



Trwa jubileusz XXV lat *Delty*:

6 czerwca 1973 roku powołano redakcję *Delty*,  
8 grudnia odbyło się pierwsze posiedzenie Komitetu Redakcyjnego  
*Delty*, na którym przedstawiono próbny numer miesięcznika,  
1 stycznia 1974 roku ukazał się w kioskach w nakładzie 30 tys.  
egzemplarzy, w cenie 5 zł, pierwszy numer *Delty*.

XXV lat powinien zamknąć numer 300 miesięcznika, jednak w okresie parcelacji RSW straciliśmy pięć numerów, tak więc numer taki ukaże się jako 5/1999.

Składając Czytelnikom najserdeczniejsze jubileuszowe życzenia, informujemy, iż od czerwca 1998 do maja 1999 w każdym numerze przypomniemy coś z dawnych lat.

Ten okazjonalny dział nazywać się będzie **Stara Delta**.

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 6(289)

Kot Hawkinga: żywy czy martwy? <i>Marek A. Abramowicz</i> i <i>Marcus J. Percival</i>	str. 1
Zadania	str. 5
Równanie Fokkera-Plancka, czyli pytanie o naturę czasu <i>Karol Pesz</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str. 9
Zadanie o ruinie gracza	str.10
Czy liczby rzeczywiste są rzeczywiste? <i>Roman Sikorski</i>	str.11
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Czerwiec	str.16
Gammalimatias	str.17

**W następnym numerze:**

**Dobrego nigdy za wiele**

Okładki i ilustracje wykonała  
*Anna Ludwicka*

Wybór artykułów z *Delty*  
ukazuje się w języku angielskim  
w sieci Internet pod adresem  
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:  
Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr**

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego  
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,  
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.  
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:  
Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichoński  
– wiceprzewodniczący  
Krzysztof Ciesielski  
Jan A. Gaj  
Piotr Goldstein  
Tomasz Hofmokl  
Andrzej Hrynkiewicz  
Wiesław A. Kamiński  
Marta Kicińska-Habior  
Krzysztof Maślanka  
Andrzej Mąkowski  
Zdzisław Pogoda  
Feliiks Przytycki  
Michał Różyczka  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz Sitariski  
Andrzej Woszczyk  
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
Wiktor Bartol  
Krzysztof Biesaga  
Wojciech Kopczyński – z-ca red. naczk.  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. naczk.  
Tomasz Kwast  
Anna Ludwicka  
Anna Rudnik  
Paweł Strzelecki  
Joanna Udalska  
Anna Wojtyra  
Piotr Zalewski  
Adres Redakcji:  
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa  
tel. 843-02-41(-2) wewn. 21  
PAWELST@MIMUW.EDU.PL  
Wydrukowano  
w Drukarni Naukowo-Technicznej  
w Warszawie, ul. Mińska 65.  
Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)  
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres  
prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena  
jednego numeru w 1998 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie  
okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)  
cena numeru w 1998 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą  
odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje  
dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

#### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1998 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe  
„Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa  
egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się  
pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej.  
Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A.  
XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa,  
ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>.  
Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem  
zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą,  
realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem  
otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A.  
Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71  
wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także  
tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numerzy archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.  
Niestety, nie dysponujemy już numerami z lat 1974–1984.



# Kot Hawkinga: żywy czy martwy?

Marek A. ABRAMOWICZ i Marcus J. PERCIVAL

Skrócona wersja tego artykułu ukazała się w szwedzkim miesięczniku *Forskning och framsteg* w numerze 12/1997.

W końcu dziewiętnastego wieku fizycy sądzili, że wszystkie podstawowe prawa przyrody zostały już odkryte, a przyszłym pokoleniom pozostaje jedynie prawa te objaśniać i nieco poprawiać. A jednak, odkrycia dokonane w pierwszych kilku latach dwudziestego wieku obaliły ten pogląd i całkowicie zmieniły sposób widzenia przyrody przez fizyków. W roku 1900 Max Planck uznał za możliwe, że energia światła może być wysyłana i pochłaniana wyłącznie małymi porcjami, które dziś nazywamy kwantami. Był to ważny krok w kierunku zrozumienia, że nie w przyrodzie nie może być dzielone *ad infinitum* na coraz to mniejsze części, materia zaś i energia składa się z niepodzielnych kwantów. Kwanty te są niewiarygodnie małe, tak małe, że w codziennym życiu nie ma znaczenia, iż ich rozmiar jest większy od zera. A jednak dla przyrody to ma znaczenie.

W roku 1905 hipoteza kwantów światła została użyta przez Alberta Einsteina do olśniewającego wyjaśnienia zjawiska fotoelektrycznego. Einstein nazwał kwanty światła fotonami. W roku 1913 Niels Bohr skorzystał z pojęcia fotonów, aby wyjaśnić układ linii widmowych światła wysyłanego przez atom wodoru. W taki sposób narodziła się mechanika kwantowa. W roku 1905 Einstein dokonał jeszcze jednego odkrycia, zbierając swe poglądy na czas, przestrzeń i ruch w monumentalnym dziele – szczególnej teorii względności (STW). STW i mechanika kwantowa zostały mocno powiązane w ramach relatywistycznej mechaniki kwantowej w pracach Wolfganga Pauliego, Paula Diraca, Wernera Heisenberga i innych. Zapoczątkowało to proces intelektualny, który zdominował rozwój fizyki w naszym stuleciu, a mianowicie wielką unifikację w poglądach fizyków na całą przyrodę. Wielu fizyków wierzy, że obecnie, u końca tego wieku, unifikacja ta jest prawie zupełna, a od ostatecznego sukcesu dzieli nas tylko krok. Tylko grawitacja nie została jeszcze połączona z ideami kwantowymi, a przez to z resztą fizyki. Klasyczne (tutaj znaczy to: jeszcze nie kwantowe) rozumienie grawitacji opiera się na innym epokowym osiągnięciu Alberta Einsteina – na ogólnej teorii względności (OTW). Teorię kwantowej grawitacji trzeba jeszcze odkryć.

## Mechanika kwantowa

W przeszłości uczeni często wyrażali odmienne opinie co do natury światła. Jedni, idąc za poglądem dobitnie wyrażanym przez Izaaka Newtona, uznawali, że światło składa się z cząstek, inni zaś akceptowali

pogląd Christiaana Huygensa, który opowiadał się za falami. Dzisiaj wiemy, że w rzeczywistości jest tak, iż światło może być zarówno falą, jak i zbiorem cząstek. Ta charakterystyczna dla światła dualność jest uznawana przez mechanikę kwantową za jedną z podstawowych własności przyrody. Przy czym, dzięki Louisowi de Broglie wiadomo, że ta schizofreniczna własność dotyczy nie tylko światła, lecz *wszelkiej materii*. A więc elektrony i inne *cząstki* elementarne zachowują się w określonych doświadczeniach jak *fale*. Ale jeśli elektron jest falą, to nie może zajmować określonego miejsca w danej chwili, lecz musi być w pewnej mierze wszędzie, jak to fale mają w zwyczaju. Gdzie więc tak naprawdę jest elektron? Według mechaniki kwantowej nie możemy jednoznacznie powiedzieć, gdzie jest elektron, lecz możemy obliczyć, ile wynosi *prawdopodobieństwo*, że elektron w określonej chwili znajdzie się w określonym miejscu. Równanie rządzące tym rozkładem prawdopodobieństwa zostało wprowadzone przez Erwina Schrödingera. Matematycznie rozwiązania tego równania opisują superpozycję fal zwanych *stanami własnymi*. Różne stany własne odpowiadają różnym możliwościom tego, co może się z elektronem wydarzyć. A więc istota rzeczy opisanej przez stany własne równania Schrödingera jest w jakiejś mierze niepewna, ponieważ znamy jedynie superpozycję możliwości, nie wiedząc przy tym, która z nich istotnie zachodzi. Także doświadczenia nie mogą dać jednoznacznego wyniku. Niepewności ich wyniku nie można uczynić mniejszej, niż wynika to ze słynnej zasady nieoznaczoności Wernera Heisenberga.

Większość fizyków sądzi, że stany własne równania falowego Schrödingera mogą opisać wszystkie istotne aspekty fizycznej rzeczywistości. O tej rzeczywistości uzyskujemy wiedzę, wykonując doświadczenia. Zanim nie dokonamy pomiaru, nie możemy być pewni tych aspektów rzeczywistości, które ma określić ten pomiar – istnieje więc wtedy jednocześnie wiele możliwości odpowiadających różnym stanom własnym. Ale gdy pomiar jest już przeprowadzony, to jesteśmy *pewni* jego wyniku – czyli pomiar usuwa nasz brak wiedzy o stanie rzeczy. Odpowiednio, fala Schrödingera musi ulec redukcji – nie może wszak już odpowiadać zbiorowisku wszelkich możliwych stanów własnych, lecz musi odpowiadać temu *szczególnemu* stanowi własnemu, który opisuje wynik pomiaru. Rzeczy są takie, za jakie je mamy, ale dopiero po dokonaniu obserwacji.



## Doświadczenie z kotem Schrödingera

Bohr, de Broglie, Dirac, Heisenberg i Pauli, gdy dokonywali swych najważniejszych dla fizyki kwantowej odkryć, byli ludźmi zdecydowanie młodymi, powiedzmy sobie – chłopcami – w wieku dwudziestu kilku lat. Mechanika kwantowa była ich wspaniałą zabawą, a o chłopcach wiadomo, że uwielbiają bawić się i eksperymentować z kotami. Schrödinger, który jako jedyny przekroczył wtedy trzydzieści lat, wyobraził sobie kota zamkniętego w pudełku. Pudełko to zawierało śmiertcionośne urządzenie – kapsułkę z trującym gazem. Porcja gazu była wdmuchiwana do pudełka zawsze wtedy, gdy rozpadał się atom substancji radioaktywnej, która też była umieszczona w pudełku. Porcja ta wystarczała do natychmiastowego zabicia kota, po czym gaz stawał się nieszkodliwy. Tak wyglądał pomysł tej zabawy. Według mechaniki kwantowej niemożliwe jest dokładne określenie chwili, w której następuje rozpad radioaktywny. Ale możemy tak dobrać ilość substancji, że w ciągu np. jednej godziny prawdopodobieństwo tego, że nastąpił dokładnie jeden rozpad, wynosi 50 %. Po upływie jednej godziny od czasu zamknięcia kota w pudełku stawiamy pytanie, czy kot jest żywy, czy martwy. Zanim nie otworzymy pudełka, rozwiązanie równania Schrödingera jest superpozycją dwóch możliwych stanów własnych:

$$\left| \begin{array}{l} \text{atom się nie rozpadł,} \\ \text{kot jest żywy} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{l} \text{atom się rozpadł,} \\ \text{kot jest martwy} \end{array} \right\rangle.$$

Nie ma sposobu odseparowania tych stanów, gdy pudełko jest zamknięte. Więc jeśli się zgodzimy, że równanie Schrödingera opisuje wszystkie istotne elementy rzeczywistości w zaistniałej sytuacji, to musimy się zgodzić również z tym, że kot w pudełku żyje, a jednocześnie jest martwy!

Ktoś może teraz zaprotestować: „Stop, czy nie jest *oczywiste*, że jeśli zamknę kota w pudełku i potem nie oglądam go przez chwilę, to tak czy owak nie będę umiał powiedzieć, czy kot jeszcze jest żywy, czy już martwy. Po co mieszać do tego mechanikę kwantową, równanie Schrödingera i tajemnicze stany własne?”. Odpowiedź na tę wątpliwość jest taka, że sprawa z kotem nie dotyczy prawdopodobieństw, ale jego rzeczywistego stanu. Mechanika kwantowa nie mówi, że „istnieje 50 % szans, iż kot jest żywy i 50 % szans, że jest martwy”, ale że *w istocie* dwa różne stany nakładają się. Czy to nie jest nonsens, który świadczy o tym, że cała mechanika kwantowa wpadła w pułapkę; bo przecież Einstein zwykł mawiać: *Der Herr Gott würfelt nicht* – Pan Bóg nie gra w kości. Czy też znaczy to, że – jak zasugerował Hugh Everett III – kwantowe niepewności rozszczepiają prawdziwą istotę bytów na wiele niezależnie istniejących bytów odpowiadających rozmaitym stanom własnym; wtedy w połowie z tych niezależnie istniejących wielu światów kot byłby żywy, a w drugiej połowie byłby

martwy. A może jest tak, że całe złożone otoczenie pudełka powoduje niespójność kwantowych stanów własnych – pogląd taki przedstawił Wojtek Żurek. Nikt nie jest pewny, jak powinna wyglądać właściwa odpowiedź, a cała ta sprawa irytuje wielkich fizyków o poglądach pragmatycznych; np. Stephen Hawking mówi: „Gdy słyszę o kocie Schrödingera, odbezpieczam rewolwer”. Większość fizyków uważa obecnie, że ponieważ konwencjonalna interpretacja mechaniki kwantowej została sprawdzona w licznych doświadczeniach z wysoką dokładnością, to *powinniśmy* traktować poważnie jej wskazania. Ale musimy przy tym pamiętać, że historia dowodzi, iż większość się często myli. Przyjmując konwencjonalną interpretację doświadczenia z kotem Schrödingera, dochodzimy do wniosku, że dwa stany własne są *istotnie* nałożone.

W powyższej dyskusji nie braliśmy pod uwagę, że kot może mieć dziewięć (lub ogólniej  $N$ ) żyć. Proponujemy więc naszym Czytelnikom niewielkie zadanie: przyjmując, że kot ma  $N$  żyć, obliczyć jak długo należy trzymać kota w pudełku (urządzenie jest takie samo, jak opisane w tekście), aby otrzymać mieszaninę stanów [kot żywy] i [kot martwy] dokładnie pół na pół. Dla autora najlepszej odpowiedzi na to pytanie autorzy fundują małą nagrodę pod warunkiem, że odpowiedź dotrze do redakcji przed 1 stycznia 1999 roku.

Oczywiście, *po* otwarciu pudełka i sprawdzeniu stanu kota fala Schrödingera ulegnie redukcji. Wtedy dozwolony jest już tylko jeden stan własny kota, mieszanina dwóch stanów nie jest możliwa; mamy więc rozłącznie: albo [atom się nie rozpadł, kot jest żywy], albo też (jeśli kot był z rodzaju nieszczęśliwych) [atom się rozpadł, kot jest martwy].

## Czarne dziury: supermasywne, gwiazdowe, mini i wirtualne

OTW była godnym uwagi osiągnięciem geniuszu Einsteina i zabrała mu dziesięć lat ciężkiej pracy. Jest to teoria geometryczna, która wyjaśnia grawitację jako przejaw krzywizny czasoprzestrzeni. Jednym z jej zdumiewających wskazań jest istnienie czarnych dziur. Dopiero od niedawna możemy mówić z dużą wiarygodnością, że czarne dziury rzeczywiście istnieją. To bowiem w ostatnich latach astronomowie znaleźli na niebie obiekty wysokoenergetyczne, które nie mogą być niczym innym niż czarnymi dziurami. Wniosek ten uzyskano stosunkowo niedawno, gdyż przedtem nie dysponowano dostatecznie zaawansowanym technologicznie sprzętem, który pozwoliłby na zebranie istotnych danych obserwacyjnych. Obecnie sprzęt taki istnieje: satelity zbierające dane o źródłach promieni X, teleskop kosmiczny Hubble'a i kilka wielkich radioteleskopów na Ziemi. Energia promieniowana przez obiekty astronomiczne zawierające czarne dziury z pewnością *nie* powstaje w czarnych dziurach. Pochodzi ona z energii grawitacyjnej uwalnianej w procesie spadania materii na czarną dziurę.



Astronomowie obserwują kandydatki na czarne dziury w dwóch przedziałach mas. Mówią w związku z tym albo o *czarnych dziurach o masie gwiazdowej*, tj. takich, których masy w przybliżeniu są dziesięć razy większe od masy Słońca, lub o *supermasywnych czarnych dziurach*, których masy są miliony do miliardów razy większe od masy Słońca. Jest możliwe, że istnieją *mini czarne dziury* – o masach mniejszych od masy Słońca, lecz odkrycie ich jest raczej niemożliwe za pomocą obecnie istniejącej technologii. Z tego powodu nie ma obserwacyjnych argumentów ani za ich istnieniem, ani przeciw.

Czarne dziury o masach gwiazdowych znaleziono w kilku układach podwójnych w naszej własnej Galaktyce. Należą one do najsilniejszych źródeł promieni X na niebie. Typowy rozmiar takiej czarnej dziury wynosi około 30 km. Supermasywne czarne dziury są rozmieszczone w niektórych odległych galaktykach. Grają one rolę centralnych silników kwazarów i innych aktywnych jąder galaktyk, będących najsilniejszymi źródłami energii we Wszechświecie. Ich typowe rozmiary wahają się od  $10^6$  km do  $10^9$  km. Dla porównania, odległość Ziemi od Słońca wynosi  $1,5 \cdot 10^8$  km.

### Trzy szczególne własności czarnych dziur

będą istotne w naszej dyskusji:

(1) Zewnętrzny obserwator, obserwujący obiekt wpadający do czarnej dziury, nigdy nie doczeka się jego wpadnięcia, musiałby bowiem czekać na to *nieskończony* czas. Nikt nie ma aż tyle czasu na czekanie. Z drugiej strony obiektowi wpadającemu swobodnie (tzn. tylko pod wpływem grawitacji) do czarnej dziury zajmie to wpadanie *skończony* czas – tak wskażą zegary umieszczone na tym obiekcie. Przykładowo, w układzie planetarnym takim jak nasz, ze Słońcem zastąpionym Czarną Dziurą o jego masie, swobodne spadanie z Ziemi na Czarną Dziurę (start z zerową prędkością) zajęłoby – według zegara podróżnika – około roku. Według zaś zegarów ziemskich trwałoby to wieczność. Dla tych, którzy pożegnali podróżnika i pozostali na Ziemi, pozostawałby on w zasadzie *zawsze widoczny na zewnątrz* Czarnej Dziury.

(2) Każdy obiekt materialny (a zwłaszcza nasz podróżnik), który wpadł do czarnej dziury, po skończonym czasie według wskazań własnych zegarów będzie zupełnie zniszczony. Nie chodzi tu o to, że będzie uszkodzony, ale *zupełnie zniszczony* – jego istnienie dobiegnie końca. Nie pomoże nawet dziewięć żyć. I zajdzie to dość szybko: obiekt zakończy swe istnienie po około  $10^{-4}$  s po wpadnięciu do czarnej dziury o masie gwiazdowej lub po czasie rzędu minut lub dni w przypadku supermasywnej czarnej dziury. Żaden obiekt, który wpadł do czarnej dziury, nie może się z niej wydostać.

