już spokojnie, choć może nudno – kolejne momenty przynosiły na zmianę sytuacje **51, 52, 51, 52, 51, 52,...** i na takim monotonnym kiwaniu ogonkiem powoli mijała wieczność.

# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 1997

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 319 ($WT$=1,20), 320 ($WT$=3,03), 321 ($WT$=1,90) i 322 ($WT$=1,60) z numerów 4 i 5/1996

| | | | |
|---|---|---|---|
| Krzysztof Zapisek | – | Warszawa | 39,12 |
| Lesław Skrzypek | – | Rzeszów | 38,45 |
| Piotr Żmijewski | – | Łódź | 37,71 |

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 219 ($WT$=3,30) i 220 ($WT$=2,80) z numeru 5/1996

| | | | |
|---|---|---|---|
| Jarosław Łazuka | – | Warszawa | 43,06 |
| Aleksander Surma | – | Myszków | 41,92 |
| Przemysław Gworys | – | Częstochowa | 35,06 |
| Przemysław Gadziński | – | Środa Śl. | 29,85 |
| Andrzej Idzik | – | Bolesławiec | 21,59 |

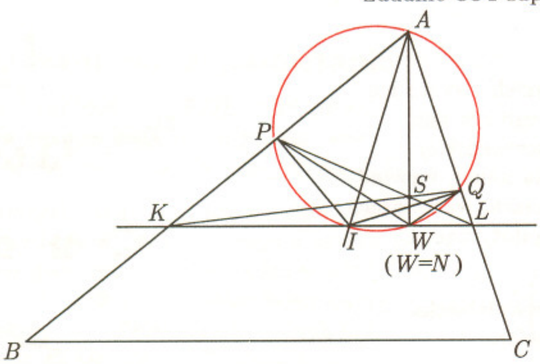
## Zadania z matematyki nr 333, 334

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**333.** Zbiorem „klubowym" będziemy nazywali 44-elementowy zbiór $K$ liczb całkowitych mający następującą własność: suma liczb w każdym niepustym podzbiorze zbioru $K$ jest niepodzielna przez 45. Ile jest zbiorów klubowych zawartych w zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots, 1997\}$?

**334.** Dla każdej liczby naturalnej $n$ szereg $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+k}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k$ jest zbieżny. Oznaczmy jego sumę przez $S_n$. Dowieść, że istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Zadanie **334** zaproponował pan Marcin Kasperski z Warszawy.




## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1996

Przypominamy treść zadań:

**325.** Okrąg wpisany w trójkąt ostrokątny $ABC$ jest styczny do boków $AB$ i $AC$ odpowiednio w punktach $P$ i $Q$. Prosta przechodząca przez jego środek i równoległa do boku $BC$ przecina boki $AB$ i $AC$ odpowiednio w punktach $K$ i $L$. Odcinki $KQ$ i $LP$ przecinają się w punkcie $S$. Odcinek $SN$ jest wysokością w trójkącie $KLS$. Dowieść, że $\angle PNS = \angle QNS$.

**326.** Udowodnić, że dla liczb $\alpha, \beta \in (-\pi/2; \pi/2)$ zachodzi nierówność

$$\ln \frac{1-\sin\alpha}{1-\sin\beta} \cdot \ln \frac{1+\sin\beta}{1+\sin\alpha} \geq (\beta-\alpha)^2.$$

**325.** W trójkącie $AKL$ prowadzimy wysokość $AW$ oraz dwusieczną $AI$ kąta $A$; punkt $I$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$. Zachodzą proporcje:

$$\frac{|KP|}{|KW|} = \frac{|IK|}{|AK|} = \frac{|IL|}{|AL|} = \frac{|LQ|}{|LW|};$$

dwie skrajne równości wynikają z podobieństw trójkątów prostokątnych $\Delta IKP \sim \Delta AKW$ oraz $\Delta ILQ \sim \Delta ALW$, a środkowa równość jest treścią twierdzenia o podziale boku trójkąta przez dwusieczną. Zatem

$$1 = \frac{|KW|\cdot|LQ|}{|KP|\cdot|LW|} = \frac{|KW|}{|WL|}\cdot\frac{|LQ|}{|QA|}\cdot\frac{|AP|}{|PK|}$$

(bowiem $|AP| = |AQ|$) i na podstawie twierdzenia Cevy wnosimy, że punkt przecięcia odcinków $KQ$ i $LP$, czyli punkt $S$, leży także na odcinku $AW$. Stąd wniosek, że punkt $W$ pokrywa się z $N$. Punkt ten, jak również punkty $P$ i $Q$, leżą na okręgu, którego średnicą jest odcinek $AI$. Wpisane w ów okrąg kąty $PNA$ i $QNA$, oparte na przystających łukach $AP$ i $AQ$, są równe. Skoro zaś $S$ leży na odcinku $AN$, otrzymaliśmy równość, którą trzeba było wykazać.

