



SPIS TREŚCI NUMERU 2(285)

O brzytwie Ockhama,
 czyli o prostym myśleniu
 i jak na tym wyszła
 astronomia pozagalaktyczna
Konrad Rudnicki

Akustyczna symulacja
 kryształów fotonowych
Piotr Fita
Jarosław Piotrowski
Jan Gaj

Prawo Hubble'a
 i zdrowy rozsądek

Idealne bryły Platona
 a chemia organiczna
Helena Dodziuk

Zadania

Mała Delta

Klub 44

Patrz w niebo

Luty

Gammalimatias

W następnym numerze:

Zasada szufladkowa Dirichleta
 w mechanice

Okładki i ilustracje wykonała
Anna Ludwicka

Wybór artykułów z *Delta*
 ukazuje się w języku angielskim
 w sieci Internet pod adresem
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:
 Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
 Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
 Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichocki
 – wiceprzewodniczący
 Krzysztof Ciesielski
 Jan A. Gaj
 Piotr Goldstein
 Tomasz Hofmokl
 Andrzej Hryniewicz
 Wiesław A. Kamiński
 Marta Kicińska-Habior
 Krzysztof Maślanka
 Andrzej Mąkowski
 Zdzisław Pogoda
 Feliks Przytycki
 Michał Różycka
 Konrad Rudnicki
 Zbigniew Semadeni
 Grzegorz Sitarski
 Andrzej Woszczyk
 Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
 Wiktor Bartol
 Krzysztof Biesaga
 Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nac.
 Tomasz Kwast
 Anna Ludwicka
 Anna Rudnik
 Paweł Strzelecki
 Joanna Udalska
 Anna Wojtyra
 Piotr Zalewski
 Adres Redakcji:
 ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
 tel. 843-02-41(-2) wewn. 21
 PAWELST@MIMUW.EDU.PL
 Wydrukowano
 w Drukarni Naukowo-Technicznej
 w Warszawie, ul. Mińska 65.
 Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
 prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena
 jednego numeru w 1998 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie
 okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)
 cena numeru w 1998 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
 odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje
 dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1998 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe
 „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa
 egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się
 pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaką”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej.
 Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A.
 XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa,
 ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
 Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem
 zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą,
 realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem
 otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A.
 Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71
 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także
 tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

Numer archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.
 Niestety, nie dysponujemy już numerami z lat 1974–1984.

O brzytwie Ockhama, czyli o prostym myśleniu i jak na tym wyszła astronomia pozagalaktyczna

Akustyczna symulacja kryształów fotonowych

Piotr FITA, Jarosław PIOTROWSKI
i Jan GAJ

Artykuł zawiera relację z doświadczeń przeprowadzonych na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego w ramach warsztatów zorganizowanych w 1997 roku przez Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci. Piotr Fita i Jarosław Piotrowski są stypendystami Funduszu, Piotr Fita jest uczniem IV kl. LO im. T. Kościuszki w Wieluniu, a Jarosław Piotrowski jest uczniem II kl. III LO im. K. Baczyńskiego w Białymstoku.

Co to jest kryształ fotonowy?

Podobnie jak prawdziwy kryształ, jest to struktura o przestrzennej periodyczności. W zasadzie powinna być ona wykonana z materiału przezroczystego dla światła, natomiast skala periodyczności, która w prawdziwych kryształach jest wyznaczona przez odległości międzyatomowe rzędu angstromów (10^{-8} cm), w kryształach fotonowych powinna być porównywalna z długością fali świetlnej, tysiące razy większą od odległości międzyatomowych.

Kryształami fotonowymi interesują się twórcy laserów półprzewodnikowych i innych przyrządów optoelektronicznych, ze względu na potrzebę precyzyjnego kierowania światła w strukturach takich przyrządów tam, gdzie trzeba. Ciekawą właściwością, wspólną z naturalnymi kryształami, jest posiadanie *przerwy energetycznej*, to jest zakresu częstości, dla którego fala elektromagnetyczna nie może się rozchodzić. W przypadku prawdziwych kryształów dotyczy to oczywiście częstości fali elektronowej albo, inaczej mówiąc, energii, jaką mogą przyjmować elektrony.

Najprostszą, jednowymiarową postacią kryształu fotonowego jest *zwierciadło Bragga*, czyli wiele identycznych warstw ułożonych na przemian z dwóch materiałów o różnych współczynnikach załamania. Budując strukturę półprzewodnikową, w której między dwoma zwierciadłami Bragga znajduje się *studnia kwantowa*, możemy otrzymać laser promieniujący prostopadłe do powierzchni płytki półprzewodnikowej, co z wielkim upodobaniem robią w ostatnich latach optoelektronicy. Ich entuzjazm pobudza ogromny rynek – w każdym odtwarzaczu płyt kompaktowych jest zadanie dla lasera półprzewodnikowego.

Wiedza o rozchodzeniu się światła w tego rodzaju strukturach jest bardzo ważna dla opanowania ich wytwarzania. Bezpośrednie pomiary pola fali świetlnej są jednak bardzo trudne ze względu na małe rozmiary struktur i długości fali. Dlatego może być bardzo interesujące wykonanie eksperymentów akustycznych na makroskopowych modelach kryształów fotonowych. Teraz mamy już do czynienia ze skalą centymetrową, a nie mikrometrową, co ogromnie ułatwia wykonanie doświadczeń, a wnioski z takich badań mogą okazać się stosowalne również do struktur fotonowych.

Konrad RUDNICKI

Istnieją zasady filozoficzne przyjęte na podstawie zawilego i abstrakcyjnego myślenia. Istnieją też inne, zgodne z myśleniem „na chłopski rozum”. Taką jest tak zwana *zasada brzytwy Ockhama* nakazująca *niemnożenie bytów*, niewprowadzanie bytów zbędnych przy naukowych rozważaniach. Idzie w niej o to, aby sprawy dającej się wyjaśnić prosto, kilkoma pojęciami, nie wyjaśniać w sposób skomplikowany wielką liczbą pojęć, aby delikatne rozróżnienia między pojęciami wprowadzać tylko wtedy, gdy są rzeczywiście potrzebne. Niepotrzebne, zbędne byty należy odciąć jak brzytwą (stąd nazwa). Nieco wulgaryzując sprawę, zasada ockhamowskiej brzytwy nakazuje nam raczej szczerze powiedzieć „nie jadam fasoli, bo mi nie smakuje”, zamiast wymyślać argumenty, że działa ona źle na serce, długo się trawi, powoduje wzdęcia itd. W świadomym zastosowaniu do naukowych rozumowań posługiwanie się tą zasadą nie jest proste, bo jakie kryterium pozwala na łatwe odróżnienie bytów (pojęć) rzeczywiście istotnych od zbędnych? Skąd wziąć przekonanie, że poza prostym zjawiskiem fizycznym nie kryją się niezmiernie skomplikowane prawa fizyczne? Ponadto metodyka pracy naukowej zaleca szukać wyjaśnień zadowalających niezależnie od tego, czy są one skomplikowane, czy proste. Oczywiście tu powstaje problem, co jest zadowalające, ale nie wchodzimy w te sprawy zbyt głęboko. . .

W życiu zarówno codziennym, jak i ekonomiczno-politycznym „ockhamistów” jest wielu. Zamiast się zastanawiać nad wpływem alkoholu na soki trawienne i nad niewłaściwym w danej sytuacji spożyciem pokarmu, prościej jest powiedzieć „Pełnia, panie. Stąd wymioty” (K.I. Gałczyński *Kolczyki Izoldy*). Zamiast szukać wielorakich i złożonych przyczyn niepowodzeń gospodarczych jakiegoś kraju, prościej jest wytłumaczyć wszystko szkodliwą działalnością tradycyjnych wrogów społeczeństwa – komunistów, masonów lub Żydów.

Dzisiejsi naukowcy mniej dbają o niemnożenie bytów. Fizycy nie uważają licznych typów kwarków, których nikt nigdy nie widział i widzieć nie będzie, za byty zbędne. A matematycy zbiór pusty,

czyli nie mający żadnego elementu, nie składający się z niczego, uważają za inny byt niż zbiór, do którego należy zbiór pusty. Tak więc, biorą na początek *nic* i tworzą z owego niczego zbiór, a następnie z tego zbioru i z niczego tworzą zbiory coraz bardziej skomplikowane, nie dbając o zarzut, że tworzą byty zbędne. Co ważniejsze, w ten właśnie sposób zbudowali logiczne podstawy arytmetyki.

W różnych epokach świadomy i podświadomy stosunek naukowców do brzytwy Ockhama był różny. Tu chcę przypomnieć, jak konsekwentne myślenie zgodne z zasadą ockhamowskiej brzytwy powstrzymało na całe stulecie rozwój astronomii pozagalaktycznej.

W roku 1734 Emanuel Swedenborg opisał po raz pierwszy naszą Galaktykę, jako spłaszczony układ mający własną dynamikę i składający się z ogromnej liczby gwiazd, z których jedną jest nasze Słońce. W roku 1761 Johann M. Lambert, a w 1775 – również Immanuel Kant, wysunęli przypuszczenie istnienia wielu podobnych układów gwiazdowych. Ich przypuszczenia poparli następnie obserwacyjnie ojciec i syn – William i John Herschlowie. Posługując się pierwszą generacją wielkich (średnica rzędu metra) teleskopów zwierciadłowych na przełomie wieku XVIII i XIX sporządzili katalog 4014 obiektów mgławicowych, których większość – zgodnie również z dzisiejszymi poglądami – uważali za odległe układy gwiazdowe, odkryli fenomen ogólnego gromadzenia się wszystkich „mgławic pozagalaktycznych” (to znaczy leżących na sferze niebieskiej z dala od Drogi Mlecznej), odkryli pas supergalaktyczny, a także postawili hipotezę, że nasza Galaktyka należy do wielkiego układu galaktyk, którego centrum znajduje się w Pannie. Tak powstała astronomia pozagalaktyczna. Na nieszczęście odkryli też fakt, że „mgławice pozagalaktyczne” (czyli w dzisiejszej terminologii – galaktyki) unikają na sferze niebieskiej okolic Drogi Mlecznej, podczas gdy w samej Drodze i jej pobliżu spotyka się mgławice innych typów (dziś powiemy: mgławice gazowe i pyłowe).

Powiedziałem „na nieszczęście”, bo i jak to można było interpretować? Położenia na sferze niebieskiej wyznaczają kierunki w przestrzeni. Obiekty skupione w dwu czasach biegunowych Drogi Mlecznej zawierają się w przestrzeni w pewnym stożku o wierzchołku w środku sfery, „w oku obserwatora”, czyli w naszej Galaktyce. Poza stożkiem układają się zaś inne obiekty – mgławice galaktyczne. Jeżeli

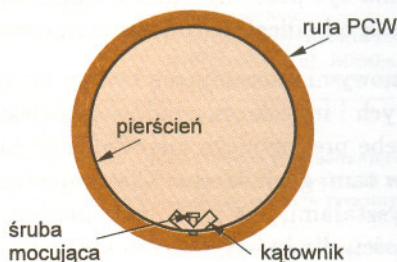
Fale w kryształach naturalnych

Kryształem fotonowym jest też każdy prawdziwy kryształ, ale w odniesieniu do odpowiednio krótkich fal elektromagnetycznych, to jest *promieni Rentgena*, zwanych też promieniami X. Można mieć nadzieję, że eksperymenty akustyczne pozwolą nam bezpośrednio obejrzeć to, co w kryształach oświetlonych wiązką promieni rentgenowskich odbywa się na skalę atomową i jest nam znane jedynie z teorii oraz doświadczeń pośrednich.

Eksperymenty akustyczne na strukturach periodycznych pozwalają też lepiej wyobrazić sobie, jak zachowuje się *fala elektronowa* w prawdziwych kryształach. Od dziesiątek lat wiadomo, że powinna mieć ona postać wynikającą z *twierdzenia Blocha*, to znaczy być iloczynem płaskiej fali harmonicznej i funkcji o periodyczności kryształu. Nikt jednak bezpośrednio funkcji falowej elektronu nie widział. Falę akustyczną możemy łatwo zmierzyć i przekonać się, jaka jest jej postać. Poniżej opisujemy wyniki takich pomiarów, do których wybraliśmy najprostszą postać „kryształu akustycznego”, a mianowicie

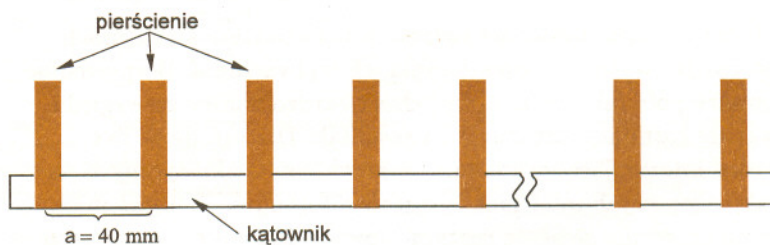
Akustyczne zwierciadło Bragga

Jako modelu struktury periodycznej użyliśmy rury PCW o średnicy wewnętrznej 33 mm i długości 0,79 m z umieszczonym w niej kątownikiem aluminiowym, na którym przymocowane były pierścienie wycięte z rury PCW o średnicy nieco mniejszej od średnicy wewnętrznej rury (rys. 1).



