delta $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ J·s $\pi=3{,}141592...$

Trwa jubileusz XXV lat *Delty*:

6 czerwca 1973 roku powołano redakcję *Delty*,

8 grudnia odbyło się pierwsze posiedzenie Komitetu Redakcyjnego *Delty*, na którym przedstawiono próbny numer miesięcznika,

1 stycznia 1974 roku ukazał się w kioskach w nakładzie 30 tys. egzemplarzy, w cenie 5 zł, pierwszy numer *Delty*.

XXV lat powinien zamknąć numer 300 miesięcznika, jednak w okresie parcelacji RSW straciliśmy pięć numerów, tak więc numer taki ukaże się jako 5/1999.

Składając Czytelnikom najserdeczniejsze jubileuszowe życzenia, informujemy, iż od czerwca 1998 do maja 1999 w każdym numerze przypomnimy coś z dawnych lat.

Ten okazjonalny dział nazywa się **Stara Delta**.

SPIS TREŚCI

NUMERU 11(294)

W następnym numerze:

Atlas równań różniczkowych

Okładki i ilustracje wykonała
Anna Ludwicka

Wybór artykułów z *Delty* ukazuje się w języku angielskim w sieci Internet pod adresem **http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/**

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 843-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65.
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

Polon był pierwszy

Adam SOBICZEWSKI

1. Wstęp

Zjawisko promieniotwórczości zostało zaobserwowane przez Becquerela w 1896 r. Dopiero później zrozumiano, na czym to zjawisko polega, czym jest to „promieniowanie”. Materiałem, który je wysyłał, były związki uranu. Szybko jednak wyjaśniło się, że promieniotwórczość jest cechą pierwiastka, a nie związku chemicznego, w jakim on występuje. Jej natężenie zależy wyłącznie od ilości (liczby atomów) tego pierwiastka występującego w badanym związku, a nie od rodzaju związku. Zbadanie przez Marię Skłodowską-Curie wszystkich znanych wówczas pierwiastków pokazało, że oprócz uranu tylko jeszcze tor jest promieniotwórczy.

Maria Skłodowska jako studentka Sorbony.

Pierwszym nowym pierwiastkiem promieniotwórczym, który został odkryty (i to właśnie dzięki własności wysyłania tego – nowego wówczas – promieniowania), był polon. Odkryli go Maria Skłodowska-Curie i jej mąż Piotr w roku 1898, tj. dokładnie 100 lat temu. Ogłosili to w lipcu 1898 r., a już w grudniu tego samego roku mogli zakomunikować o odkryciu następnego pierwiastka promieniotwórczego: radu (przedruk artykułu Marii Skłodowskiej-Curie o odkryciu polonu, jak również inne materiały związane z tym wydarzeniem i z osobą uczonej, może znaleźć Czytelnik w zeszycie 2/1998 *Postępów Fizyki*, poświęconym rocznicy tego wydarzenia).

Obecnie wiemy, że zaobserwowane przez Becquerela promieniowanie to cząstki α (tj. jądra helu, złożone z dwóch protonów i dwóch neutronów) i promieniowanie β (elektrony dodatnie lub ujemne). Towarzyszy im z reguły promieniowanie elektromagnetyczne o stosunkowo dużej energii (promieniowanie γ). Byli to więc pierwsi zaobserwowani „wysłannicy” jądra atomowego. Badanie ich było zatem początkiem procesu poznawania jądra, tego bardzo ważnego składnika atomu.

Dzisiaj znamy wiele pierwiastków promieniotwórczych i im chcemy ten artykuł poświęcić. Kilka z nich występuje w sposób naturalny w przyrodzie. Reszta (większość) została wytworzona przez człowieka na drodze reakcji jądrowych. Ten proces syntezy nowych pierwiastków wciąż jeszcze trwa.

2. Pierwiastki promieniotwórcze

Znamy obecnie 31 pierwiastków promieniotwórczych. Jest to dużo, więcej niż 1/4 wszystkich pierwiastków, z czego nie zawsze zdajemy sobie sprawę. W podanej na tylnej okładce tego numeru *Delty* okresowej tablicy pierwiastków (zaczerpniętej z *Postępów Techniki Jądrowej*, tom 40, zeszyt 4, 1997 r.) zaznaczono je kolorami. Ze względu na sposób powstania tych pierwiastków wyróżnione są trzy ich kategorie: pierwiastki promieniotwórcze pierwotne, wtórne i wytworzone przez człowieka. Omówimy je oddzielnie.

2.1. Pierwotne pierwiastki promieniotwórcze

Są to tor i uran (kolor zielony w tablicy pierwiastków na okładce), których czas połowicznego zaniku jest tak długi (porównywalny z wiekiem Ziemi), że przetrwały na Ziemi od czasu ich wytworzenia w procesach astrofizycznych.

2.2. Wtórne pierwiastki promieniotwórcze

Wtórne pierwiastki promieniotwórcze (kolor niebieski) powstają z rozpadu powyższych dwóch pierwiastków pierwotnych: toru i uranu. Są one uczestnikami procesu dynamicznego: powstają przez rozpad pierwiastków pierwotnych i same po pewnym czasie rozpadają się na pierwiastki lżejsze. Gdyby na Ziemi nie było wolnorozpadających się pierwiastków pierwotnych, nie byłoby też na niej i pierwiastków wtórnych, pochodnych. Jest ich siedem. Izotopy ich stanowią

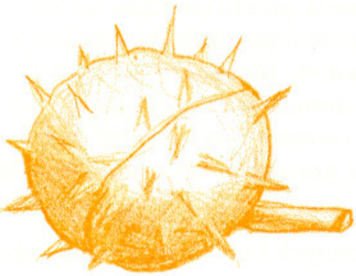
rodziny (szeregi) promieniotwórcze wypełniające przerwę pomiędzy torem i uranem, a najcięższymi pierwiastkami trwałymi (tj. mającymi trwałe izotopy): ołowiem i bizmutem. Do wtórnych pierwiastków promieniotwórczych należą m.in. polon i rad, odkryte przez Marię i Piotra Curie.

2.3. Pierwiastki wytworzone przez człowieka

Wszystkie pierwiastki wytworzone dotychczas przez człowieka (kolor czerwony) są nietrwałe (promieniotwórcze). Jest ich 22. Dwa z nich: technet (Tc, $Z = 43$) i promet (Pm, $Z = 61$), gdzie Z jest liczbą atomową i jednocześnie numerem pierwiastka w tablicy okresowej, mają w tablicy pierwiastków miejsce około środka tablicy, występują więc pomiędzy pierwiastkami trwałymi. Reszta to pierwiastki transuranowe, występujące za uranem ($Z > 92$) i stanowiące zatem górną (wg liczby atomowej Z) jej część.

Technet otrzymany został w 1937 r., a promet w roku 1945. Najtrwalszym izotopem technetu jest ^{97}Tc (czas jego połowicznego zaniku $T_{1/2}$ wynosi 2,6 mln lat), a prometu – ^{145}Pm ($T_{1/2} = 17{,}7$ lat).

Próby wytwarzania (syntezy jądrowej) pierwiastków transuranowych podjęte zostały już w 1934 r. przez Enrica Fermiego w Rzymie. Wkrótce potem podjęli je także Irena Curie w Paryżu i Otto Hahn w Berlinie. Polegały one na naświetlaniu uranu neutronami pochodzącymi ze źródeł naturalnych. Na przykład, małe źródło berylowo-radonowe potrafiło dostarczyć strumienia około miliona neutronów na sekundę. W wyniku takich naświetlań Fermi ze współpracownikami obserwował promieniowanie, które przypisywał nowo utworzonym pierwiastkom transuranowym. Jednak badania chemiczne O. Hahna i F. Strassmana pokazały w 1938 r., że było to promieniowanie radioaktywnych izotopów pierwiastków już znanych, około dwa razy lżejszych od uranu. Stwierdzenie to stanowiło odkrycie zjawiska rozszczepienia jądrowego, wywołanego naświetlaniem uranu przez neutrony. Przypomnijmy bowiem, że rozszczepienie stanowi podział jądra na dwie porównywalne co do wielkości części (fragmenty). Rozszczepienie odkryte więc zostało przypadkiem, przy próbach syntezy pierwiastków transuranowych.



Pierwszej udanej próby syntezy pierwiastka transuranowego dokonali McMillan i Abelson w 1940 r. w Berkeley (USA). Wytworzyli oni neptun (Np, $Z = 93$) na drodze reakcji

$$(*) \qquad n + {}^{238}_{92}\mathrm{U}_{146} \to {}^{239}_{92}\mathrm{U}_{147} \xrightarrow{\beta^-} {}^{239}_{93}\mathrm{Np}_{146}.$$

Zapis ten oznacza, że jądro ^{238}U naświetlone neutronami n przyłącza jeden z nich, dając jądro ^{239}U. To nietrwałe jądro przechodzi po pewnym czasie w jądro ^{239}Np poprzez rozpad β^- (tzn. emisję elektronu i antyneutrina). Przypomnijmy tu jeszcze, że zapis ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}_{A-Z}$ oznacza jądro o liczbie protonów Z, liczbie nukleonów A i symbolu chemicznym X.

W przeprowadzeniu reakcji $(*)$ istotne było posiadanie cyklotronu, zbudowanego w Berkeley przez E.O. Lawrence'a w 1933 r. Użyty bowiem strumień neutronów nie pochodził już ze źródeł naturalnych, jak u Fermiego w Rzymie, lecz z reakcji jądrowej wywołanej naświetlaniem tarczy berylowej przyspieszonymi w cyklotronie deuteronami.

Także przez naświetlanie neutronami otrzymany został na przełomie lat 1944/45 ameryk (Am, $Z = 95$). W tym przypadku jednak neutrony nie pochodziły z cyklotronu, lecz z pierwszego reaktora jądrowego, uruchomionego przez Fermiego w Uniwersytecie w Chicago w grudniu 1942 r.