**326.** Można założyć, że $\alpha < \beta$ (obie strony danej do udowodnienia nierówności zachowują swą wartość przy zamianie $\alpha$ i $\beta$ miejscami). Dla każdej pary funkcji ciągłych na dowolnym przedziale $\langle a; b\rangle$ zachodzi *nierówność Cauchy'ego–Schwarza*

$$\text{(CS)} \qquad \left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Przyjmijmy: $a = \sin\alpha$, $b = \sin\beta$ (zatem $-1 < a < b < 1$) oraz $f(x) = 1/\sqrt{1-x}$, $g(x) = 1/\sqrt{1+x}$. Wówczas

$$\text{Lewa strona (CS)} = \left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 =$$
$$= (\arcsin b - \arcsin a)^2 = (\beta-\alpha)^2,$$

$$\text{Prawa strona (CS)} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1-x}\cdot\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln\frac{1-a}{1-b}\cdot\ln\frac{1+b}{1+a};$$

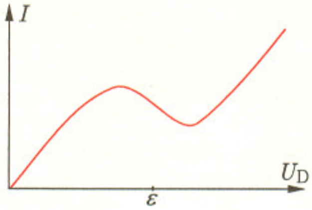
stąd teza.

## Zadania z fizyki nr 231, 232

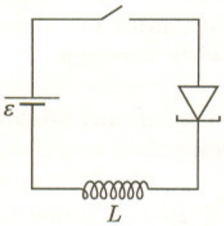
*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

**231.** Jacek siedzi na lekkiej huśtawce w odległości 2 m od punktu podparcia, a Marek zeskakuje z pewnej wysokości na drugie ramię huśtawki. W jakiej odległości od punktu podparcia powinien zeskoczyć, aby Jacek wzbił się jak najwyżej? Marek waży trzy razy więcej od Jacka, a huśtawka jest doskonale sprężysta.

**232.** Na rysunku 1 przedstawiona jest charakterystyka diody tunelowej w kierunku przewodzenia. Diodę tę włączono w obwód zawierający źródło napięcia $\mathcal{E}$ i cewkę o indukcyjności $L$ (rys. 2), przy czym wartość napięcia $\mathcal{E}$ leży w opadającym obszarze charakterystyki (została zaznaczona na rys. 1). Opisać jakościowo procesy zachodzące w obwodzie po zamknięciu klucza.




Rys. 1



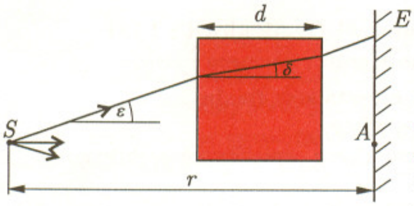

Rys. 2

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1996

### Przypominamy treść zadań:

**223.** Na powierzchni wody pływa:
a) prostopadłościan o krawędziach $a$, $b$ i $h$, przy czym krawędź $h$ jest pionowa,
b) walec o promieniu $r$ i wysokości (pionowej) $h$,
c) stożek o kącie rozwarcia $2\alpha$ i wysokości $h$, podstawą do góry.
Jeśli wszystkie bryły są jednorodne, to jakie warunki muszą spełniać gęstość $\varrho$ oraz wymienione parametry, aby w tej pozycji równowaga była stabilna, tzn. aby po małym wychyleniu bryła powracała do pozycji początkowej?

**224.** Punktowe źródło światła $S$ oświetla ekran $E$ (rys. 3). Czy wstawienie między źródło a ekran płaskorównoległej płytki szklanej spowoduje wzrost natężenia oświetlenia środkowej części ekranu (okolicy punktu $A$), czy spadek, czy też natężenie oświetlenia nie zmieni się? Jeśli wystąpi zmiana, to czy będzie ona silniejsza, gdy płytkę o ustalonej grubości wsuniemy bliżej źródła, czy bliżej ekranu? Zakładamy, że płytka jest pokryta warstwą przeciwodblaskową eliminującą odbicie, a szkło jest doskonale przezroczyste.