(3) Wszystkie czarne dziury promieniają. Tego ważnego odkrycia dokonał Stephen Hawking, który na podstawie połączonych pojęć mechaniki kwantowej, OTW i termodynamiki głęboko uzasadnił, że efekty kwantowe zmuszają czarną dziurę do promieniowania. Wykazał on też, że im mniejsza (tj. mniej masywna) jest czarna dziura, tym szybciej promieniuje. Lecz to, że szybciej, wcale nie oznacza, że szybko; promieniowanie Hawkinga jest niewiarygodnie powolnym procesem dla astronomicznych czarnych dziur. Hipotetyczna mini czarna dziura o masie porównywalnej z masą dużej ziemskiej góry (w przybliżeniu miliard ton) potrzebuje całego czasu istnienia świata (od Wielkiego Wybuchu do chwili obecnej), aby zupełnie wypromieniować swą masę i przez to całkowicie zniknąć. Czas potrzebny na wyparowanie czarnej dziury jest proporcjonalny do trzeciej potęgi jej masy. Ponieważ czarne dziury o masach gwiazdowych są  $10^{19}$  razy bardziej masywne od gór, wyparowywałyby one po czasie odpowiednio dłuższym: dokładnie  $(10^{19})^3 = 10^{57}$  razy dłuższym niż obecny wiek Wszechświata. Rzecz jasna, jest to czas absurdalnie długi, a nauka płynąca z tych rachunków jest następująca: promieniowanie Hawkinga jest *całkiem nieistotne* dla czarnych dziur o masach gwiazdowych i supermasywnych. Astronomiczne czarne dziury są istotnie czarne, nie promieniają one w żaden zauważalny sposób. Ale dla hipotetycznych mini czarnych dziur o masie góry promieniowanie Hawkinga jest istotne. Mogłoby zatem być tak, że w przyrodzie jest pełno skrajnie małych *wirtualnych czarnych dziur*, dla których promieniowanie Hawkinga jest procesem przeważającym. Jeśli by tak było, to promieniowanie Hawkinga byłoby jednym z najbardziej podstawowych i powszechnych procesów w przyrodzie.

### Próżnia współczesnej fizyki nie jest pusta

Zasada nieoznaczoności Heisenberga dopuszcza spontaniczne powstawanie w próżni cząstek. Zgodnie z tą zasadą im bardziej energetyczne (bardziej masywne) są te cząstki, tym krócej żyją. Wirtualne czarne dziury mogłyby także spontanicznie powstawać, a następnie ginąć. Najbardziej typową masą takiej wirtualnej czarnej dziury jest masa Plancka  $m_{p1} = 2,2 \cdot 10^{-8}$  kg. Odpowiednio, typowy ich rozmiar określa długość Plancka  $l_{p1} = 1,6 \cdot 10^{-35}$  m, a czas życia jest rzędu czasu Plancka  $t_{p1} = 5,4 \cdot 10^{-44}$  s. Mogłoby być tak, że na najbardziej podstawowym poziomie przyrody próżnia jest pełna tych wirtualnych czarnych dziur – nosi to nazwę piany czasoprzestrzennej. Piana ta nie wpływałaby na własności czasoprzestrzeni w skalach dużo większych od długości i czasu Plancka, lecz miałaby istotne znaczenie na poziomie sub-planckowskim. Hawking zasugerował w jednym ze swych ostatnich artykułów, że „duża” czarna dziura po wyparowaniu nie znika



całkowicie. Zamiast tego jej rozmiar kurczy się do długości Plancka i w rezultacie staje się ona kroplą w oceanie wirtualnych czarnych dziur. Można porównać pianę czasoprzestrzenną z morzem piłeczek pingpongowych. Gdy obserwuje się je z pewnej odległości, wydaje się ono gładką, sfalowaną powierzchnią. Fale w tej analogii odpowiadają wielkoskalowej krzywiznie czasoprzestrzeni. Bliższe zbadanie morza pokazuje jednak, że jego powierzchnia wcale nie jest gładka, ale wyraźnie zakrzywiona w skali odpowiadającej promieniowi piłeczki.

## Doświadczenie z kotem Hawkinga

Wyobraźmy sobie dr. Hawkinga (jest to osoba fikcyjna, nie mająca nic wspólnego z kimkolwiek), który patrzy, jak jego kot skacze do czarnej dziury. Koty są niezwykle dociekliwe i często robią rzeczy tego typu. Z punktu widzenia dr. Hawkinga kot jest stale widoczny na zewnątrz czarnej dziury. Ale w końcowym efekcie wszystkie czarne dziury powinny wyparować na skutek promieniowania Hawkinga. Nie jest tu istotne, że wyparowywanie to może trwać absurdalnie długo, ważne jest, iż trwać to będzie *skończony* czas – rozważamy wszak problem z punktu widzenia podstawowych zasad. Gdy ostatnia fala promieniowania Hawkinga mija dr. Hawkinga, sytuacja wydaje się bardzo prosta. Dr. Hawking wciąż widzi kota, ale kot jest teraz w przestrzeni bez czarnej dziury i jej pola grawitacyjnego. Zatem dr. Hawking może poprosić (np. za pomocą telefonu komórkowego) kota o powrót. Z punktu widzenia dr. Hawkinga *nie istnieje* żaden zasadniczy powód, dla którego kot miałby nie powrócić. Lecz kot opowiedziałby (jeśli martwy kot mógłby mówić) tę historię całkiem inaczej: on wpadł do czarnej dziury i został unicestwiony dokładnie minutę później. Zauważył to na swoim zegarze.

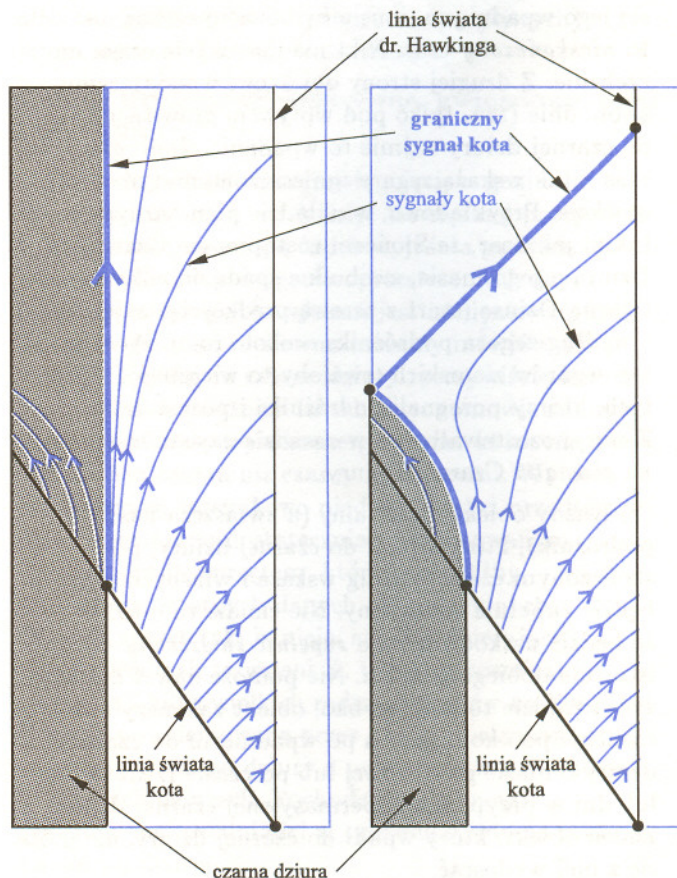
Test dla naszych Czytelników: jaka była masa tej czarnej dziury?

A więc według dr. Hawkinga kot żyje, według zaś samego kota – nie. Wypada zatem spytać, jak jest naprawdę: kot żyje, czy też nie?

Chociaż pytanie to wygląda na podobne do pytania postawionego w przypadku doświadczenia z kotem Schrödingera, występuje tu istotna różnica: u podstaw doświadczenia z kotem Schrödingera leżą zjawiska kwantowe, a w przypadku kota Hawkinga – klasyczne. W przypadku kota Hawkinga nie ma superpozycji stanów własnych rozwiązujących równanie Schrödingera typu  $|\text{żywy kot Hawkinga}\rangle + |\text{martwy kot Hawkinga}\rangle$ . Rozważania nasze dotyczą natomiast skomplikowanej sytuacji wywołanej promieniowaniem czarnych dziur. Analizę przeprowadzamy w dwóch różnych układach odniesienia: za pierwszym razem w układzie dr. Hawkinga, za drugim razem w układzie kota. Analizowanie tej samej sytuacji z punktu widzenia

kilku układów odniesienia jest typowe zarówno w STW, jak i w OTW. Czasami prowadzi to do paradoksów. Spowodowane są one niepoprawnym rozumowaniem opartym zazwyczaj na naszej nierelatywistycznej intuicji. Dobrze znanym przykładem jest tu paradoks bliźniąt. Z drugiej strony, paradoksy prawdziwie kwantowe – jak ten z kotem Schrödingera – odzwierciedlają prawdziwie głęboką i dziwną strukturę przyrody.

W przypadku doświadczenia z kotem Hawkinga prawidłowa jest analiza kota, analiza dr. Hawkinga taka nie jest. Kot dr. Hawkinga istotnie nie żyje. Poprawna analiza sytuacji jest dość złożona matematycznie i zależy od tego, czy wyparowująca czarna dziura znika całkowicie, czy też łączy się w skali Plancka z pianą wirtualnych czarnych dziur. W pierwszym przypadku (łatwiejszym do przeanalizowania) można zastosować przemyślną metodę Rogera Penrose'a (zwaną diagramem Penrose'a), czyli narysować rodzaj mapy całej czasoprzestrzeni zawierającej wyparowującą czarną dziurę. Na mapie tej historii kota i jego właściciela, a także wszelkie promienie świetlne reprezentowane byłyby przez linie. Rozmiar parującej czarnej dziury zmniejsza się w pewnej chwili do punktu. Jest to *ostatnie* zdarzenie w historii czarnej dziury. Diagram Penrose'a pokazuje, że sygnał świetlny wysłany dokładnie z tego zdarzenia z pewnością dotrze do dr. Hawkinga.





Oznacza to, że dr Hawking widzi, iż kot wchodzi do czarnej dziury dokładnie w ostatniej chwili jej istnienia. Czyli jest tak, jak być powinno: z punktu widzenia dr. Hawkinga kot nigdy nie wpadł do czarnej dziury, ale też nie jest w stanie powrócić. Dr Hawking zauważył, że kot znikł wraz z ostatnim rozbłyskiem promieniowania Hawkinga. Może nawet podejrzewać, że to *promieniowanie Hawkinga zabiło kota*.

Rozmaite wersje tego doświadczenia były dyskutowane w kilku uniwersytetach w późnych latach siedemdziesiątych, zwłaszcza zaś na Uniwersytecie Teksaskim w Austin przez Wojtkę Żurka, Johna Archibalda Wheelera i Marka Abramowicza, który pierwszy odpowiedział poprawnie na pytanie „czy kot żyje, czy też nie”. W roku 1992 wymyślił on fikcyjnego dr. Hawkinga i jego kota, będącego odpowiednikiem kota Schrödingera, w celu lepszego wyjaśnienia swej czternastoletniej córce Weronice różnicy między klasycznym a prawdziwie kwantowym paradoksem.

### Czy nowa fizyka potrzebuje nowych kotów?

Na początku naszego wieku fizycy zmienili swój sposób widzenia świata: z deterministycznego na kwantowy i z absolutnego na relatywistyczny. Ten punkt widzenia stał się obowiązującą prawdą

przez cały wiek dwudziesty. Niektórzy fizycy są obecnie przekonani, podobnie jak byli przekonani ich poprzednicy u schyłku dziewiętnastego wieku (pozostając, rzecz jasna, w kręgu innych idei), że wystarczy tylko ustalić, czym jest kwantowa grawitacja – stosując teorię strun lub inny udany pomysł – i już będziemy mieć **TEORIĘ WSZYSTKIEGO**, a więc nic fundamentalnie ważnego w fizyce nie pozostanie już do odkrycia dla przyszłych pokoleń. Fizycy ci mogą mieć rację, lecz może też być tak, że świat w swojej istocie jest niewyobrażalnie bogatszy niż świat opisywany przez mechanikę kwantową i teorię względności: *Istnieją rzeczy na niebie i na ziemi, o których nie śniło się naszym filozofom*. Możliwe, że przyszłość przyniesie nam zadziwiające niespodzianki – idee, o których nie jesteśmy w stanie obecnie pomyśleć. Być może nowe pokolenia wspaniałych młodych ludzi znów stworzą swą własną *chłopięcą fizykę* – inną niż nasza. Czy znów narażą oni nowe pokolenia kotów na śmiertelne niebezpieczeństwo paradoksalnych doświadczeń?

*Z angielskiego przetłumaczył W.K.*



## Zadania

*Redaguje Łukasz WIECHECKI*

**M 847.** Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , spełniające równanie  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  dla wszystkich  $x, y \in \mathbf{R}$ .

Rozwiązanie na str. 15

**M 848.** Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , spełniające równanie

$$f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

dla wszystkich  $x, y \in (1, +\infty)$ .

Rozwiązanie na str. 11

**M 849.** Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe  $f: (-1, +\infty) \rightarrow (-1, +\infty)$ , takie że

$$(*) \quad f(x+y+xy) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$$

dla wszystkich  $x, y \in (-1, \infty)$ .

Rozwiązanie na str. 12

*Redaguje Ewa CZUCHRY*

**F 477.** W nowoczesnych aparatach fotograficznych używa się błon fotograficznych o rozmiarze jednej klatki  $24 \times 36$  mm. Aparaty te są standardowo wyposażone w tzw. obiektywy normalne o ogniskowej 50 mm, co daje kąt widzenia  $47^\circ$  i obraz porównywalny z widzianym przez ludzkie oko. Jaka była ogniskowa obiektywów normalnych do starych aparatów na płyty szklane o rozmiarach  $9 \times 12$  cm?

Rozwiązanie na str. 12

**F 478.** Jasność obiektywu określa się przez stosunek średnicy otworu przesłony do ogniskowej. W pewnych typach obiektywów o zmiennej ogniskowej największy możliwy otwór przesłony jest taki sam dla wszystkich ustawień ogniskowej. Jak zmienia się jasność w takiego typu obiektywie o ogniskowej 70–200 mm?

Rozwiązanie na str. 13





Karol PESZ

Zadziwiająco wiele jest podobieństw między mechaniką kwantową a termodynamiką. Z jednej strony, stwierdzenie to może wydać się mało odkrywcze, wręcz puste. Przecież w obu dziedzinach mamy do rozgrzyzenia podobny problem: jak opisać zachowanie układów o wielkiej – w granicy nieskończonej, jak mówimy – liczbie stopni swobody. Z drugiej strony, przynajmniej na obecnym etapie rozwoju nauki, pokrewieństwo mechaniki kwantowej i termodynamiki istotnie jest zadziwiające.

O analogiach w zachowaniu układów termodynamicznych i kwantowych napisano całe tomy. My weźmy pod uwagę dwa modelowe obiekty: pojedynczą swobodną cząstkę kwantową oraz cząstkę Browna w cieczy. Mamy tu do czynienia z różnicą skal wielkości znacznie przekraczającą przysłowiową różnicę między „mrówką a słoniem”. A jednak dynamika tych obiektów wykazuje podobieństwo, z którego konsekwencji, być może, ciągle nie zdajemy sobie w pełni sprawy.

Ktoś zapyta: jakże to? Przecież pojedyncza cząstka kwantowa to „fala materii”, to „duszek” ulotnie wypełniający fragment przestrzeni, to obiekt bardziej zadziwiający niż UFO, istniejący jednocześnie „tu” i „tam” tak długo, dopóki go nie usiłujemy „zobaczyć”. Jeśli się już uda w sprytnie pomyślanym eksperymencie tego rozmytego duszka złowić, to łapiemy go całego „tu”. „Tam” jakby go wcale nie było lub też plotki o skończonej prędkości światła są nieprawdziwe.

Natomiast pojedyncza cząstka Browna powoli wędrująca przez niezmierzone (nawet w skali jednej kropli) obszary cieczy to maleńki, co prawda, acz solidny obiekt. Można go śledzić, można z dowolną dokładnością wyrysować jego trajektorię. Zawsze wreszcie można powiedzieć, że cząstka jest w tym i tylko w tym jednym miejscu, w którym ją widać. Taka drobina nie cierpi na „roz-n-jenie jaźni” (przy  $n = 2$  – rozdzielenie).

Przy obecnym rozumieniu pojęć: *cząstka, przestrzeń, czas*, cząstka kwantowa i cząstka Browna są więc zupełnie różnymi obiektami.

Ufając (podobnie jak Newton) w to, że równania różniczkowe rzeczywiście opisują świat, spójrzmy na losy obu niespokojnych wędrowców poprzez odpowiednie równania ruchu. Podobnie jak w przytłaczającej liczbie rozważań o charakterze podstawowym ograniczymy się do jednego wymiaru. Póki nie interesujemy się efektami specjalnymi powodowanymi przez wymiar przestrzeni (jak np. spin), modele jednowymiarowe funkcjonują zadziwiająco dobrze.

Cząstka kwantowa o masie  $m$  opisana jest równaniem Schrödingera

$$(1) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2},$$

gdzie  $\Psi(x, t)$  jest *funkcją falową*, interpretowaną jako amplituda gęstości prawdopodobieństwa, tzn. prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w chwili  $t$  w przedziale  $(a, b)$  to całka  $\int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx$ . Zatem na samym początku rezygnujemy z możliwości wskazania miejsca, w którym w danej chwili *na pewno* znajduje się cząstka. Wprowadzona *ad hoc* amplituda gęstości prawdopodobieństwa jest pojęciem wątpliwym. Jednak cząstka punktowa jest również tworem idealnym, o czym nazbyt często zapominamy, spotykając skale małości, na których nasze doświadczenie życiowe i indukowana nim wyobraźnia zawodzą. Czasami fizycy unikają tego problemu wprowadzając pojęcie pola, ale to jest tylko przesunięcie trudności.