Jeszcze inne źródło neutronów wykorzystane było w procesie, w którym dokonano pierwszej syntezy einsteinu (Es, $Z = 99$) i fermu (Fm, $Z = 100$). Tutaj neutrony pochodziły z reakcji termojądrowej, jaka zaszła w pierwszym wybuchu termojądrowym „Mike", przeprowadzonym na Pacyfiku w listopadzie 1952 r. Zawarty w bombie termojądrowej izotop uranu ^{238}U naświetlony został przez

Rozwiązanie zadania F 487. Prawdopodobieństwo rozpadu jądra promieniotwórczego w jednostce czasu jest stałe. Zmianę liczby jąder w danej próbce możemy opisać równaniem

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{\tau}N,$$

gdzie τ jest średnim czasem życia. Obliczmy najpierw średnią liczbę N_1 atomów ^{234}Pa. Ponieważ ich czas życia jest bardzo krótki w porównaniu do czasu życia ^{238}U i wieku próbki, więc ustala się stan równowagi – tyle samo atomów ^{234}Pa powstaje, co się rozpada. Oznaczając przez N_0 liczbę atomów ^{238}U, możemy to zapisać w postaci następującego równania

$$dN_1 = N_0\frac{dt}{\tau_0} - N_1\frac{dt}{\tau_1} = 0,$$

skąd wyznaczamy $N_1 = N_0\tau_1/\tau_2$. N_0 praktycznie nie zmienia się, a więc również N_1 pozostaje stałe i rozumowanie można powtórzyć dla przejścia $^{234}\mathrm{Th} \to {}^{234}\mathrm{Pa}$, otrzymując $N_2 = N_1\tau_2/\tau_1 (= N_0\tau_2/\tau_0)$, co pozwala na wyznaczenie szukanego stosunku $N_2/N_1 = \tau_2/\tau_1$.

bardzo krótki czas (rzędu kilku nanosekund) ogromną dawką (rzędu 10^{24}) neutronów. Fakt, że wśród produktów naświetlenia wykryto takie jądra, jak ^{253}Es i ^{255}Fm, świadczy o tym, że jądro ^{238}U wychwyciło 15, a nawet 17 neutronów, zanim doznało pierwszego rozpadu β. Musiały więc powstać tak bogate w neutrony izotopy uranu, jak ^{253}U i ^{255}U, które dopiero po siedmio- i ośmiokrotnym rozpadzie β^- przeszły odpowiednio w jądra ^{253}Es i ^{255}Fm, leżące już na ścieżce trwałości β.

Oprócz neutronów do syntezy pierwiastków transuranowych stosowano także lekkie cząstki (jądra) naładowane. Na przykład kiur (Cm, $Z = 96$), berkel (Bk, $Z = 97$), kaliforn (Cf, $Z = 98$) i mendelew (Md, $Z = 101$) otrzymane zostały przez naświetlanie odpowiednich tarcz cząstkami α.

Mendelew był jednak ostatnim pierwiastkiem, który otrzymano przez naświetlanie tak lekkimi jądrami, jak cząstka α. Do otrzymania cięższych pierwiastków potrzebne już było użycie cięższych pocisków. Powodem jest brak odpowiednio ciężkich tarcz. Tak więc np. nobel (No, $Z = 102$) otrzymano, naświetlając uran $^{238}_{92}$U jądrami neonu $^{22}_{10}$Ne, a pierwiastek 112 – naświetlając ołów $^{208}_{82}$Pb jądrami cynku $^{70}_{30}$Zn.

Staraliśmy się tu zilustrować, w jak różnych procesach (od stosunkowo prostych reakcji jądrowych do wybuchów termojądrowych) i za pomocą jak różnych urządzeń (akcelerator cząstek naładowanych, reaktor jądrowy, bomba termojądrowa) syntetyzowane były pierwiastki transuranowe. Więcej szczegółów na ten temat może znaleźć Czytelnik np. w artykule A. Hrynkiewicza i A. Sobiczewskiego: „Odkrycia najcięższych pierwiastków", *Postępy Fizyki*, 45, 111 (1994).

Prawdopodobieństwo połączenia się w jedną całość dwóch zderzających się jąder bardzo szybko maleje ze wzrostem ładunków i mas tych jąder. Stąd eksperyment, w którym syntetyzowane są najcięższe pierwiastki, trwa kilka tygodni lub nawet kilka miesięcy, a wynikiem jego jest wytworzenie co najwyżej jednego lub kilku atomów nowego pierwiastka. Jeśli wziąć dodatkowo pod uwagę, że atomy te rozpadają się po kilku sekundach lub nawet drobnych częściach sekundy, to staje się jasne, że nie dysponowaliśmy nigdy dotąd jednocześnie więcej niż jednym atomem takiego pierwiastka. Badanie ich jest więc badaniem pojedynczych atomów. Już to jednak wystarczyło, byśmy poznali kilka podstawowych ich własności fizycznych, a nawet chemicznych. Nie są to jednak własności makroskopowe, ale jądrowe i atomowe.

Opis współczesnego eksperymentu, w którym syntetyzuje się najcięższe pierwiastki, może znaleźć zainteresowany tym Czytelnik w artykule P. Armbrustera, S. Hofmanna i A. Sobiczewskiego: „Synteza pierwiastków 110 i 111", *Postępy Fizyki*, 46, 431 (1995). Pewne aspekty takiego eksperymentu były omawiane także przez R. Smolańczuka w artykule „Gdzie kończy się tablica Mendelejewa?", *Delta* 3/1998.

3. Możliwości syntezy dalszych pierwiastków

Jak wspomnieliśmy powyżej, eksperymenty nad syntezą najcięższych pierwiastków są przedsięwzięciami dużymi, trudnymi, długotrwałymi i kosztownymi. Pozwolić sobie na nie mogą tylko niektóre duże laboratoria. Obecnie są to głównie: Instytut Ciężkich Jonów w Darmstadcie (Niemcy) i międzynarodowy Zjednoczony Instytut Badań Jądrowych w Dubnej koło Moskwy, którego członkiem jest także Polska.

W Darmstadcie, gdzie w 1996 r. otrzymany został najcięższy spośród znanych dotychczas pierwiastków (o liczbie atomowej $Z = 112$), trwają prace nad syntezą pierwiastka o $Z = 113$. W Dubnej zaś trwają przygotowania do syntezy pierwiastka o $Z = 114$. Czy próby tych syntez powiodą się za pierwszym razem, czy też na pozytywny ich wynik trzeba będzie długo czekać – pokaże czas.

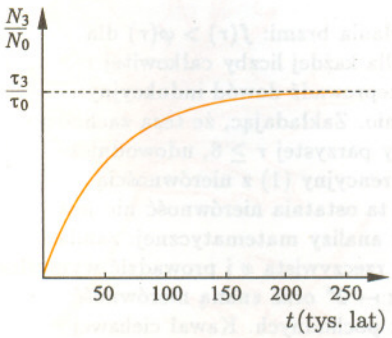
Rozwiązanie zadania F 488.
Wiek próbki można ocenić, mierząc względną koncentrację atomów ^{230}Th i ^{238}U. Ponieważ czas życia ^{230}Th jest porównywalny z szukanym wiekiem, więc stan równowagi nie będzie jeszcze ustalony (porównaj rozwiązanie zadania **F 487**). Za stałą natomiast możemy przyjąć liczbę nowo powstających atomów ^{230}Th w jednostce czasu. Otrzymujemy równanie

$$\frac{N_3(t)}{dt} = \frac{N_0}{\tau_0} - \frac{N_3(t)}{\tau_3},$$

którego rozwiązanie zgadujemy w postaci $N_3(t) = a(1 - e^{-bt})$. Współczynniki a i b wyznaczamy, wstawiając odgadniętą postać do powyższego równania, otrzymując zależność stosunku N_3/N_0 od czasu

$$\frac{N_3(t)}{N_0} = \frac{\tau_3}{\tau_0}(1 - e^{-t/\tau_3})$$

przedstawioną na rysunku.



Widać, że pomiar stosunku N_3/N_0 pozwala na wyznaczenie wieku próbki. Jest to tzw. metoda uranowo-torowa rzeczywiście używana do wyznaczania wieku skał osadowych.

Piękne brzydkie zadanie

Marcin E. KUCZMA

Piękne? – sprawa gustu. Brzydkie? – sprawa interpretacji. Ale po kolei. Chodzi o zadanie szóste z XXXVIII Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej (Argentyna, lipiec 1997). Otóż i jego treść:

Dla liczby całkowitej dodatniej n niech $f(n)$ oznacza liczbę sposobów przedstawienia n w postaci sumy potęg liczby 2 o wykładnikach całkowitych nieujemnych. Nie rozróżniamy takich przedstawień, które różnią się jedynie porządkiem składników. Na przykład $f(4) = 4$, gdyż liczbę 4 można przedstawić na cztery sposoby: 4; 2+2; 2+1+1; 1+1+1+1. Udowodnić, że $2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$ dla każdej liczby całkowitej $n \geq 3$.

Aby mieć jakikolwiek pogląd na urodę zadania, trzeba je najpierw samemu rozwiązać lub przynajmniej poznać rozwiązanie. A metod ataku jest tu sporo. Oto szkicowe przedstawienie kilku z nich; żadne rozwiązanie nie jest jednak podane w całości – zajęłoby to sporo miejsca i odebrało Czytelnikom przyjemność samodzielnego zmierzenia się z problemem. Każde z omawianych rozwiązań ma postać sekwencji kilku małych zadanek; ale nawet rozwiązywanie tych „zadanek” może dać sporo satysfakcji. Bądźmy uczciwi: niektóre z „zadanek” to całkiem pełnowymiarowe zadania...

Teza jest koniunkcją dwóch nierówności; są tu więc, de facto, dwa zadania: oszacowanie górne i dolne. Górne łatwiej udowodnić i dlatego zostanie w dalszym omówieniu pominięte. Czytelnik może to potraktować jako jedno z owych „małych zadanek”; dowód nietrudno uzyskać, korzystając ze wzorów z rozwiązania 1 lub z uwagi, od której zaczyna się rozwiązanie 4.

Trudność zadania kryje się w oszacowaniu dolnym: $f(2^n) > 2^{n^2/4}$ (słusznym zresztą dla wszystkich wykładników całkowitych $n \geq 1$) – i tylko do tej nierówności ograniczymy uwagę w szkicowanych rozwiązaniach. Zatem do dzieła.

Rozwiązanie 1. Udowodnij zależność rekurencyjną

$$(1) \qquad f(2k+1) = f(2k) = f(2k-1) + f(k) \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Wyprowadź z niej wzór

$$f(2r) = f(r) + f(r-1) + \ldots + f(2) + f(1) + 1;$$

wywnioskuj, że $f(4r) = h(r) + \ldots + h(1) + 1$, gdzie $h(i) = f(r+i) + f(r-i+1)$. Wykaż, że $h(r) \geq \ldots \geq h(1)$, i w konsekwencji $f(4r) > 2rf(r)$. Korzystając z tej własności, udowodnij nierówność $f(2^n) > 2^{n^2/4}$ przez indukcję.

Rozwiązanie 2. Na podstawie wzoru z pierwszego rozwiązania pokaż, że $f(8r) > rf(3r)$ oraz $f(6r) > rf(2r)$. Zestawiając te dwa fakty, wywnioskuj, że $f(16r) > 2r^2 f(2r)$ i spróbuj udowodnić nierówność $f(2^n) > 2^{n^2/4}$ przez indukcję. Okaże się, że przejście indukcyjne (od n do $n+3$) wymaga założenia, że $n \geq 7$. Pomyśl, jak uzasadnić tezę dla $n \leq 9$.