Rys. 3

**223.** We wszystkich trzech przypadkach środek masy bryły znajduje się ponad środkiem masy części zanurzonej – oznaczmy te punkty przez $S$ i $S_z$, a różnicę wysokości przez $d$. Gdyby więc część zanurzona nie zmieniała kształtu, to przy przechyle o mały kąt $\varepsilon$ punkt $S_z$ przesunąłby się w poziomie względem $S$ o odcinek $\varepsilon d$, przy czym moment powstałej pary sił miałby zwrot pogłębiający przechył. Stabilność pozycji pionowej może wystąpić tylko wtedy, gdy wskutek zanurzenia się pewnej części bryły po jednej stronie (oznaczmy tę część przez $\Omega$) i wynurzenia po drugiej środek masy części zanurzonej przesunie się w poziomie o odcinek $\Delta x$ dłuższy od $\varepsilon d$. W obliczeniach będziemy uwzględniać tylko wyrazy pierwszego rzędu względem $\varepsilon$. W tym przybliżeniu przechył można uznać za obrót wokół osi „leżącej na powierzchni wody" i przecinającej prostą $S_zS$, a obie części $\Omega$ (zanurzoną i wynurzoną) – za „cienkie" i identyczne. Wielkość $\Delta x$ wyznaczamy ze wzoru

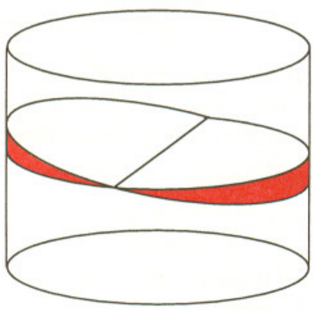
$$\Delta x = \frac{2\int x\,\mathrm{d}V}{V_z} = \frac{2x_{\acute{s}.m.}\Delta V}{V_z},$$

gdzie $V_z$ jest objętością części zanurzonej (wprowadźmy też oznaczenie głębokości zanurzenia $h_z$), $\Delta V$ – objętością jednej z części $\Omega$, a $x_{\acute{s}.m.}$ – odległością środka masy $\Omega$ od osi przechyłu. Dalsze obliczenia przeprowadzimy oddzielnie dla każdego przypadku.

a) Znajdujemy $V_z = abh_z$, $h_z = \varrho h$ (symbolem $\varrho$ będziemy oznaczać stosunek gęstości bryły do gęstości wody), $d = (h - h_z)/2 = (1-\varrho)h/2$. Jeśli prostopadłościan przechyla się obracając wokół osi równoległej do krawędzi $a$, to $\Omega$ jest klinem (w przybliżeniu wycinkiem walca) o wysokości $b/2$ i objętości $\Delta V = (1/2)a(b/2)^2\varepsilon$, a środek masy $\Omega$ leży – tak jak w przypadku trójkąta – w odległości 2/3 wysokości od krawędzi klina. Zatem $x_{\acute{s}.m.} = b/3$ i obliczamy $\Delta x = (1/12)b^2\varepsilon/(\varrho h)$, a warunek $\Delta x > \varepsilon d$ sprowadza się do

$$b > h\sqrt{6\varrho(1-\varrho)}\,.$$

Oczywiście, ten sam warunek musi spełniać także parametr $a$.



Rys. 4

b) Wzory na $h_z$ i $d$ są takie, jak w przypadku a), natomiast $V_z = \pi r^2 h_z$. Na rysunku 4 widzimy, że $\Omega$ jest tym razem w przybliżeniu klinowym wycinkiem kuli, a objętość $\Delta V$ jest proporcjonalną do $\varepsilon$ częścią objętości kuli: $\Delta V = (2/3)\varepsilon r^3$. Aby znaleźć położenie środka masy takiego wycinka, trzeba wyliczyć odpowiednią całkę – otrzymujemy $x_{\acute{s}.m.} = (3\pi/16)r$, a dalej $\Delta x = (1/12)r^2\varepsilon/(\varrho h)$. Warunek równowagi ma postać podobną do poprzedniej:

$$r > h\sqrt{6\varrho(1-\varrho)}\,.$$

c) Teraz $h_z = h\varrho^{1/3}$, a ponieważ środek masy stożka jest w odległości $(3/4)h$ od wierzchołka, więc $d = (3/4)h(1-\varrho^{1/3})$. Wartości $\Delta V$ i $x_{\acute{s}.m.}$ wylicza się tak, jak w punkcie b), z tym że promień $r$ należy zastąpić przez $r_z = h_z \operatorname{tg}\alpha$. Stąd $\Delta x = (3/4)\varepsilon h_z \operatorname{tg}^2\alpha$, a po przekształceniach znajdujemy warunek równowagi