Cząstka Browna porusza się pod wpływem pola siłowego, ustawicznie zmieniającego wielkość i kierunek. Przypadkowo uderzające w brownowskiego gościa cząsteczki cieczy chaotycznie modyfikują jego położenie i pęd (spróbujcie dodać podobne założenie swobodnej cząstce kwantowej – kto Wam w to uwierzy?). Dlatego nie możemy deterministycznie określić jej położenia i pędu nawet w niezbyt odległej przyszłości. Możemy za to podać prawdopodobieństwo znalezienia jej w pewnej chwili i w pewnym miejscu. Tym razem jednak równanie, określające takie prawdopodobieństwo, możemy wyprowadzić w stosunkowo prosty sposób.

Rozpatrzmy cząstkę, która startuje z pewnego miejsca na prostej i wykonuje co pewien odstęp czasu  $\Delta t$  krok długości  $\Delta x$  w prawo z prawdopodobieństwem  $p$ , a taki sam krok w lewo z prawdopodobieństwem  $(1 - p)$ . (Podobne zdanie znajdzie Czytelnik w większości podręczników termodynamiki statystycznej.) Nie możemy powiedzieć, gdzie znajdzie się błądząca cząstka po  $N$  skokach, czyli po czasie  $N\Delta t$ ; nie wiemy nawet, czy będzie na prawo, czy też na lewo od punktu startu. Możemy jednak napisać relację, wiążącą prawdopodobieństwo  $p$  z gęstością prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w chwili  $(t + \Delta t)$  w punkcie  $x$ , jeśli wiadomo, że w chwili  $t$  była oddalona od tego punktu o  $\Delta x$ . Oznaczając gęstość prawdopodobieństwa przez  $f(x, t)$ , stwierdzamy, że

$$(2) \quad \begin{aligned} f(x, t + \Delta t) &= \\ &= p \cdot f(x - \Delta x, t) + (1 - p) \cdot f(x + \Delta x, t). \end{aligned}$$



Znalezienie wzoru na  $f(x, t)$  na podstawie tego równania nie wygląda na zadanie łatwe. Przeważnie wprowadzamy kolejne, często spotykane założenie. Przypuśćmy, że skoki są krótkie i odbywają się szybko (innymi słowy,  $\Delta t$  i  $\Delta x$  są małe). Załóżmy, że funkcja  $f$  ma ciągle pochodne cząstkowe i rozłóżmy ją w szereg Taylora. Zatrzymując wyrazy najniższego rzędu oraz przyjmując  $p = 0,5$  (co oznacza, że cząstka nie ma tendencji, by skakać częściej w jedną stronę, powiedzmy – w prawo), dostaniemy równanie postaci

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

gdzie dla ustalonych  $\Delta x$  i  $\Delta t$  wielkość  $D$  ma dobrą określoną wartość

$$(4) \quad D = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$$

i wymiar współczynnika dyfuzji ( $\frac{m^2}{s}$ ).

Tak więc, jeśli zaniedbamy wszelkie siły zachowawcze, które mogłyby z premedytacją kierować cząstkę w jedną stronę, to gęstość prawdopodobieństwa spełnia równanie przewodnictwa cieplnego. Jest to szczególnie przypadek równania Fokkera–Plancka.

Pod tą nazwą można w literaturze spotkać najprzeróżniejsze równania. Jeśli, zamiast rozpatrywać przypadek swobodny, założymy obecność deterministycznej siły  $F$ , to otrzymalibyśmy równanie

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}(f \cdot F),$$

które powinno się nazywać równaniem Smoluchowskiego. Najbardziej klasyczne „równanie Fokkera–Plancka” opisuje gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki o prędkości  $v$ , w miejscu  $x$  i chwili  $t$ . Zważywszy jednak, że w bardzo poważnych czasopiśmie naukowych nazwa *równanie Schrödingera* określa często bardzo różne napisy – nie będziemy drobiazgowi.

Stwierdzenie, że ... *równanie Fokkera–Plancka jest dla termodynamiki tym, czym dla mechaniki kwantowej równanie Schrödingera*, można często spotkać w podręcznikach (zob. np. [1]). Luźna analogia to jednak nie wszystko.

Od równania Fokkera–Plancka (3) do równania Schrödingera (1) można przejść formalnie, zamieniając czas „termodynamiczny”  $t$  na czas czysto urojony  $it$ , i następnie korzystając z zasady nieoznaczoności:

$$(6) \quad D = \lim \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \lim \Delta x \cdot \Delta v \approx \frac{\hbar}{2m}.$$

Rozwiązania pierwszego równania stają się po podstawieniach  $t \mapsto it$  rozwiązaniami drugiego równania. Zmienia się tylko interpretacja.

W swoich *Wykładach* [3] Feynman stwierdził, że „*takie same równania mają takie same rozwiązania*”. Na

tym, między innymi, polega piękno fizyki: kilka podstawowych równań opisuje, jeśli nie dokładnie, to przynajmniej z grubsza, niewyobrażalną ilość efektów. Znając dokonania tego fizyka (lub choćby jego *Wykłady*), możemy się domyślać, jak głęboko Feynman zdawał sobie sprawę, że formalne podobieństwo rozwiązań jest – gdy zapomnieć o zbędnej masce różnych parametrów, warunków granicznych i pozornie odległych sytuacji fizycznych – echem podstawowych mechanizmów, którymi rządzi się przyroda.

Równanie Fokkera–Plancka pojawia się wszędzie tam, gdzie w czasowym przebiegu zjawisk nie można ustrzec się szumu. Spotykamy je w najróżniejszych dziedzinach fizyki, chemii, techniki: szum w obwodach elektrycznych; układy chemiczne, w których reakcje i dyfuzja wzajemnie na siebie wpływają; okołoprologowa akcja laserowa; przejścia fazowe – mają ze sobą więcej wspólnego, niż można oczekiwać na pierwszy rzut oka. We wszystkich wspomnianych układach jest obecny ten sam fundamentalny mechanizm: fluktuacje, które towarzyszą przejściu układu z jednego stanu w inny. Mają one uniwersalny charakter, więc i równanie, które je elegancko uwzględnia, jest uniwersalne.

Wróćmy do relacji (6). Napisał ją Michał Zak z Pasadeny w niezwykle interesującym artykule o pewnym układzie deterministycznych równań, które zaburzone dowolnie małym szumem prowadzą do rozwiązań chaotycznych [2]. Też go pewnie zadziwiła bliskość dwu probabilistycznych obrazów, w których zamiana czasu „rzeczywistego” na „urojony” przeprowadza nas przez furtkę w murze dzielącym termodynamikę od mechaniki kwantowej. Zak podejrzewa, że wyjaśnienia należy szukać w szczególnej teorii względności: czas traci w niej swoją odrębność, a zamiast „trajektorii przestrzennej cząstki” możemy rozpatrywać „ciąg zdarzeń”. W tym samym numerze czasopisma *Chaos, Solitons & Fractals* jego twórca i redaktor, El Nashie z Cambridge, wielki zwolennik zespolonego czasu, jeszcze raz przywołuje Hawkinga, który *pierwszy miał odwagę zasugerować, że urojony czas może być w istocie czasem „rzeczywistym”*.

Dla wielu fizyków te dwa zjawiska są dydaktycznymi ćwiczeniami, są znane, opisane, sklasyfikowane. Odnoszę jednak wrażenie, że w ciągu najbliższych lat pojawi się ktoś, kto dostrzeże w nich coś, co wzburzy nasz obraz świata podobnie, jak poruszyły go rozważania Einsteina nad jednoczesnością. Być może znowu chodzi o czas? Wszak ciągle nie wiemy, co to jest czas.

#### Literatura

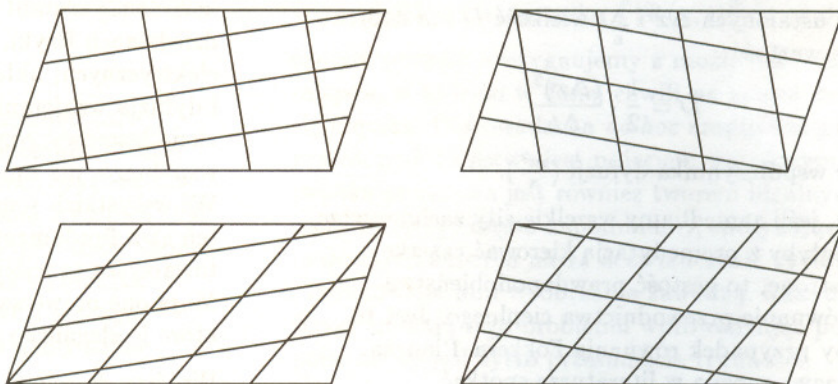
- [1] H. Risken, *The Fokker–Planck Equation* (2nd Ed.), Springer 1989.
- [2] M. Zak, Dynamical Simulations of Probabilities, *Chaos, Solitons & Fractals* vol. 8, 1997.
- [3] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki*, PWN, Warszawa 1970.





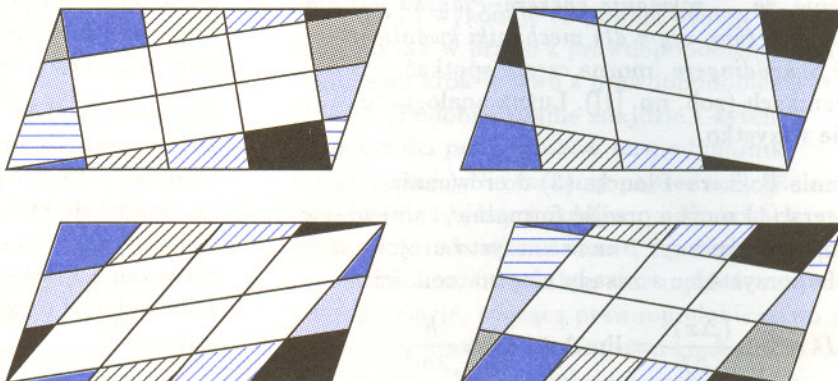
## Wirtualny torus

Wielu ludzi uważa, że gry komputerowe – szczególnie te z zabijaniem nas i przez nas – mają znikome walory edukacyjne. Tymczasem spójrzmy na rysunki.



Na każdym z nich jest ten sam równoległobok (umówmy się, że ma pole 1) i ma tak samo podzielone boki: jedna para boków równoległych na 4 jednakowe części, druga na 3. Punkty podziałów zostały połączone w analogiczny, choć nie jednakowy sposób. Wewnątrz każdego z równoległoboków powstało po 6 małych równoległoboków. Zbadajmy, jakie mają one pola.

Każdy Czytelnik wychowany na grze „w pajęczki” lub podobnej wie, że ekran w takich grach jest torusem, czyli kursor, mijając krawędź, pojawia się na tej samej wysokości przy przeciwległej krawędzi. Jeśli spojrzeć na każdy z rysunków jak na taki torus-ekran, można od razu zobaczyć, że został on w przypadku równoległoboków narysowanych na linii NW–SE (czyli na głównej przekątnej) podzielony na **całkowitą** liczbę małych równoległoboków, a mianowicie na 13, podczas gdy w przypadku równoległoboków narysowanych na linii SW–NE na 11 małych. Co daje odpowiedź na pytanie o pola.



Ciekawe jest, że ta różnica 2 zachowuje się przy różnych liczbach części, na które dzielimy równoległobok: dla podziału na  $m$  i  $n$  części dla jednego typu połączeń liczba małych równoległoboków to  $mn + 1$ , a dla drugiego  $mn - 1$ . A jak opisać różnicę między tymi typami łączenia punktów podziału?

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS



## Aktualności (nie tylko) fizyczne

W artykule z 13 kwietnia br., opublikowanym w *Physical Review Letters* [1], autorzy donoszą o przeprowadzeniu pierwszego pełnego rachunku za pomocą komputera kwantowego, rachunku polegającego na „wprowadzeniu danych początkowych do komputera kwantowego, wykonaniu obliczeń wymagających mniej kroków niż w przypadku zwykłego komputera oraz odczytaniu wyników”. Choć to osiągnięcie było od pewnego czasu oczekiwane, może stanowić przełom tak w informatyce, jak i w doświadczalnym badaniu podstaw mechaniki kwantowej.

Czym różni się komputer kwantowy od zwykłego? Złośliwi (pesymiści) powiedzieliby, że tego pierwszego po prostu nie ma (i nie będzie). Optymiści twierdzą, że wcześniej czy później powstanie, bo jego teoretycznie udowodnione możliwości przekraczają zdolność obliczeniową klasycznego komputera wykorzystującego cały krzem obserwowalnego Wszechświata. Ale o co chodzi z tą „kwantowością”? Przecież współczesne komputery wykorzystują układy scalone zawierające tranzystory, których działanie opiera się właśnie na mechanice kwantowej. Tak, ale operacje wykonywane przez mikroprocesor można równie dobrze przeprowadzić za pomocą przekładania kamyczków, tylko że miliard (bilion?) razy wolniej. Dlatego bardziej skomplikowanych problemów numerycznych nie da się rozwiązać w „rozsądnym czasie” przy wykorzystaniu otoczek. Istnieją jednak takie problemy, z którymi nawet dowolnie szybkie „Quintylionium<sup>®</sup>” sobie nie poradzi w rozsądnym czasie (np. krótszym od wieku Wszechświata). Klasycznym przykładem może być rozkład dużych liczb na czynniki pierwsze. Za efektywny uznaje się algorytm, którego liczba kroków rośnie co najwyżej wielomianowo z liczbą informacji wejściowych. Dla rozkładu liczby na czynniki pierwsze taki algorytm nie istnieje. Liczba kroków rośnie co najmniej wykładniczo z długością rozkładanej liczby. Zainteresowanie komputerami kwantowymi wyraźnie wzrosło właśnie po tym, jak Peter Shor odkrył taki algorytm dla komputera kwantowego [4].

Zwykły komputer wykonuje operacje na rejestrach bitowych. Np. rejestr dwubitowy może znajdować się w jednym z czterech stanów: 00, 01, 10 i 11. Za jego pomocą można zaadresować czteroelementową bazę danych. Załóżmy, że pod jednym z adresów kryje się logiczna jedynka, a pod pozostałymi logiczne zera. Aby dowiedzieć się, gdzie ukrywa się jedynka, należy wykonać średnio  $(1 + 2 + 3 + 3)/4 = 9/4$  sprawdzeń. Idea komputera kwantowego polega na używaniu rejestrów opartych na tzw. qubitach (ang. qubit = quantum bit). Różnica polega na tym, że qubit może być dowolną superpozycją swoich stanów bazowych, zamiast przyjmować tylko dwie dyskretne wartości. Rejestr  $N$  qubitów jest więc superpozycją  $2^N$  stanów opisywanych za pomocą  $2^N$  amplitud (liczb zespolonych). Operacja na takim rejestrze jest wykonywana jednocześnie na wszystkich  $2^N$  liczbach. W naszym przykładzie, jak wykazał Lov Grover [4], do znalezienia poszukiwanej jedynki wystarczy

tylko jedno sprawdzenie. Ogólnie, dla  $N$  elementowej bazy danych liczba kroków algorytmu Grovera jest rzędu  $\sqrt{N}$ , podczas gdy zwykły komputer potrzebuje ich rzędu  $N$ . Dla dużych  $N$  różnica byłaby więc ogromna. Sercem algorytmu jest powtarzana elementarna operacja (opisana na poziomie popularnym np. w [4,5]), w wyniku której amplituda odpowiadająca poszukiwanej pozycji bazy danych wzrasta w każdym kroku o około  $1/\sqrt{N}$ . Po około  $\sqrt{N}$  krokach będzie więc bliska jedności. Sprawdzenie zawartości rejestru w tym momencie pozwala na niemal pewne uzyskanie poszukiwanej informacji. Algorytm ten może być stosowany do bardzo szerokiej klasy problemów, w których odpowiedź łatwo jest sprawdzić, ale trudno znaleźć. Jeden z uznanych ekspertów w tej dziedzinie, John Preskill, stwierdził [6], że „jeżeli komputery kwantowe będą za 100 lat w użyciu, to przypuszczalnie działać będą według algorytmu Grovera lub czegoś podobnego”.

Skoro komputery kwantowe są tak dobre, to dlaczego ich nie ma? Okazuje się, że praktyczna implementacja takich pomysłów natrafia na olbrzymie trudności eksperymentalne. Pojedynczym qubitem może być dowolny układ kwantowy o dwóch stanach bazowych, np. spin jądra atomowego. Problem polega na tym, że w trakcie wykonywania obliczeń z rejestru składającego się z qubitów nie powinna wypłynąć żadna informacja! Ostatnio okazało się wprawdzie możliwe poprawianie „kwantowych błędów” (zob. np. przegląd [7]), ale i tak szczególna podatność układów kwantowych na zaburzenia spędza sen z powiek konstruktorom układów doświadczalnych, mających działać jako komputery kwantowe.

Jak zaznaczyłem na początku dzisiejszych aktualności, udało się właśnie zbudować pierwszy „pełny” komputer kwantowy [1]. Jako rejestru kwantowego użyto roztworu chloroformu  $\text{CHCl}_3$ . Pojemność rejestru wynosiła 2 qubity odpowiadające spinom atomów wodoru i węgla  $^{13}\text{C}$ , przy czym rolę rejestru spełniała nie pojedyncza cząsteczka, ale (niekoherentny) zespół wszystkich par  $^1\text{H}-^{13}\text{C}$ . Operacje na rejestrze wykonywane były przy użyciu techniki jądrowego rezonansu magnetycznego. Za pomocą takiego komputera przeprowadzono doświadczalny test algorytmu Grovera. Warto dodać, że całe urządzenie mieści się na biurku. Po jego popularny opis odsyłam do [2]. Technika ta ma szansę rozszerzenia do rejestrów kilku-, a nawet kilkunasto-qubitowych już w najbliższej przyszłości. Jak długo jednak trzeba będzie poczekać na kwantowy komputer z prawdziwego zdarzenia, posiadający rejestr o pojemności przynajmniej kiloqubitów? Myślę, że nie tak długo, zwłaszcza jeżeli czytelnicy *Delty* nie poprzestaną na czekaniu...

Piotr ZALEWSKI

- [1] I. L. Chuang, N. Gershenfeld, M. Kubinić *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 3408.
- [2] G. Taubes, *Science* **275** (1998) 307.
- [3] P. W. Shor, in Proc. of the 34th Ann. IEEE Symp. on Found. of Comp. Sci., 1994, 116-123.
- [4] L. K. Grover, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 325.
- [5] G. P. Collins, *Physics Today*, October 1997, 19.
- [6] J. Preskill, quant-ph/970532.
- [7] J. Preskill, quant-ph/970531.