Rozwiązanie 3. Niech $\varphi(r) = 2^{(\log_2 r)^2/4}$. Teza zadania brzmi: $f(r) > \varphi(r)$ dla liczb postaci $r = 2^n$. Otóż nierówność ta zachodzi dla każdej liczby całkowitej $r \geq 4$, niekoniecznie będącej całkowitą potęgą dwójki. Przeprowadź dowód indukcyjny: przypadki $r = 4, 5, 6, 7$ trzeba sprawdzić bezpośrednio. Zakładając, że teza zachodzi dla liczb naturalnych mniejszych od ustalonej liczby parzystej $r \geq 8$, udowodnisz jej słuszność dla r oraz $r+1$, zestawiając wzór rekurencyjny (1) z nierównością $\varphi(2k+1) < \varphi(2k-1) + \varphi(k)$ (dla $k = 4, 5, 6, \ldots$); ta ostatnia nierówność nie jest jednak wcale oczywista. Do jej dowodu użyj metod analizy matematycznej: zamiast argumentu całkowitego k trzeba rozważać zmienną rzeczywistą x i prowadzić wymyślne przekształcenia, wykorzystując wypukłość funkcji $x \mapsto 2^x$ oraz znaną nierówność $\ln(1+t) \leq t$. Miejscami może się przydać rachunek pochodnych. Kawał ciekawej roboty.

Rozwiązanie 4. Zauważ, że $f(2^n)$ jest liczbą ciągów $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ o wyrazach całkowitych $x_i \geq 0$, spełniających nierówność

$$(2) \qquad 2x_1 + 2^2 x_2 + \ldots + 2^n x_n \leq 2^n;$$

niech X_n będzie zbiorem wszystkich takich ciągów. Dla dowolnego ciągu $\mathbf{x} \in X_n$ oraz dla dowolnej pary liczb całkowitych $a, b \geq 0$, spełniających warunek $a + 2b \leq 2^{n+1}$, przyjmij $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{n+3}) = (a,\ 2x_1{+}c_0,\ 2x_2{+}c_1,\ \ldots,\ 2x_n{+}c_{n-1},\ c_n,\ 0)$, gdzie $c_0, \ldots, c_n$ są cyframi zapisu dwójkowego liczby b $(b = \sum 2^i c_i)$. Wykaż, że $\mathbf{z} \in X_{n+3}$ oraz że przyporządkowanie $(a, b, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{z}$ jest różnowartościowe. Wywnioskuj, że $f(2^{n+3}) \geq (2^n + 1)^2 f(2^n)$ i przeprowadź indukcyjny dowód tezy $f(2^n) > 2^{n^2/4}$. Przejście indukcyjne (od n do $n{+}3$) będzie wymagało założenia, że $n \geq 5$. Pomyśl, jak uzasadnić tezę dla $n \leq 7$.

Rozwiązanie 5. Niech W_n będzie zbiorem tych ciągów $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ o wyrazach całkowitych nieujemnych, które spełniają nierówności $2^i x_i \leq 2^n/n$ dla $i = 1, \ldots, n$. Ile masz możliwych wartości x_i dla ustalonego i? Ponieważ $W_n \subset X_n$ (warunek (2)), dostaniesz nierówność

(3) $$f(2^n) \geq (\text{liczba elementów zbioru } W_n) > n^{-n} 2^{n(n-1)/2}.$$

Ta ostatnia liczba jest większa od $2^{n^2/4}$, gdy $n \geq 19$. A jak sobie poradzić z mniejszymi n?

Rozwiązanie 6. Teraz litery x_i oznaczają zmienne *rzeczywiste*. Dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ oraz c zbiór

$$\Delta = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon\ \ x_i \geq 0, \quad a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \leq c\}$$

jest n-wymiarowym sympleksem, a jego n-wymiarowa objętość jest równa $c^n/(p \cdot n!)$, gdzie $p = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ (to dla Czytelników oswojonych z geometrią wielowymiarową). Udowodnij, że liczba punktów o współrzędnych całkowitych, leżących w tym sympleksie, nie jest mniejsza niż jego objętość. Gdy $a_i = 2^i$ oraz $c = 2^n$, wówczas liczba ta jest równa $f(2^n)$; por. warunek (2). Stąd

(4) $$f(2^n) \geq 2^{n(n-1)/2}/n!\,.$$

I znów: uzyskana liczba jest większa od $2^{n^2/4}$, ale dopiero, gdy $n \geq 12$. Konieczne jeszcze jakieś uzasadnienie dla mniejszych n.

Rozwiązanie 7. Dla $n, k = 0, 1, 2, \ldots$ niech $F(n,k)$ będzie liczbą ciągów $(x_1, \ldots, x_n)$ o wyrazach całkowitych $x_i \geq 0$, spełniających nierówność $2x_1 + 2^2 x_2 + \ldots + 2^n x_n \leq k \cdot 2^n$. Tak więc $F(n,1) = f(2^n)$ (warunek (2)). Wyprowadź wzór rekurencyjny

$$F(n,k) = F(n{-}1,\,0) + F(n{-}1,\,2) + F(n{-}1,\,4) + F(n{-}1,\,6) + \ldots + F(n{-}1,\,2k);$$

$F(0,k) = F(n,0) = 1$. Udowodnij, że $F(n,k) \geq 2^{n(n-1)/2} k^n / n!$ dla $n, k \geq 0$ (indukcja względem n). Dla $k = 1$ daje to nierówność (4), z prawą stroną większą od $2^{n^2/4}$ dla $n \geq 12$. Tezę dla mniejszych n można dostać z uzyskanej przed chwilą rekurencji.

Siedem rozwiązań. A to jeszcze nie koniec. Można użyć funkcji tworzących; metoda ta, jako mniej elementarna, została tu pominięta. Można ubrać niektóre z powyższych rozwiązań w „sukienkę kombinatoryczną"; możliwe są przeróżne odmiany i wariacje wszystkich pokazanych sposobów. Warto zauważyć, że metody rozwiązań należą do różnorodnych działów matematyki: do kombinatoryki, teorii liczb, algebry, analizy, nawet geometrii.

Bogactwo idei matematycznych to niekwestionowany walor zadania. Czy wystarczy, aby je nazwać *pięknym*? Jako się rzekło: rzecz gustu. Można w każdym razie zrozumieć tych matematyków, których zadanie zauroczyło. Ale skoro piękne, to dlaczego brzydkie?

Jeśli Czytelnik potraktował serio propozycję próby sił przy atakowaniu „małych zadanek", z których składają się powyższe rozwiązania, zapewne był zaskoczony trudnościami, które napotkał. Szczególnie irytujące mogły być trudności z uzyskaniem dowodu dla niewielkich n; zauważmy, że problem ten jest obecny we wszystkich rozwiązaniach z wyjątkiem pierwszego.

Właściwie, co za problem? To tylko kwestia bezmyślnego sprawdzenia tezy dla kilku wyrazów ciągu. Tak; ale, na przykład, osiemnaście wyrazów ciągu $f(2^1), f(2^2), f(2^3), \ldots$ (w rozwiązaniu piątym) to ćwierć miliona wyrazów ciągu $f(1), f(2), f(3), \ldots$. Kto ciekawy, niech spróbuje obliczyć te wyrazy, korzystając ze wzorów rekurencyjnych (1). Nie na kartce papieru – na komputerze! Problem nie z mocą obliczeniową, tylko z pojemnością pamięci: aby ze wzoru (1)

wyznaczyć $f(1998)$, trzeba znać $f(999)$; w każdej chwili trzeba pamiętać wszystkie wcześniejsze wyrazy (no, połowę).

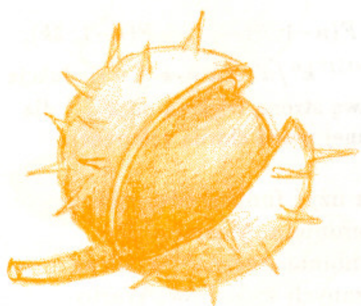
Postawmy się teraz w sytuacji uczestnika Olimpiady, który nie miał szczęścia wpaść na pomysł przedstawiony w pierwszym rozwiązaniu. Znalazł inny dowód, i tylko – bagatelka – nie umiał sobie poradzić z kilku (kilkuset) tysiącami wyrazów początkowych. Ale jeżeli jest to dowód indukcyjny – tak, jak w rozwiązaniach 2, 3, 4 – i jeżeli brak uzasadnienia tezy dla wartości wyjściowej, to *nic nie zostało udowodnione*. Z oczywistych chyba powodów nie było to przy ocenianiu traktowane w ten sposób; dowody, w których nie brakowało niczego poza owym nieszczęsnym sprawdzeniem, były uważane za „zasadniczo poprawne", z usterką, która kosztowała nie więcej niż jeden punkt.

W rozwiązaniach 5, 6, 7 sytuacja jest trochę inna: sprawdzenie tezy dla małych n nie jest potrzebne w dowodzie dla większych n. Zauważmy teraz, że rezultat uzyskany w tych rozwiązaniach jest, w pewnym sensie, znacznie mocniejszy niż to, czego się żąda w zadaniu. Niech $g(n) = \log_2 f(2^n)$. Teza zadania orzeka, że $g(n) > \frac{1}{4}n^2$. Nierówność (3) z rozwiązania 5 pokazuje zaś, że

$$g(n) > \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n - n\log_2 n; \tag{5}$$

a nierówność (4), otrzymana w rozwiązaniach 6 i 7, jest jeszcze trochę silniejsza. W połączeniu z drugą częścią tezy zadania ($g(n) < \frac{1}{2}n^2$) oszacowanie (5) daje całkiem niezłą informację o asymptotycznym zachowaniu ciągu $g(n)$, gdy $n \to \infty$; w każdym razie znacznie lepszą niż podana nierówność $g(n) > \frac{1}{4}n^2$. Tylko, jak na złość, nie implikuje tej ostatniej nierówności dla małych n.

I w ten sposób praca zawodnika, zawierająca rezultat matematycznie bardziej wartościowy, okazywała się być rozwiązaniem *niepełnym* – w odróżnieniu od pracy, w której dowodzi się „tylko" oszacowania $g(n) > \frac{1}{4}n^2$, ale za to dla wszystkich n. Czy to wystarczająco uzasadnia nazwanie zadania *brzydkim*?



Słowa krytyki należą się komisji zadaniowej; a ponieważ byłem członkiem tejże, będzie to samokrytyka. Trochę wyjaśnień. Zadania na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną wybiera Jury Olimpiady złożone z przewodniczących delegacji uczestniczących państw; robi to w ciągu dwóch dni poprzedzających zawody. Zgłoszone wcześniej propozycje zadań liczy się na setki. Aby Jury mogło w ogóle cokolwiek przez te dwa dni zdziałać, konieczna jest jakaś wstępna selekcja. Tym się zajmuje *komisja zadaniowa*, mająca kilka tygodni na dokładne zapoznanie się z wszystkimi proponowanymi zadaniami. Tym razem w pracach komisji zadaniowej uczestniczyło kilku matematyków spoza kraju organizującego olimpiadę – po jednym z Brazylii, Bułgarii, Nowej Zelandii i Polski. Naszą rolą było wybranie około 30 zadań i przekazanie ich na forum Jury, w formie opracowania zawierającego komentarze, wzorcowe metody rozwiązań oraz ewentualne sugestie niewielkich zmian treści.