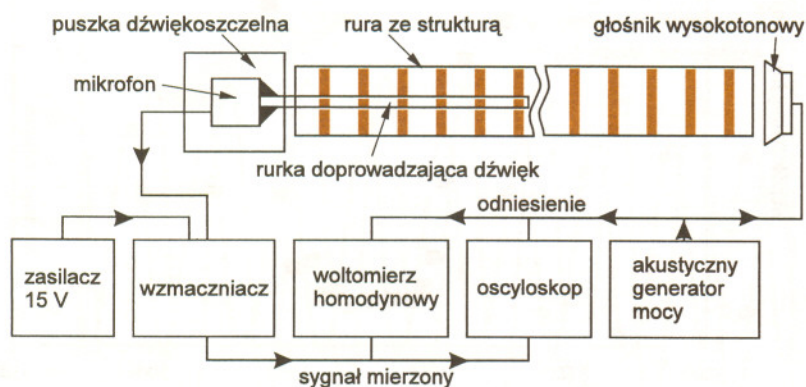
Rys. 1. Sposób zamocowania pierścieni w rurze

Szerokość pierścieni wynosiła 10 mm, odstęp między ich środkami (tzw. stała struktury oznaczana dalej przez a) 40 mm; liczba umieszczonych pierścieni wynosiła 17 (rys. 2). Źródłem fali padającej na strukturę był głośniczek wysokotonowy zasilany z generatora akustycznego umieszczonego na jednym z końców rury. Dla uniknięcia powstawania fali stojącej w wyniku odbicia fali od drugiego końca rury umieściliśmy tam zwitek waty, pochłaniający w znacznym stopniu padającą na niego falę. Pozwalało to przyjąć w pierwszym przybliżeniu, że w rurze nie wytwarza się fala stojąca, która powstawałaby w wyniku nałożenia się fali biegnącej z falą odbitą od wolnego końca rury.



Rys. 2. Schemat struktury – widok z boku

Do pomiaru amplitudy fali wewnątrz struktury wykorzystaliśmy mikrofon zamknięty w dźwiękoszczelnej puszcze, z której wyprowadzona była sonda w kształcie długiej, cienkiej rurki stalowej, użytej w celu doprowadzenia fali akustycznej do mikrofonu. Niewielka średnica rurki pozwala przyjąć, że zaburzenie przez nią wprowadzane nie miało wpływu na wynik pomiaru. Sygnał z mikrofonu doprowadzany był do wzmacniacza opartego na układzie TL082, a następnie do woltomierza homodynowego (rys. 3). Za pomocą woltomierza mierzyliśmy wartość amplitudy napięcia na wyjściu wzmacniacza oraz jej dwie składowe: pierwszą – zgodną w fazie z sygnałem zasilającym głośnik – i drugą – przesuniętą o $\pi/2$ względem tego sygnału, użytego jako sygnał odniesienia. Amplituda napięcia na wyjściu wzmacniacza jest wprost proporcjonalna do modułu zespolonej amplitudy fali akustycznej, natomiast jej składowa zgodna w fazie odpowiada części rzeczywistej sygnału, a składowa przesunięta – części urojonej.



Rys. 3. Schemat układu pomiarowego

Pomiaru dokonywaliśmy przesuwając w strukturze wolny koniec sondy co 1 cm i zapisując wartości odczytów z woltomierza. Oba sygnały – odniesienia i odbierany z mikrofonu – obserwowaliśmy na ekranie oscyloskopu, co miało charakter pomocniczy.

Na błąd pomiaru miały wpływ następujące czynniki:

- niedokładność pomiaru położenia sondy względem końca rury, przy której umieszczony był głośnik. Położenie sondy mierzone było linijką metalową, co spowodowało, że jego wartość obarczona była błędem rzędu 1 mm;

- niedokładność ustawienia częstości generatora; był to akustyczny generator mocy, typ PO-21; podziałki na skali były rozmieszczone co 100 Hz, jednak dość duża odległość między działkami pozwalała prowadzić pomiary co 50 Hz z dokładnością ustawienia częstości nie gorszą niż 30 Hz;

- głośnik przy pomiarach był ustawiony w odległości około 3–4 mm od końca rury. Rozkład pola akustycznego w płaszczyźnie przekroju rury przy głośniku mógł być różny od tego, jaki ustalał się wewnątrz rury; wyniki pomiarów nie dają jednak przesłanek potwierdzających wpływ takiego efektu;

- fakt docierania do mikrofonu dźwięków nie tylko z wnętrza struktury, lecz także poprzez obudowę (niedoskonała izolacja akustyczna mikrofonu). Napięcie na wyjściu wzmacniacza mierzone przy zatkanym wlocie rurki było na poziomie 3% napięcia mierzonego przy maksymalnym natężeniu dźwięku dochodzącego do mikrofonu przy otwartej rurce.

przyjąć, że „mgławice pozagalaktyczne” są galaktykami, to trzeba by uznać, że nasze położenie we Wszechświecie jest wyróżnione, że nasza Galaktyka znajduje się w wierzchołku stożka, wszechobejmującej struktury całego Kosmosu. Od czasu Kopernika i Giordana Bruna astronomowie uważali, że nasze położenie we Wszechświecie musi być przeciętne, a ani nasza Ziemia, ani Słońce, ani Galaktyka nie mogą mieć wyróżnionego położenia. Taką więc możliwość większość astronomów odrzucała.

Jakie były inne możliwości? Otóż można było przyjąć, że galaktyki istnieją nie tylko w wyróżnionym stożku, ale w całej przestrzeni Wszechświata. Coś je jednak poza omówionym stożkiem, czyli w płaszczyźnie Galaktyki, zasłania przed naszym wzrokiem. Ponadto trzeba by wtedy również przyjąć, że mgławice galaktyczne są zupełnie innej natury niż pozagalaktyczne. Pierwsze leżą w naszym układzie gwiazdowym, drugie są same układami gwiazdowymi. Trzeba więc przyjąć: istnienie galaktyk tam, gdzie ich nie widać, istnienie czegoś ekranującego, co właśnie tam je zasłania, oraz istnienie dwu rodzajów mgławic o zupełnie różnej naturze. Słowem, aż trzy zbędne byty. Brzytwa Ockhama nie pozwalała na przyjęcie tak abstrakcyjnej konstrukcji myślowej.

Znacznie prostsza była konstrukcja następująca: nasza Galaktyka jest albo całym Wszechświatem (dalej jest tylko pustka), albo niezmiernie odległa od innych podobnych układów gwiazdowych, tak że ich się nie da obserwować. To, co obserwujemy, to mgławice leżące wewnątrz naszej Galaktyki. Jej struktura ma wyróżniony stożek, w którym się znajdują mgławice pewnego typu (pozagalaktyczne), a poza stożkiem znajdują się inne (galaktyczne). Takie proste tłumaczenie zyskało od razu wielu zwolenników.

O ile trudno znajdować kolejne argumenty na korzyść niepopularnej tezy, o tyle gdy jakaś teza zaczyna znajdować uznanie, dostarczanie dalszych argumentów bywa coraz łatwiejsze. Przypatrzmy się rozwojowi wypadków.

W roku 1815 znano już linie widmowe w Słońcu i w gwiazdach. W następnych dziesięcioleciach stwierdzono, że widmo niektórych mgławic leżących w Drodze Mlecznej jest odbitym, rozproszonym na mgławicowej materii, światłem gwiazdy oświetlającej daną mgławicę. Podobne widmo gwiazdowego typu dało się zaobserwować w kilku mgławicach

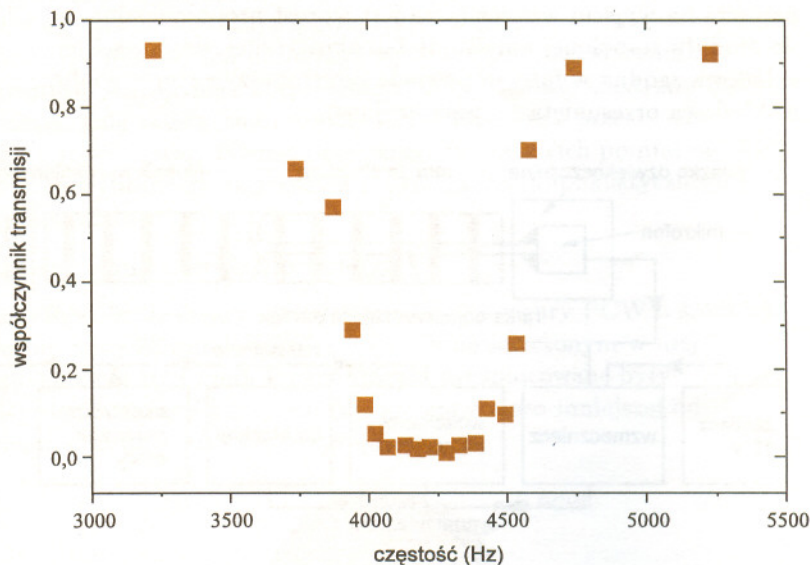
pozagalaktycznych. Nie było tam wprawdzie widać gwiazd oświetlających mgławicę, ale można było przyjąć, że są one ukryte za warstwami mgławicowego pyłu (pył w mgławicach był „uznanym bytem”). Miało to świadczyć o podobnej naturze mgławic galaktycznych i pozagalaktycznych. Wprowadzenie po roku 1880 fotografii do spektroskopii astronomicznej przyniosło znajomość wielu dalszych widm mgławic i umocniło znacznie tę tezę. Aż do początku wieku XX spektroskopia była jeszcze zbyt niedoskonała, aby umożliwić odróżnienie widma jednej bliskiej gwiazdy od zbiorowego widma wielu gwiazd odległych, tworzących inną galaktykę. Podobieństwo widm niektórych mgławic galaktycznych i pozagalaktycznych było więc silnym argumentem przeciw uznaniu mgławic pozagalaktycznych za galaktyki.

Idea Wszechświata wyspowego stale jeszcze fascynowała niektórych, ale zbiorowy zapal minął. Owszem, obserwowano czasem poszczególne, zwłaszcza większe, mgławice pozagalaktyczne. Nie pielęgnowano jednak nawet teleskopów potrzebnych do systematycznych obserwacji galaktyk. Statystyczne, dość prymitywne prace z wieku XIX, dotyczące rozmieszczenia mgławic na niebie, korzystają przede wszystkim z dawnych danych obserwacyjnych Herschlów. Kompilacją dawnych danych obserwacyjnych był również znany katalog NGC.

Następnym poważnym ciosem dla pionierów astronomii pozagalaktycznej było odkrycie w roku 1885 obiektu znanego dziś jako supernowa (SN 1885a). Obiekt miał wielkość gwiazdową 5,4 mag. Obiekt jaśniejszy niż szóstej wielkości, nieruchomy i pojawiający się tam, gdzie przedtem nie było widać nic, został zgodnie z ówczesną wiedzą astronomiczną zaklasyfikowany jako gwiazda nowa: „nowa w Spiralnej Mgławicy Andromedy”. W tym czasie znano już mniej więcej wielkości absolutne gwiazd nowych. Nowo odkryta „nowa” mając taką widomą wielkość gwiazdową, jaką zobserwowano, musiała się znajdować wewnątrz naszej Galaktyki, wewnątrz naszego układu Drogi Mlecznej. Istniejący jeszcze zwolennicy traktowania mgławic pozagalaktycznych jako galaktyk uważali, iż nowa, być może, przypadkowo się tylko rzutuje na galaktykę, i w rzeczywistości jej odległość nie jest odległością Mgławicy w Andromedzie. Niestety, odkrycia dalszych rzekomych nowych w galaktykach NGC 4424 i 5253 (w roku 1895), w NGC 2535 i 4321 (1901) oraz

Analiza wyników

Uzyskaliśmy 19 serii pomiarowych dla różnych częstości fali padającej. Po przedstawieniu wyników na wykresach zależności amplitudy fali od położenia w rurze stwierdziliśmy, że dla pewnych częstości fala jest silnie tłumiona – występuje przerwa energetyczna. Dla ujęcia tej obserwacji liczbowo obliczyliśmy współczynnik transmisji dla każdej z badanych częstości, jako stosunek kwadratów amplitudy na końcu i na początku rury. Aby uniezależnić się od wpływu modulacji z okresem struktury, do obliczenia przyjęliśmy średnie wartości z czterech sąsiednich punktów pomiarowych na jej początku i końcu. Wyniki przedstawia rysunek 4.