## Zadanie o ruinie gracza

Na stronie 6 tego numeru *Delty* można przeczytać o związku równania przewodnictwa cieplnego z losowym błędzeniem cząstki Browna. Jest to temat bardzo blisko związany z klasycznym zadaniem o ruinie gracza, o którym, gwoli przestrogi dla nieroztropnych, warto przy tej okazji parę słów powiedzieć.

Problem sformułowany jest zazwyczaj następująco: gracz ma początkowo kapitał  $k$  zł i zamierza grać w ruletkę, stawiając kolejno po 1 zł na czerwone lub czarne, aż do momentu, gdy jego kapitał osiągnie  $N$  zł, albo do chwili, gdy będzie doszczętnie zrujnowany.

Jak widać, po każdej grze kapitał gracza zmienia się losowo o jeden: wzrasta z prawdopodobieństwem  $p = \frac{18}{37}$ , spada z prawdopodobieństwem  $q = 1 - p = \frac{19}{37}$ . Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że gracz rozpoczynający grę z kapitałem  $k$  zdoła powiększyć go do  $N$ , zanim zbankrutuje, oznaczmy przez  $p_k(N)$ .

Po pierwszej grze gracz nadal chce uciulać  $N$  złotych, ale zmienia się jego kapitał początkowy: w przypadku sukcesu, czyli z prawdopodobieństwem  $p$ , wzrasta do  $k + 1$  złotych, a w przypadku porażki – z prawdopodobieństwem  $q$  – maleje do  $k - 1$  złotych. Posługując się wzorem na prawdopodobieństwo całkowite, możemy więc napisać równanie

$$(1) \quad p_k(N) = p \cdot p_{k+1}(N) + q \cdot p_{k-1}(N).$$

Zauważmy też, że z oczywistych powodów  $p_N(N) = 1$  oraz  $p_0(N) = 0$ .

Gdyby  $p = q = 1/2$ , to równanie (1) implikowałoby, że ciąg  $(p_k(N))_{k=0,1,\dots}$  jest arytmetyczny – każdy wyraz byłby w nim średnią arytmetyczną dwóch wyrazów sąsiednich. Spróbujmy uogólnić to spostrzeżenie: przepiszmy (1) w takiej postaci, by wyrazić przyrost  $p_{k+1}(N) - p_k(N)$ . Otrzymamy równość

$$p_{k+1}(N) - p_k(N) = \frac{q}{p}(p_k(N) - p_{k-1}(N)).$$

Ciąg przyrostów jest więc geometryczny i ma iloraz równy  $q/p$ , a zatem  $p_{k+1}(N) - p_k(N) = (q/p)^k (p_1(N) - p_0(N))$ . Dalej już jest łatwo; zapisujemy  $p_N(N)$  (czyli jedynekę) w postaci sumy kolejnych przyrostów i wykorzystujemy wzór na sumę  $N$  wyrazów ciągu geometrycznego:

$$\begin{aligned} 1 &= p_N(N) = p_0(N) + \sum_{k=0}^{N-1} (p_{k+1}(N) - p_k(N)) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k (p_1(N) - p_0(N)) = \frac{(q/p)^N - 1}{q/p - 1} \cdot p_1(N). \end{aligned}$$

Stąd  $p_1(N) = \frac{(q/p) - 1}{(q/p)^N - 1}$ ; cały zabieg powtarzamy, by dostać końcowy wynik:

$$p_k(N) = p_0(N) + \sum_{\ell=0}^{k-1} (p_{\ell+1}(N) - p_{\ell}(N)) = \sum_{\ell=0}^{k-1} p_1(N) \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^{\ell} = \frac{(q/p)^k - 1}{(q/p)^N - 1}.$$

Zatem, dla  $q > p$  i dużych wartości początkowego kapitału  $k$  oraz zamierzonego zysku  $N - k$  mamy w przybliżeniu  $p_k(N) \simeq (q/p)^{k-N}$ . Prawdopodobieństwo uciulania przez gracza  $N$  zł, maleje więc wykładniczo do zera wraz ze wzrostem różnicy  $N - k$ .

Rozumując podobnie, można wykazać, że  $1 - p_k(N)$  to prawdopodobieństwo ruiny gracza. Inaczej mówiąc: z prawdopodobieństwem 1 gracz po skończenie wielu grach wyjdzie z kasyna – w znakomitej większości przypadków – doszczętnie zrujnowany. Dzieje się tak za sprawą jednego, niepozornego, zielonego pola. Między innymi z tego powodu łatwiej jest spotkać pogrążonego w długach nałogowego gracza niż załamanego właściciela kasyna.

Paweł STRZELECKI



Klasyczna ruletka ma 37 pól: 18 czerwonych, 18 czarnych i jedno zielone. Jeśli postawimy na czarne, a wypadnie czerwone lub zielone, to tracimy stawkę; jeśli wypadnie czarne, to dostajemy podwojoną stawkę.

Proszę porównać to równanie z równaniem (2) w artykule Karola Pesza (str. 6).

Gdy  $k = 100$ , to dla  $N = 500$  jest  $p_k(N) = 4,03 \cdot 10^{-10}$ , a dla  $N = 5000$  mamy  $p_k(N) = 2,4 \cdot 10^{-45}$ .

Gdyby ruletka była grą sprawiedliwą, tzn. dla  $p = q = 1/2$ , mielibyśmy w pierwszym przypadku  $p_k(N) = 1/50$ , a w drugim  $p_k(N) = 1/50$ .



# Czy liczby rzeczywiste są rzeczywiste?

Roman SIKORSKI

Obok drukujemy pierwszy artykuł, jaki został zamówiony dla *Delty*, zarazem pierwszy, który został dla *Delty* napisany (21 sierpnia 1973 roku). Artykuł ten otwierał próbną i pierwszy numer naszego miesięcznika. Wielu sądzi, że jest to też najlepszy artykuł w *Delcie*. Prezentujemy go dla nowego pokolenia Czytelników.

Redakcja

Liczby naturalne są niewątpliwie naturalne. Liczby całkowite niewątpliwie zasługują na nazwę „całkowite”. Liczby wymierne należałoby może nazywać liczbami mierzącymi lub wymierzającymi, bowiem wszystkie pomiary wykonujemy w praktyce w liczbach wymiernych, zresztą nie tylko pomiary: wszelkie rachunki na konkretnych liczbach wykonywane są w praktyce wyłącznie w obrębie liczb wymiernych. Po co więc wprowadzać szersze, lecz znacznie trudniejsze pojęcie liczb rzeczywistych, skoro liczby wymierne wystarczają w rachunkach? Definicja liczb rzeczywistych nastroża zawsze pewne trudności, wskutek tego w podręcznikach szkolnych jest raczej przemycana, niż precyzyjnie formułowana.

Pojęcie liczby naturalnej jest łatwe do przyswojenia. Tak łatwe, tak swojskie, że wydaje się, iż liczby naturalne są wzięte bezpośrednio z otaczającego świata materialnego. Zapominamy na ogół, że łatwo napisać, nawet na małym kawałku papieru, nazwę liczby naturalnej  $n$ , która jest nierealizowalna w świecie materialnym, tzn. dla której trudno podać przykład  $n$ -elementowego zbioru przedmiotów realnych. Liczba  $n = 1000^{1000^{1000}}$  jest przykładem takiej nierealizowalnej liczby naturalnej. Początkowe liczby naturalne są łatwo wyobrażalne, nie można tego powiedzieć o liczbach bardzo dużych. Niemniej zbiór  $N$  wszystkich liczb naturalnych można łatwo zdefiniować.

Musi zawierać liczbę 1. Jeśli zawiera liczbę  $n$ , to musi zawierać także liczbę  $n + 1$ . I nic więcej, tzn. jest najmniejszym zbiorem o powyższych dwu własnościach. Przytoczona definicja zbioru liczb naturalnych przypomina dowcip o pakowaniu do pustej walizki chusteczek do nosa. Oczywiście można tam włożyć jedną chusteczkę. Wiadomo z praktyki, że jeśli włożyliśmy do walizki  $n$  chusteczek, to  $(n + 1)$ -sza też da się załadować. Zatem do walizki można włożyć tyle chusteczek, ile jest liczb naturalnych, czyli nieskończenie wiele!

Możemy sobie wyobrazić, że matematyk ma taką abstrakcyjną walizeczkę  $N$  zawierającą wszystkie liczby naturalne. W drugiej, dodatkowej walizeczce nosi ich „odbicia lustrzane w zerze”, tzn. liczby całkowite ujemne. Musi się jeszcze zdecydować, do której walizeczki włożyć liczbę zero. Zdania są podzielone, jedni lubią zaliczać zero do liczb naturalnych, inni tego nie lubią. Rzecz w istocie nie warta przysłowiowego funta kłaków. Klócić się o zero? O matematyczne „nic”? Nie warto!

Oprócz walizeczek z liczbami całkowitymi matematyk ma także maszynkę do precyzyjnego siekania tych liczb. Mówiąc poważniej, matematyk z liczb całkowitych łatwo konstruuje liczby wymierne, tzn. „ułamki”  $m/n$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, a  $n$  – liczbą naturalną (nie zerem!). Pewne z tych ułamków należy uznać za równe. Na ułamkach tych można w naturalny sposób zdefiniować podstawowe działania arytmetyczne: dodawanie i mnożenie, oraz wtórne działania odwrotne: odejmowanie i dzielenie (nie przez zero!). Można je też uporządkować, tzn. wprowadzić relację mniejszości  $x < y$ . Intuicyjnie łatwo sobie „wyobrazić” liczbę wymierną. Łatwo bowiem wyobrazić sobie  $n$ -tą część czegoś, to znaczy liczbę  $1/n$ ; łatwo też wyobrazić sobie  $m$  takich części, tzn. liczbę  $m/n$ , z ewentualną zmianą znaku, czyli z „odbiciem lustrzanym w zerze”.

Pocziwe liczby wymierne! Tak bardzo są użyteczne! Wszystkie transakcje handlowe, bankowe, wszelkie pomiary, wszelkie rachunki techniczne są na nich oparte. Z punktu widzenia czystej praktyki jest ich za dużo, bo nieskończenie wiele. W praktyce do rachunków używa się tylko skończenie wielu liczb wymiernych (trudno byłoby oszacować ile). Tak już jednak jest z matematykami. Jeśli coś tworzą, czynią to na ogół w pełnej ogólności, wskutek tego na wyrost, na ogół więcej, niż jest to potrzebne w praktyce.

Niestety, zbiór liczb wymiernych ma wady. Wprawdzie jest gęsty, tzn. dla dowolnych dwu liczb wymiernych istnieje trzecia położona między nimi. Jest jednak dziurawy, przy tym jego dziury są również rozmieszczone w sposób gęsty, tzn. między dowolnymi dwiema liczbami wymiernymi znajduje się zawsze dziura. Te dziury biorą się nie ze starości zbioru, nie wskutek przetarcia zbioru w wyniku tak częstego używania liczb wymiernych w praktyce. Po prostu taka



## Rozwiązanie zadania M 848.

Podzielmy obie strony rozpatrywanego równania funkcyjnego przez  $xy$ .

Kładąc  $g(x) = f(x)/x$ , dostajemy

$$g(xy) = g(x) + g(y).$$

Następnie,

funkcja  $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  określona

$$h(x) = g(e^x)$$

spełnia równanie

$$h(x+y) = h(x) + h(y).$$

Jeśli  $f$  jest

ciągła, to  $h$  też. Możemy więc skorzystać

z wyników zadania 847 (inna w tym

przypadku dziedzina niczego nie zmienia):

$$h(x) = ax \text{ dla pewnego } a \in \mathbb{R}. \text{ Wynika}$$

stąd, że  $f(x) = xg(x) = ax \ln x$ .





### Rozwiązanie zadania F 477.

Kąt widzenia  $47^\circ$  daje w ognisku obiektywu dzisiejszych aparatów obraz o rozmiarach 4,5 cm, co odpowiada długości przekątnej klatki  $24 \times 36$  mm. Przekątna szklanej płyty  $9 \times 12$  cm jest równa  $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$  (cm), co daje nam ogniskową pierwszych aparatów równą 150 mm. Były to więc dość potężne maszyny. Dopiero wprowadzenie drobnoziarnistych błon fotograficznych pozwoliło na konstrukcję dzisiejszych poręcznych urządzeń.



### Rozwiązanie zadania M 849.

Niech  $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (-1, +\infty)$  będzie dana wzorem  $\phi(x) = x - 1$ . Jeśli  $f$  spełnia (\*), to  $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$  spełnia równanie  $g(xy) = g(x)g(y)$  oraz  $g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ . Niech wreszcie  $h : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$  będzie zdefiniowana następująco:  $h(x) = \ln[g(e^x)]$ . Wtedy funkcja  $h$  jest ciągła (bo  $f$  jest ciągła) oraz spełnia równanie  $h(x+y) = h(x) + h(y)$  dla dowolnych rzeczywistych  $x, y$ . Na mocy wyniku zadania 847 mamy  $h(x) = ax$  dla pewnego  $a \in \mathbb{R}$ , więc  $g(y) = e^{a \ln y}$  oraz  $f(x) = (\phi \circ g \circ \phi^{-1})(x) = e^{a \ln(x+1)} - 1 = (x+1)^a - 1$ .

**Uwaga dla koneserów:** Zbiór  $(-1, +\infty)$  z działaniem  $x * y = xy + x + y$  i elementem neutralnym 0 jest grupą izomorficzną z  $\mathbb{R}^+$  z mnożeniem (albo  $\mathbb{R}$  z dodawaniem). A więc w istocie zadanie polega na wyznaczeniu wszystkich ciągłych endomorfizmów grupy  $(\mathbb{R}^+, \cdot, 1)$  i przetłumaczeniu ich na endomorfizmy grupy  $((-1, +\infty), *, 0)$ .

jest matematyczna natura tego zbioru. Zbiór liczb wymiernych ma postać bardzo gęstego jednowymiarowego sita.

Musimy wyjaśnić, co rozumiemy przez dziurę w zbiorze liczb wymiernych (zawodowi matematycy mówią „luka” zamiast „dziura”). Dziurą nazywamy taki podział zbioru  $W$  wszystkich liczb wymiernych na dwa niepuste podzbiory  $W_1$  i  $W_2$ , że – po pierwsze – każda liczba ze zbioru  $W_1$  jest mniejsza od każdej liczby zbioru  $W_2$ , oraz – po drugie – w zbiorze  $W_1$  nie ma liczby największej, a w zbiorze  $W_2$  nie ma liczby najmniejszej. Mówimy, że taka dziura leży między liczbami wymiernymi  $w_1$  i  $w_2$  ( $w_1 < w_2$ ), jeśli  $w_1$  należy do  $W_1$ , a  $w_2$  należy do  $W_2$ . Na przykład, zaliczmy do  $W_1$  wszystkie ujemne liczby wymierne i te nieujemne, których kwadrat jest mniejszy od 2, a do  $W_2$  zaliczmy wszystkie dodatnie liczby wymierne, których kwadrat jest większy od 2. Podział zbioru  $W$  na zbiory  $W_1, W_2$  jest dziurą (luka) w zbiorze liczb wymiernych. Bardzo łatwo sprawdzić, że dziura ta leży między liczbami 1 i 2. Bez trudu można by wyznaczyć bardziej dokładnie położenie tej dziury. Prosty rachunek dowodzi, że leży ona między 1,41 a 1,42. Oczywiście można wyznaczyć jej położenie jeszcze dokładniej.

Istnienie dziur w zbiorze liczb wymiernych jest źródłem wielu kłopotów. Obrazowo można powiedzieć, że przez te dziury wycieka treść matematyczna wielu pięknych twierdzeń, zwłaszcza tych o bardziej subtelnej strukturze. Zbiór liczb wymiernych jest świetny do rachunków na liczbach konkretnych, ale zły dla wielu celów teoretycznych, dla bardziej skomplikowanych działań na liczbach niż dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, zwłaszcza jeśli chce się wykonywać te działania w sposób dokładny, a nie przybliżony. Już pierwiastkowanie nie jest wykonalne w tym zbiorze. Spróbujcie określić taką pożyteczną funkcję jak  $\log x$  ( $x > 0$ ) tak, by zarówno  $x$ , jak i  $\log x$  były liczbami wymiernymi – nic z tego nie wyjdzie. W jednym i drugim przypadku czuje się po prostu brak liczb, zbiór liczb wymiernych jest za mały, by wykonywać w nim logarytmowanie lub pierwiastkowanie (dokładne, a nie przybliżone).

Matematyk bardzo nie lubi, gdy pewne działania, wyglądające na naturalne lub pożyteczne, są niewykonalne. W wielu przypadkach usuwa niewykonalność działań przez odpowiednie rozszerzenie zbioru przedmiotów, na których działania mają być wykonane, lub które mają być wynikiem tych działań. Można by przytoczyć wiele przykładów – nawet z najnowszej matematyki. Przytoczymy tu tylko jeden: rozszerzenie zbioru liczb wymiernych do zbioru liczb rzeczywistych.

Rozszerzenie to wykonuje się w sposób następujący. Przed każdą dziurą w zbiorze liczb wymiernych matematyk kładzie kołek do jej zatkania (liczbę wymierną wygodnie jest interpretować jako punkt na osi liczbowej; wówczas kołek do zabcia dziury też można wyobrazić sobie jako punkt na tej osi). Następnie jednym uderzeniem młotka matematyk wbija wszystkie kołki. Zwracam uwagę na fakt, że matematyk jednym aktem woli wbija od razu wszystkie kołki we wszystkie dziury! Nie należy wyobrażać sobie procesu wbijania w ten sposób, że najpierw numeruje wszystkie dziury liczbami naturalnymi, a potem chodzi kolejno od  $n$ -tej dziury do  $n+1$ -szej i zabija je kołkami. Takie postępowanie byłoby niemożliwe, można bowiem udowodnić, że dziur w zbiorze liczb wymiernych jest tak dużo, iż nie można ich ponumerować wszystkimi liczbami naturalnymi.

Wszystkie liczby wymierne można ponumerować kolejnymi liczbami naturalnymi, ale dziur w tym zbiorze – nie! Dziwne, nieoczekiwane, ale prawdziwe. Jakkolwiek ponumerowalibyśmy te dziury wszystkimi liczbami naturalnymi, zawsze znalazłoby się jeszcze nieskończenie wiele nieponumerowanych dziur! Zawodowi matematycy mówią, że jakiś zbiór jest przeliczalny, jeśli wszystkie jego elementy można ponumerować kolejnymi różnymi liczbami naturalnymi, a jest nieprzeliczalny, jeśli tego nie można zrobić. Zbiory nieprzeliczalne są znacznie większe, znacznie bogatsze w elementy niż zbiory przeliczalne. Zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, a zbiór wszystkich dziur w tym zbiorze jest nieprzeliczalny. Widać stąd, że w zbiorze liczb wymiernych jest więcej dziur niż liczb! Czyż można mieć zaufanie do takiego zbioru? Nic dziwnego, że wiele treści matematycznej wycieka przezeń.