Byliśmy świadomi tego, że przy niektórych metodach podejścia pojawia się kłopot z małymi wartościami n. Dodajmy jednak (gwoli usprawiedliwienia?), że w każdym z przedstawionych powyżej rozwiązań problem ten *da się* pokonać, i to metodami podobnymi do użytych w danym rozwiązaniu; komputer nie jest potrzebny. Na czym więc polegał nasz błąd? Nie uświadomiliśmy sobie, jak duże trudności sprawi to zawodnikom – i to trudności bezsensowne, zważywszy istotną „matematyczną" zawartość dowodzonej tezy.

Może powinniśmy byli zaproponować zmianę polecenia zadania na coś takiego:

Udowodnić, że $2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$ *dla dostatecznie dużych* n?

Albo: *Udowodnić, że istnieje taka stała* $C > 0$, *że* $C \cdot 2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$ *dla* $n \geq 3$?

Czy wręcz: *Udowodnić, że dla każdej liczby* $\lambda < \frac{1}{2}$ *istnieje taka liczba naturalna* n_0, *że* $2^{\lambda \cdot n^2} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$ *dla* $n \geq n_0$?

Rozwiązanie zadania M 862.
Wprost z definicji x_n otrzymujemy ciąg równości

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 4 &= (x_n^2 - 2)^2 - 4 = \\ &= x_n^2(x_n^2 - 4) = \\ &= x_n^2 x_{n-1}^2 (x_{n-1}^2 - 4) = \ldots = \\ &= (x_n x_{n-1} \ldots x_1)^2 (x_1^2 - 4) = \\ &= 21(x_1 \ldots x_n)^2. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_1 \ldots x_n}\right)^2 = 21 + \frac{4}{(x_1 \ldots x_n)^2}$$

dla dowolnego n. Ponieważ z nierówności $x \geq 2$ wynika $x^2 - 2 \geq 2$, więc dla dowolnego n mamy $x_n \geq 2$ i widać już, że szukana granica jest równa $\sqrt{21}$.

Rozwiązanie zadania M 863.
Rozpatrzmy ciąg $\{y_n\}$ „sprzężony” do $\{x_n\}$, tzn. $y_n = (a - b\sqrt{d})^n$. Łatwo sprawdzić, że wtedy $y_n = k_n - l_n\sqrt{d}$. Ponieważ liczby a, b są dodatnie, więc mamy $\left|\frac{a-b\sqrt{d}}{a+b\sqrt{d}}\right| < 1$ i dlatego ciąg $\frac{y_n}{x_n} = \left(\frac{a-b\sqrt{d}}{a+b\sqrt{d}}\right)^n$ dąży do zera. Mamy stąd

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2k_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n+y_n}{x_n} = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = 1$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2l_n\sqrt{d}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n-y_n}{x_n} = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = 1,$$

czyli ostatecznie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{k_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{2k_n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{2l_n}} = \sqrt{d}.$$

Tylko że przy każdym z tych przeformułowań *treść* zadania staje się cięższa, traci elegancję. I wracamy do tytułu snutych rozważań (piękne brzydkie). Co lepsze? Ładna treść, brzydkie rozwiązanie? Ładne rozwiązanie, brzydka treść? Dylemat: coś za coś. Zręcznego wyjścia nie widzę. Ale faktem jest, że w materiale dla Jury, opracowanym przez naszą komisję, „problem małych n” został zasygnalizowany nie dość wyraziście.

Na koniec jeszcze kilka uwag. Trzymajmy się oznaczenia $g(n) = \log_2 f(2^n)$. W zadaniu należy dowieść, że $\frac{1}{4}n^2 < g(n) < \frac{1}{2}n^2$. Jest to typowe zagadnienie estymacyjne. Między prawą i lewą stroną jest ogromna przepaść. Jak można poprawić dolne oszacowanie, pokazuje nierówność (5); zgodnie ze zwyczajami przyjętymi w badaniach asymptotycznych nie zwracamy już teraz uwagi na żaden początkowy skończony odcinek ciągu $g(n)$. Oszacowanie górne (uznane na wstępie za część tezy zasługującą na mniej uwagi) także można poprawiać. Potrafię, na przykład, pokazać, że

$$\tfrac{1}{2}n^2 - n\log_2 n + An < g(n) < \tfrac{1}{2}n^2 - n\log_2 n + Bn,$$

gdzie $A = \log_2 \mathrm{e} - \frac{1}{2}$, $B = \log_2(3\mathrm{e}) - \frac{1}{2}$.

W problemach estymacyjnych nie ma czegoś takiego, jak „najlepszy rezultat” – chyba że uda się znaleźć *dokładny wzór* dla wyrazów ciągu; ale wtedy to już nie jest zagadnienie estymacyjne. Każde poprawienie oszacowania, czy to dolnego, czy górnego, może być znaczącym postępem. Byłbym bardzo zainteresowany wiadomością o tym, że w napisanej wyżej nierówności podwójnej da się zwiększyć stałą A lub zmniejszyć stałą B. A jeszcze lepiej, gdyby udało się je zrównać – tak, by „rozwarcie nożyc” zeszło do poziomu wyrazów rzędu niższego niż $C \cdot n$. Drodzy Czytelnicy: to kolejne „małe zadanko”!

Rozwiązanie zadania M 864.
Mamy

$$a_n^2 = \frac{1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2} = \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1}.$$

Stąd wynika już, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pożytek z funkcji stałej

Funkcja stała na przedziale ma w nim, jak wiadomo, pochodną stale równą zeru; co więcej, funkcja, która ma w przedziale pochodną stale równą zeru, jest w tym przedziale stała. Czy tak oczywiste fakty mogą być przydatne? Mogą.

Załóżmy, że mamy funkcję f z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, wszędzie różniczkowalną i równą swojej pochodnej oraz przyjmującą dla $x = 0$ wartość 1. Wykażemy, że tą funkcją musi być e^x. W tym celu obliczmy pochodną funkcji $g(x) = f(x)\cdot \mathrm{e}^{-x}$. Ze wzoru na pochodną iloczynu otrzymujemy

$$g'(x) = f'(x)\cdot\mathrm{e}^{-x} - f(x)\cdot\mathrm{e}^{-x}.$$

Ale $f' = f$, więc $g'(x) = 0$ dla każdego x w $\mathbb{R}$. Funkcja $g(x)$ jest więc stała, po podstawieniu $x = 0$ (pamiętamy, że $f(0) = 1$) stwierdzamy, że jej jedyną wartością jest 1, a stąd już widać gołym okiem, że $f(x) = \mathrm{e}^x$. Lekkie, łatwe i przyjemne.

Spróbujmy dalej. Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi w $\mathbb{R}$, takimi, że $f' = -g$, $g' = f$, $f(0) = 1$ i $g(0) = 0$. Domyślasz się, Czytelniku, o kim mowa? Jeśli nie (a nawet jeśli tak), zacznij od wykazania, że funkcja $h(x) = (f(x) - \cos x)^2 + (g(x) - \sin x)^2$ jest stała. Reszta to już drobiazg.

Można by powiedzieć za Archimedesem: dajcie mi funkcję stałą, a udowodnię wszystko!

W.B.

mała delta

Malowane klocki

W długie, listopadowe wieczory można – z braku lepszych i poważniejszych zajęć – pomęczyć kolegów i osoby starsze pytaniem: *na ile sposobów można pomalować czworościan foremny, malując każdą jego ścianę innym z czterech danych kolorów*? Po wyłączeniu wzruszeń ramionami i odpowiedzi niecenzuralnych pozostałe dadzą się z grubsza podzielić na dwie kategorie.

Typ 1: To proste, są $4! = 24$ różne sposoby – pierwszą ścianę można bowiem pomalować na cztery sposoby, drugą już tylko na trzy sposoby, trzecią na dwa sposoby, a do malowania czwartej ściany zostaje nam tylko jeden kolor.

Typ 2: To proste, są jedynie dwa sposoby. Wyobraźmy sobie bowiem, że cztery kolory ścian to: zielony, żółty, czerwony i niebieski. Zawsze można postawić czworościan na ścianie czerwonej i obrócić tak, by widzieć tylko ścianę niebieską. Oczywiście, są wtedy dokładnie dwie możliwości położenia ściany zielonej i ściany żółtej: jedna z nich musi być ukryta za ścianą niebieską po lewej stronie, a druga – po prawej. Innych pomalowań nie ma.

Jak powiedziałby rabin ze starego dowcipu, rację ma i ten, kto udziela pierwszej odpowiedzi, i ten, kto udziela odpowiedzi drugiej, i wreszcie Ty, Drogi Czytelniku, który stwierdzasz oczywiście, że co najmniej jedna z odpowiedzi musi być błędna.

Otóż, osoba udzielająca odpowiedzi pierwszego typu wyobraża sobie (inna sprawa, na ile świadomie) czworościan o *ponumerowanych* ścianach. Przecież odpowiedź pierwszego typu ma sens tylko wtedy, gdy wiemy, która ściana czworościanu jest *pierwsza*, która *druga*, która *trzecia*, a która *czwarta*. Kto więc mówi o 24 pomalowaniach, wyobraża sobie raczej czworościenną kostkę do gry niż drewniany klocek o czterech nieodróżnialnych ścianach.

Jeśli natomiast nie chcemy uznawać za różne takich pomalowań, że jedno z nich można otrzymać z drugiego, odpowiednio obracając czworościan w przestrzeni, to wówczas właściwa jest, oczywiście, odpowiedź druga. Pojawiający się w niej wynik 2 jest dwanaście razy mniejszy od wyniku 24 podawanego w pierwszej odpowiedzi. Można by spytać, dlaczego akurat 12, albo raczej: czy liczba 12 ma tu jakiś szczególny ukryty sens?

Odpowiedzieć na to pytanie nie jest trudno. Otóż, w odpowiedzi pierwszej wszystkie pomalowania, które można uzyskać, obracając rozmaicie czworościan pomalowany w pewien ustalony sposób, liczymy osobno. Zatem liczba wszystkich pomalowań powinna być tyle razy większa od dwójki (zjawiającej się w odpowiedzi drugiej, gdy utożsamiamy malowania różniące się jedynie położeniem klocka

w przestrzeni), ile jest różnych obrotów przestrzeni trójwymiarowej przeprowadzających czworościan foremny na siebie. A tych obrotów – wliczając obrót identycznościowy – jest akurat 12.