Rys. 4. Zależność współczynnika transmisji w strukturze od częstości

Widać, że w obszarze od około 4000 Hz do około 4450 Hz fala jest silnie tłumiona.

Z periodyczności struktury wynika, że fala przyjmie postać przestrzenną określoną tzw. funkcją Blocha [1]:

$$\Psi(x) = U(x)e^{ikx},$$

gdzie $U(x)$ jest funkcją periodyczną z okresem a , tzn. $U(x) = U(x + a)$, natomiast k jest wektorem falowym (w naszym jednowymiarowym przypadku redukuje się do skalarnej liczby falowej).

Z okresowości funkcji $U(x)$ wynika, że odczytując wartość np. części rzeczywistej sygnału co okres funkcji $U(x)$ (w naszym przypadku co 4 cm, a więc co 4 punkty pomiarowe) wyeliminujemy wpływ funkcji $U(x)$ na postać funkcji $\Psi(x)$, gdyż $U(x)$ będzie stałe. Tak uzyskane dane powinny więc, według twierdzenia Blocha, reprezentować funkcję e^{ikx} pomnożoną przez pewną stałą, zależną od tego, w jakiej fazie funkcji $U(x)$ będą znajdować się wybrane punkty.

W obszarze poza przerwą energetyczną wektor falowy k przyjmuje tylko wartości rzeczywiste, a więc funkcja e^{ikx} przedstawia falę biegnącą o stałej amplitudzie. W obszarze przerwy energetycznej k staje się liczbą zespoloną, a jej część urojona odpowiada za wykładnicze tłumienie amplitudy. Otrzymujemy wówczas iloczyn fali sinusoidalnej przez czynnik wykładniczo zanikający. Do tak wybranych części rzeczywistych (zgodnych w fazie z sygnałem zasilającym głośnik) i urojonych (przesuniętych o $\pi/2$) naszych

danych uzyskanych poza przerwę energetyczną dopasowaliśmy zależność

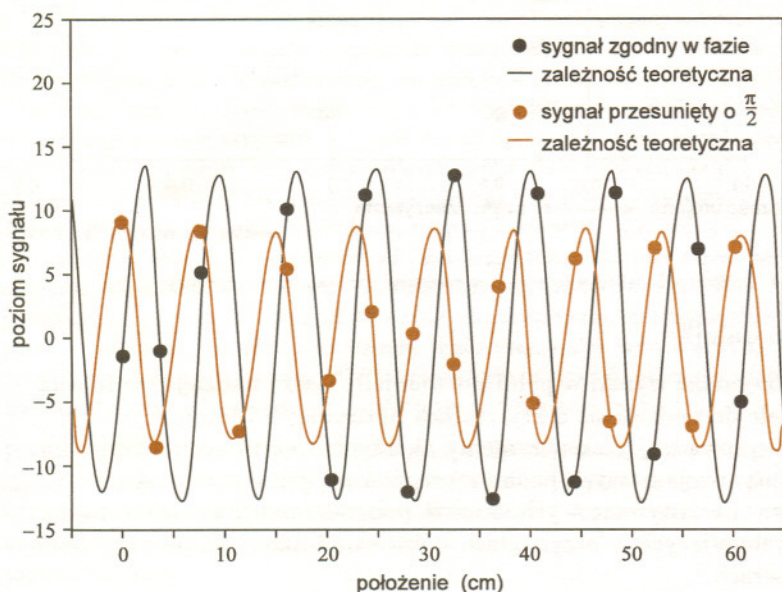
$$f = A \cos(kx - \delta),$$

gdzie A – amplituda fali, k – wektor falowy, δ – przesunięcie fazowe, a do danych wewnątrz przerwy energetycznej zależność teoretyczną

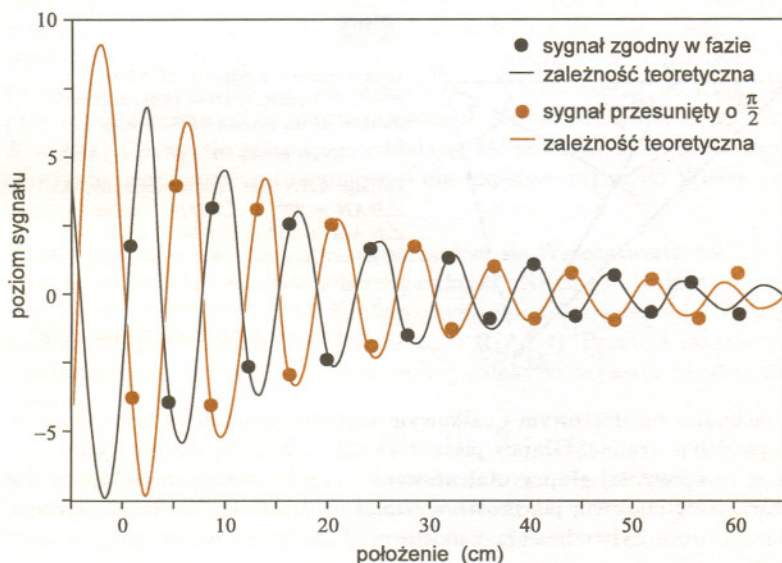
$$f = A \exp(-\beta) \cos(\alpha x - \delta),$$

gdzie A – amplituda fali, α – część rzeczywista wektora falowego, β – część urojona wektora falowego, δ – przesunięcie fazowe.

Przykładowe wykresy wyników doświadczalnych oraz dopasowane zależności teoretyczne przedstawione są na rysunkach 5 i 6. Na podstawie dopasowania funkcji można określić interesującą nas wartość wektora falowego.



Rys. 5. Poziomy sygnału mierzony co okres funkcji $U(x)$ dla częstotliwości 4580 Hz (poza przerwę energetyczną)



Rys. 6. Poziomy sygnału mierzony co okres funkcji dla częstotliwości 4080 Hz (wewnątrz przerwy energetycznej)

W taki sposób określiliśmy rzeczywistą i urojoną część wektora falowego, przedstawione na rysunku 7. Widać, że w obszarze częstotliwości 4000–4450 Hz wektor falowy ma różną od zera część

w kolejnych galaktykach w ciągu dalszych lat, zmniejszały z czasem prawdopodobieństwo takiego tłumaczenia prawie do zera.

„Ostateczny” cios zwolennikom traktowania mgławic pozagalaktycznych jako układów gwiazdowych tego typu co nasza Galaktyka zadał jednak dopiero znakomity astrometrysta, specjalista od pomiarów ruchów własnych, A. van Maanen, który zastąpił wcześniejszymi świetnymi pomiarami odległości kątowych i zmian tych odległości, czyli kątowych ruchów własnych. Otóż w roku 1916, porównując klisze ze zdjęciami mgławicy spiralnej w Wiekiej Niedźwiedzicy (M 101) z lat 1899, 1908, 1910, 1914 oraz 1915, ten słynny badacz wyznaczył ruchy własne niektórych jej jaśniejszych „punktowych” zgęszczeń i stwierdził, że świadczą one „bez wątpliwości” o ruchu obrotowym tego obiektu. W tej samej pracy, jak na ironię, przestrzega van Maanen przed możliwymi błędami w pomiarach ruchów własnych i wyciąganiem z tych pomiarów pochopnych wniosków. Potem, w roku 1921 ogłosił następną pracę na ten temat. Tym razem wyznaczył ruchy własne w czterech mgławicach spiralnych: M 33, 51, 81 i ponownie w M 101. Pomiar wykazywały okresy obrotu tych mgławic rzędu 45 ÷ 160 tysięcy lat. Wynikało stąd, że przyznanie tym mgławicom położenia w przestrzeni poza obrębem naszej Galaktyki, a tym samym odpowiednio większych rozmiarów liniowych, zmuszałoby do przyjęcia, że ich zewnętrzne obszary wirując mają prędkość liniową większą od prędkości światła. Odtąd zwolennikami hipotezy Wszechświata składającego się z widocznych, mgławicowo wyglądających galaktyk pozostali już tylko nawiedzeni fani.

Ale nie trwało to długo. W następnym roku Edwin Hubble pracując na górze Wilsona na największym wówczas teleskopie świata o średnicy 252 cm nastawił (pomyłkowo – jak twierdzą złośliwi), w przeciwieństwie do swoich poprzedników, środek pola widzenia nie na zatłoczone jądro spiralnej „mgławicy” w Andromedzie, lecz na peryferyjne części jej ramienia spiralnego, co pozwoliło w nim odróżnić poszczególne gwiazdy i następnie metodą cefeid wyznaczyć, z dużym jeszcze błędem, ale poprawnie co do rzędu wielkości, odległość całego obiektu. „Mgławica w Andromedzie” okazała się galaktyką; pozostałe mgławice pozagalaktyczne – również.

Wkrótce zdano sobie sprawę z istnienia kilku bytów uznawanych dotąd za zbędne. Po pierwsze – oprócz faktycznych pyłowych i gazowych mgławic należących do naszej Galaktyki trzeba przyjąć również istnienie galaktyk wyglądających mgławicowo tylko ze względu na wielkie ich odległości. Po drugie wypadało uznać, że galaktyki są rozmieszczone w całej przestrzeni, również w kierunkach, gdzie leży Droga Mleczna. A ponieważ ich tam nie widać, wynika stąd realność ciemnej materii ekscytującej (pochłaniającej, rozpraszającej) światło, rozmieszczonej w płaszczyźnie naszej Galaktyki. Każdy z tych „zbędnych” bytów stał się z czasem podstawą innej gałęzi badań astronomicznych. Najdłużej przyszło czekać niewidocznym galaktykom skrytym za masami ciemnej materii. Te zaczęto odkrywać dopiero po wypracowaniu metod obserwacji w podczerwieni.

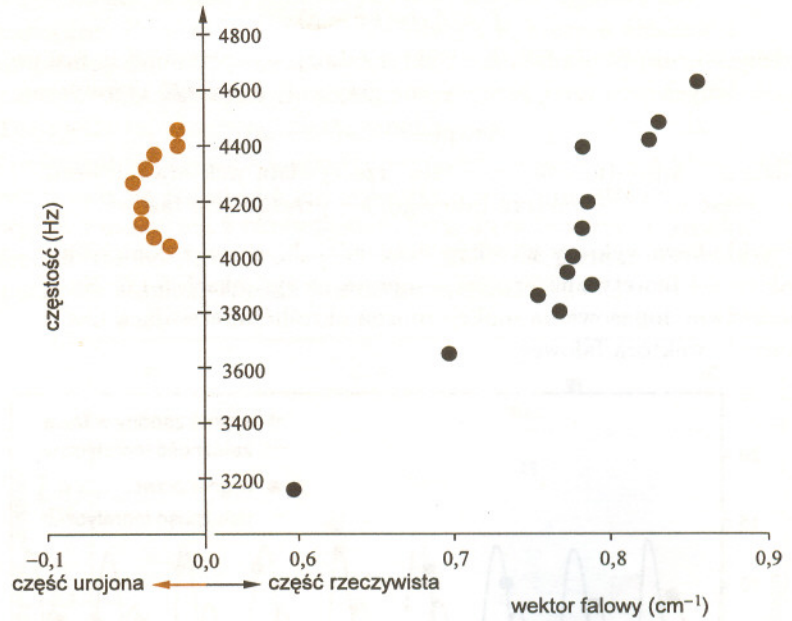
Gdy jakiś pogląd odnosi zwycięstwo, łatwo się znajduje dodatkowe argumenty za jego słusnością. Nie negując podobieństwa widm galaktyk do widm gwiazd (i widm mgławic przez nie oświetlanych) dostrzeżono stopniowo w tych widmach istotne różnice. Stwierdzono, że same widma pozwalają odróżniać układy gwiazdowe od gwiazd pojedynczych. Tak więc argument zaczerpnięty z widm obrócił swoje ostrze w przeciwnym kierunku.