### Rozwiązanie zadania F 478.

Jasność obiektywu o zmiennej ogniskowej jest największa dla ogniskowej 70 mm, czyli przy najmniejszym powiększeniu obrazu. Zwiększając ogniskową (a więc i wielkość obrazu) oraz zachowując jednocześnie stały otwór przesłony, zmniejszamy tym samym jasność obiektywu. Osiąga więc ona najmniejszą wartość przy maksymalnym powiększeniu obrazu, czyli dla ogniskowej 200 mm, i jest wtedy  $200/70 \approx 3$  razy mniejsza od maksymalnej.



### Konkurs Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej

Znów sukces – na razie w finale Ogólnopolskich Eliminacji – odnieśli laureaci naszego Konkursu Prac Uczniowskich z Matematyki. **Grzegorz i Michał Kapustka** z pracą *O pewnych własnościach parzystokątów wpisanych i opisanych na okręgach* (streszczenie w *Delcie* 4/1998) zajęli pierwsze miejsce *ex aequo* z Maciejem Walczakiem, który przedstawił pracę *Chemiczna synteza aminokwasów - fosforanów nukleozydów*. Nasi laureaci zostali też zakwalifikowani do Finału Europejskiego, który odbędzie się we wrześniu w Porto (Portugalia).

Więcej o organizowanym przez Unię Europejską konkursie pisaliśmy w *Delcie* 5/1995, 1/1997, 3/1997. Być może, że teraz też napiszemy, gdy naszym reprezentantom uda się przywieźć medal, czym już dwa razy mogliśmy się chwalić.

Powróćmy do rozszerzenia liczb wymiernych do rzeczywistych. Białe kołeczki nazwiemy liczbami niewymiernymi, a całość, tzn. zarówno liczby wymierne, jak i niewymierne, nazwiemy liczbami rzeczywistymi zgodnie z powszechnie ustaloną terminologią. Czytelnik łatwo się domyśli, że kołeczek, który zatkał dziurę, podaną jako jedyny przykład ilustrujący to pojęcie, oznaczać będziemy symbolem  $\sqrt{2}$ .

Jak w każdej innej konstrukcji matematycznej, tak i w tym przypadku należy wyróżnić dwie strony tego samego zadania: 1) intuicyjne wyjaśnienie celu i metody konstrukcji oraz 2) precyzyjny opis jej wykonania z zachowaniem najwyższych kryteriów ścisłości współczesnej matematyki. Opisane powyżej wbijanie kołeczków w dziury to tylko intuicyjny opis konstrukcji, wyjaśnienie jej celu. Precyzyjny opis konstrukcji – to zupełnie inne zagadnienie. Zagadnienie – powiedziałbym – dosyć niewdzięczne. Znamy dwie metody „wbijania kołeczków”, mianowicie metodę Dedekinda i metodę Cantora. Obydwie są bardzo precyzyjne i obydwie mają tę samą wielką wadę: zaciemniają mniej istotnymi szczegółami technicznymi podstawową, jasną i prostą intencję konstrukcji. Dlatego nie przytoczymy tu żadnej z nich. Wspomnimy tylko o zasadniczej różnicy między tymi metodami. Oczywiście kołeczki muszą być z czegoś zrobione, z jakiegoś tworzywa, naturalnie z jakiegoś abstrakcyjnego tworzywa pojęć matematycznych. Otóż metody Cantora i Dedekinda różnią się głównie materiałem, z którego zrobione są kołeczki. W metodzie Dedekinda kołeczkiem zatykającym dziurę jest sama dziura! Dziurę zatyka się nią samą! Można powiedzieć, że w metodzie tej koszty zużycia materiałów zostały doprowadzone do minimum, do zera!

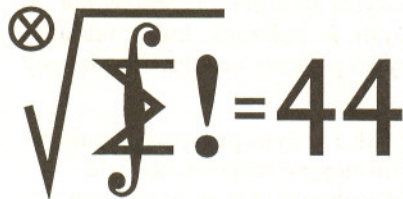
Konstrukcja została wykonana, kołeczki są białe. Pozostało nam sprawdzić, czy robota została rzetelnie wykonana, czy przypadkiem w trakcie wbijania nie powstały jakieś nowe dziury. Na szczęście wszystko jest w absolutnym porządku, zbiór liczb rzeczywistych jest całkowicie szczelny. Przytoczoną definicję dziury można wprawdzie sformułować w odniesieniu do liczb rzeczywistych, nie ma jednak potrzeby wprowadzania takiego pojęcia, po prostu w ogóle nie ma takich dziur.

Okazuje się, że zbiór liczb rzeczywistych ma własności jeszcze lepsze niż zbiór liczb wymiernych. Można ten zbiór uporządkować, można uogólnić podstawowe działania arytmetyczne (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie) na liczby rzeczywiste, ale ponadto można w tym zbiorze wykonywać bez żadnych ograniczeń wiele innych pożytecznych operacji matematycznych, jak pierwiastkowanie, potęgowanie, logarytmowanie itp., których wykonalność w dziedzinie liczb wymiernych była mocno utrudniona, jeśli nie wręcz niemożliwa.

Okazało się ponadto, że w oparciu o pojęcie liczby rzeczywistej można zbudować całą analizę matematyczną, olbrzymią gałąź współczesnej matematyki. U podstaw wszystkich twierdzeń tej części matematyki leży „szczelność” zbioru liczb rzeczywistych (matematycy zawodowi używają przymiotnika „zupełny” zamiast szczelny). Twierdzenia analizy matematycznej przestają być prawdziwe, jeśli zbiór liczb rzeczywistych zastąpić przez zbiór liczb wymiernych. To właśnie mieliśmy na myśli, mówiąc żartobliwie o przeciekaniu wiedzy matematycznej przez dziury zbioru liczb wymiernych. Pojęcie liczby rzeczywistej jest niezbędne dla całej matematyki teoretycznej. Jest również niezbędne dla formowania ogólnych metod matematyki stosowanej aż do momentu, gdy w grę wchodzi przybliżone rachunki na konkretnych liczbach. Wtedy powracamy do bardziej elementarnych liczb wymiernych.

Niewątpliwie pojęcie liczby wymiernej jest prostsze niż pojęcie liczby rzeczywistej. Dla laika liczba rzeczywista, wprowadzona metodą Cantora lub Dedekinda, wydaje się być tworem dość mistycznym, wydaje się być znacznie mniej rzeczywistą – w potocznym znaczeniu tego słowa – niż liczba wymierna. Dla zawodowego matematyka liczba rzeczywista jest podstawowym narzędziem pracy, jest równie rzeczywista jak inne pojęcia matematyczne. Liczby rzeczywiste są równie rzeczywiste jak liczby wymierne, jedne i drugie są bowiem poprawnie zdefiniowanymi pojęciami istniejącymi w mózgu matematyka. Jedne i drugie mają ten sam typ rzeczywistości.





Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 VIII 1998

**Skrót regulaminu**

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

**Zadania z matematyki nr 363, 364**

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej  
**Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 347 ( $WT=1,38$ ) i 348 ( $WT=2,33$ )  
z numeru 10/1997

Maciej Mostowski	- Warszawa	40,10
Witold Bednarek	- Łódź	31,89
Piotr Kumor	- Olsztyn	31,20
Bogumiła Piotrowska	- Zielona Góra	30,88

**363.** Punkty  $P$  i  $Q$  leżą odpowiednio na płaszczyznach zawierających ściany  $BCD$  i  $CDA$  czworokątna foremna  $ABCD$ . Dowieść, że z odcinków  $AP$ ,  $PQ$  i  $QB$  można zbudować trójkąt.

**364.** Niech  $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$  (w określeniu liczby  $a_n$  symbol pierwiastka kwadratowego występuje  $n$ -krotnie). Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \sqrt{2 - a_n}$ .

Zadanie 364 zaproponował pan Janusz Wojtal z Legionowa.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1998**

Przypominamy treść zadań:

**355.** Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych  $(p, x, y)$ , w których  $p$  jest liczbą pierwszą, spełniające równanie  $p^x - y^p = 1$ .

**356.** Dana jest liczba naturalna  $n$  oraz trójkąt  $ABC$ , którego kąty są znane ( $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$ ). Punkty  $D$  i  $E$  leżą odpowiednio na bokach  $AB$  i  $AC$ , przy czym  $|AD| = \frac{1}{n+1} \cdot |AB|$ ,  $|AE| = \frac{1}{n+1} \cdot |AC|$ . Punkty  $P_1, \dots, P_n$  leżą na boku  $BC$ , przy czym  $|BP_1| = |P_1P_2| = \dots = |P_{n-1}P_n| = |P_nC| = \frac{1}{n+1} \cdot |BC|$ . Obliczyć sumę

$$|\angle DP_1E| + |\angle DP_2E| + \dots + |\angle DP_nE|.$$

**356.** Przyjmijmy  $P_0 = B$ . Każdy z czworokątów  $P_{i-1}DEP_i$  jest równoległobokiem; zatem  $|\angle DP_iE| = |\angle P_{i-1}DP_i|$ , a więc rozważana suma jest równa

$$|\angle P_0DP_1| + |\angle P_1DP_2| + \dots + |\angle P_{n-1}DP_n| = |\angle P_0DP_n| = |\angle BAC| = \alpha.$$

**355.** Przypuśćmy, że liczby  $p, x, y$  spełniają podane warunki i że  $p$  jest liczbą pierwszą nieparzystą. Liczba  $p^x = y^p + 1$  dzieli się wówczas przez  $y + 1$ ; istnieje więc liczba całkowita  $n \geq 1$ , taka, że  $y + 1 = p^n$ . W takim razie

$$p^x = y^p + 1 = (p^n - 1)^p + 1 =$$

$$= \binom{p}{0} p^{np} + \sum_{k=1}^{p-3} \binom{p}{k} p^{n(p-k)} (-1)^k - \binom{p}{p-2} p^{2n} + \binom{p}{p-1} p^n$$

(gdy  $p = 3$ , „pusta” suma  $\sum_{k=1}^{p-3}$  ma wartość zero). Współczynniki

$\binom{p}{k}$  są podzielne przez  $p$ , gdy  $0 < k < p$ ; otrzymujemy równość

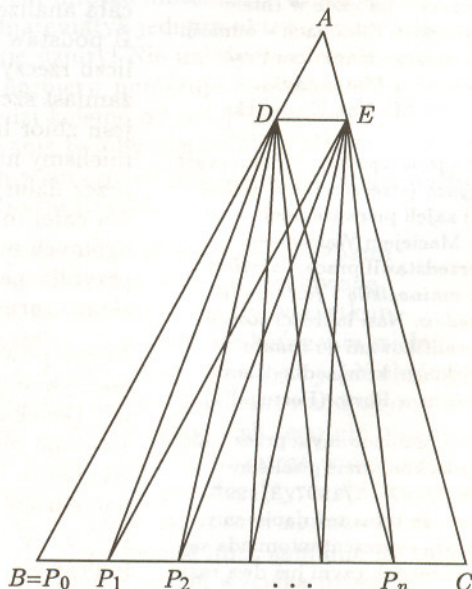
$$p^x = p^{np} + A \cdot p^{3n+1} - \frac{p(p-1)}{2} \cdot p^{2n} + p \cdot p^n$$

dla pewnej liczby całkowitej  $A$ . W każdym z pierwszych trzech składników po prawej stronie liczba  $p$  występuje w potęgde wyższej niż  $n+1$ . Wobec tego  $x = n + 1$ ; otrzymana przed chwilą równość przybiera (po podzieleniu przez  $p^{n+1}$  i odjęciu stronami jedynki) postać

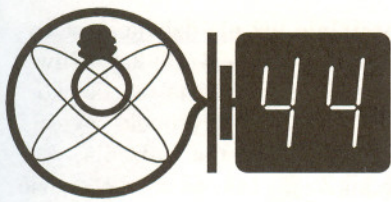
$$0 = p^{np-n-1} + A \cdot p^{2n} - \frac{p-1}{2} \cdot p^n$$

– to zaś jest możliwe tylko wtedy, gdy wykładniki  $np-n-1$  oraz  $n$  są równe, czyli gdy  $n(p-2) = 1$ , czyli dla  $p = 3, n = 1$ . Wówczas  $x = 2, y = 2$ .

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy  $p = 2$ . Wtedy trójki  $(p, x, y) = (3, 2, 2)$  oraz  $(2, 1, 1)$  spełniają zadane równanie i stanowią jego pełne rozwiązanie.  $2^x - 1 = y^2 \equiv 1 \pmod{4}$ , skąd  $x = 1, y = 1$ .







## Zadania z fizyki nr 260, 261

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VIII 1998

**260.** Filtr polaryzacyjny przepuszcza 85% światła spolaryzowanego wzdłuż jednej osi, a drugiej składowej nie przepuszcza w ogóle. Jeżeli na zestaw takich filtrów pada światło spolaryzowane liniowo, to ile ich trzeba wziąć i jak je ustawić, aby wiązka przechodząca miała płaszczyznę polaryzacji obróconą o  $90^\circ$  i maksymalne natężenie?

**261.** W długiej rurze o stałym przekroju znajduje się gaz pod ciśnieniem  $10^5$  Pa, którego temperatura zmienia się liniowo od  $0^\circ\text{C}$  na jednym końcu rury do  $200^\circ\text{C}$  na drugim końcu. Ile będzie wynosiło ciśnienie w rurze, jeżeli zamkniemy ją szczelnie i doprowadzimy gaz do jednakowej temperatury  $100^\circ\text{C}$ ?

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1998

Przypominamy treść zadań:

**252.** Jednorodny wydrążony walec o wewnętrznym promieniu  $c$  i zewnętrznym  $d$  stoi na poziomej powierzchni, a do jego środka włożono dwie gładkie kule  $A$  i  $B$  o masach  $m_A$  i  $m_B$  oraz promieniach  $a$  i  $b$ , przy czym  $a < b$ ,  $c < a + b$ .

a) Obliczyć minimalną masę walca, przy której się on nie przewróci.

b) Do walca włożono trzecią kulę  $C$ , identyczną z  $A$ . Biorąc pod uwagę oba możliwe położenia tej kuli (zob. rysunek; dla uproszczenia można założyć, że  $A$  i  $C$  się nie zetkną), obliczyć minimalną masę walca  $m$ , przy której się on nie przewróci.

**253.** Przyjmijmy, że gaz jest doskonały (ściśle spełnia równanie  $pV = nRT$ ), a jego ciepło molowe w stałej objętości  $C_V$  jest równe  $(3/2)R$  poniżej pewnej nieznannej temperatury  $T'$  i  $(5/2)R$  powyżej tej temperatury. Stwierdzono, że gdy rozpoczynając od pewnej objętości  $V_0$  i ciśnienia  $p_0$  ogrzano ten gaz izochorycznie zwiększając ciśnienie do  $3p_0$ , po czym rozprężono adiabatycznie do początkowej wartości ciśnienia, objętość okazała się równa  $2V_0$ ; powracając do punktu początkowego na drodze przemiany izobarycznej zamykamy cykl. Obliczyć sprawność tego cyklu (podać wartość liczbową).

**252. a)** Odcinek łączący środki kul  $A$  i  $B$  jest nachylony do poziomu pod kątem  $\alpha$ , który można obliczyć z warunku  $2c = a + b + (a + b) \cos \alpha$ . Siłę oddziaływania kul na siebie  $F_{AB}$  wyznaczmy z warunku równowagi kuli  $B$  – otrzymujemy  $F_{AB} = m_B g / \sin \alpha$ . Pozioma składowa tej siły wynosi  $F_{AB} \cos \alpha = m_B g \operatorname{ctg} \alpha$  i jest równa sile oddziaływania każdej z kul na ściankę walca. Mnożąc tę wielkość przez ramię  $(a + b) \sin \alpha$  znajdujemy moment pary sił  $M = m_B g (a + b) \cos \alpha = m_B g (2c - a - b)$ . Aby walec się nie przewrócił, ciężar walca i reakcja podłoża muszą utworzyć parę o przeciwnym momencie – stąd wyznaczamy  $m_{\min} = m_B (2c - a - b) / d$ .

**b)** Gdy kula  $C$  oprze się o ściankę po tej samej stronie co  $A$ , odcinek łączący środki  $C$  i  $B$  będzie nachylony do poziomu pod tym samym kątem  $\alpha$ , co poprzednio, a siła oddziaływania kuli  $C$  na ściankę wyniesie  $F_C = m_A g \operatorname{ctg} \alpha$ . Dalsze obliczenia wykazują, że siła oddziaływania  $A$  na ściankę wzrośnie w porównaniu z poprzednim przypadkiem o tę samą wielkość  $F_C$ , a siła oddziaływania  $B$  na ściankę – o  $2F_C$ . Zatem moment  $M$  i wartość  $m_{\min}$  pozostaną nie zmienione.

Gdy kula  $C$  oprze się o ściankę po stronie przeciwnej do  $A$ , odcinek łączący środki  $C$  i  $B$  będzie nachylony do poziomu pod kątem  $\beta$ , którego cosinus jest równy  $\cos \beta = (b - a) / (b + a)$ . Obliczamy siły nacisku na ścianki:  $F_C = m_A g \operatorname{ctg} \beta$ ,  $F_A = (m_A + m_B) g \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $F_B = F_A - F_C$ . Moment tych sił wynosi  $M = F_C (a + b) \sin \beta + F_A (a + b) \sin \alpha$ , zatem  $m_{\min} = m_A (b - a) / d + (m_A + m_B) (2c - a - b) / d$ .