Przekonać się o tym można na dwa sposoby. Po pierwsze, jak udowodnił Leonard Euler, *każde przemieszczenie czworościanu, nakładające go na siebie, jest obrotem wokół pewnej osi*. W przypadku czworościanu mamy cztery osie obrotu, przechodzące przez któryś wierzchołek i środek przeciwległej do niego ściany (wokół każdej z nich można czworościan obrócić o 120 lub 240 stopni) oraz trzy osie obrotu łączące środki przeciwległych (skośnych) krawędzi – wokół każdej z nich można czworościan obrócić o 180 stopni. Daje to $4 \cdot 2 + 3 = 11$ różnych obrotów, do których trzeba dorzucić jeszcze dwunasty, identycznościowy. Komu się ten rachunek nie podoba, może liczyć inaczej. Wyobraźmy sobie, że czworościenny klocek, którego każda ściana ma inny kolor, stawiamy na stole tak, by widzieć jedną krawędź i dwie przylegające do niej ściany. Można to zrobić na 12 sposobów – krawędzi jest sześć, a każdą ścianę z pary przylegającej do danej krawędzi będziemy raz widzieć po lewej, a raz po prawej stronie. Tak czy owak, matematyk powie o tym wszystkim, że *grupa obrotów czworościanu foremnego jest dwunastoelementowa*.

Teraz już bardzo łatwo odpowiedzieć na pytanie, na ile sposobów można pomalować klocek sześcienny, malując każdą jego ścianę innym z sześciu kolorów. Gdyby ściany były ponumerowane (jak w przypadku kostki do gry), to wszystkich pomalowań mielibyśmy $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$. Jeśli natomiast nie chcemy liczyć osobno pomalowań różniących się jedynie położeniem sześciennego klocka w przestrzeni, to liczbę 720 trzeba jeszcze podzielić przez liczbę takich obrotów przestrzeni trójwymiarowej, które przeprowadzają sześcian na siebie. Tych obrotów jest 24, a zatem sposobów pomalowania sześciennego klocka – 30. Ostatnią informację (bez uzasadnienia) można znaleźć w siódmym rozdziale *Kalejdoskopu matematycznego* Hugona Steinhausa.

Steinhaus pisze też, że gdy z 30 takich pomalowanych modeli wybierzemy jeden, to z pozostałych 29 można dobrać 8 i złożyć z nich większy sześcian o takim samym rozkładzie kolorów na ścianach, jak u małego sześcianu, a przy tym tak, by kolory ścian stykających się były zgodne.

Kto nie chce brać tego twierdzenia na wiarę, niech sam policzy obroty: są trzy osie obrotu łączące środki przeciwległych ścian sześcianu (wokół każdej z nich można obrócić sześcian o 90, 180 lub 270 stopni), cztery osie obrotu łączące pary przeciwległych wierzchołków (wokół każdej z nich można obrócić sześcian o 120 lub 240 stopni) i sześć osi obrotu łączących środki przeciwległych krawędzi (wokół każdej z nich można obrócić sześcian o 180 stopni). Daje to razem $3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 23$ obroty, do których trzeba jeszcze dorzucić dwudziesty czwarty, identycznościowy. Równoważnie, jeśli chcemy sześcian, którego każda ściana ma inny kolor, ustawić na stole tak, by widzieć jedno naroże i trzy przylegające doń ściany, to możemy to zrobić na $8 \cdot 3 = 24$ sposoby: trzeba zdecydować się na jedno z ośmiu naroży, a potem postanowić, która z trzech zbiegających się w nim ścian będzie na górze.

Obliczenia ułatwi obserwacja, że odcinki łączące środki sąsiednich ścian sześcianu są krawędziami ośmiościanu foremnego, a odcinki łączące środki sąsiednich ścian dwunastościanu foremnego są krawędziami dwudziestościanu foremnego.

Dla porządku dorzućmy jeszcze, że foremny klocek ośmiościenny można pomalować na 1680 sposobów, dwunastościenny na 7983360 sposobów, a dwudziestościenny na 40548366802944000 (za każdym razem zakładamy, że: (1) kolorów jest tyle, ile bryła ma ścian, (2) każdą ścianę malujemy innym kolorem, (3) malowania uzyskiwane z obracania klocka, pomalowanego w ustalony sposób, uznajemy za identyczne). To już jednak potrafiłbyś, Czytelniku, sprawdzić samodzielnie – prawda?

Małą Deltę przygotował Paweł STRZELECKI

Trzy rozwiązania zadania o 101 liczbach (5/1974)

Aleksander PEŁCZYŃSKI

W bieżącym roku szkolnym odbywa się w naszym kraju XXV Olimpiada Matematyczna. Miał więc być artykuł „na zamówienie". Powstało coś, co od biedy mogłoby się nadawać na 26 rocznicę. Trudnym i ważnym obowiązkiem Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej jest wybór zadań na zawody. Proponowane zadanie nie może być znane, np. wzięte z jakiegoś dostępnego zbioru zadań; nie może być ani za łatwe, ani za trudne; powinno posiadać kilka różnych rozwiązań, które dadzą się zredagować jak najkrócej. Wreszcie do zrozumienia i do rozwiązania zadania powinna wystarczać znajomość matematyki w zakresie programu szkoły średniej; a najlepiej, gdy zadanie nie wymaga żadnej wiedzy szkolnej, tak że jest ono jednakowo dostępne i dla ucznia szkoły podstawowej, i dla członka rzeczywistego Polskiej Akademii Nauk. Podobnie, jak nie spotyka się w życiu idealnych ludzi i przedmiotów, tak też nie ma prawdopodobnie idealnych zadań. Opowiem historię związaną z pewnym zadaniem bliskim idealnego, gdyby nie to, że okazało się ono trochę za trudne.

W 1950 roku, jako student I roku matematyki, przeczytałem w czasopiśmie *Matiematika w Szkole* sprawozdanie z XIII Moskiewskiej Olimpiady Matematycznej. Jedno z zadań finałowych brzmiało: „Liczby od 1 do 101 wypisano w dowolnym porządku. Udowodnić, że można z tych 101 liczb wykreślić 90 tak, aby pozostałych 11 tworzyło ciąg monotoniczny, tzn. albo ciąg malejący, albo rosnący".

Rozwiązania nie podano. Ze sprawozdania wynikało, że zadanie to rozwiązał tylko jeden uczestnik zawodów.

Dla kilku moich kolegów z pierwszego roku matematyki i dla mnie oznaczało to wyzwanie. My też potrafimy rozwiązać to zadanie. Niestety, chęci nie wystarczą. Mimo usilnych rozmyślań, a następnie zbiorowych dyskusji i dzielenia się doświadczeniem upragniony pomysł nie przychodził i zadanie pozostało nie rozwiązane nie tylko w ciągu kilku godzin (tj. czasu przeznaczonego na rozwiązanie w czasie zawodów), ale też wiele dni i tygodni. Stwierdziliśmy jedynie, że liczby 101 nie można zastąpić żadną liczbą mniejszą, gdyż np. ciąg 100 liczb

$$91, 92, \ldots, 99, 100, 81, 82, \ldots, 89, 90, \ldots, 1, 2, \ldots, 9, 10$$

nie zawiera podciągu monotonicznego składającego się z więcej niż 10 wyrazów (dlaczego? – porównaj dalej rozwiązanie I (3)). Ktoś zauważył jednak, że zadanie można prawdopodobnie uogólnić na dowolne liczby naturalne postaci n^2+1. Sprawdziliśmy, że tak jest dla liczby $5 = 2^2+1$ i liczby $10 = 3^2+1$. Dla ciągów siedemnastowyrazowych $17 = 4^2+1$ zgubiliśmy się w rachunkach. Zaczęliśmy opowiadać o zadaniu „o stu jeden liczbach" rozmaitym ludziom. Między innymi napisałem list do Poznania do kolegi X, laureata I Olimpiady Matematycznej, a jeden z moich kolegów zaznajomił z treścią zadania nieodżałowanego profesora Stefana Kulczyckiego (1893–1960). Oba te kontakty dały pożądany efekt. Z Poznania przyszedł list zaczynający się od słów:

Drogi Olku!
Nie dziwię się, że zadanie o stu jeden liczbach rozwiązał w Moskwie tylko jeden zawodnik, a wy w Warszawie nie potrafiliście go zrobić, skoro ja zużyłem na rozwiązanie pełne sześć godzin.

Ten dowód skromności autora był jednak poparty pięknym, choć skomplikowanym, rozwiązaniem zadania, niewiele różniącym się od rozwiązania przysłanego nam równocześnie przez profesora Kulczyckiego.

Rozwiązanie I (kolegi X)

Udowodnimy indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej n, z dowolnego ciągu n^2+1 różnych liczb naturalnych, można wykreślić n^2-n liczb tak, że pozostałe $n+1$ liczb tworzy ciąg monotoniczny. Dla $n=1$ jest to oczywiste. Załóżmy prawdziwość hipotezy indukcyjnej dla pewnego $k \geq 1$ i niech $a_1, a_2, \ldots, a_{(k+1)^2+1}$ będzie dowolnym ciągiem różnych liczb naturalnych. Należy pokazać, że ciąg ten zawiera $(k+2)$-wyrazowy podciąg monotoniczny. Na mocy założenia indukcyjnego wśród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{k^2+1}$ istnieją liczby $a_{n_1^1}, a_{n_2^1}, \ldots, a_{n_{k+1}^1}$, gdzie $n_1^1 < n_2^1 < \ldots < n_{k+1}^1$, tworzące ciąg monotoniczny. Niech a_{s_1} będzie największą z liczb $a_{n_1^1}, a_{n_2^1}, \ldots, a_{n_{k+1}^1}$. Rozpatrzmy ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{k^2+2}$ z wykreślonym wyrazem a_{s_1}, tzn. ciąg $b_1, b_2, \ldots, b_{k^2+1}$, gdzie $b_i = a_i$ dla $i < s_1$ oraz $b_i = a_{i+1}$ dla $i \geq s_1$. Stosując powtórnie założenie indukcyjne, znajdujemy ciąg monotoniczny $a_{n_1^2}, a_{n_2^2}, \ldots, a_{n_{k+1}^2}$ i oznaczamy przez a_{s_2} jego największy wyraz. Ponownie stosujemy założenie indukcyjne do ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{k^2+3}$ z wykreślonymi wyrazami a_{s_1} oraz a_{s_2} i wyznaczamy a_{s_3} itd. Ponieważ $(k+1)^2+1 = k^2+(2k+2)$, to możemy tak postępować $2k+2$ razy. Otrzymujemy w ten sposób $2k+2$ różnych liczb $a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_{2k+2}}$. W zależności od tego, czy są one końcowymi wyrazami ciągów rosnących o długości $k+1$, czy też pierwszymi wyrazami ciągów malejących o długości $k+1$, zaliczamy je do pierwszej bądź do drugiej grupy. Niech do pierwszej grupy należą liczby $A_1, A_2, \ldots, A_q$, zaś do drugiej $B_1, B_2, \ldots, B_{2k+2-q}$, przy czym numerujemy je w ramach każdej grupy w takiej samej kolejności, w jakiej występują w ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{(k+1)^2+1}$. Rozpatrzymy teraz kilka przypadków.

(1) Ciąg $A_1, A_2, \ldots, A_q$ nie jest malejący, tzn. istnieje taki wskaźnik t, że $A_t < A_{t+1}$. Niech $A_t = a_{n_{k+1}^l}$, zaś $A_{t+1} = a_{n_{k+1}^r}$. Wówczas ciąg $a_{n_1^l}, \ldots, a_{n_{k+1}^l}, a_{n_{k+1}^r}$ jest podciągiem rosnącym ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{(k+1)^2+1}$ złożonym z (k+2) wyrazów.