Sprawę rzekomych gwiazd nowych w licznych galaktykach, których do roku 1922 odkryto już 17, wyjaśnił ostatecznie najwybitniejszy XX-wieczny przyrodnik-goetheanista Zwicky (goetheanizm jest nie do pogodzenia z brzytwą Ockhama), który wraz z Walterem Baadem stwierdził, iż mamy tu do czynienia z obiektami o znacznie większej światłości (mniejszej wielkości absolutnej). Te obiekty nazwano supernowymi, co otworzyło nowy dział astrofizyki zajmujący się tymi obiektami, uważanymi dziś za ważne stadium ewolucji gwiazd.

Goetheanizm – metodologia badań oparta na goetheanistycznej teorii poznania przypisującej myśleniu subiektywizm w tym sensie, że człowiek może myśleć (z pewnymi psychologicznymi ograniczeniami) o tym, o czym chce i obiektywizm w tym sensie, że dane myśli dają się prawidłowo zestawić w jeden tylko sposób niezależny od upodobań człowieka.

A co z nadświatelnymi prędkościami wirowania wynikającymi z pomiarów ruchów własnych dokonanych przez van Maanena? Był on niewątpliwie

urojoną, co oznacza tłumienie. Poza tym obszarem fala rozchodzi się praktycznie bez tłumienia.

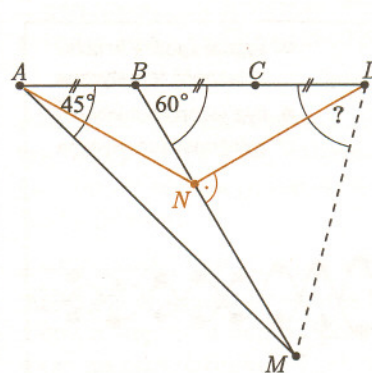


Rys. 7. Wartości wektora falowego w obszarze przerwy energetycznej

Co dalej?

Otrzymane wyniki w pełni potwierdziły naszą nadzieję, że można wiele dowiedzieć się o kryształach naturalnych i fotonowych przeprowadzając eksperymenty akustyczne na modelu. Naturalna kontynuacja naszych badań może się rozwijać w stronę struktur dwu- i trójwymiarowych, a także poprzez modelowanie struktur występujących w przyrządach półprzewodnikowych, na przykład laserach.

J. Ginter, *Wstęp do fizyki atomu, cząsteczki i ciała stałego*, PWN, Warszawa 1979, s. 244.



Rozwiązanie zadania M 835.

Niech N będzie rzutem prostokątnym punktu D na prostą MB . Mamy

$$|NB| = \cos 60^\circ \cdot |BD| = |AB|,$$

trójkąt ABN jest równoramienny, skąd $\angle BAN = 30^\circ = \angle BDN$. Zatem $\angle NAM = 15^\circ = \angle AMN$. Stąd $|ND| = |NA| = |NM|$. Trójkąt MND jest równoramienny i prostokątny, skąd $\angle NDM = 45^\circ$. Ostatecznie

$$\angle MDC = \angle BDN + \angle NDM = 75^\circ.$$

W rachunku różniczkowym i całkowym niektóre sztuczki są łatwe, niektóre zaś piekielnie trudne. Głupcy piszący książki o wyższej matematyce – a są to zazwyczaj głupcy utalentowani – rzadko zadają sobie kłopot, by pokazać Czytelnikowi, jak proste w istocie są rachunki. Wręcz przeciwnie, obierają drogę najtrudniejszą z możliwych, zdając się pałać żądzą imponowania swym ogromnym sprytem.

Jako osoba nadzwyczaj głupia i tępa, byłem zmuszony odczytać się wszelkich zawiloci, a teraz pragnę przedstawić mym braciom-głupcom te fragmenty przedmiotu, które nie są trudne. Opanujcie je sumiennie, reszta przyjdzie sama. Co udało się jednemu głupcowi, uda się i innym.

Sylvanus P. Thompson, we wstępie do *Calculus made easy*

Prawo Hubble'a i zdrowy rozsądek

Prasa kłamie. Czy to hasło studentów z 1968 roku pozostało aktualne? Prasa jest różnorodna i niezależna od władzy, kłamie zaś mniej nachalnie i intensywnie niż wtedy, a zresztą od czego sądy, gdy ktoś poczuje się kłamstwami głęboko dotknięty. Przeto kłamstwa prasowe w polityce nie są aż tak ważne jak kiedyś. Inaczej jest, jeśli kłamstwo, lub mniej dobitnie – szerzenie nieprawdy – dotyczy faktu naukowego. Tu, bardziej niż w polityce, czytelnik spodziewa się przeczytać prawdę. A chociaż o nauce czyta mniej osób niż o polityce, to nieprawda opublikowana w wysokonakładowej gazecie rozprzestrzenia się w sposób znaczący, nawet jeśli dotyczy nauki. Przyczynia się to do oddalenia się elit naukowych od społeczeństwa, co pozostaje szkodliwe niezależnie od ustroju.

Kilka lat temu w *Magazynie Gazety Wyborczej* ze zdumieniem przeczytałem (w artykule podpisanym przez mojego znakomitego kolegę z Wydziału Fizyki UW), że szandarowe dzieło obserwacyjnej astronomii XX wieku – prawo Hubble'a – wyróżnia naszą Galaktykę jako centrum Wszechświata, o ile nie zastosujemy do jego interpretacji – zamiast fizyki klasycznej – ogólnej teorii względności. Po wysłaniu przeze mnie protestu do *Magazynu* autor artykułu wyjaśnił mi, że oprotestowane stwierdzenie nie pochodzi od niego, lecz jest wynikiem zmian redakcyjnych, nad którymi nie miał kontroli, ponieważ przebywał chwilowo za granicą. Jednak *Magazyn* nie opublikował ani mojego listu w tej sprawie, ani sprostowania autora, więc pamiętliwi czytelnicy tego skądinąd ciekawego artykułu biorą zapewne fałsz za prawdę. Zresztą, myślę, że wiele osób poznających prawo Hubble'a na poziomie elementarnym, ma intuicyjne podejrzenie takie, jak redaktor *Gazety Wyborczej*, który wprowadził tę fatalną poprawkę w artykule. Warto więc chyba wyjaśnić, dlaczego prawo Hubble'a nie wyróżnia żadnego punktu we Wszechświecie.

Prawo Hubble'a stwierdza: galaktyki (przynajmniej te sąsiednie) oddalają się od nas z grubszą biorąc z prędkościami wprost proporcjonalnymi do ich odległości od nas. W języku klasycznych wyobrażeń kinematycznych, po umieszczeniu początku układu odniesienia w naszej Galaktyce, fakt ten zapisuje się jako

$$v = Hr,$$

przy czym, jeśli przez R oznaczmy funkcję przypisującą galaktyce znajdującej się w wybranej chwili t_0 w punkcie r_0 położenie $r = R(r_0, t)$ w chwili t , to $v = \partial R / \partial t$. Wielkość H , niefortunnie nazwana *stałą Hubble'a*, na mocy prawa Hubble'a nie może zależeć od r , natomiast nic nie stoi na przeszkodzie, by zależała od t . I musi zależeć od t , bo przyciąganie grawitacyjne powinno zwalniać tempo oddalania się galaktyk, $H = H(t)$. To zaś, że w ogóle się oddalają, nie jest wynikiem działania grawitacji, lecz zapewne tajemniczego dla współczesnej nauki Wielkiego Wybuchu.

A jak wygląda prawo rządzące rozszerzaniem się Wszechświata nie z punktu widzenia naszej, lecz innej galaktyki? Niech galaktyka ta zajmuje w chwili t_0 położenie r_{10} w naszym układzie odniesienia. Wtedy w chwili t będzie zajmować położenie $r_1 = R(r_{10}, t)$. Promień wodzący poprowadzony z tej wybranej do dowolnej galaktyki w chwili t będzie dany przez

$$r' = r - r_1 = R(r_0, t) - R(r_{10}, t).$$

Różniczkując względem czasu przy ustalonych r_0 i r_{10} , otrzymamy prędkość dowolnej galaktyki w układzie odniesienia wybranej galaktyki, która po skorzystaniu z prawa Hubble'a dana jest formułą:

$$v' = Hr - Hr_1 = Hr'.$$

Prawo Hubble'a w układzie innej galaktyki wyraża się więc tym samym wzorem, co w przypadku układu naszej Galaktyki. Wynika z tego, że intuicje kinematyczne czasem zawodzą, a szerzenie nieprawdy chyba warto prostować.

Wojciech KOPCZYŃSKI

świetnym astrometrystą. Jednak korzystając z tego, że klisze, na których dokonywał pomiarów, pozostały, pomiar po śmierci van Maanena powtórzono. Stwierdzono wtedy brak jakichkolwiek mierzalnych przesunięć. Okazało się więc – ku przestrodze potomnych – że nawet znakomici uczeni dokonując „obiektywnych” pomiarów podlegają czasami autosugestii, gdy z góry zakładają, jakie wyniki mają otrzymać.

Tak więc w roku 1922 astronomia pozagalaktyczna, po mniej więcej stuletniej przerwie, ożyła. Wyniki obu Herschlów zostały tymczasem zapomniane. Hubble'owi przyszło więc na nowo odkrywać gromady galaktyk, a Fritz Zwicky stwierdził po żmudnych pomiarach, że w gromadzeniu się biorą udział wszystkie galaktyki, nasza zaś Galaktyka należy do wielkiej gromady (dziś się utarło mówić: do supergromady) w Pannie, o czym wiedzieli już przecież Herschlowie. Vera Rubin i Gerard de Vaucouleurs ponownie odkryli pas supergalaktyczny. Nastąpiły i trwają do dziś dalsze odkrycia faktów nieznanych w czasach Herschlów.

Czy z tego płynie morał, że zasada brzytwy Ockhama jest błędna? – Raczej, że żadnej zasady metodologicznej nie można stosować automatycznie.

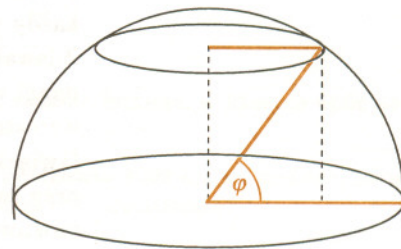


Rozwiązanie zadania F 469.

Musi to być równoleżnik krótszy od 24 000 km, gdyż tylko taki porusza się podczas obrotu Ziemi z prędkością mniejszą niż 1000 km na godzinę. Ponieważ równik ma 40 000 km i ponieważ stosunek długości okręgów jest równy stosunkowi ich promieni, więc z rysunku wynika, że

$$\cos \varphi < \frac{24}{40} = 0,6,$$

co daje szerokość geograficzną $\varphi > 53^\circ 08'$.



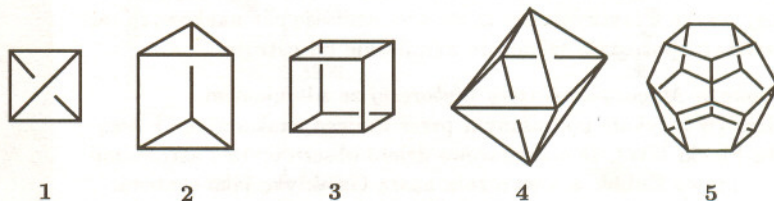
Samolot musi więc latać albo na północ od Torunia, albo na południe od Cieśniny Magellana. To jednak nie wystarczy. Nie może też przekroczyć południka 180° – dlaczego?

Helena DODZIUK

Wysokosymetryczne wielościany: tetrahedron (czworościan) **1**, trójpierzysian **2**, sześciian **3**, oktahedron (ośmiościan) **4** i dodekahedron (dwunastościan) **5** miały, według Platona, usabiać wyższą harmonię świata. Omawiał je również Pitagoras. Cóż, wydawałoby się, mogą mieć one wspólnego z chemią organiczną? A jednak.

Do wielościanów platońskich zalicza się zwyczajowo czworościan, sześciian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan (jedyne pięć wielościanów wypukłych, których wszystkie ściany są jednakowymi wielokątami foremnymi i w dodatku tyle samo ścian zbiega się przy każdym wierzchołku). Żądnych wiedzy odsyłamy do wcześniejszych numerów *Delty*, m.in. 5/1997.