$$\operatorname{tg}^2\alpha > \varrho^{-1/3} - 1\,.$$

**224.** Niech odległość źródła od ekranu wynosi $r$, a grubość płytki – $d$. Rozważmy wiązkę światła wybiegającą ze źródła pod kątem względem osi nie przekraczającym małej wielkości $\varepsilon$ (wewnątrz stożka o kącie rozwarcia $2\varepsilon$). W nieobecności płytki wiązka ta oświetli na ekranie koło o promieniu $\varepsilon r$. Po wsunięciu płytki promienie ulegną załamaniu i przesunięciu równoległemu; wewnątrz płytki skrajne promienie wiązki będą biegły pod kątem $\delta < \varepsilon$ do osi (w przybliżeniu małych kątów $\delta = \varepsilon/n$, gdzie $n$ – współczynnik załamania szkła). Widzimy, że promień koła oświetlonego przez wiązkę zmaleje do wartości $\varepsilon(r-d) + \delta d$, czyli natężenie oświetlenia odpowiednio wzrośnie. Efekt ten nie zależy od położenia płytki.

**Rozwiązanie zadania M 795.**
Dla $1 \geq x \geq y \geq 0$ mamy $f(x) = f((x-y)+y) \geq f(x-y) + f(y) \geq f(y)$, co dowodzi, że funkcja $f$ jest niemalejąca. Skoro $f(0) = f(0+0) \geq f(0) + f(0)$, to $0 \geq f(0) \geq 0$, czyli $f(0) = 0$. Teza jest prawdziwa dla $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, bo wtedy $f(x) \leq f(1) = 1 \leq 2x$. Także dla $x \in (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$, gdzie $n$ jest dowolną liczbą naturalną, mamy

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) \leq \frac{1}{2}f(2x) \leq \leq \frac{1}{4}f(4x) \leq \ldots \leq \frac{1}{2^n}f(2^n x) \leq \leq \frac{1}{2^n}f(1) = \frac{1}{2^n} \leq 2x\,,$$

natomiast dla $x = 0$ teza zadania jest oczywista.

**Rozwiązanie zadania M 796.** Nie. Za kontrprzykład może służyć funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{dla } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

**Rozwiązanie zadania F 444.** Kropla wody może się oderwać od sufitu, gdy jej ciężar stanie się większy od sił napięcia powierzchniowego. Maksymalny promień kropli przyczepionej do sufitu określa równanie

$$2\pi R\sigma = \frac{2}{3}\pi R^3 \varrho g\,.$$

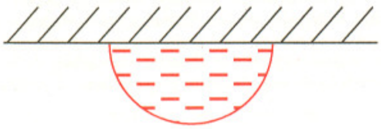
Otrzymujemy stąd

$$R = \sqrt{\frac{3\sigma}{\varrho g}} \approx 4{,}7\ \mathrm{mm}\,.$$

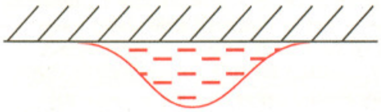
Promień kropli, która oderwała się od sufitu, jest $\sqrt[3]{2}$ razy mniejszy od $R$ i wynosi

$$r \approx 3{,}7\ \mathrm{mm}\,.$$

Wynik ten jest zawyżony. Rozumowanie, które do niego prowadzi, zawiera dwa istotne uproszczenia. Po pierwsze, przyjęliśmy, że kropla przyczepiona do sufitu ma kształt półkuli (rys. 1), podczas gdy w rzeczywistości ma kształt pokazany na rysunku 2.



Rys. 1



Rys. 2

Po drugie, przyjęliśmy dla napięcia powierzchniowego wartość charakteryzującą powierzchnię rozdziału woda–powietrze, zaniedbując wpływ podłoża (sufitu).

**Rozwiązanie zadania F 443.** Posługując się zmiennymi biegunowymi energię cząstki możemy zapisać jako

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\lambda}{r^4}\,,$$

gdzie $L = mr^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ jest momentem pędu cząstki (stała ruchu). Wykorzystując stałość momentu pędu wyeliminujemy czas z wyrażenia określającego energię,

$$E = \frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\lambda}{r^4}\,.$$

Dla zerowej energii powyższe równanie sprowadza się do postaci

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = a^2 - r^2\,,$$

gdzie $a^2 = 2m\lambda/L^2$. Całkując je otrzymujemy $r = a\cos\phi$. Jest to równanie okręgu o promieniu $\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{m\lambda}{2L^2}}$ przechodzącego przez centrum przyciągania!