(2) Ciąg $B_1, B_2, \dots, B_{2k+2-q}$ nie jest rosnący. Analogiczne rozumowanie jak w (1) prowadzi do konstrukcji $(k+2)$-wyrazowego podciągu malejącego ciągu $a_1, a_2, \dots, a_{(k+1)^2+1}$.

(3) Nie zachodzi ani (1), ani (2) oraz $q \neq k+1$. Wówczas szukanym monotonicznym (k+2)-wyrazowym podciągiem jest albo ciąg $A_1, A_2, \dots, A_{k+2}$ – gdy $q \geq k+2$, albo ciąg $B_1, B_2, \dots, B_{k+2}$ – gdy $q \leq k$.

(4) Nie zachodzi ani (1), ani (2) oraz $q = k+1$. Rozpatrzmy podprzypadki:

(4a) Istnieje taki wskaźnik t, że $B_t = a_{n_1^p}$ występuje w ciągu $a_1, a_2, \dots, a_{(k+1)^2+1}$ po wyrazie $A_1 = a_{n_{k+1}^h}$, tzn. $n_{k+1}^h < n_1^p$. Wówczas, jeśli $A_1 > B_t$, to szukanym $(k+2)$-wyrazowym ciągiem jest malejący ciąg $a_{n_{k+1}^h}, a_{n_1^p}, a_{n_2^p}, \dots, a_{n_{k+1}^p}$, jeśli zaś $A_1 < B_t$, to szukanym ciągiem jest ciąg rosnący $a_{n_1^h}, a_{n_2^h}, \dots, a_{n_{k+1}^h}, a_{n_1^p}$.

(4b) Nie zachodzi (4a). Wówczas wyrazy obu grup razem występują w ciągu $a_1, a_2, \dots, a_{(k+1)^2+1}$ w następującej kolejności:
$B_1, B_2, \dots, B_{k+1}, A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ i szukanym monotonicznym $(k+2)$-wyrazowym ciągiem jest albo ciąg rosnący $B_1, B_2, \dots, B_{k+1}, A_1$, gdy $B_{k+1} < A_1$, albo ciąg malejący $B_{k+1}, A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ – gdy $B_{k+1} > A_1$.

Pokazaliśmy więc, że z założenia indukcyjnego wynika, iż w każdym przypadku z ciągu $a_1, a_2, \dots, a_{(k+1)^2+1}$ można wybrać podciąg monotoniczny złożony z $(k+2)$ wyrazów. ■

Rozwiązanie profesora Kulczyckiego różniło się od wyżej przytoczonego tym, że najpierw wykreślało się największy wyraz ciągu $a_1, a_2, \dots, a_{(k+1)^2+1}$, a następnie – jak w dowodzie kolegi X – stosowało się $(2k+1)$ razy założenie indukcyjne dla wybrania $(2k+1)$ największych wyrazów pewnych ciągów monotonicznych $(k+1)$-wyrazowych i dalej przeprowadzało się analogiczną dyskusję (jak?).

Na tym kończy się pierwsza część opowiadania. Tych, którzy „wysiedli” przy czytaniu I rozwiązania, pragnę pocieszyć: nie jest ono konieczne do zrozumienia reszty. Dyskutując nad pierwszym rozwiązaniem, doszliśmy do wniosku, że jest ono za trudne, aby organizatorzy Moskiewskiej Olimpiady, znając jedynie to rozwiązanie, zdecydowali się wybrać zadanie o stu jeden liczbach na zawody. Musiało więc istnieć inne, prostsze rozwiązanie. Istotnie tak było. W maju 1951 roku późnym wieczorem, po wykładzie z propedeutyki filozofii, kolega Stefan Rolewicz oznajmił nam, że właśnie na tym wykładzie znalazł nowe rozwiązanie. Rozwiązanie Stefana Rolewicza, obecnego kierownika Zakładu Analizy Matematycznej Instytutu Matematyki Polskiej Akademii Nauk, nie różniło się istotnie od rozwiązania autorów zadania. Mogliśmy się o tym przekonać, gdy wkrótce potem dotarła do Warszawy książka D.O. Szkolskiego, G.M. Adelsona Welskiego, N.N. Czencowa, A.M. Jagłoma, I.M. Jagłoma *Izbrannyje zadaczi i tieoriemy elementarnoj matiematiki. Czast' 1. Arifmietika i algebra*, Moskwa 1950 (patrz str. 117–118).

Rozwiązanie II (autorów i S. Rolewicza)

Niech $a_1^{(1)}$ – pierwsza (pierwsza z lewej) z wypisanych liczb, $a_2^{(1)}$ – pierwsza z pozostałych liczb, większa niż $a_1^{(1)}$, $a_3^{(1)}$ – pierwsza z liczb występujących po $a_2^{(1)}$, większa niż $a_2^{(1)}$, itd. W ten sposób wybieramy ciąg rosnący liczb $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_{i_1}^{(1)}$.

Jeżeli $i_1 > 10$, to postępowanie nasze jest zakończone. Jeżeli $i_1 \leq 10$, to wykreślamy wszystkie już wybrane liczby, zaś z pozostałych $(101 - i_1)$ liczb wybieramy dokładnie w taki sam sposób nowy ciąg rosnący $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_{i_2}^{(2)}$.

Kontynuując to postępowanie, wybierzemy z naszego ciągu 101 liczb pewną ilość rozłącznych ciągów rosnących. Jeżeli choć jeden z tych ciągów ma więcej niż 10 wyrazów, to znowu postępowanie nasze jest zakończone. Zatem należy jeszcze rozpatrzyć przypadek, gdy każdy z wybranych ciągów ma nie więcej niż 10 wyrazów. Ponieważ wyjściowy ciąg zawiera 101 wyrazów, to w tym przypadku liczba k wybranych ciągów rosnących jest nie mniejsza niż 11. W tym przypadku określimy ciąg malejący, który składa się z co najmniej 11 wyrazów.

Ostatnim wyrazem tego ciągu będzie liczba $a_{i_k}^{(k)}$, to jest ostatni wyraz ostatniego z wybranych ciągów rosnących. Następnie wybierzemy liczbę z przedostatniego z wybranych ciągów, położoną na lewo od $a_{i_k}^{(k)}$ i najbliższą do $a_{i_k}^{(k)}$. Ta liczba jest większa niż $a_{i_k}^{(k)}$, gdyż w przeciwnym razie w trakcie konstrukcji przedostatniego z ciągów rosnących wybralibyśmy po tej liczbie liczbę $a_{i_k}^{(k)}$, podczas gdy w istocie liczba $a_{i_k}^{(k)}$ znalazła się w następnym z ciągów rosnących.

Dokładnie w taki sam sposób znajdujemy wyraz z trzeciego od końca z ciągów rosnących, leżący na lewo od wybranego wyrazu z przedostatniego z ciągów rosnących i leżący najbliżej tego wyrazu itd. W ten sposób konstruujemy ciąg liczb, które rosną, jeśli je rozpatrywać w porządku od prawej do lewej, tzn. ciąg malejący. Liczba wyrazów tego ciągu równa się liczbie k wybranych wcześniej ciągów rosnących, a więc jest nie mniejsza niż 11. ■

Kto nie zrozumiał II rozwiązania, ma jeszcze jedną szansę. Mniej więcej dwadzieścia lat później kolega Andrzej Mąkowski zakomunikował mi „prościutkie" rozwiązanie zadania o stu jeden liczbach, pochodzące od znakomitego matematyka węgierskiego, profesora P. Erdősa. Oto ono:

Rozwiązanie III (Erdősa)

Wyrazowi a_k ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$ różnych liczb naturalnych przyporządkujemy dwie liczby naturalne: $r(k)$ oraz $m(k)$, gdzie $r(k)$ jest długością (= ilością wyrazów) najdłuższego rosnącego ciągu $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_{r(k)}}$, którego a_k jest końcem (to znaczy $k = n_{r(k)}$), zaś $m(k)$ jest długością najdłuższego ciągu malejącego, którego a_k jest początkiem. Należy pokazać, że dla pewnego k $(1 \leq k \leq 101)$ co najmniej jedna z liczb $r(k)$ lub $m(k)$ jest ≥ 11. Załóżmy, że tak nie jest, to znaczy, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, 101$ mamy $1 \leq r(k) \leq 10$ oraz $1 \leq m(k) \leq 10$. Ponieważ różnych par liczb naturalnych ≤ 10 jest 100, więc istnieją wskaźniki s oraz t, takie, że $1 \leq s < t \leq 101$ oraz $r(s) = r(t)$ i $m(s) = m(t)$. Ale jeśli $a_s < a_t$, to łatwo widać, że $r(s) < r(t)$, jeśli zaś $a_s > a_t$, to $m(t) > m(s)$. (Dlaczego?). Otrzymana sprzeczność kończy dowód. ■

Analizując rozwiązanie III, dochodzimy do następującego uogólnienia twierdzenia o stu jeden liczbach.

TWIERDZENIE. *Dany jest ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ różnych liczb naturalnych. Wówczas $m \cdot r \geq n$, gdzie m jest długością najdłuższego malejącego podciągu ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$, zaś r – długością najdłuższego rosnącego podciągu tego ciągu.*

Nie wiem, czy fakt ten można udowodnić, stosując metody rozwiązań I lub II.

Następujące twierdzenie, pochodzące od jednego z najwybitniejszych polskich matematyków, Wacława Sierpińskiego (1882–1969), można uznać za analog dla ciągów nieskończonych faktu, że każdy (n^2+1)-wyrazowy ciąg zawiera $(n+1)$-wyrazowy ciąg monotoniczny.

TWIERDZENIE. *Z każdego nieskończonego ciągu liczbowego można wybrać nieskończony podciąg monotoniczny.*

Proponuję Czytelnikowi zastanowić się nad dowodem tego twierdzenia.

Kończąc ten artykuł, chciałbym jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że nie jest rzeczą łatwą ocenić *a priori* stopień trudności jakiegoś zadania. Wyjaśnię to na przykładzie zadania o stu jeden liczbach. Sądzę, że gdyby to zadanie zaproponowano na posiedzeniu naszego Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej, znając jedynie I rozwiązanie, to na pewno by je odrzucono; gdybyśmy znali II rozwiązanie, to być może zakwalifikowalibyśmy je na zawody, ale jako zadanie trudne. Natomiast znając III rozwiązanie, moglibyśmy zakwalifikować to zadanie jako średnio trudne.