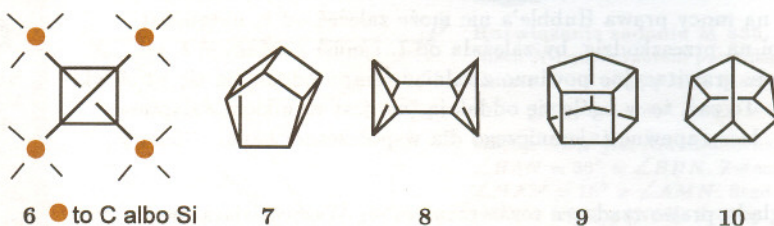
Red.



Do niedawna na podstawie bardzo licznych danych doświadczalnych przyjmowano, że podstawniki czterowiązalnego atomu węgla są rozmieszczone w narożach czworościanu. Nie mogło być więc mowy o cząsteczkach organicznych, których szkielet naśladowałby przynajmniej niektóre bryły Platona. Jednak ostatnio okazało się, że jest to możliwe. Cząsteczka tetrahedranu **1** (pokazana, jak to przyjęte w chemii, bez wiązań C-H) jest zbyt naprężona, by mogła być trwała, ale chemicy organicy zsyntetyzowali jego dwie pochodne **6**, które mają wszystkie atomy węgla podstawione dużym podstawnikiem.

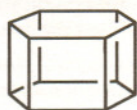
Otrzymano również trójpierzysian, kuban oraz po dwudziestu latach pracy dodekahedran, których szkielety węglowe odpowiadają wielościanom Platona. Było to możliwe dzięki burzliwemu rozwojowi metod syntezy cząsteczek organicznych, fizykochemicznych metod badania struktury cząsteczek, jak również metod teoretycznych, które pozwalają na ocenę możliwości istnienia trwałych hipotetycznych cząsteczek. Obok cząsteczek organicznych, których szkielety węglowe naśladowują platońskie bryły, znane są ich nieorganiczne odpowiedniki zbudowane np. z atomów krzemu, azotu i/lub fosforu.

Czterowiązalny atom węgla to atom o hybrydyzacji sp^3 (młodszym Czytelnikom mówiono o nim w szkole średniej). Terminy *mały podstawnik*, *duży podstawnik* należą do żargonu zwyczajowo używanego przez chemików. Mały podstawnik to np. atom wodoru, a duży podstawnik – np. grupa tert-butyłowa $C(CH_3)_3$.

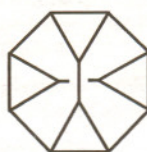


Cząsteczki **1–3** i **5** należą do grupy nasyconych węglowodorów klatkowych o wzorze ogólnym $C_{2n}H_{2n}$. Związki te zbudowane są z atomów węgla, z których każdy połączony jest z trzema atomami węgla i jednym atomem wodoru. Zdawałoby się, że warunek ten bardzo ogranicza liczbę możliwych izomerów dla danej wartości n . Okazuje się jednak, że liczba struktur gwałtownie rośnie ze wzrostem wartości n . Dla $n = 2$ i 3 istnieje tylko po jednej możliwej strukturze (związki **1** i **2**). Dla $n = 4$ obok kubanu **3** istnieje kunean **7** i oktabiswalen **8**, przy czym cząsteczki opisane wszystkimi tymi strukturami są znane. Dla $n = 5$ możliwych jest 9 różnych izomerycznych struktur, ale tylko pentapierzysian **9** i diademan **10** zostały zsyntetyzowane. Natomiast, mimo wielu prób, nie udało się otrzymać wysokosymetrycznych cząsteczek heksapierzysianu **11** i ściętego tetrahedranu **12**. Tak więc, jedynym znanym związkiem o wzorze sumarycznym $C_{12}H_{12}$ jest **13** pokazany na rysunku, dla większych n znane są jedynie

otrzymany po wieloletnich wysiłkach dodekahedron 5 oraz pagodan 14, oba o wzorze sumarycznym $C_{20}H_{20}$.



11



12



13



14

Po co w ogóle ludzie zajmują się syntezą i badaniem struktury takich związków? Wśród różnych powodów podejmowania takich badań nie najmniejsze znaczenie ma fascynacja ich pięknymi kształtami. Cząsteczki te stanowią swoiste wyzwanie dla chemika-syntetyka; z różnych przyczyn bardzo trudno je otrzymać. Kiedy uczeni próbują po raz pierwszy zsyntetyzować tak nietypowe cząsteczki, nic na ogół nie wiadomo o możliwości ich zastosowań, jednak często okazuje się, że mogą być one interesujące ze względów praktycznych. Kuban otrzymano po raz pierwszy w 1964 roku, ostatnio zaś ogłoszono, że przez długie lata armia amerykańska prowadziła badania tej wysokoenergetycznej cząsteczki i jej pochodnych podstawionych jedną lub kilkoma grupami nitrowymi, licząc na wykorzystanie jej np. w środkach wybuchowych. Niemal jednocześnie pojawiły się doniesienia o możliwości wykorzystania innych pochodnych kubanu jako leków antyrakowych lub wykazujących działanie przeciw AIDS. Reasumując można powiedzieć, że często tak niepraktyczne, wydawałoby się, przygody intelektualne, jak prace nad syntezą i własnościami związków o szkieletach węglowych naśladujących idealne bryły Platona mogą dość szybko znaleźć bardzo konkretne zastosowania praktyczne.



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 835. Punkty A , B , C , D leżą kolejno na prostej i $|AB| = |BC| = |CD|$. Punkt M jest określony przez warunki $\angle MAB = 45^\circ$ i $\angle MBC = 60^\circ$. Obliczyć rozwartość $\angle MDC$.

Rozwiązanie na str. 6

M 836. Udowodnić, że nie istnieją takie liczby dodatnie x_1, \dots, x_n , ($n \geq 3$), dla których równocześnie spełnione są równości

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i^2} = \frac{n-2}{n+1} \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)^2 x_i} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Rozwiązanie na str. 16

M 837. Niech q_n będzie liczbą elementów zbioru $\{2^1, 2^2, \dots, 2^n\}$ zaczynających się (w systemie dziesiętnym) cyfrą 1. Udowodnić, że ciąg $\left(\frac{q_n}{n}\right)$ jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

Rozwiązanie na str. 16

Przygotował Marek KORDOS

Tym razem fizykę reprezentować będą stare zadania lotnicze, w których opór powietrza pomijamy.

F 469. Samolot leci wzdłuż równoleżnika z prędkością 1000 km na godzinę, ze wschodu na zachód i posuwając się wstecz w czasie. Który to równoleżnik?

Rozwiązanie na str. 7

F 470. Samolot wystartował z punktu A , przeleciał 1000 km na południe, potem 1000 km na zachód, wreszcie 1000 km na północ i znalazł się z powrotem w punkcie A . Zlokalizować ten punkt.

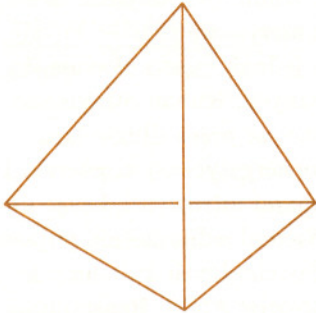
Rozwiązanie na str. 11



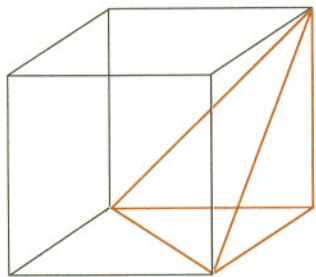


Wypełniamy przestrzeń

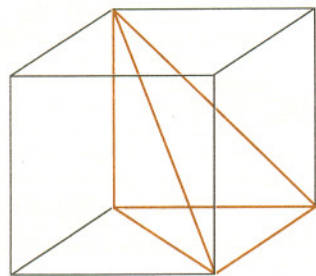
Pudełkami w kształcie czworościanu foremnego (rys. 1) ani w kształcie naroża sześciangu (rys. 2) nie da się szczelnie wypełnić przestrzeni. Powód jest prosty: kąty dwuścienne czworościanu to $\approx 70^\circ 33'$ – z takich kątów nie da się uskładać 360° , a taką przecież sumę powinny mieć kąty dwuścienne przy każdej krawędzi, gdyby udało się przestrzeń wypełnić. Podobnie, kąt dwuścienny przy dłuższych krawędziach naroża to $\approx 54^\circ 44'$, a to też nie pozwoli uskładać 360° nawet z pozostałymi kątami liczącymi po 90° .



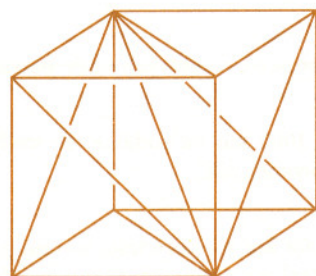
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

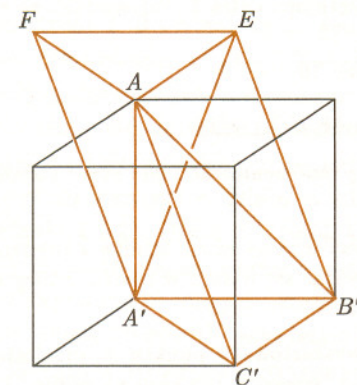


Rys. 4

Nadają się natomiast do wypełnienia przestrzeni pudełka w kształcie czworościanów Hilla, a konkretnie tego z rysunku 3, który nosi fachową nazwę $H_1(\frac{\pi}{4})$. Pozorny dowód tego faktu jest na rysunku 4. Pokazane jest tam rozbięcie sześciangu na sześć czworościanów $H_1(\frac{\pi}{4})$. Geometrycznie jest wszystko w porządku, wszystkie czworościany są przystające, a sześciangami przestrzeń daje się wypełnić. Natomiast z punktu widzenia kartonowych pudełek jest źle: czworościany z rysunku 4 to trzy jednakowe pudełka i trzy ich odbicia lustrzane.

Zły dowód nie oznacza, że twierdzenie jest fałszywe. Poprawny dowód daje rysunek 5. Z czworościanu $AA'B'C'$ przez obrót o 180° wokół prostej przechodzącej przez A' i środek odcinka AB' otrzymujemy czworościan $B'A'AE$, z niego zaś przez obrót o 180° wokół prostej przechodzącej przez A i środek odcinka $A'E$ otrzymujemy czworościan $FEAA'$. Obroty są, jak wiadomo, przekształceniami dostępnymi dla tekturowych pudełek (w odróżnieniu od odbić lustrzanych).

Ponieważ obrót o 180° przeprowadza każdy odcinek na równy i równoległy do niego, więc równe i równoległe są odcinki AC' , $B'E$ i FA' , stąd suma trzech czworościanów okazuje się graniastosłupem pochyłym o podstawie trójkątnej.



Rys. 5

Z takich graniastosłupów, stawiając jeden na drugim, robimy rury o przekroju trójkątnym, a tymi rurami wypełniamy przestrzeń w ten sam sposób, jak trójkątami wypełnia się płaszczyznę.

Znamy dzisiaj nieskończenie wiele kształtów pudełek czworościennych wypełniających przestrzeń, ale nie wiemy, czy jest to pełna lista (i wszyscy wierzą, że nie jest), więc pole do własnych poszukiwań pozostaje szeroko otwarte.

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.
2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 7 i 8 każdego roku).
3. Uczestnikiem ligi może być każdy.
4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delta*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.
5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n + 2$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1997 upłynął 31 stycznia 1998). Szkicowe rozwiązania podawane są w numerze $n + 4$.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednoznaczne rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przysyłają zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymują ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delta* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. 10, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy 44 punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44 M** lub **Klubu 44 F**.

14. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44 M** (lub **Klubu 44 F**) daje tytuł Weterana **Klubu 44 M** (**Klubu 44 F**).

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delta* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka.

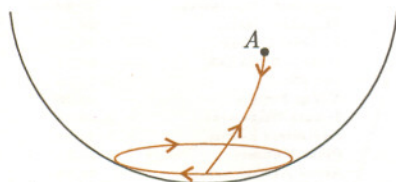
19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.

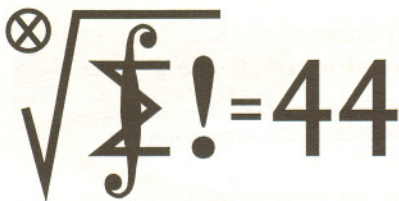


Rozwiązanie zadania F 470.

Każdy zgaduje od razu, że A to biegun północny. Nie jest to jednak jedyne rozwiązanie. Jako punkt A można też wziąć każdy z punktów półkuli południowej, który



leży o 1000 km na północ od równoleżnika mającego długość 1000 km (szerokość południowa $\approx 88^{\circ}34'$), lub 500 km, lub 250 km itd., słowem $\frac{1000}{n}$ km dla dowolnej liczby naturalnej n (obliczenie ciągu odpowiednich szerokości pozostawiamy Czytelnikom).