Powyższy problem ma rozwiązanie, które opisują funkcje elementarne, także dla $E = \frac{L^4}{16m^2\lambda}$. W tym przypadku tor cząstki jest spiralą asymptotycznie zbliżającą się do okręgu o promieniu $\sqrt{\frac{4m\lambda}{L^2}}$ (proponujemy potraktowanie tego jako ćwiczenie). Dla wszystkich innych wartości energii zależność $r(\phi)$ opisują funkcje eliptyczne.

Szczecin, 5.09.1996

# Protokół posiedzenia Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie: Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Stanisław Fudali, Paweł Strzelecki, Agnieszka Wojciechowska, Jarosław Wróblewski,

biorąc pod uwagę zawartość prac i sposób ich prezentacji postanowiło:

1) przyznać złoty medal i nagrodę w kwocie 300 złotych **Michałowi Stukowowi** z I LO im. M. Kopernika w Gdańsku za pracę *Krótka historia dowodu pewnego twierdzenia*,

2) przyznać srebrny medal i nagrodę w kwocie 250 złotych **Adamowi Osękowskiemu** z XIV LO im. S. Staszica w Warszawie za pracę *Zastosowanie liczb zespolonych w zadaniach geometrycznych*,

3) przyznać brązowe medale i łączną nagrodę w kwocie 150 złotych **Tomaszowi Kowalskiemu** i **Arturowi Wirowskiemu** z I LO im. M. Kopernika w Łodzi za pracę *Cechy podzielności liczb*,

4) przyznać wyróżnienie i kwotę 100 złotych **Adamowi Dzedzejowi** z I LO im. M. Kopernika w Gdańsku za pracę *O obliczaniu granic pewnego rodzaju ciągów*,

5) przyznać cztery nagrody po 100 zł opiekunom uczestników finału:
- Aleksandrze Grabowskiej, opiekunce złotego medalisty,
- Grzegorzowi Rządkowskiemu i Tomaszowi Żukowskiemu, opiekunom srebrnego medalisty,
- Oldze Stande, opiekunce brązowych medalistów,
- Andrzejowi Daszke, opiekunowi wyróżnionego uczestnika.

(–) *podpisy członków Jury*

Tradycyjnym zwyczajem redakcja *Delty* ogłasza Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zachęcamy uczniów zainteresowanych matematyką do opracowywania swoich matematycznych rozważań i nadsyłania rezultatów do redakcji *Delty*. Poniżej przypominamy szczegółowy regulamin konkursu.

# Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

**1.** Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
**2.** W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
**3.** Konkurs składa się z eliminacji i finału.
**4.** W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły; imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.
**5.** Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
**6.** Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
**7.** Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.
**8.** Finaliści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
**9.** Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
**10.** Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
**11.** Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
**12.** Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
**13.** Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.

epsilon

1/97

(70)

W poprzednim numerze *EPSILONA* opisaliśmy dziwne przygody pana Heliodora, który codziennie wieczorem grywał partyjkę szachów z jedną ze swoich dwóch stałych partnerek. Każdego dnia wieczorem, losowo, o różnych godzinach, pan Heliodor przychodził na przystanek MPK i wsiadał do tramwaju, który nadjechał pierwszy. „Jedynka" zawoziła pana Heliodora do panny Chwalisławy, „siódemka" do panny Dzierżysławy. I mimo iż tramwaje kursowały regularnie co 10 minut, po roku okazało się, że u panny Dzierżysławy pan Heliodor bywał mniej więcej dziewięć razy częściej niż u panny Chwalisławy. Wygląda to na zdecydowanie sprzeczne z prawami rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej...

**Otóż nie!** Rzecz w tym, że tramwaje jeździły regularnie co 10 minut według rozkładu jazdy: siódemka o $16^{00}$, $16^{10}$, $16^{20}$, ..., jedynka o $16^{01}$, $16^{11}$, $16^{21}$, ... Jeśli pan Heliodor przychodził na przystanek między godziną $n^{10k}$ a $n^{10k+1}$, to wsiadał do jedynki, w przeciwnym przypadku do siódemki. Nic więc dziwnego, że u panny Dzierżysławy bywał częściej.