Czytelnicy piszą

Szanowna Redakcjo,

W *Delcie* 1/1998, wówczas jako student piątego roku matematyki na Uniwersytecie Wrocławskim, przeczytałem notkę P. Hajłasza o poskręcanych drzewach na terenach za kołem polarnym. Wydaje mi się, że znam wyjaśnienie tego zjawiska. Liście mają tendencję do zwracania się w stronę Słońca. Dzięki temu każdy liść generuje pewien moment siły. Trzeba jednak wziąć pod uwagę, że liście już nasłonecznione będą w różnym stopniu skręcać drzewo. Sądzę, że siła skręcająca, pochodząca od pojedynczego liścia, będzie maleć wraz z jego nasłonecznieniem (liść po kilkugodzinnym naświetlaniu będzie czerpał z promieni słonecznych mniej energii). *Dlatego* liście znajdujące się po tej stronie drzewa, która dopiero co wyszła z cienia, będą silniej skręcać pień drzewa, aniżeli ich towarzysze po stronie mającej za chwilę pogrążyć się w cieniu. Zatem wypadkowy moment siły, działajacy na drzewo, będzie je skręcał w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu Słońca względem Ziemi.

Z poważaniem, *Roman Wencel*

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 862. Niech $\{x_n\}$ będzie takim ciągiem, że $x_1 = 5$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ dla $n \geq 1$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Rozwiązanie na str. 6

M 863. Rozpatrzmy ciąg $x_n = (a + b\sqrt{d})^n$, gdzie a, b, d są dodatnimi liczbami wymiernymi oraz d nie jest kwadratem żadnej liczby wymiernej. Niech $x_n = k_n + l_n\sqrt{d}$, gdzie $k_n, l_n \in Q$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{l_n}{k_n}$.

Rozwiązanie na str. 7

M 864. Niech

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}.$$

Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Rozwiązanie na str. 7

Przygotował Piotr ZALEWSKI

F 487. Początek łańcucha rozpadów jądrowych rozpoczynających się od ^{238}U podano w tabeli:

rozpad	typ	średni czas życia
$^{238}\mathrm{U} \to {}^{234}\mathrm{Th}$	α	$\tau_0 = 3\cdot 10^9$ lat
$^{234}\mathrm{Th} \to {}^{234}\mathrm{Pa}$	β	$\tau_1 = 17$ dni
$^{234}\mathrm{Pa} \to {}^{230}\mathrm{Th}$	α	$\tau_2 = 5$ godzin
$^{230}\mathrm{Th} \to {}^{226}\mathrm{Ra}$	α	$\tau_3 = 52\cdot 10^3$ lat

Pobrano próbkę skały osadowej, która w momencie powstania przed dziesiątkami tysięcy lat zawierała domieszkę ^{238}U. Obliczyć obecny średni stosunek liczb atomów ^{234}Pa i ^{234}Th w tej próbce.

Rozwiązanie na str. 2

F 488. Zaproponować sposób określenia wieku próbki.

Rozwiązanie na str. 3

Aktualności

W dniach 17–27 sierpnia 1998 roku w Berlinie odbył się Międzynarodowy Kongres Matematyków, z udziałem około 3500 osób. Kongresy organizowane są co cztery lata i obejmują wszystkie dziedziny matematyki. Na wykładach plenarnych szczególnie mocno reprezentowane były tym razem: szeroko pojęta teoria liczb, układy dynamiczne oraz różnorodne zastosowania matematyki.

Medale Fieldsa, powszechnie uznawane za najważniejsze wyróżnienie zawodowe, jakie może spotkać matematyka, dostali: Richard Borcherds z Cambridge, za prace z algebry dotyczące m.in. grupy monstrum (to grupa skończona o ponad $8 \cdot 10^{53}$ elementach – największa wśród tzw. sporadycznych skończonych grup prostych), William Timothy Gowers, również z Cambridge, za rozwiązanie dwóch pochodzących jeszcze z lat trzydziestych XX wieku problemów teorii przestrzeni Banacha oraz nowatorskie prace kombinatoryczne, Maksym Koncewicz z Institut des Hautes Etudes Scientifiques w Bures-Sur-Yvette pod Paryżem, za prace z algebry, geometrii rozmaitości i teorii węzłów, oraz Curtis T. McMullen z Uniwersytetu Harvarda, za prace z dynamiki zespolonej i geometrii rozmaitości trójwymiarowych. W przypadku pierwszego i trzeciego medalisty zostały także wspomniane związki ich prac ze współczesną fizyką teoretyczną, ściślej – z teorią strun.

Lista nagród na tym się nie kończy. Przewodniczący Komitetu Medalu Fieldsa, Jurij Manin, zaznaczył wyraźnie, że decyzję o tym, kto dostanie medale, podjęto po wielu wahaniach, uznając w końcu, że jednak należy przestrzegać zasady głoszącej, iż laureaci tej nagrody powinni mieć nie więcej niż 40 lat. Czterdziestopięcioletni dziś Andrew Wiles, który udowodnił Wielkie Twierdzenie Fermata, nagrodzony więc został specjalnym wyróżnieniem i srebrną tabliczką z wygrawerowanym po łacinie słynnym marginesowym dopiskiem Fermata.

Nagrodę Nevanlinny, przyznawaną za osiągnięcia w teoretycznej informatyce, dostał Peter Shor, przede wszystkim za prace o kwantowych komputerach (a ściślej mówiąc, o algorytmach dla takich – na razie hipotetycznych – komputerów).

Serię obco brzmiących uzasadnień wypadałoby choć odrobinę rozjaśnić. Niestety, na kongresach dojmujący ból niezrozumienia towarzyszy na ogół większości słuchaczy (niżej podpisany nie jest wyjątkiem), a niezależnie od tego wielu osiągnięć medalistów Fieldsa nie sposób wyjaśnić, nie popadając przynajmniej częściowo w techniczny żargon. Na szczęście, wśród wyników tegorocznych laureatów znalazły się dwa twierdzenia o stosunkowo elementarnych sformułowaniach.

Pierwsze z nich dotyczy długich ciągów arytmetycznych zawartych w „niezbyt rzadkich" podzbiorach zbioru liczb naturalnych. Przypuśćmy mianowicie, że dana jest liczba $k \in \mathbb{N}$ oraz liczba $\delta > 0$. Wówczas, jak udowodnił w 1975 roku Szemerédi, jeśli liczba N jest *dostatecznie duża*, to każdy podzbiór A zbioru $\{1, 2, \ldots, N\}$, który ma więcej niż δN elementów, zawiera pewien ciąg arytmetyczny długości k. Można zadać naturalne pytanie: jak duża, dla danych k i δ, musi być owa liczba N? W znanych dotąd oszacowaniach już dla $k = 4$ pojawiała się tzw. funkcja Akermana; tempo jej wzrostu wymyka się właściwie wszelkiej ludzkiej wyobraźni: w porównaniu z nią rozmaite funkcje w rodzaju np. $2^{2^{2^{2^x}}}$ rosną leniwie, wręcz śmiesznie wolno. Timothy Gowers udowodnił, stosując w bardzo sprytny sposób metody analizy harmonicznej, że liczba $N(4, \delta)$ nie przekracza $\exp(\exp((1/\delta)^c))$, gdzie c jest pewną stałą, a w ogólnym przypadku zachodzi oszacowanie

$$N(k, \delta) \leq 2^{2^{(1/\delta)^{2^{2^{k+10}}}}}$$

Jeśli chodzi o oszacowania z dołu, to wiadomo jedynie, że $N(4, \delta) \geq \mathrm{const} \cdot (1/\delta)^{\log(1/\delta)}$, więc pole do popisu jest nadal szerokie.

Natomiast Peter Shor, prócz wspomnianego wkładu w teorię prowadzenia obliczeń na kwantowych komputerach, ma na swoim koncie wynik następujący. Okazuje się, że przestrzeń $\mathbb{R}^{10}$ można w taki sposób wypełnić identycznymi jednostkowymi kostkami o rozłącznych wnętrzach, by żadne dwie z nich nie miały wspólnej ściany dziewięciowymiarowej ani nawet wspólnej ściany ośmiowymiarowej. Wydaje się to przeczyć intuicji i zdrowemu rozsądkowi; wszelkie próby zapełnienia płaszczyzny jednakowymi kwadratami czy przestrzeni trójwymiarowej jednakowymi sześcianami zdają się wskazywać, że w pierwszym przypadku zawsze znajdzie się przynajmniej jedna para kwadratów o wspólnym boku, a w drugim – para sześcianów, które mają wspólną ścianę, a tym bardziej wspólną krawędź. Udowodniono, że na płaszczyźnie, w przestrzeni trójwymiarowej i ogólniej w $\mathbb{R}^n$ dla $n \leq 6$ istotnie zawsze tak musi być. Za to w przestrzeni dziesięciowymiarowej, jak pokazał Shor, jest inaczej; takie dziwne upakowania kostek istnieją również dla każdego wymiaru większego od 10. Jak jest w wymiarach 7, 8 i 9 – nie wiadomo.

Warto zaznaczyć, że wszyscy medaliści nie bali się pracować jednocześnie w kilku dyscyplinach matematyki i podejmowali problemy, uznawane przez wielu specjalistów za beznadziejnie trudne. Niech ta odwaga i szerokość spojrzenia będzie znakiem dla naszych młodych Czytelników; w końcu podobno każdy żołnierz nosi w plecaku buławę marszałkowską. Jurij Manin, na chwilę przed wręczeniem medali, przypomniał jeszcze słowa Cantora: *istotą matematyki jest wolność*.

Paweł STRZELECKI

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1999

Zadania z matematyki nr 369, 370

Redaguje Marcin E. KUCZMA

369. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg. Odległości punktu E od prostych AB, BC, CD, DA są odpowiednio równe a, b, c, d. Wyrazić d przez a, b, c.

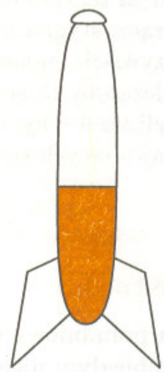
370. Dane są liczby naturalne $n \geq k \geq 1$. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ losujemy ze zwracaniem k liczb. Obliczyć wartość oczekiwaną iloczynu tych liczb pod warunkiem, że ich suma jest równa n.

Zadanie **370** zaproponował pan Waldemar Pompe z Warszawy.

Zadania z fizyki nr 266, 267

Redaguje Jerzy B. BROJAN

266. Rakieta-zabawka zawiera komorę, do której nalewa się wody, pozostawiając w części komory powietrze, a następnie dopompowuje się powietrze do odpowiednio wysokiego ciśnienia. Po ustawieniu rakiety pionowo (rys.) odłącza się pompkę, a sprężone powietrze wyrzuca wodę, zapewniając rakiecie napęd. Obliczyć numerycznie maksymalną wysokość możliwą do osiągnięcia przez rakietę, jeśli dane są: masa samej rakiety 200 g, objętość komory 400 cm^3 i maksymalne ciśnienie (nadwyżka nad ciśnieniem atmosferycznym) 0,5 MPa. Przyjąć wartość ciśnienia atmosferycznego równą 0,1 MPa. Co można powiedzieć o optymalnej wielkości otworu wylotowego? Jaką ilość wody należy nalać do komory, aby osiągnąć maksymalną wysokość?