Zadania z matematyki nr 355, 356

Redaguje Marcin E. KUCZMA

355. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych (p, x, y) , w których p jest liczbą pierwszą, spełniające równanie $p^x - y^p = 1$.

356. Dana jest liczba naturalna n oraz trójkąt ABC , którego kąty są znane ($\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$). Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC , przy czym $|AD| = \frac{1}{n+1} \cdot |AB|$, $|AE| = \frac{1}{n+1} \cdot |AC|$. Punkty P_1, \dots, P_n leżą na boku BC , przy czym $|BP_1| = |P_1P_2| = \dots = |P_{n-1}P_n| = |P_nC| = \frac{1}{n+1} \cdot |BC|$. Obliczyć sumę $|\angle DP_1E| + |\angle DP_2E| + \dots + |\angle DP_nE|$.

Termin nadsyłania rozwiązań:

30 IV 1998

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1997

Przypominamy treść zadań:

347. Funkcje f i g są ciągle w przedziale $(0; 1)$ i różniczkowalne w punktach wewnętrznych tego przedziału. Dowieść, że dla pewnej pary liczb $x, y \in (0; 1)$ jest spełniona nierówność $(f(x) + g(y) + 4xy)^2 \geq 1$.

348. Niech n będzie liczbą naturalną. Obliczyć, ile jest liczb $(6n)$ -cyfrowych podzielnych przez 7, o wszystkich cyfrach nieparzystych (zapis dziesiętny).

347. Przyjmijmy oznaczenia: $f(0) = a$, $f(1) = b$, $g(0) = c$, $g(1) = d$; $F(x, y) = f(x) + g(y) + 4xy$; $F(0, 0) = A$, $F(0, 1) = B$, $F(1, 0) = C$, $F(1, 1) = D$. Zachodzi równość

$$A - B - C + D = (a + c) - (a + d) - (b + c) + (b + d) + 4 = 4,$$

z której wynika, że największa z liczb $A, -B, -C, D$ jest nie mniejsza niż 1. Zatem $\max\{A^2, B^2, C^2, D^2\} \geq 1$, i mamy tezę zadania. (Analityczne własności funkcji f i g , dane w założeniach, nie są do niczego potrzebne.)

348. Niech A będzie zbiorem liczb postaci

$$(1) \quad N = \sum_{i=0}^{6n-1} a_i \cdot 10^i, \quad \text{gdzie } a_i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Mamy wyznaczyć liczbę elementów zbioru

$A_0 = \{N \in A : N \equiv 0\}$; tu i dalej wszystkie kongruencje są brane (mod 7). Każdej liczbie N postaci (1) przyporządkujemy liczbę

$$f(N) = \sum_{i=0}^{6n-1} b_i \cdot 5^{6n-1-i}, \quad \text{gdzie } b_i = \frac{1}{2}(a_i - 1) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Określona w ten sposób funkcja f jest bijekcją zbioru A na zbiór $B = \{0, 1, 2, \dots, 5^{6n}-1\}$. W zbiorze B jest $\frac{1}{7}(5^{6n}-1) + 1$ (czyli $\frac{1}{7}(5^{6n}+6)$) liczb podzielnych przez 7; tworzą one zbiór $B_0 = \{M \in B : M \equiv 0\}$.

W arytmetyce (mod 7) mamy związki: $3^6 \equiv 5^6 \equiv 1$ oraz $3^i \equiv 5^{6n-i}$ (dla każdego i). Jeśli więc liczba $N \in A$ jest dana wzorem (1), to

$$\begin{aligned} N &\equiv \sum_{i=0}^{6n-1} a_i \cdot 3^i = \sum_{i=0}^{6n-1} (2b_i + 1) \cdot 3^i = 2 \sum_{i=0}^{6n-1} b_i \cdot 3^i + \frac{3^{6n}-1}{2} \equiv \\ &\equiv 2 \sum_{i=0}^{6n-1} b_i \cdot 5^{6n-i} = 2 \cdot 5 \cdot f(N) \equiv 3f(N). \end{aligned}$$

Zatem $N \in A_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(N) \in B_0$. Wniosek: zbiór A_0 liczy tyle samo elementów, co zbiór B_0 , czyli $\frac{1}{7}(5^{6n}+6)$.

Lista uczestników
ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 343 ($WT=1,32$) i 344 ($WT=2,65$)
z numeru 6/1997

Witold Bednorz	-	46,82
Przemysław Gadziński	-	5-45,35
Tomasz Rawlik	-	3-43,46
Adam Czornik	-	2-41,29
Krzysztof Zapisek	-	41,22
Maciej Mostowski	-	38,72
Tadeusz Józefczyk	-	2-38,10
Konrad Patkowski	-	36,27
Tomasz Kulpa	-	1-34,45
Zbigniew Galias	-	1-32,14
Witold Bednarek	-	30,43
Bogumiła Piotrowska	-	29,86
Zbigniew Skalik	-	26,19
Andrzej Dudek	-	26,04
Wojciech Maciak	-	25,46
Jan Ciach	-	5-24,98
Adam Józwiak	-	24,30
Janusz Olszewski	-	3-24,18
Kazimierz Serbin	-	3-23,34
Piotr Kumor	-	3-22,96
Artur Arciszewski	-	21,98
Michał Lewandowski	-	21,69
Rafał Pikula	-	21,35
Marcin Sawicki	-	21,20
Zbigniew Sewartowski	-	21,13
Mieczysław Jędrzejowski	-	21,10
Bartosz Putrycz	-	20,31

Legenda (przykładowo): stan konta 3-22,96 oznacza, że uczestnik już trzykrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (czwartej) rundzie ma 22,96 punktów.

W materiałach matematycznej ligi zadaniowej **Klubu 44** mamy zanotowane blisko 600 nazwisk: tyle osób włączyło się do zabawy (tak to nazywamy i traktujemy), przysyłając przynajmniej jeden raz rozwiązanie przynajmniej jednego zadania. Oczywiście, znaczna większość uczestników na tym nie poprzestała, a najwierniejsi uczestniczą nieprzerwanie od kilkunastu lat. Zresztą, niekoniecznie „nieprzerwanie”. Czasem ktoś zniknie z naszego pola widzenia, zdawałoby się, że na dobre, po czym, po latach przerwy, przysła rozwiązanie jakiegoś zadania, które mu szczególnie przypadło do gustu – i znów przystępuje do zabawy. Wcześniej uczestniczył jako uczeń lub student, teraz jako stateczny przedstawiciel zawodu często nie mającego nic wspólnego z matematyką – przysła listy z innego miasta, a bywa, że z innego kraju.

To znaczy, że nie rozstał się z nami na dobre, że nadal jest naszym wiernym czytelnikiem. Właśnie w minionym roku mieliśmy kilka takich przypadków wdzięcznego *come back*. Bardzo miłe są dla nas te sygnały pamięci.

Jak co roku, omawiamy poniżej rozwiązania istotnie odmienne (i zwykle ciekawsze) od naszych „firmowych”, a także znalezione uogólnienia.

Odnotowujemy ponadto te zadania, gdzie poprawne rozwiązania były bardzo nieliczne.

Dwóch uczestników w tej rundzie przekroczyło próg 44 punktów: W. Bednorz – po raz pierwszy, a Weteran P. Gadziński – po raz szósty(!).

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;

– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1995, 1996 lub 1997.

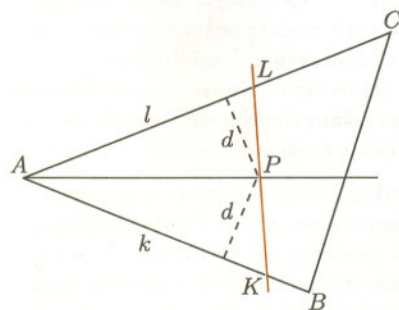
Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani **Klubu 44 M** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Galecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik, M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor, P. Gadziński (6), K. Jedziniak, J. Olszewski, L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie **Klubu 44 M** (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujących na liście powyżej): „dwukrotni”:

Z. Bartold, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Pióro, S. Solecki, J. Witkowski, G. Zakrzewski; „jednokrotni”:
T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, B. Dydą, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Łazuka, J. Mandziuk, M. Marczak, M. Matłęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, W. Olszewski, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawistawski, P. Żmijewski.



Zadanie 328. [Z – zbiór płaski; $\forall P \in Z: \#\{Q \in Z: |PQ| = r\} = 2, 1, 0$ odpowiednio dla $r < 1, r = 1, r > 1$; czy Z musi być okręgiem?] (współczynnik trudności $WT=3,23$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR=2$). **M. Mostowski** skonstruował ten sam kontrprzykład, co w rozwiązaniu firmowym. **P. Gadziński** wykazał, że połowę dowolnej elipsy mającej dostatecznie mały mimośród można uzupełnić do gładkiej krzywej zamkniętej Z o postulowanej własności.

Zadanie 330. [Liczba $N = \prod_{j=0}^{n-1} (2^n - 2^j)$ dzieli się przez $n!$] ($WT=2,17$; $LPR=12$).

Efektowny dowód algebraiczno-kombinatoryczny (nie odwołujący się do żadnych faktów z teorii liczb) przedstawiła **Monika Walkowiak**: N jest liczbą wszystkich macierzy nieosobliwych $n \times n$ nad ciałem dwuelementowym; wynika to stąd, że gdy j początkowych wierszy takiej macierzy zostało już wybrane, wówczas jest dokładnie $2^n - 2^j$ możliwości wyboru kolejnego wiersza, który byłby od nich liniowo niezależny. Macierze złożone z tych samych wierszy (z dokładnością do ich permutacji) można uważać za równoważne, a każda klasa równoważności ma moc $n!$; stąd teza.

Zadanie 334. [Ciąg o wyrazach $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+k} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k$ jest zbieżny] ($WT=3,28$;

$LPR=2$). W rozwiązaniu firmowym (będącym adaptacją rozwiązania podanego przez **M. Kasperskiego**, autora zadania) zostało wykazane, że granica ciągu (S_n)

jest równa $1 - \int_0^1 e^{1-1/y} dy$. **P. Gadziński** otrzymuje wynik w postaci innej całki:

$\lim S_n = \int_0^{\infty} (1+x)^{-1} e^{-x} dx$, porównując liczby S_n z sumami Riemanna tej całki na

ograniczonych przedziałach. (Sprawdzenie, że uzyskane wyniki są równe, nie jest łatwe!) W każdej z tych metod korzysta się, jawnie lub milcząco, z niebanalnych faktów z „uniwersyteckiej” analizy matematycznej. Na uwagę zasługuje więc znacznie prostsze rozwiązanie, które podał **W. Bednarek**:

Ponieważ $S_n = E_n T_n$, gdzie $E_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rightarrow e$, $T_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k$, wystarczy

wykazać, że ciąg (T_n) jest malejący – stąd wyniknie jego zbieżność, a tym samym również zbieżność ciągu (S_n). Nierówność $b^k - a^k < (b-a)kb^{k-1}$ (zachodząca dla liczb dodatnich $a < b$) daje oszacowanie

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k - \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \right] - \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < \\ &< \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k - \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n - \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \end{aligned}$$

a otrzymana różnica jest ujemna, co wynika z nierówności Bernoulliego $(1+\delta)^n > 1+n\delta$ dla $\delta = -(n+1)^{-2}$. („Elementarne, Watsonie”.)

Zadanie 335. [$\triangle ABC$: pole S , obwód $2p$; $K \in AB$, $L \in AC$; $|AK| = k$, $|AL| = l$; S' = pole $\triangle AKL$; prosta KL przechodzi przez środek koła wpisanego w $\triangle ABC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2pS' = (k+l)S$] ($WT=1,27$; $LPR=25$). Rozwiązanie firmowe było niepotrzebnie skomplikowane (rachunek na wektorach!). Przesłane rozwiązania są w większości znacznie prostsze: niech P będzie punktem przecięcia prostej KL z dwusieczną kąta A i niech d będzie odległością punktu P od prostych AB i AC ; wówczas $2S' = (k+l)d$, więc

$$\begin{aligned} 2pS' = (k+l)S &\iff S = pd \iff d = \text{promień koła wpisanego} \iff \\ &\iff P = \text{środek koła wpisanego}. \end{aligned}$$

Zadanie 338. [Dowieść, że $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} k^n = 0$] ($WT=1,97$; $LPR=15$). Przedstawiono

wiele dowodów tej nietrudnej tożsamości: różniczkowanie funkcji $(e^x - 1)^{2n}$ (jak w rozwiązaniu firmowym); różne dowody indukcyjne; argumenty kombinatoryczne. Każda z zastosowanych metod (także i ta z rozwiązania firmowego) daje po niewielkiej

modyfikacji rezultat nieco ogólniejszy: $\sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} k^n = 0$, jeśli $N > n$; zwrócili na to uwagę prawie wszyscy rozwiązujący.