**253.** Przemianę adiabatyczną gazu doskonałego opisuje równanie Poissona, które w zmiennych  $p$  i  $T$  ma postać  $T^\sigma / p = \text{const}$ , gdzie parametr  $\sigma = C_p / R = 1 + C_V / R$  ma wartość  $\sigma_1 = 5/2$ , gdy  $C_V = (3/2)R$ , a  $\sigma_2 = 7/2$ , gdy  $C_V = (5/2)R$ . Nietrudno sprawdzić, że nachylenie adiabaty przedstawionej w zadaniu odpowiada parametrowi  $\sigma$  o wartości pośredniej między  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ , co oznacza, że musi się ona składać z dwóch segmentów, na których obowiązują równania  $T^{\sigma_1} / p = \text{const}$  i  $T^{\sigma_2} / p = \text{const}$ . Zatem

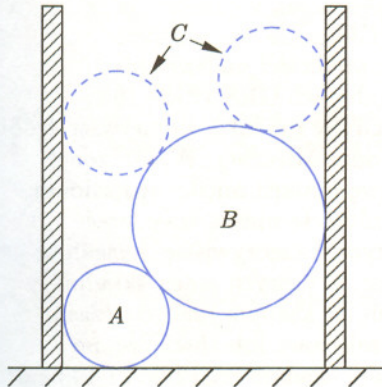
$$\frac{(3T_0)^{7/2}}{3p_0} = \frac{(T')^{7/2}}{p'}, \quad \frac{(T')^{5/2}}{p'} = \frac{(2T_0)^{5/2}}{p_0},$$

gdzie  $T_0$  jest temperaturą początkową, a parametry  $p'$  i  $T'$  odnoszą się do punktu zszycia segmentów. Znajdujemy  $T' = T_0 (3/2)^{5/2}$ , a dalej

$$Q_{\text{izochor}} = \frac{3}{2} R (T' - T_0) + \frac{5}{2} R (3T_0 - T') = RT_0 (6 - (3/2)^{5/2}),$$

$$Q_{\text{izobar}} = \frac{5}{2} R (2T_0 - T_0) = \frac{5}{2} RT_0,$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{izobar}}}{Q_{\text{izochor}}} = 0,229.$$



Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 248 ( $WT=1,75$ ) i 249 ( $WT=2,88$ )  
z numeru 12/1997

Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	42,92
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	32,09
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	18,68
Tomasz Wietecha	- Tarnów	15,39
Marek Wójcicki	- Szczecin	11,72
Aleksander Surma	- Myszków	11,08



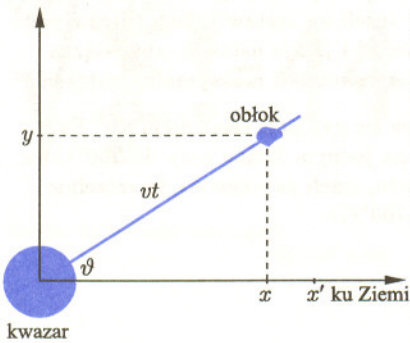
### Rozwiązanie zadania M 847.

Podstawiając w rozpatrywanym równaniu  $x = y = 0$  otrzymujemy  $f(0) = 0$ . Następnie, kładąc  $y = -x$ , dostajemy  $f(-x) = -f(x)$ . Niech  $f(1) = a$ . Przez łatwą indukcję dowodzimy, że wzór  $f(nx) = n f(x)$  jest słuszny dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  i wszystkich całkowitych  $n$ . Zatem  $f(n) = na$  dla  $n \in \mathbb{Z}$ .

Wreszcie, dla  $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  mamy  $f(p/q) = (1/q)(q f(p/q)) = (1/q) f(p) = (p/q)a$ . Udowodniliśmy więc wzór  $f(x) = xa$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{Q}$ .

Ponieważ każdą liczbę rzeczywistą można przybliżać liczbami wymiernymi, a  $f$  jest funkcją ciągłą, więc wzór ten zachodzi dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$ . Ostatecznie, jedynymi funkcjami ciągłymi spełniającymi rozpatrywane równanie funkcyjne są funkcje liniowe postaci  $f(x) = ax$ .





Obserwacje prędkości nadświetlnych nikogo specjalnie już nie dziwią. Jest to oczywiście efekt pozorny. Pisaliśmy o tym ostatnio w *Delcie* 4/1992, możliwe jednak, że nie wszyscy młodzi Czytelnicy mogą sięgnąć pamięcią tak daleko, przypomnimy więc krótko, o co tu chodzi. Niech z kwazara (rysunek) wyleci z dużą prędkością  $v$  świecący obłok pod kątem  $\vartheta$  do promienia widzenia. Towarzyszący temu impuls światła porusza się ku Ziemi tak, że  $x' = ct$ , gdzie  $t$  jest czasem liczonym od błysku. W tym czasie obłok zbliży się do Ziemi o  $x = vt \cos \vartheta$ , a od promienia widzenia oddali się poprzecznie o  $y = vt \sin \vartheta$ . Gdy światło dotrze do Ziemi, obserwator odniesie wrażenie, że obłok oddalił się od kwazara o  $y$  w czasie  $\Delta t = (x' - x)/c$ , zatem pozorna prędkość obłoku wyniesie

$$v_{\text{poz}} = \frac{y}{\Delta t} = v \frac{\sin \vartheta}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}.$$

Na przykład dla  $v = 0,9c$  i  $\vartheta = 10^\circ$  dostajemy  $v_{\text{poz}} \approx 2c$ .

W roku 1994 odkryto następne dwa przypadki prędkości nadświetlnych w rentgenowskich źródłach o katalogowych symbolach GRS 1915+105 i GRO J1655-40 i nie byłoby w tym sensacji, gdyby nie fakt, że pierwsze źródło leży w Orle, a drugie w Skorpionie, czyli w Drodze Mlecznej. Wykluczone jest, by dało się zobaczyć kwazara przez warstwę materii międzygwiazdowej zalegającej w płaszczyźnie naszej Galaktyki, źródła te muszą więc leżeć stosunkowo blisko, a w każdym razie w Galaktyce! I rzeczywiście, okazało się, że źródła te to gwiazdowe układy podwójne, w których jeden składnik promieniuje w zakresie gamma i rentgenowskim (w każdym razie od czasu do czasu, dlatego źródła takie nazywają się przejściowe lub chwilowe, po angielsku *transient*). Ich odległości oceniono odpowiednio na 12 kpc i 4 kpc. Pozornie nadświetlny ruch obłoków stwierdzono za pomocą – jak zwykle – interferometrycznych obserwacji radiowych z użyciem wielkich baz. Obłoki wystrzelowane ze źródła GRO J1655-40 w Skorpionie poruszają się kątowno szybciej niż jakikolwiek obiekt leżący poza Układem Słonecznym, mianowicie 62 milisekundy łuku na dobę.

Jak łatwo zgadnąć, tak burzliwe procesy napędzane są zazwyczaj przez czarną dziurę. W przypadku tych dwóch źródeł rentgenowskich, które zresztą zaczęto nazywać minikwazarami, również podejrzewa się obecności czarnych dziur, co sugerują też oszacowania masy obiektu centralnego. Szczególnie korzystna sytuacja zachodzi dla źródła w Skorpionie. Obserwuje się w nim po prostu wzajemne zaćmienia składników układu podwójnego. Oznacza to, że Ziemia znajduje się praktycznie w płaszczyźnie orbit obu składników, a stąd oszacowanie mas jest dość wiarygodne. W tym przypadku centralny obiekt minikwazara ma masę ocenioną na 4–5 mas Słońca, co jest więcej niż największa masa gwiazdy neutronowej, zapewne więc musi być czarną dziurą.

Tomasz KWAST



## Czerwiec

Czerwiec to najkrótsze noce i robi się ciemno, gdy właściwie należałoby iść spać. Kto jednak poczeka, aż ukażą się gwiazdy, może zwrócić uwagę na Wolarza. Jego najjaśniejszą gwiazdę, Arktura, odnajduje się bez trudu. Jak pisaliśmy miesiąc temu, Arktur leży na łukowatym przedłużeniu ogona Wielkiej Niedźwiedzicy, a w ogóle jest jedną z najjaśniejszych gwiazd na północnej półkuli nieba. Jest pomarańczowym olbrzymem, około 25 razy większym od Słońca i znajduje się w odległości 11 pc. Dość wyraźna pomarańczowa barwa Arktura jest, oczywiście, wynikiem jego stosunkowo niskiej temperatury powierzchniowej wynoszącej 4000 K.

Ale najpiękniej widać barwy gwiazd, gdy znajdzie się dwie bardzo blisko siebie leżące i o bardzo różnych temperaturach. Taka właśnie gwiazda podwójna znajduje się o  $10^\circ$  na północny wschód od Arktura. Ma nawet

własną nazwę, Pulcherrima, co oznacza „przepiękna”. Jej składniki dzieli kątowa odległość  $3''6$ , a ich jasności są 2,7 oraz 5,12 mag. Składnik jaśniejszy jest gwiazdą chłodną jak Arktur, a słabszy gorącą i przez to niebieską. Już w lepszej lornetce widok Pulcherrimy rzeczywiście odpowiada jej nazwie.

21 czerwca zaczyna się lato i dni już będą się skracać, choć wakacje dopiero się zaczynają. Wenus i Saturn znajdują się w Baranie, a więc ich nie widać, Mars jest w Byku i też zachodzi, kiedy jest jeszcze widno. Widać jedynie Jowisza w Rybach, a i to dopiero nad ranem. Pełnia Księżycza wypada 10 VI, Księżyc zbliży się mocno do Regulusa 1 VI, do Jowisza 17 VI, do Aldebarana 22 VI i ponownie do Regulusa 28 VI. Aldebarana nawet zakryje, ale ponieważ jest to gwiazda z Byka, to nad horyzontem przebywa obecnie w dzień, a więc zjawiska nie będzie widać.

T.K.





## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (4')

Wyjaśnienie oszustwa (4):

Objętość kuli wpisanej w czworościan jest równa  $\frac{4}{3}\pi 10^3 > 4000$ , czyli jest większa od objętości czworościanu!

Dane w zadaniu są źle dobrane. Wielościan opisany na sferze o promieniu 10 musi mieć pole powierzchni większe od pola powierzchni tejże sfery, czyli  $400\pi > 1200$ .

JWR

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (5)

ZADANIE: Naszkicować wykres funkcji

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2}x.$$

Rozwiązanie: Ważną rzeczą jest znalezienie asymptot ukośnych, gdyż ich naszkicowanie ułatwi poprowadzenie wykresu funkcji.

Asymptota ukośna w  $+\infty$  ma równanie  $y = ax + b$ , gdzie

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2}x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Podobnie w  $-\infty$

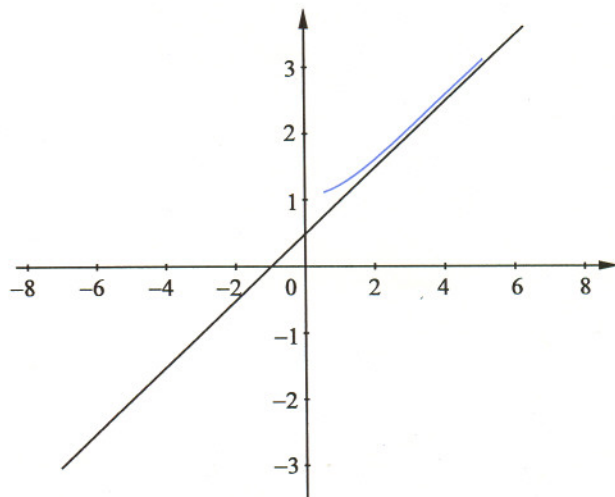
$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2}x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zatem  $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$  jest asymptotą ukośną zarówno w  $+\infty$ , jak i w  $-\infty$ .

Część wykresu naszkicowaliśmy poniżej. Mamy nadzieję, że bez trudu dorysujesz resztę, drogi Czytelniku. Pamiętaj, że wykres musi zbliżać się do asymptoty w miarę posuwania się do  $-\infty$ .



Aha, i nie bazgraj niczego pod osią  $OX$ , bo  $f$  jest funkcją dodatnią.

JWR

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (6)

Rozpatrzmy ciąg 1, 8, 45, 220, 1001, ... Łatwo sprawdzić, że  $n$ -ty wyraz tego ciągu można zdefiniować wzorem

$$(*) \quad a_n = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n - 3 - 3^2 - 3^3 - \dots - 3^n.$$

Ciąg ten można również odnaleźć w trójkącie Pascala jako jedną z jego kolumn i wtedy

$$(**) \quad a_n = \binom{2n+4}{n-1}.$$

Ze wzoru (\*) widzimy, że  $a_{19}$  jest liczbą nieparzystą. Tymczasem ze wzoru (\*\*) mamy  $a_{19} = \binom{42}{18} = \frac{42!}{18!24!}$ . Czynniki 2 wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby

$$42! \text{ z wykładnikiem } \left[ \frac{42}{2} \right] + \left[ \frac{42}{4} \right] + \left[ \frac{42}{8} \right] + \left[ \frac{42}{16} \right] + \left[ \frac{42}{32} \right] = 39,$$

$$18! \text{ z wykładnikiem } \left[ \frac{18}{2} \right] + \left[ \frac{18}{4} \right] + \left[ \frac{18}{8} \right] + \left[ \frac{18}{16} \right] = 16,$$

$$24! \text{ z wykładnikiem } \left[ \frac{24}{2} \right] + \left[ \frac{24}{4} \right] + \left[ \frac{24}{8} \right] + \left[ \frac{24}{16} \right] = 22,$$

skąd widać, że liczba  $a_{19}$  jest parzysta, gdyż dzieli się przez 2 w potęgę  $39 - 16 - 22 = 1$ .

JWR

Korespondencję do  $\Gamma$ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl



**Zadania I stopnia Olimpiad 1998/99** będą opublikowane we wkładce do *Delty* 9/1998

# Dodatek Olimpijski

## Zadania II stopnia oraz finału Olimpiady Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej

### XLIX OLIMPIADA MATEMATYCZNA 97/98

ZAWODY II STOPNIA (27–28 lutego 1998)

1. Niech  $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Rozstrzygnąć, czy dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 2$  istnieją funkcje  $f: A_n \rightarrow A_n$ ,  $g: A_n \rightarrow A_n$ , spełniające warunki:  
 $f(f(k)) = g(g(k)) = k$  dla  $k = 1, \dots, n$ ;  
 $g(f(k)) = k + 1$  dla  $k = 1, \dots, n-1$ .

2. W trójkącie  $ABC$  kąt  $BCA$  jest rozwarty oraz  $\angle BAC = 2 \cdot \angle ABC$ . Prosta przechodząca przez punkt  $B$  i prostopadła do boku  $BC$  przecina prostą  $AC$  w punkcie  $D$ . Punkt  $M$  jest środkiem boku  $AB$ . Dowieść, że  $\angle AMC = \angle BMD$ .

3. (a) Liczby nieujemne  $a, b, c, d, e, f$ , których suma jest równa 1, spełniają zależność

$$ace + bdf \geq \frac{1}{108}.$$

Udowodnić, że

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab \leq \frac{1}{36}.$$

(b) Rozstrzygnąć, czy istnieje sześć różnych liczb dodatnich  $a, b, c, d, e, f$  o sumie równej 1, dla których obie napisane wyżej nierówności stają się równościami.

4. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych  $x, y$  spełniające równanie  $x^2 + 3y^2 = 1998x$ .

5. Liczby nieujemne  $a_1, a_2, \dots, a_7, b_1, b_2, \dots, b_7$  spełniają warunek

$$a_i + b_i \leq 2 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, 7.$$

Wykazać, że dla pewnych dwóch różnych liczb  $k, m \in \{1, 2, \dots, 7\}$  zachodzi nierówność  $|a_k - a_m| + |b_k - b_m| \leq 1$ .

6. Dany jest czworościan  $ABCD$ . Dowieść, że krawędzie  $AB$  i  $CD$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w przestrzeni taki równoległobok  $CDPQ$ , że  $PA = PB = PD$  oraz  $QA = QB = QC$ .



1. Znaleźć wszystkie układy liczb całkowitych  $(a, b, c, x, y, z)$  spełniające układ równań

$$\begin{cases} a + b + c = xyz \\ x + y + z = abc \end{cases}$$

oraz warunki  $a \geq b \geq c \geq 1$ ,  $x \geq y \geq z \geq 1$ .

2. Ciąg Fibonacciego  $(F_n)$  jest dany wzorami

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wyznaczyć wszystkie pary  $(k, m)$  liczb całkowitych  $m > k \geq 0$ , dla których w ciągu  $(x_n)$  określonym wzorami

$$x_0 = \frac{F_k}{F_m},$$

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{2x_n - 1}{1 - x_n}, & \text{gdy } x_n \neq 1, \\ 1, & \text{gdy } x_n = 1 \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

występuje liczba 1.

3. Pięciokąt wypukły  $ABCDE$  jest podstawą ostrosłupa  $ABCDES$ . Płaszczyzna przecina krawędzie  $SA, SB, SC, SD, SE$  odpowiednio w punktach  $A', B', C', D', E'$  (różnych od wierzchołków ostrosłupa). Udowodnić, że punkty przecięcia przekątnych czworokątów  $ABB'A', BCC'B', CDD'C', DEE'D', EAA'E'$  leżą na jednej płaszczyźnie.

4. Dowieść, że w ciągu  $(a_n)$  określonym wzorami

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{\lfloor n/2 \rfloor} \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \dots$$

występuje nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 7.

**Uwaga.**  $\lfloor n/2 \rfloor$  jest największą liczbą całkowitą nie przekraczającą  $n/2$ .

5. Punkty  $D$  i  $E$  leżą na boku  $AB$  trójkąta  $ABC$  i spełniają warunek

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EB} = \left(\frac{AC}{CB}\right)^2.$$

Udowodnić, że  $\angle ACD = \angle BCE$ .

6. Rozważamy na płaszczyźnie kwadraty jednostkowe, których wierzchołki mają obie współrzędne całkowite. Niech  $S$  będzie szachownicą, której polami są wszystkie kwadraty jednostkowe zawarte w kole określonym nierównością  $x^2 + y^2 \leq 1998^2$ . Na wszystkich polach szachownicy piszemy liczbę  $+1$ . Wykonujemy ciąg operacji. Każda z nich polega na wybraniu dowolnego rzędu poziomego, pionowego lub ukośnego i zmianie znaków wszystkich liczb napisanych na polach wybranego rzędu. (Rząd ukośny tworzą wszystkie pola szachownicy  $S$ , których środki leżą na pewnej prostej przecinającej oś układu współrzędnych pod kątem  $45^\circ$ .) Rozstrzygnąć, czy w ten sposób można doprowadzić do sytuacji, w której na jednym polu będzie napisana liczba  $-1$ , a na wszystkich pozostałych  $+1$ .

### Końcowa klasyfikacja

#### Laureaci:

- 1.–2. Michał Kapustka (Kraków), Piotr Przytycki (Warszawa);
- 3.–7. Tomasz Czajka (Stalowa Wola), Łukasz Kamiński (Pokrzydowo), Szymon Pliś (Kraków), Tomasz Sobieszek (Łódź), Marcin Stefaniak (Gdańsk);
8. Eryk Kopczyński (Warszawa);
- 9.–12. Jakub Białogrodzki (Gdańsk), Tomasz Elsner (Wrocław), Arkady Husak (Gorzów Wlkp.), Grzegorz Kapustka (Kraków);
- 13.–16. Michał Matuszewski (Katowice), Michał Pleban (Żyrardów), Mikołaj Zalewski (Kraków), Maciej Żenczykowski (Kraków).