Z historyjki wynika bardzo prosty wniosek: prawa rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej należy stosować umiejętnie, w przeciwnym przypadku wyciągnięte wnioski są do niczego. Na przykład, w głównym wydaniu „Wiadomości" często podawane są „wyniki badania opinii publicznej" w rozmaitych sprawach, po czym słyszymy, że sondaż przeprowadzono na „reprezentatywnej grupie tysiąca osób" i **„dopuszczalny błąd sondażu wynosi 3%"**. Podany czasem bywa nawet rozkład opinii na poszczególne województwa. Wystarczy chwilę pomyśleć, by dostrzec albo naiwność, albo niekompetencję, albo świadome manipulowanie telewidzami. Jak może być dobrana tysiącosobowa grupa ludzi o własnych, indywidualnych opiniach, by być reprezentatywną dla mieszkańców czterdziestomilionowego kraju? Łatwo zauważyć, że na jedno województwo przypada około 20 badanych osób. Jak wybrać próbkę reprezentatywną co do poglądów, gdy często wśród osób o tym samym wykształceniu, zawodzie, podobnym wieku, stanie majątkowym (na przykład młodych pracowników instytutu matematycznego) poglądy na rozmaite sprawy różnią się diametralnie? Inaczej należy interpretować badania statystyczne dotyczące cech „obiektywnych", takich, jak waga i wzrost zwierząt, trwałość żarówek czy częstość pojawiania się liter w danym języku (gdzie prawa statystyki pozwalają dokładnie oszacować błąd), a inaczej trzeba postępować, próbując uogólnić na całe społeczeństwo odpowiedzi grupki osób na zadane pytanie. Opinie ludzi są zbyt chwiejne, odpowiedź zależeć może od bardzo wielu czynników, takich, jak okoliczności, w których pytanie zostało zadane, sformułowanie czy nawet intonacja głosu pytającego. Nie mówiąc już o tym, że można kłamać.

Modelowy przykład mieliśmy w studiu wyborczym drugiej tury ostatnich wyborów prezydenckich. Po godzinie $20^{00}$, zaraz po zamknięciu lokali wyborczych, ogłoszono w telewizji wstępne wyniki – opracowane na podstawie pytań zadawanych co dziesiątemu wychodzącemu z lokalu wyborcy przez ankieterów stojących przed wybranymi punktami wyborczymi w całej Polsce, do godziny $16^{00}$. Możliwe odpowiedzi były tylko dwie, w badaniach opinii publicznej na różne tematy często żaden z kilku wariantów odpowiedzi przedstawionych w telewizji nie odpowiada mojej opinii (a więc zapewne i niejednego ankietowanego). Odpowiedzi udzielano zaraz po dokonaniu wyboru, zatem niewątpliwie bardziej wiarygodnej, niż przy odpowiadaniu na pytanie ankietera – często bez namysłu. Przebadano co najmniej kilkadziesiąt tysięcy osób. Trudno o lepszy sondaż! Różnica między wynikami przedstawionymi wówczas a ostatecznymi była większa niż 3%...

O innym przypadku „nadinterpretacji" statystyki można przeczytać w *Delcie* 9/1981, str. 14.

Nie jest dobrze, gdy rachunkiem prawdopodobieństwa i statystyką niewłaściwie operują osoby bez odpowiedniej znajomości matematyki. Ich błędami może zostać obarczona matematyka.

*K.C.*

## Zbliża się sesja ...

(autentyczne historie z egzaminów matematycznych)

Po egzaminie student wychodzi z gabinetu egzaminatora, pokładając się ze śmiechu. Podchodzi do niego oczekujący na egzamin kolega.
– No i co, jak facet?
– Facet? Facet bomba! Mówię ci, wspaniały egzamin! Dawno się tak nie ubawiłem! – i dalej ryczy ze śmiechu.
– A co dostałeś?
– Co? A, oblałem, cha, cha, cha!

* * *

Egzaminator dał studentowi twierdzenie do udowodnienia, po czym wyszedł załatwić jakąś sprawę. Student napisał dowód na tablicy, egzaminatora nie ma. Czeka, czeka ... Usiadł na krześle, wziął gazetę z biurka i zaczął czytać. Po chwili wbiegł do pokoju egzaminator, popatrzył nieprzytomnym wzrokiem na studenta, na tablicę, na studenta ... otworzył swoją teczkę.
– Tu ma pan dzisiejszą gazetę! – po czym wybiegł z pokoju.

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem $\varepsilon$.