[Wynik ten uzyskał już L. Euler (Novi Comm. Ac. Petrop. 13 (1768), 28–30).]



Zadanie 342. [Wielościan, który nie zawiera czworościanu o objętości 1, jest zawarty w czworościanie o objętości < 8] ($WT=2,94$; $LPR=4$). Uczestnicy ligi zostali tu (przez omyłkę, nie celowo) „wpuszczeni w maliny”: teza nie jest prawdziwa! (Staje się prawdziwa, gdy liczbę 8 zastąpić przez 27 – ale to już inne zadanie; komentarz w numerze 9/1997.) Błąd zauważyli: **W. Bednorz, P. Gadziński, P. Kumor, T. Rawlik.**

Zadanie 344. [$A = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2/a_{n+1} : 1 = a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots > 0 \}$; $\inf A = ?$] ($WT=2,65$; $LPR=6$). **P. Gadziński** oraz **P. Żmijewski** przystali rozwiązania nie różniące się istotnie od firmowego. **W. Bednarek, W. Bednorz** oraz **P. Kumor** przystali rozwiązania oparte na lemacie:

$$a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n > 0 \implies \sum_{i=0}^n \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \geq 2^{\alpha_n} a_0, \quad \text{gdzie } \alpha_n = 2 - 2^{1-n};$$

lemat łatwo udowodnić przez indukcję. Zatem suma każdego z rozpatrywanych szeregów ($z a_0 = 1$) jest ≥ 4 ; ciąg $a_n = 2^{-n}$ generuje sumę równą 4, więc $\inf A = 4$. Autorzy rozwiązań tą metodą zwrócili uwagę, że zadanie jest prawie identyczne z jednym z zadań z XXIII Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, a cytowany lemat można znaleźć w opracowaniach zadań z owej olimpiady. . .

Całkiem odmienne, intrygujące oryginalnością pomysłu rozwiązanie przysłała **Paulina Domagalska**: niech (a_n) będzie ciągiem nierosnącym ($a_0 = 1$), dla którego szereg $\sum b_n$ o wyrazach $b_n = a_n^2/a_{n+1}$ jest zbieżny; wówczas także szereg $\sum a_n$ jest zbieżny (kryterium porównawcze: $b_n \geq a_n$). Niech $s_n = a_0 + \dots + a_n$, $w_n = b_0 + \dots + b_n$; $s_n \rightarrow s$, $w_n \rightarrow w$. Ustalmy n . Średnia arytmetyczna ważona liczb $c_i = a_{i+1}$ ($i = 0, \dots, n$) branych odpowiednio z wagami $p_i = a_i/s_n$ jest nie mniejsza niż średnia harmoniczna tych liczb (z tymi samymi wagami): $\sum p_i c_i \geq (\sum p_i c_i^{-1})^{-1}$. Ta nierówność po prostym przekształceniu przybiera postać:

$$w_n \geq \frac{s_n^2}{s_{n+1} - 1}; \quad \text{w granicy: } w \geq \frac{s^2}{s-1} \geq 4;$$

ostatnia nierówność ($s^2 \geq 4s - 4$, czyli $(s-2)^2 \geq 0$) jest oczywista. Dla $a_n = 2^{-n}$ mamy $w = 4$, więc $\inf A = 4$. Ładnie!

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F po 241 zadaniach

Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	39,32
Zbigniew Galias	– Kraków	36,75
Dariusz Wilk	– Rzeszów	25,57
Jarosław Łazuka	– Warszawa	1-21,27
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	1-17,37
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	1-17,05
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	1-16,69
Jacek Konieczny	– Poznań	8,47
Ryszard Zimny	– Żychlin	7,40

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1995–1997 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 7 punktów. Jedynek przed kreską wskazuje, że uczestnik zdobył już raz 44 punkty i obecnie wykonuje drugie okrążenie.

Pozostali członkowie **Klubu 44 F** (alfabetycznie; liczby w nawiasach oznaczają wielokrotność przekroczenia 44 punktów):

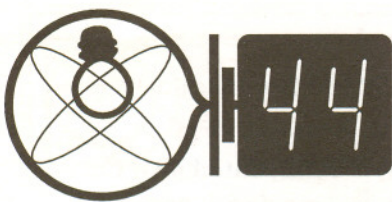
P. Bała (3), A. Borowski (1),
A. Gluza (1), P. Gworys (3),
W. Kacprzak (1), J. Lipkowski (2),
D. Lipniacki (3), B. Mikieliewicz (1),
L. Motyka (1), R. Musiał (1),
P. Perkowski (2), T. Rawlik (1),
R. Repucha (1), A. Sikorski (3),
J. Stelmach (1), A. Surma (3),
L. Szalast (1), P. Wach (1),
T. Wietecha (2).

Oto najważniejsze uwagi nasuwające się przy lekturze listów naszych Czytelników:

Zadanie 223. [Równowaga względem przechyłu różnych pływających brył] (współczynnik trudności $WT=3,28$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR=1$). Bezбłędne rozwiązanie punktu b (równowaga pionowego walca) podał p. **A. Idzik**. Jak się okazało, do wyniku podanego w *Delcie* 1/1997 wkradła się pomyłka (zamiast prawidłowej liczby 2 pod pierwiastkiem jest 6). W liście innego Czytelnika przeczytałem: „Aby prostopadłościan znajdował się w stanie równowagi trwałej, jego energia potencjalna przy wychyleniu powinna wzrosnąć”. W rzeczywistości wzrosnąć powinna *łączna energia potencjalna bryły i cieczy*; analiza minimum tej łącznej energii była alternatywną wobec „wzorcowej” metodą rozwiązania.

Zadanie 234. [Po jakim czasie spadnie kuleczka wosku, gdy bryłę metalu ogrzewać z drugiego końca?] ($WT=3,57$, $LPR=0$). Fizyczne warunki zadania były niedoprecyzowane, co spowodowało pewne zamieszanie. Jeden z Czytelników przyjął założenie o jednakowej temperaturze metalu i wprowadził dodatkową stałą opisującą przekazywanie ciepła od płomienia do metalu. Takie rozwiązanie mogłoby być poprawne tylko przy niewielkich rozmiarach bryły i jej bardzo dobrym przewodnictwie (zostało ocenione na 0,5). Nieco niższą ocenę (0,3) uzyskało rozwiązanie oparte na dziwnym założeniu, że ciepło jest przekazywane tylko na granie wosku.

Zadanie 235. [Krystalizacja w gorącym roztworze cukru na skutek dolania zimnej wody] ($WT=1,15$, $LPR=4$). Wyniki liczbowe uzyskane przez pp. **P. Gadzińskiego, A. Idzika, J. Łazukę** i **A. Nowogrodzkiego** dość znacznie się różnią między sobą, a także od wyniku „wzorcowego”, co należy przypisać trudnościom przy precyzyjnym nakreśleniu na wykresie stycznej lub siecznej, ewentualnie także przesunięciu koloru na stronie naszego czasopisma.

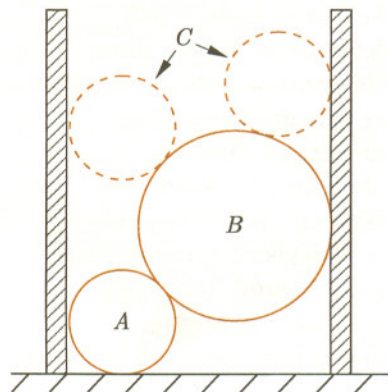


Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 1998

252. Jednorodny wydrążony walec o wewnętrznym promieniu c i zewnętrznym d stoi na poziomej powierzchni, a do jego środka włożono dwie gładkie kule A i B (rys. 1) o masach m_A i m_B oraz promieniach a i b , przy czym $a < b$, $c < a + b$.

- a) Obliczyć minimalną masę walca, przy której się on nie przewróci.
b) Do walca włożono trzecią kulę C , identyczną z A . Biorąc pod uwagę oba możliwe położenia tej kuli (zob. rysunek; zakładamy, że A i C się nie zetkną), obliczyć minimalną masę walca m , przy której się on nie przewróci.

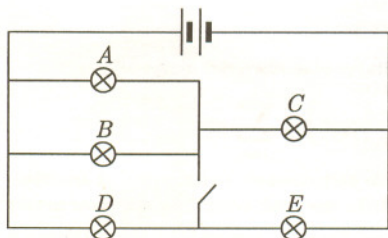
253. Jak wiadomo, dla gazów składających się z cząsteczek jednoatomowych ciepło molowe w stałej objętości C_V jest w przybliżeniu równe $(3/2)R$, natomiast dla gazów dwuatomowych $C_V \approx (5/2)R$. Przybliżenie to nie jest jednak dobre w temperaturach bardzo niskich, gdyż wtedy obroty cząsteczek ulegają „zamrożeniu” i pozostają tylko ruchy wzdłuż trzech osi przestrzennych, co odpowiada $C_V \approx (3/2)R$ (niezależnie od liczby atomów w cząsteczce). Przyjmijmy więc dla uproszczenia, że gaz jest doskonały (ściśle spełnia równanie $pV = nRT$), a wartość C_V wynosi $(3/2)R$ poniżej pewnej nieznannej temperatury T' i $(5/2)R$ powyżej tej temperatury. Stwierdzono, że gdy rozpoczynając od pewnej objętości V_0 i ciśnienia p_0 ogrzano ten gaz izochorycznie zwiększając ciśnienie do $3p_0$, po czym rozprężono adiabatycznie do początkowej wartości ciśnienia, objętość okazała się równa $2V_0$; powracając do punktu początkowego na drodze przemiany izobarycznej zamykamy cykl. Obliczyć sprawność tego cyklu (podać wartość liczbową).



Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1997

Przypominamy treść zadań:



Rys. 2

244. Źródło dźwięku harmonicznego o stałej częstotliwości f_0 spada pionowo z przyspieszeniem $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ i w chwili t_0 mija z prędkością v_0 nieruchomy mikrofon, który o $t = 5 \text{ s}$ wcześniej odebrał dźwięk o częstotliwości $f_1 = 1200 \text{ Hz}$, a o t później (w chwili „symetrycznej” względem t_0) odebrał dźwięk o częstotliwości $f_2 = 800 \text{ Hz}$. Obliczyć f_0 i v_0 . Prędkość dźwięku w powietrzu jest równa $c = 340 \text{ m/s}$.

245. W przedstawionym obwodzie (rys. 2) żarówki są jednakowe. Jak zareagują (i czy zareagują) na zamknięcie klucza?



244. Oznaczmy czas lotu źródła dźwięku od wysłania pierwszego sygnału (odebranego przez mikrofon w chwili $t_0 - t$) do minięcia mikrofonu przez t_1 , a od minięcia mikrofonu do wysłania drugiego sygnału – przez t_2 . W ciągu czasu t_1 źródło obniży się o odcinek h_1 , gdzie

$$h_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = c(t_1 - t).$$

Rozwiązując równanie kwadratowe znajdujemy

$$t_1 = \frac{1}{g} \left(-(c - v_0) + \sqrt{(c - v_0)^2 + 2gct} \right)$$

i analogicznie

$$t_2 = \frac{1}{g} \left(-(c + v_0) + \sqrt{(c + v_0)^2 + 2gct} \right).$$

W chwili wysłania pierwszego sygnału źródło porusza się z prędkością $v_0 - gt_1$, a w chwili wysłania drugiego – z prędkością $v_0 + gt_2$. Ze wzorów na zjawisko Dopplera mamy

$$f_1 = f_0 \frac{c}{c - v_0 + gt_1}, \quad f_2 = f_0 \frac{c}{c + v_0 + gt_2}.$$

Przekształcenia algebraiczne prowadzą do rozwiązania

$$v_0 = c \left(\varphi - \sqrt{\varphi^2 - \tau - 1} \right), \quad \text{gdzie: } \varphi = \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2 - f_2^2}, \quad \tau = \frac{2gt}{c},$$

$$f_0 = \frac{2f_1 f_2}{\sqrt{f_1^2 - f_2^2}} \sqrt{\frac{v_0}{c}}.$$

Podstawiając dane obliczamy $v_0 = 88,7 \text{ m/s}$, $f_0 = 1096 \text{ Hz}$.