#### Wyróżnieni:

- Piotr Buciak (Szczecin), Tomasz Dorau (Toruń), Katarzyna Drzazga (Wrocław), Jakub Gismatullin (Wrocław), Paweł Golonka (Kraków), Rafał Mamak (Nowy Targ), Wojciech Martys (Stalowa Wola), Jakub Wojtaszczyk (Warszawa), Paweł Wolff (Zielona Góra), Paweł Zdziarski (Bydgoszcz).

Nagrody pierwszego stopnia przyznano zawodnikom z miejsc 1–2, nagrody drugiego stopnia – zawodnikom z miejsc 3–7, trzeciego stopnia – zawodnikom z miejsc 8–16.

Na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej Polskę reprezentować będą: Tomasz Czajka, Michał Kapustka, Szymon Pliś, Piotr Przytycki, Tomasz Sobieszek, Marcin Stefaniak, oraz Łukasz Kamiński i Eryk Kopczyński jako rezerwowi.

Na Austriacko-Polskich Zawodach Matematycznych wystąpi drużyna w składzie: Jakub Białogrodzki, Tomasz Elsner, Arkady Husak, Łukasz Kamiński, Grzegorz Kapustka, Eryk Kopczyński oraz Michał Matuszewski i Mikołaj Zalewski jako rezerwowi.

Na Zawodach Matematycznych Państw Bałtyckich Polskę reprezentować będą: Jakub Gismatullin, Michał Matuszewski, Jakub Wojtaszczyk, Mikołaj Zalewski, Paweł Zdziarski oraz Tomasz Dorau i Paweł Golonka jako rezerwowi.

Na obóz przygotowujący do Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej pojedzie też najmłodszy uczestnik finału, czternastoletni Jakub Byszewski.



Podajemy drugą serię zadań I stopnia, zadania II stopnia (12 I 98; Chorzów, Włocławek) i zadania III stopnia (5-7 III 98; Chorzów).

## ZAWODY I STOPNIA (druga seria)

1.5. W jakiej minimalnej odległości kątowej powinny znajdować się składniki gwiazdy podwójnej o zbliżonych jasnościach, aby fakt, że jest ona gwiazdą podwójną, można było jeszcze stwierdzić, obserwując jej zakrycie przez Księżyc? Przyjmij, że obserwator jest w stanie dostrzec zmiany jasności zachodzące w czasie nie krótszym niż 0,1 s.

1.6. Odległości między poszczególnymi elementami światłoczułymi (pikselami) w detektorze kamery CCD wynoszą 9  $\mu\text{m}$ . W którym z poniżej wymienionych obiektywów zastosowanie kamery CCD pozwoli osiągnąć teoretycznie zdolność rozdzielczą poniżej 1 sekundy łuku?

Zdolność rozdzielczą którego z obiektywów kamera

wykorzysta w pełni?

Astrograf Sonnenfelda	$D = 20 \text{ cm}$ ,	$f = 100 \text{ cm}$ ,
Astrograf Cooke'a	$D = 33 \text{ cm}$ ,	$f = 200 \text{ cm}$ ,
Obiektyw Zeissa	$D = 30 \text{ cm}$ ,	$f = 450 \text{ cm}$ ,
Obiektyw Zeissa	$D = 8 \text{ cm}$ ,	$f = 120 \text{ cm}$ .

$D$  oznacza średnicę obiektywu, zaś  $f$  jego ogniskową.

1.7. Sonda *Cassini* dotrze do Saturna po skomplikowanym torze, zbliżając się wcześniej do Wenus (dwukrotnie) i do Jowisza. Jakiej energii należałoby użyć, aby sonda kosmiczna, znajdująca się na orbicie wokółsłonecznej o promieniu równym 1 j.a., dotarła do orbity Saturna bezpośrednio?

1.8. Omów dotychczasowe rezultaty wyprawy sondy *Mars Pathfinder*.

## ZAWODY II STOPNIA

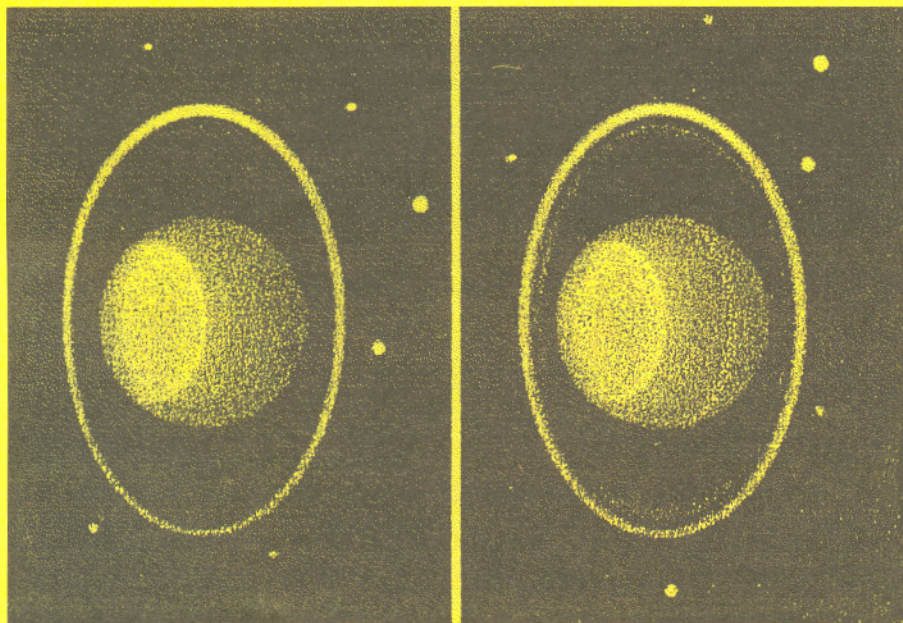
2.1. Krzywa jasności gwiazdy zmiennej zaćmieniowej ma w minimum głównym tzw. płaskie dno. Składnik o większym promieniu ma niższą temperaturę efektywną. Oblicz jasności składników gwiazdy, wiedząc, że w minimum głównym ma ona jasność  $m_{\min} = 6,5$  mag, a w maksimum jasność  $m_{\max} = 6,0$  mag.

2.2. Ostatnio opublikowano tabelę własności galileuszowych księżyców Jowisza. Z danych zawartych w tabeli można wyciągnąć szereg wniosków dotyczących budowy wewnętrznej i jej zmian, ewolucji orbit tych księżyców, a także własności „młodego” Jowisza.

	Io	Europa	Ganimesdes	Kallisto
Odległość od Jowisza, w promieniach planety	5,9	9,4	15,0	26,4
Promień, w km	1821	1565	2635	2405
Gęstość, w $\text{kg/m}^3$	3530	3020	1940	1850
Okres obiegu, w dobach	1,77	3,55	7,16	16,69
$I/MR^2$	0,378	0,347	0,311	0,406

gdzie:  $I$  – to moment bezwładności księżycy (dla kuli  $I_k = 0,4 MR^2$ ).

Spróbuj sformułować możliwie dużo takich wniosków.



2.3. Oblicz czas trwania całkowitego centralnego zaćmienia Słońca, obserwowanego z powierzchni Księżyca. Dla uproszczenia przyjmij, że orbity Ziemi i Księżyca są kołowe i współpłaszczyznowe.

2.4. Na ilustracji przedstawiono Urana wraz z pierścieniami i kilkoma księżycami. Wiedząc, że promień Urana wynosi  $R_U = 25\,400 \text{ km}$ , a jego masa  $M_U = 8,68 \cdot 10^{25} \text{ kg}$  oraz zakładając, że pierścienie i orbity księżyców są kołowe i współpłaszczyznowe, oblicz, w jakim odstępie czasu zostały wykonane przez HST te dwa zdjęcia.



**3.1.** O warunkach klimatycznych na planecie decyduje nie tylko ilość energii uzyskiwanej od gwiazdy, ale również atmosfera planety. Uzasadnij to twierdzenie, analizując model atmosfery całkowicie „przezroczystej” dla promieniowania elektromagnetycznego o długościach fal mniejszych od pewnego  $\lambda_0$  i całkowicie „nieprzezroczystej” dla dłuższych fal. W szczególności oszacuj wartość  $\lambda_0$  dla tak skonstruowanej atmosfery, przy której na Marsie średnia temperatura wynosiłaby 300 K. Załóż, że planeta i Słońce są ciałami doskonale czarnymi. Uwagi i wskazówki.

Ponieważ temperatura Słońca jest dużo wyższa od zakładanej w zadaniu, przyjmij, że całość energii słonecznej, dochodzącej do Marsa, dociera do jego powierzchni.

Dla uproszczenia rachunków można przyjąć przybliżenie liniowe polegające na zastąpieniu funkcji, opisującej prawo Plancka, linią łamaną. W szczególności dla zgrubnego oszacowania rozkładu Plancka w zakresie do okolic maksimum można zastosować prostą

$$E = \frac{E_{\max}}{\nu_{\max}} \nu,$$

gdzie wartości oznaczone indeksem „max” odnoszą się do maksimum rozkładu Plancka, tzn. częstotliwości wynikającej z prawa Wiena i odpowiadającej jej wartości rozkładu Plancka. Prawa dotyczące promieniowania ciała doskonale czarnego mają postać:

$$\text{prawo Plancka } E = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1},$$

$$\text{prawo Wiena } \lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

$$\text{prawo Stefana-Boltzmannna } E_c = \sigma T^4,$$

$$\text{gdzie: } h = 2\pi \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}, \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}, \\ c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}, b = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}.$$

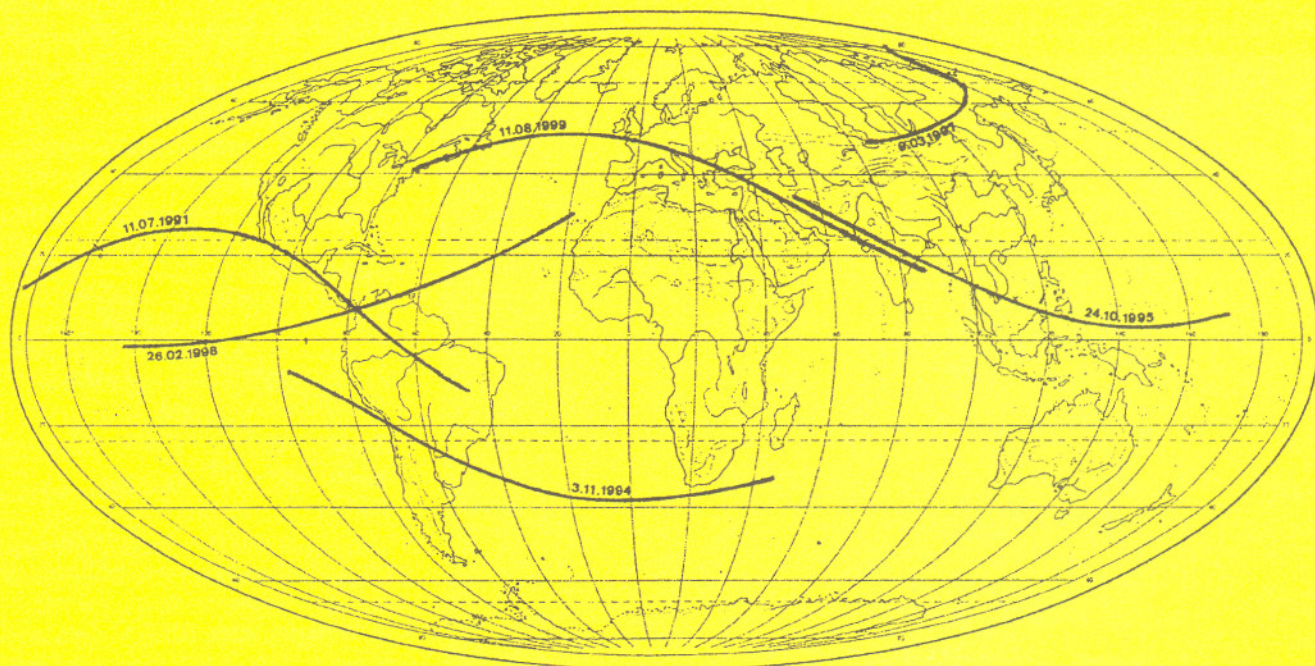
**3.2.** Przelot sondy Galileo w pobliżu księżyców Jowisza umożliwił dokładne pomiary ich pola grawitacyjnego, a w konsekwencji wyznaczenie ich momentów bezwładności. W szczególności wyznaczono moment bezwładności dla Europy, który wynosi  $I = 0,347 Mr^2$ , gdzie  $M$  – masa,  $r$  – promień Europy. Przyjmując bardzo uproszczony model Europy zbudowanej jedynie z jednorodnego jądra pokrytego wodą, określ gęstość tego jądra. Moment bezwładności jednorodnej kuli jest opisany wzorem  $I = 0,4 Mr^2$ .

**3.3.** Zaprojektuj sieć telekomunikacyjną wokół Księżyca, złożoną z możliwie najmniejszej liczby satelitów umieszczonych na orbitach kołowych o równych i możliwie najmniejszych promieniach. Sieć nie musi zapewniać ciągłej łączności, a jedynie istnienie jednoczesnej łączności globalnej w ograniczonych przedziałach czasowych, w których konfiguracja satelitów powinna zapewniać widoczność co najmniej jednego z nich z każdego punktu powierzchni Księżyca.

Określ liczbę satelitów sieci, oblicz ich graniczny okres obiegu oraz podaj (wraz z uzasadnieniem) maksymalną liczbę przedziałów łączności w czasie jednego okresu obiegu.

Jako dane liczbowe przyjmij: promień Księżyca  $r = 1,738 \cdot 10^6$  m oraz drugą prędkość kosmiczną przy powierzchni Księżyca  $v_{II} = 2,38 \cdot 10^3$  m/s.

W rozwiązaniu pominiń ruch obrotowy Księżyca i wpływ oddziaływań perturbacyjnych oraz przyjmij, że Księżyc jest kulą.





3.4. W jakiej minimalnej odległości kątowej powinny znajdować się składniki gwiazdy podwójnej o zbliżonych jasnościach, aby fakt, że jest ona gwiazdą podwójną, można było jeszcze stwierdzić, obserwując jej zakrycie przez Księżyc?

Przyjmij, że obserwator jest w stanie dostrzec zmiany jasności zachodzące w czasie nie krótszym niż 0,1 s. Zakładając, że lokalny profil tarczy Księżyca można przybliżyć odcinkiem, przeanalizuj sytuację, gdy kierunek ruchu składników:

- a) jest prostopadły do tego odcinka,
- b) nie jest do niego prostopadły.

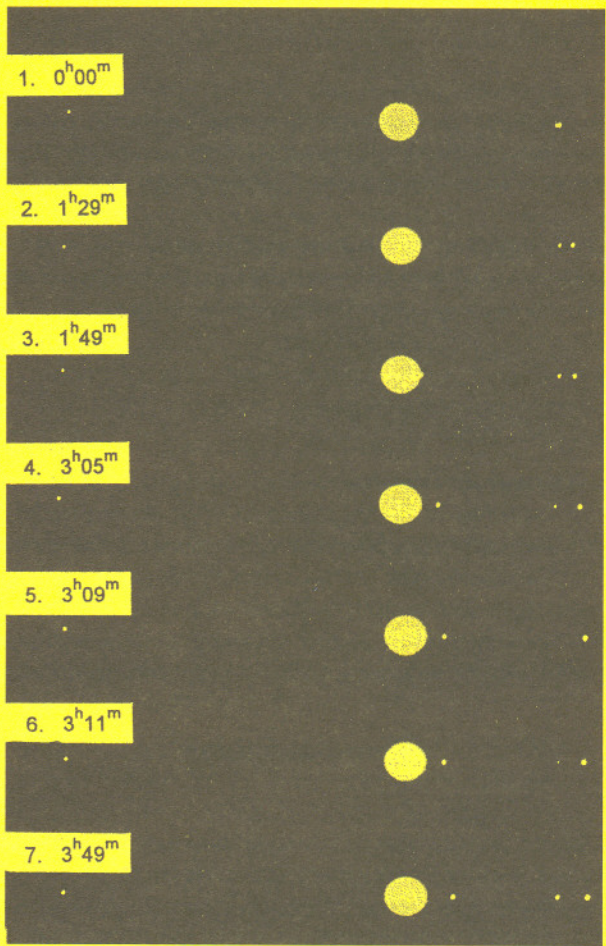
3.5. Na załączonej mapce zaznaczono pasy przebiegów całkowitych zaćmień Słońca z lat 1991–1999.

Aparatura planetarium odtworzy przebieg jednego z nich, obserwowany z pewnego miejsca na Ziemi. Korzystając z mapki (na sąsiedniej stronie) oraz z sytuacji odtworzonej przez aparaturę, wyznacz datę i możliwie dokładnie określ miejsce obserwacji. Podaj pełne uzasadnienie odpowiedzi.

3.6. Fotografie 1–7 przedstawiają zdjęcia układu galileuszowych księżyców Jowisza. Na każdym zdjęciu podany jest odstęp czasu, jaki upłynął od momentu wykonania pierwszego zdjęcia. Dokonaj identyfikacji księżyców oraz zinterpretuj fotografię 5, na której jeden z księżyców nie jest widoczny. Przedstaw na rysunku wzajemne usytuowanie księżyców

w płaszczyźnie ich orbit odpowiadające fotografii 5. Rysunek wykonaj w skali: promień Jowisza = 0,5 cm, przyjmując, że wszystkie orbity są kołowe i współpłaszczyznowe.

Skorzystaj z danych zawartych w Tablicy V – Księżyce planet, *Astronomia Ogólna*, Eugeniusz Rybka.



### Końcowa klasyfikacja

I miejsce i tytuł laureata otrzymał Patryk MACH, uczeń klasy II, V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

II miejsce z tytułem finalisty otrzymali ex aequo: Bartłomiej KOZAKOWSKI, kl. V, Zespół Szkół Elektryczno-Mechanicznych w Legnicy, Paweł MICHAŁEK, kl. III, II Liceum Ogólnokształcące im. Hugona Kołłątaja w Wałbrzychu, Radosław SMOLEC, kl. III, II Liceum Ogólnokształcące im. Króla Jana III Sobieskiego w Grudziądzu oraz Przemysław ŻOŁĄDEK, kl. V, Zespół Szkół Zawodowych Nr 1 w Nowym Dworze Mazowieckim.

**Ponadto w finale uczestniczyli:**

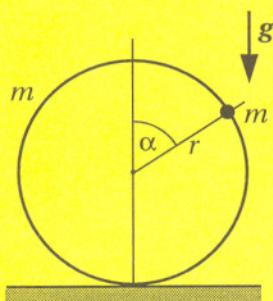
Krzysztof BOLEJKO, kl. III, II Liceum Ogólnokształcące im. Cypriana Kamila Norwida w Jeleniej Górze;  
Tomasz BOSKO, kl. III, Liceum Ogólnokształcące w Radzynie Podlaskim;  
Piotr FITA, kl. IV, Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza

Kościuszki w Wieluniu;  
Miłosz JERKIEWICZ, kl. II, I Liceum Ogólnokształcące im. Stefana Żeromskiego w Jeleniej Górze;  
Rafał KOSTUREK, kl. IV, IV Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie;  
Katarzyna KOZIRÓG, kl. III, I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Łodzi;  
Wojciech KRZYSZTOFIK, kl. III, Liceum Ogólnokształcące im. Stefana Żeromskiego w Opocznie;  
Przemysław KULIG, kl. IV, I Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Chrzanowie;  
Tomasz SKIBA, kl. II, IV Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie;  
Paweł STASIAK, kl. III, I Liceum Ogólnokształcące im. ks. J. Kompally i W. Lipskiego w Ostrowie Wielkopolskim;  
Jacek SZKLARSKI, kl. IV, XIV Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie;  
Artur WIROWSKI, kl. III, I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Łodzi.



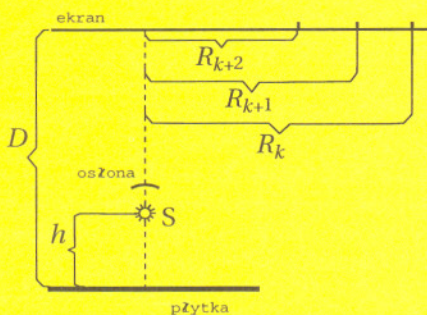
ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Do cienkiej, jednorodnej obręczy o masie  $m$  i promieniu  $r$  przymocowano bardzo małych rozmiarów ciężarek o masie także równej  $m$ , rys. 1. Obręcz może poruszać się w płaszczyźnie pionowej po poziomym stole w polu grawitacyjnym o natężeniu  $g$ . Jaki warunek musi spełniać współczynnik tarcia  $f$  między stołem a obręczą, aby początkowo nieruchoma obręcz z ciężarkiem, znajdującym się w pozycji odpowiadającej  $\alpha = \pi/3$  (rys. 1), rozpoczynała ruch bez poślizgu? Zakładając spełnienie tego warunku, oblicz przyspieszenie kątowe obręczy w chwili początkowej.



Rys. 1

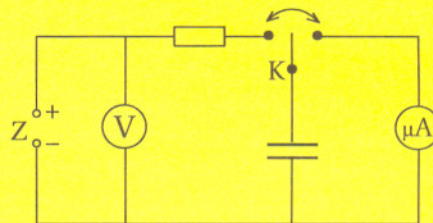
2. Na wysokości  $h = 30$  cm nad cienką, szklaną płytką płaskorównoległą znajduje się punktowe źródło światła monochromatycznego o długości fali  $\lambda = 6,6 \cdot 10^{-5}$  cm. Nad źródłem, w odległości  $D = 270$  cm od powierzchni płytki umieszczono równoległe do niej ekran, na którym widać pierścienie interferencyjne. Jaka jest grubość płytki, jeżeli kolejne trzy jasne pierścienie mają promienie  $R_k = 187,2$  cm,  $R_{k+1} = 172,5$  cm,  $R_{k+2} = 157,7$  cm (rys. 2)?



Rys. 2

3. Do pomiaru bardzo małych pojemności kondensatorów można stosować obwód elektryczny (rys. 3) zawierający oprócz badanego kondensatora źródło stałego napięcia  $Z$ , mikroamperomierz, opornik oraz szybko działający przełącznik  $K$  (tzw.

kontaktron) o dwóch stykach nieruchomych i jednym ruchomym, połączonym z okładką badanego kondensatora. Ruchomy styk kontaktronu dołącza się na przemian do każdego ze styków nieruchomych, w następstwie czego kondensator ładuje się i rozładowuje.



Rys. 3

Ponieważ przełączanie styku i wynikające stąd zmiany natężenia prądu płynącego przez mikroamperomierz następują bardzo szybko, więc wskazówka mikroamperomierza nie drga w takt tych zmian, lecz pokazuje średnią wartość natężenia prądu. (Opornik w obwodzie pełni rolę zabezpieczenia kontaktronu i mikroamperomierza przed uszkodzeniem w razie przypadkowego zwarcia.) Doświadczenie przeprowadzono w ten sposób, że przy ustalonym napięciu zasilania  $U = 80$  V zmieniano częstotliwość  $f$  przełączania styków i odczytywano wskazanie mikroamperomierza. Wyniki przedstawia tabela:

$f$ (Hz)	100	150	200	300	400
$I$ ( $\mu$ A)	1,7	2,5	3,3	4,7	5,5

- a) Objasnij przyczynę liniowej zależności  $I$  od  $f$  (dla części pomiarów) i przyczynę odchylenia od liniowości.
- b) Oblicz pojemność kondensatora.

**Zadanie doświadczalne.** Masz do dyspozycji cienki drut miedziany, dwa statywy umożliwiające zamocowanie drutu, spinacz biurowy, linijkę z podstawką umożliwiającą jej zamocowanie, woltomierz, amperomierz, zasilacz wytwarzający napięcie regulowane w zakresie  $0 \div 12$  V, przewody z końcówkami do połączeń elektrycznych. Zakładając, że zależność długości drutu od temperatury  $T$  dana jest wzorem:

$$l(T) = l_0[1 + \alpha(T - T_0)],$$

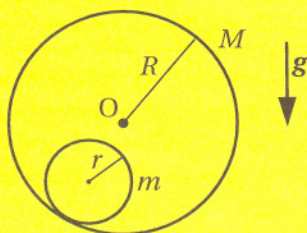
gdzie  $l(T)$ ,  $l(T_0)$  oznaczają długości drutu odpowiednio w temperaturze  $T$  i  $T_0$ , wyznacz temperaturowy współczynnik rozszerzalności liniowej drutu  $\alpha$ . Załóż, że zależność oporu drutu miedzianego od temperatury  $T$  można opisać wzorem:

$$R(T) = R_0[1 + \alpha_R(T - T_0)],$$

gdzie  $R_0$  oznacza opór drutu w temperaturze  $T_0$ , natomiast temperaturowy współczynnik oporu  $\alpha_R = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .



1. Cienka, jednorodna obręcz o promieniu  $R$  i masie  $M$  może obracać się swobodnie w płaszczyźnie pionowej wokół ustalonej osi  $O$ , rys. 1. Wewnątrz tej obręczy, w tej samej płaszczyźnie znajduje się mniejsza, też cienka i jednorodna obręcz o promieniu  $r$  ( $r < R$ ) i masie  $m$ . Mniejsza obręcz podczas ruchu toczy się bez poślizgu po wewnętrznej stronie dużej obręczy. W chwili początkowej obie obręcze są nieruchome, a mała obręcz jest wychylona z położenia równowagi (rys. 1). Przyspieszenie ziemskie ma wartość  $g$ .



Rys. 1

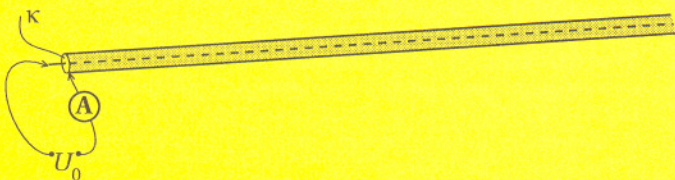
Oblicz częstotliwość małych drgań układu w dwóch granicznych przypadkach:

- 1) masa  $m$  jest znacznie mniejsza od  $M$  ( $m \ll M$ );
- 2) masa  $m$  jest znacznie większa od  $M$  ( $m \gg M$ ).

2. Kabel koncentryczny składa się z przewodzącej zewnętrznej powłoki w kształcie walca oraz z przewodzącego drutu leżącego wzdłuż osi symetrii walcowej, rys. 2. Przestrzeń między drutem i powłoką jest wypełniona jednorodnym materiałem o stałej dielektrycznej  $\kappa = 2,5$ . Materiał ten nie jest doskonałym izolatorem i ma pewną, skończoną oporność właściwą  $\rho = 9,5 \cdot 10^{11} \Omega \cdot m$ . Odcinek kabla o długości  $l_0 = 1$  m ma pojemność elektryczną  $C = 60$  pF. Oblicz natężenie prądu, jakie wskazuje amperomierz, jeżeli między drutem a powłoką kabla o długości  $l = 100$  m jest przyłożone napięcie  $U_0 = 1000$  V, rys. 2. Przyjmij, że opór amperomierza jest równy zero.

Przenikalność elektryczna próżni

$$\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}.$$



Rys. 2

- Wskazówka:** Skorzystaj z prawa Gaussa, wiedząc, że:
- a) przy ustalonym napięciu linie sił pola elektrycznego  $\vec{E}$  między przewodami są takie same w obecności jak i pod nieobecność dielektryka,
  - b) przy ustalonym napięciu linie pola  $\vec{E}$  w przypadku jednorodnego dielektryka pokrywają się z liniami gęstości prądu  $\vec{j} = \rho^{-1} \vec{E}$ ,
  - c) natężenie prądu przepływającego przez element powierzchni  $\Delta S$ , prostopadłej do wektora gęstości prądu  $\vec{j}$ , jest równe  $\Delta I = j \Delta S$ .

**Uwaga.** Zaniedbaj efekty brzegowe występujące na końcach kabla.

3. W odległości  $r = 1,5 \cdot 10^{11}$  m od Słońca krąży planeta. Początkowo planeta była ciałem doskonale czarnym. W wyniku ewolucji przy powierzchni planety powstała atmosfera odbijająca 30% promieniowania słonecznego z zakresu fal o długościach  $\lambda \in (\lambda_0, \infty)$ , gdzie  $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-6}$  m. Promieniowanie o długościach fal krótszych od  $\lambda_0$  planeta pochłania w całości tak jak przed powstaniem atmosfery. Przyjmując promień Słońca  $R_S = 6,96 \cdot 10^8$  m, temperaturę powierzchni Słońca  $T_S = 5,8 \cdot 10^3$  K, określ możliwie dokładnie zmianę (różnicę) temperatury planety spowodowaną utworzeniem się atmosfery. Stała Wiena  $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$  m·K.

Przyjmij, że Słońce jest ciałem doskonale czarnym. Możesz podać rozwiązanie graficzne otrzymanego równania.

**Uwaga.** Widmową zdolność emisyjną promieniowania ciała o temperaturze  $T$  określa funkcja  $\epsilon_T(\lambda)$ , gdzie  $\epsilon_T(\lambda) \Delta \lambda$  jest mocą promieniowania  $1 \text{ m}^2$  powierzchni ciała w zakresie fal o długości z przedziału  $(\lambda, \lambda + \Delta \lambda)$ ;

*Prawo Kirchhoffa:* Zdolność emisyjna ciała jest proporcjonalna do zdolności emisyjnej  $R_T(\lambda)$  ciała doskonale czarnego:  $\epsilon_T(\lambda) = a(\lambda) R_T(\lambda)$ , gdzie  $a(\lambda)$  jest współczynnikiem pochłaniania, zwanym też zdolnością absorpcyjną ciała (w ogólności  $a(\lambda)$  zależy od temperatury  $T$ ; zdolność absorpcyjna ciała doskonale czarnego jest równa 1).

*Prawo Stefana-Boltzmann:* Całkowita moc promieniowania  $1 \text{ m}^2$  ciała doskonale czarnego jest równa  $\int_0^{\infty} R_T(\lambda) d\lambda = \sigma T^4$ , gdzie  $\sigma$  jest stałą Stefana-Boltzmann.

*Prawo Wiena:*  $\lambda = \lambda_{\max} = b/T$  odpowiada maksimum funkcji  $R_T$ .

Dalej podajemy tabelę wartości  $I(t)$ .  $I(t)$  oznacza tę część całkowitej mocy, którą wypromieniowuje  $1 \text{ m}^2$  ciała doskonale czarnego w zakresie fal o długościach od zera do  $\lambda = t \cdot \lambda_{\max}$ ;  $I(t) = (1/\sigma T^4) \int_0^{tb/T} R_T(\lambda) d\lambda$ ,  $I(\infty) = 1$ .



$t$	$I(t)$	$t$	$I(t)$	$t$	$I(t)$
0,40	0,00156	0,54	0,01723	4,50	0,95712
0,41	0,00197	0,55	0,01939	5,00	0,96768
0,42	0,00246	0,56	0,02172	5,50	0,97516
0,43	0,00303	0,57	0,02422	6,00	0,98061
0,44	0,00370	0,58	0,02689	6,50	0,98467
0,45	0,00447	0,59	0,02972	7,00	0,98775
0,46	0,00536	0,60	0,03272	7,50	0,99013
0,47	0,00636	1,00	0,25114	8,00	0,99200
0,48	0,00748	1,50	0,54187	8,50	0,99349
0,49	0,00874	2,00	0,72145	9,00	0,99468
0,50	0,01014	2,50	0,82328	9,50	0,99565
0,51	0,01168	3,00	0,88257	10,00	0,99645
0,52	0,01338	3,50	0,91872	10,50	0,99712
0,53	0,01522	4,00	0,94179	11,00	0,99767

**Zadanie doświadczalne.** Jedną z wielkości charakteryzujących magnetyczne własności materii jest różniczkowa przenikalność magnetyczna  $\mu$  zdefiniowana wzorem:

$$\mu(B_0) = \frac{dB}{dB_0},$$

gdzie  $B$  oznacza indukcję magnetyczną w cewce wypełnionej rdzeniem z danego materiału, a  $B_0$  oznacza indukcję magnetyczną, która wystąpiłaby w tej samej cewce bez rdzenia, przy tym samym natężeniu prądu ( $B_0$  jest proporcjonalna do prądu).

Wyznacz wartość  $\mu$  ferrytu dla  $B_0$  bliskiego zera.

Masz do dyspozycji:

- cewkę o znanej liczbie zwojów,
- walcowy pręt ferrytowy,
- drut miedziany w emalii z odizolowanymi końcówkami,
- linijkę,
- generator napięcia sinusoidalnego o częstotliwości  $f = 10$  kHz i regulowanej amplitudzie,
- opornik o znanym oporze,
- woltomierz napięcia zmiennego,
- przewody elektryczne z końcówkami umożliwiającymi wykonanie połączeń elektrycznych w układzie doświadczalnym.

Uwagi: a) Załóż, że ferryt charakteryzuje się bardzo wąską pętlą histerezy i pole  $B$  jest jednoznacznie określone przez  $B_0$ .

b) Dla zmiennych pól magnetycznych w ferrycie zachodzi związek:

$$\frac{dB}{dt} = \mu(B_0) \frac{dB_0}{dt}.$$

## Końcowa klasyfikacja

W finale uczestniczyło 54 uczniów.

**Laureaci** (w kolejności zajętych miejsc)

Piotr FITA, kl. IV, Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki w Wieluniu, (nauczyciel – Z. Stojęcka);

Jarosław ŁABAZIEWICZ, kl. III, I Liceum Ogólnokształcące im. Stefana Żeromskiego w Jeleniej Górze, (B. Lubiszewski);

Wojciech DYBAŁSKI, kl. IV, I Liceum Ogólnokształcące im. Karola Marcinkowskiego w Poznaniu, (E. Schwermer);

Rafał DEMKOWICZ-DOBRZAŃSKI, kl. IV, XI Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Reja w Warszawie, (M. Rożko);

Lukasz MATYLLA, kl. III, VIII Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, (B. Moldenhawer);

Piotr LEGUTKO, kl. IV, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, (J. Stanek);

Michał MATUSZEWSKI, kl. III, VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach, (J. Greupner);

Piotr MIŁOŚ, kl. III, II Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Mielcu, (J. Kopecki);

Michał Jan PLEBAN, kl. IV, Liceum Ogólnokształcące im. Stefana Żeromskiego w Żyrardowie, (D. Czyżewska);

Rafał MAMAK, kl. IV, I Liceum Ogólnokształcące im. Seweryna Goszczyńskiego w Nowym Targu, (K. Plewa);

Wojciech WASILEWSKI, kl. II, XII Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Wyspiańskiego w Łodzi, (A. Joachimiak)

Hubert NIEWIADOMSKI, kl. IV, I Liceum

Ogólnokształcące im. Bolesława Prusa w Siedlcach, (K. Urban);

Tomasz RADZISZEWSKI, kl. III, Społeczne Liceum Ogólnokształcące w Żarach, (T. Nowak);

Paweł BAJURKO, kl. III, XLVIII Liceum Ogólnokształcące im. Edwarda Dembowskiego w Warszawie, (W. Kopacz);

Paweł WIERZBICKI, kl. IV, II Liceum Ogólnokształcące im. Marii Konopnickiej w Zamościu, (K. Musiał);

Kamil SZOT, kl. IV, XXXI Liceum Ogólnokształcące im. Ludwika Zamenhofs w Łodzi, (A. Pieszyński);

Artur WIROWSKI, kl. III, I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Łodzi, (H. Szyburska);

Michał KIJAK, kl. III, II Liceum Ogólnokształcące im. Ziemi Olkuskiej w Olkuszu, (I. Ratuszny);

Łukasz KŁOSOWSKI, kl. IV, Zespół Szkół Ogólnokształcących Nr 1 im. Stefana Żeromskiego w Łęborku, (W. Czarnobaj);

Grzegorz KLIMA, kl. IV, I Liceum Ogólnokształcące w Legnicy, (L. Stefanek).

### Wyróżnienia:

za rozwiązanie zadania nr 1 w zawodach III stopnia Piotr LEGUTKO (laureat), Krzysztof Łukasz MAZUR, kl. III, II Liceum Ogólnokształcące im. prof. Kazimierza Morawskiego w Przemyślu, (M. Uberman);

za rozwiązanie zadania nr 1 w zawodach II stopnia Rafał DEMKOWICZ-DOBRZAŃSKI (laureat).