245. Przed otwarciem klucza przez każdą z żarówek A i B płynął prąd mniejszy niż przez C , a zatem i napięcie na nich było mniejsze. Przy danej na rysunku biegunowości źródła napięcia oznacza to, że potencjał górnego bieguna klucza (węzła ABC) był wyższy od potencjału dolnego bieguna (węzła DE). Przez zamknięty klucz prąd popłynie więc w dół, a to z kolei spowoduje – jak wynika z praw Kirchhoffa – przygaśnięcie żarówek C i D , a rozjarzenie żarówek A , B i E .

Ogólna Teoria Względności przewiduje, że gwałtowne zmiany pola grawitacyjnego powinny rozchodzić się w przestrzeni jako tzw. fale grawitacyjne. Źródłem każdego impulsu tych fal mogłoby być np. zapadnięcie się jądra masywnej gwiazdy w początkowej fazie wybuchu supernowej. Zaobserwowanie impulsu fal grawitacyjnych byłoby wydarzeniem niewątpliwie bardzo ważnym dla fizyki.

Pierwszej próby detekcji fal grawitacyjnych dokonał w 1968 r. amerykański fizyk J. Weber. Jako „anteny grawitacyjne” zastosował on kilkumetrowe walce aluminiowe delikatnie zawieszono w komorach próżniowych dla wyeliminowania wpływu wszelkich zewnętrznych drgań. Fala grawitacyjna miała w tych walcach wzbudzić drgania – mierzalne, choć o amplitudzie nie większej niż rozmiary atomu! Drgania wzbudzone niemal jednocześnie w kilku walcach dowodziłyby przejścia przez Ziemię fali grawitacyjnej. Prace Webera przyniosły wynik

w zasadzie pozytywny, a jednak nikt ich dotychczas nie potwierdził.

Tymczasem dwie amerykańskie politechniki, Caltech oraz MIT, zaplanowały budowę dwóch nowych detektorów fal grawitacyjnych – tzw. projekt LIGO, czyli Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory. Każdy z nich to dwa prostopadłe usytuowane, czterokilometrowe tunele, a fala grawitacyjna miałaby deformować w nich „linie proste”, co pokazałyby biegnące w nich promienie lasera. Kłopot w tym, że całe przedsięwzięcie zapowiada się jako bardzo drogie. Budowa i eksploatacja miałyby do roku 2001 kosztować 365 mln dolarów. Nic dziwnego, że są czynniki przeciwne temu projektowi. Tylko czy to tak drogo? Przecież jest to raptem 365 Nagród Nobla. Tak czy inaczej sytuacja w dziedzinie obserwacji fal grawitacyjnych nie jest jasna i nie wiadomo, jak długo tak jeszcze będzie.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania M 836.

Przypuśćmy przeciwnie, że istnieją takie liczby. Wówczas dodając obie równości otrzymujemy

$$\frac{2n}{n+1} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)^2 x_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2 x_i} \right) \geq \sum_{i=1}^n \frac{2}{i(i+1)} = \frac{2n}{n+1}$$

Ostatnią równość łatwo udowodnić indukcyjnie. Nierówność to zastosowanie twierdzenia, iż średnia arytmetyczna jest nie mniejsza od geometrycznej. Aby więc była równość, sumy obu szeregów muszą być równe, czyli musi być $\frac{n-2}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$, a to jest niemożliwe. Zatem przypuszczenie było fałszywe, co kończy dowód.



Rozwiązanie zadania M 837.

Liczba 2^n zaczyna się cyfrą 1, gdy dla pewnej liczby naturalnej k mamy $10^k \leq 2^n < 2 \cdot 10^k$, czyli po zlogarytmowaniu $k \leq n \log_{10} 2 < k + \log_{10} 2$. Ponieważ dla każdego k dokładnie jeden wyraz ciągu – arytmetycznego! – $(n \log_{10} 2)$ zawiera się w przedziale $(k, k + \log_{10} 2)$, więc $q_n = [n \log_{10} 2]$. Mamy $\log_{10} 2 < 1$, zatem możemy skorzystać z oszacowania

$$n\alpha - 1 < [n\alpha] < n\alpha, \text{ z którego wynika, że } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{q_n}{n} \right) = \log_{10} 2.$$

Luty

W lutowe wieczory w południowej stronie nieba widać Oriona, gwiazdozbiór uchodzący za najwspanialszy na całym niebie. Rzeczywiście, układ jego gwiazd wyjątkowo łatwo zapada w pamięć. Cały jego obszar (i okolice) wypełniony jest skłębionymi obłokami materii międzygwiazdowej, przy czym gołym okiem widać jedynie najjaśniejszy fragment tych obłoków, Wielką Mgławicę Oriona. W kierunku tego gwiazdozbioru ciągnie się też jedno z ramion spiralnych naszej Galaktyki, na brzegu którego znajduje się Słońce. Otoczenie Oriona też jest efektowne: u góry po prawej gwiazdozbiór Byka zawierający stosunkowo bliskie gromady otwarte gwiazd, Plejady i Hiady, a u dołu po lewej Wielki Pies,

którego najjaśniejsza gwiazda, Syriusz, jest zarazem najjaśniejszą gwiazdą całego nieba. Syriusz słynie też z posiadania małego, słabego towarzysza, białego karła, jednej z najwcześniej poznanych gwiazd tego typu.

Wieczorem z planet widać tylko Saturna w Rybach, w zachodniej stronie nieba. Wenus znajduje się w Strzelcu i widać ją pięknie rano, a około 20 II osiąga maksimum blasku. Mars i Jowisz są dość blisko siebie w Wodniku, ale za blisko Słońca, by było je widać. Pełnia Księżycy wypada 11 II, a nów 26 II i nastąpi wtedy całkowite zaćmienie Słońca, które jednak w Polsce widoczne nie będzie. Księżyc zbliży się mocno do Saturna 1 II i do Marsa 27 II.

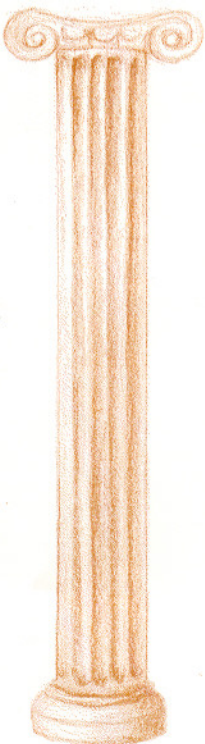
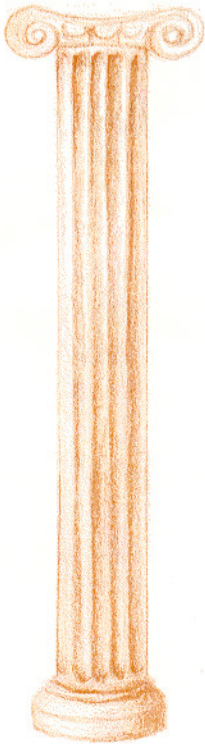
T.K.

CYFROMANIA (2)

Rozwiążemy teraz zadanie podane w poprzednim numerze Γ-limatiasu. Rozwiązanie sprowadza się do odpowiedzi na pytanie: Czy liczba 1998-cyfrowa złożona z jedynek i dwójek może dzielić się przez 2^{1998} ?

Okazuje się, że tak, przy czym jest tylko jedna taka liczba! Popatrzymy najpierw na krótsze końcówki o podobnej

... 222211212222122112221122212122121221111111111222111121212121221212
 1112122112122122221222121221122222111111212111222122121121112121121222
 22211221211112222211211221111221221222222122112121222111112121122121122
 21212112122111111212221222222121221222221212221222112221111121211111
 2122112111222222221221212111211221222112221121221121212222212122222122
 212221212122221211212211111111112221112211121222221221121211112212
 1112112221121211121212221211111122121222212211221222111222221222
 1112222211221222211221212121111112112122111121211112211111221121212
 221222121121122221112211121221222212212122221221111111212222212112121
 22121122122212222212211212222112211122212122222121222112112211111
 11211122222121112112122112221212112121112221111122212111121122121
 211221121212122111121121222121221122122221122122222111212111122212
 12122211211121121121121221122111221221221111111111212212221222
 22211121112111221212222111221212211212221211111111112222211222
 121211222212111211212211122121221112211221122112212222122211212121
 1122221112222221112222211121221112221222221222211221111122112212
 1122221212111222121221122121212122112211221122111111111212111121
 1212222121212121222212211221122221222221222122212121112111121121
 1222111112112222222112222212112211212112221212222211111211212212
 2112112122222121211212222211212122122222112112222121222121121112122
 12212122111212211221212212212211211211122212111122121212112222
 212221122211211222122122211121212111211222211212122111211212121
 2112222212122212112122221211222212112222211221212212112122222111
 2121221222122112122221221221221221221221221221221221221221221221
 112112121211122221112122112112222112221212111121212212212121121112
 1212111111212122221221122212212221212212212211221221221212112111
 211122222112221221121112121212121121122112121121121122122212122211
 21211122212122121211212112112112112112112112112112112122122112



Tak więc potęgi dwójki, których 1998-cyfrowa końcówka składa się tylko z cyfr 1 i 2, istnieją i jest ich nieskończenie wiele. Przy tym każda z nich ma taką końcówkę jak podana wyżej.

JWR

MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (1')

Wyjaśnienie oszustwa (1):
 Niezwykle często pojawiający się błąd polegający na niezrozumieniu istoty indukcji jest następujący: Sprawdziliśmy prawdziwość dowodzonego twierdzenia $T(n)$ dla $n = 1$ i udowodniliśmy drugi krok indukcyjny (czyli implikację $T(n) \Rightarrow T(n + 1)$) dla $n \geq 5$.

Pytanie: Dla jakich n mamy w tym momencie udowodnione twierdzenie $T(n)$?

Odpowiedź: Dla $n \geq 5$? NIE !!! Tylko dla $n = 1$!
 Popatrzymy na schemat:

1 2 3 4 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 8 \Rightarrow 9 \Rightarrow 10...

Sprawdziliśmy, że zachodzi $T(1)$ i pokazaliśmy implikację

własności. Końcówka jednocyfrowa podzielna przez 2^1 i złożona tylko z jedynek i dwójek to 2. Nie dzieli się ona przez 2^2 , ale dopisując na początku cyfrę 1 otrzymujemy końcówkę 2-cyfrową 12 podzielną przez 2^2 . 12 dzieli się przez 2^3 z resztą 2^2 , podobnie jak 100. Zatem 112 podzielne przez 2^3 jest żadaną końcówką 3-cyfrową. 112 dzieli się także przez 2^4 . Nie chcemy popsuć tej podzielności przez napisanie na początku jedynki, dopisanie dwójki daje właściwą końcówkę 4-cyfrową. I tak dalej...

Jeżeli $2^k | r_k$ i $0 < r_k < 10^k$ jest końcówką k -cyfrową, to r_k dzieli się przez 2^{k+1} z resztą 2^k , wtedy $r_{k+1} = 10^k + r_k$ (dopisanie na początku jedynki), lub bez reszty i wtedy $r_{k+1} = 2 \cdot 10^k + r_k$ (dopisanie na początku dwójki).

Obliczenia wykonane przy użyciu komputera wskazują, że 1998-cyfrowa końcówka jest równa:

$T(5) \Rightarrow T(6), T(6) \Rightarrow T(7), T(7) \Rightarrow T(8), \dots$ Ale z tych implikacji nie będzie żadnego pożytku, dopóki nie stwierdzimy, że $T(5)$ jest prawdą. W tym przypadku sprawdzenie twierdzenia dla $n = 5$ spełnia rolę pierwszego kroku indukcyjnego. Bez tego dowód indukcyjny jest bezwartościowy. W naszym zadaniu $T(n)$ oznacza nierówność

$$(*) \quad 30n < 2^n + 110,$$

która dla $n = 5$ i $n = 6$ jest fałszywa. Dla $n = 7$ mamy $210 < 128 + 110 = 238$. Dopiero teraz możemy zaprząć do pracy udowodnione implikacje $T(7) \Rightarrow T(8), T(8) \Rightarrow T(9), T(9) \Rightarrow T(10), \dots$ i stwierdzić, że nierówność (*) jest prawdziwa dla wszystkich $n \geq 7$, co wykazaliśmy indukcyjnie (a także dla $n = 1, 2, 3, 4$, co sprawdziliśmy bezpośrednio w poprzednim numerze Γ-limatiasu).

JWR