267. Gdy samochód uderzył w nieruchomą ścianę, pasy bezpieczeństwa napięły się siłą F. Ocenić orientacyjnie, jaką siłą napną się pasy w tym samochodzie, jeśli jadąc z tą samą prędkością uderzy on w taki sam samochód: a) stojący nieruchomo, b) jadący naprzeciw z tą samą prędkością.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 357 (WT=2,40) i 358 (WT=1,80) z numeru 3/1998

Tadeusz Józefczyk	– Poznań	40,64
Witold Bednarek	– Łódź	38,26
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	36,72
Paulina Domagalska	– Zbąszynek	34,09
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	33,83

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 258 (WT=1,30) i 259 (WT=3,01) z numeru 5/1998

Jarosław Łazuka	– Warszawa	30,87
Marek Wójcicki	– Szczecin	29,26
Tomasz Wietecha	– Tarnów	25,28
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	22,02
Aleksander Surma	– Myszków	15,12
Artur Arciszewski	– Kielce	11,01

Leonidy

W listopadzie spodziewamy się drugiego w tym roku obfitego roju meteorów. Leonidy są aktywne od 14 do 21 XI z maksimum w nocy z 17 na 18 XI. Ziemia minie wtedy orbitę ich macierzystej komety 55P/Tempel-Tuttle w odległości 0,008 j.a. Maksimum natężenia roju można oczekiwać w godz. 17–19 czasu uniwersalnego, czyli 18–20 czasu środkowoeuropejskiego. Niestety, o tej porze radiant Leonid jest pod horyzontem (jego współrzędne to $\alpha = 10^h 12^m, \delta = 22°$, promień radiantu około 5°) i najlepsze warunki do obserwacji ewentualnego deszczu będą mieli obserwatorzy w Azji i na Pacyfiku. Każde opóźnienie momentu wystąpienia maksimum działa jednak na korzyść obserwatorów w Polsce. Meteory tego roju są zjawiskami bardzo szybkimi, ich prędkość względem Ziemi wynosi około 65 km/s.

Arkadiusz OLECH

Patrz w niebo

Teoria ewolucji gwiazd przewiduje, że gwiazdy o masach zbliżonych do masy Słońca po zużyciu wodorowego paliwa jądrowego tracą dość łagodnie zewnętrzne warstwy, a odsłonięta wtedy pozostałość to tzw. biały karzeł, gwiazda wysoce osobliwa. Właściwie obiekt taki nie powinien się nazywać gwiazdą. Mówimy przecież, że zapadająca się protogwiazda staje się gwiazdą dopiero, gdy ruszą w niej reakcje termojądrowe. Konsekwentnie obiekt powinien przestać być nazywany gwiazdą, gdy reakcje ustają – a tak właśnie jest w białych karłach. „Gwiazdy" te świecą tylko kosztem zgromadzonej w nich energii cieplnej, czyli po prostu świecą stygnąc. Materia białych karłów nie jest zwyczajnym gazem. Jest to tzw. materia zdegenerowana (zdegenerowany jest tu gaz elektronowy), charakteryzująca się przede wszystkim tym, że jej równanie stanu jest inne, niż równanie stanu gazu doskonałego znane ze szkoły. W szczególności ciśnienie w materii zdegenerowanej nie zależy od temperatury, a tylko od jej gęstości, niezwykłej zresztą z ziemskiego punktu widzenia. Bowiem typowy biały karzeł o masie zbliżonej do masy Słońca ma rozmiary planety, a więc jego gęstość wyraża się w tonach na centymetr sześcienny.

Dzięki małym rozmiarom białe karły, choć bardzo gorące, stygną bardzo powoli. Jak powoli? Teoria oczywiście przewiduje jakieś tempo stygnięcia, ale należałoby to sprawdzić na podstawie obserwacji, czyli trzeba by zaobserwować możliwie wiele obiektów, znajdujących się w rozmaitych fazach życia i sprawdzić, czy ich własności pasują do teorii. Niestety, białe karły to obiekty słabe, a więc trudno obserwowalne z Ziemi. Dotychczas znaleziono ich niezbyt wiele (powiedzmy – około setki), a ich parametry fizyczne znane są niedokładnie. Przełom nastąpił niedawno dzięki teleskopowi Hubble'a. Grupa kanadyjskich astronomów użyła go do zbadania centralnych obszarów najbliższej (odległej o 2200 pc) gromady kulistej M4 w Skorpionie. Według przewidywań około 20% gwiazd gromady powinno być białymi karłami. Teleskop Hubble'a po pięciogodzinnej ekspozycji małego obszaru gromady, położonego w pobliżu jej centrum, znalazł tam od razu 75 białych karłów o jasnościach między 23 i 28 mag.

Zależność barwy tych białych karłów (tym samym – temperatury) od jasności umożliwiła odtworzenie przebiegu ich stygnięcia z upływem czasu, przy czym zgodność teorii z obserwacjami nie stanowiła tu żadnej rewelacji. Okazało się natomiast, że nieosiągalny z powierzchni Ziemi zasięg obserwacji do 28 mag umożliwił wykrycie białych karłów nie starszych niż 5 mld lat, a to jeszcze za mało, by na ich podstawie oceniać wiek samych gromad. A problem jest nie byle jaki, gdyż według wszelkiej logiki gromady kuliste nie powinny być starsze od Wszechświata, tymczasem ostatnio pojawiają się doniesienia, że jakoby nie wszystkie gromady tej reguły się trzymają. Być może obserwacje z teleskopu Hubble'a przyczynią się do wyjaśnienia tych sprzeczności.

Tomasz KWAST

Listopad

Na południowy wschód od Pegaza (wspomnianego w ubiegłym miesiącu) widzimy dwa rozległe gwiazdozbiory, ubogie jednak w jasne gwiazdy i dlatego trudno rozpoznawalne na niebie. Bliżej Pegaza są Ryby, gwiazdozbiór zodiakalny, w dodatku znajduje się w nim jeden z najważniejszych punktów nieba, mianowicie punkt równonocy wiosennej, zwany też – aby było śmieszniej – punktem Barana. Ale nazywa się on tak tylko z rozpędu, gdyż ta krótsza jego nazwa pochodzi z czasów, kiedy leżał on naprawdę w gwiazdozbiorze Barana. To precesja spowodowała jego przesunięcie się w ciągu dwóch tysięcy lat o jeden znak zodiaku. Za jakieś pół tysiąca lat punkt równonocy wiosennej znajdzie się w Wodniku – ciekawe, czy nadal nazwa „punkt Barana" będzie dopuszczalna. Na południe od Ryb leży Wieloryb, którego nazwa też jest myląca. Dla nas brzmi dość obojętnie, tymczasem w mitologii gwiazdozbiór ten przedstawia morskiego potwora grasującego na wybrzeżu królestwa Cefeusza. Dopiero ofiarowanie potworowi Andromedy miało wybawić od niego kraj, ale, jak wiadomo, dzięki Perseuszowi obeszło się bez tego. Gwiazda τ Wieloryba stała się kiedyś celem radiowego komunikatu wyemitowanego z Ziemi z nadzieją nawiązania kontaktu międzygwiezdnego. Typ widmowy tej gwiazdy (odległej o 3,63 pc) jest bowiem zbliżony do typu widmowego Słońca, a jej powolna rotacja może sugerować, że swój moment pędu zdążyła przekazać obiegającym ją planetom. Zważywszy małą odległość gwiazdy, odpowiedzi można by spodziewać się „na dniach", chyba jednak mała jest szansa, że ją w ogóle otrzymamy.

Wenus znajduje się na granicy Wagi i Skorpiona i staje się Gwiazdą Wieczorną, choć jest jeszcze za blisko Słońca, by można ją było dostrzec. Mars jest na granicy Lwa i Panny, wschodzi więc dopiero po północy. Jowisz jest na granicy Wodnika i Ryb, a Saturn na granicy Ryb i Barana – obie te planety widać praktycznie przez całą noc. Pełnia Księżyca wypada 4 XI. Księżyc w nocy z 5 na 6 XI zakryje Aldebarana, a ponadto mocno zbliży się do Regulusa 11 XI, Marsa 13 XI i do Jowisza 28 XI. A w noc z 17 na 18 XI obserwujemy Leonidy (patrz str. 15).

T.K.

11/98 (11)

Γ limatias $_{n\to\infty}$

CYFROMANIA (8)

Opowiemy teraz, jak poznaną w dotychczasowych *Cyfromaniach* wiedzę można zastosować do rozwiązania następującego zadania z obozu przygotowawczego do Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej:

ZADANIE: Dowieść, że istnieje liczba postaci 333333^{333333^n}, gdzie n jest liczbą naturalną, zakończona 333333^{333333} trójkami w zapisie dziesiętnym.

Rozwiązanie: Przypomnijmy, że z naszych poprzednich rozważań wynika, iż dla dowolnej liczby naturalnej A, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2 lub 3, a przy dzieleniu przez 8 daje resztę 3 lub 5, ciąg końcówek k-cyfrowych ($k \geq 4$) liczb A^m ma okres zasadniczy $5 \cdot 10^{k-2}$ i taka też jest liczba różnych końcówek k-cyfrowych, jakie mogą wystąpić w liczbach postaci A^m. Przy tym wszystkie dopuszczalne końcówki k-cyfrowe otrzymujemy, uzupełniając dopuszczalne końcówki 4-cyfrowe do końcówek k-cyfrowych przez dopisanie z lewej strony dowolnych $k-4$ cyfr. Za A można wziąć np. dowolną liczbę zakończoną trzema trójkami, niech więc $A = 333333$.

Liczba A^m może być zakończona cyframi 3333 – dzieje się tak dla $m \equiv 1 \pmod{500}$. Zatem, dla dowolnego $k \geq 6$, liczba A^m może kończyć się k trójkami, o ile $m \equiv R_k \pmod{5 \cdot 10^{k-2}}$, gdzie R_k jest najmniejszym wykładnikiem naturalnym, takim że $A^{R_k} \equiv \frac{10^k-1}{3} \pmod{10^k}$. Przy tym musi być $R_k \equiv 1 \pmod{50000}$, bo $R_k \equiv R_6 \pmod{50000}$, a $R_6 = 1$. Pozostaje rozstrzygnąć, czy m spełniające kongruencję $m \equiv R_k \pmod{5 \cdot 10^{k-2}}$ może być postaci A^n. Ależ oczywiście. A^n może mieć końcówkę 0001 (dla n podzielnych przez 500), może więc mieć $k-1$-cyfrową końcówkę R_k. A to wystarczy, aby $A^{A^n} = 333333^{333333^n}$ kończyło się k trójkami. Zadanie jest więc rozwiązane, bo możemy wziąć $k = 333333^{333333}$.

Tyle skrótowego szkicu rozwiązania. Jeśli myślisz, drogi Czytelniku, że coś tu jest niepotrzebnie skomplikowane i że umiałbyś to zrobić prościej, sprawdź najpierw, czy Twoje *prościej* zadziała dla liczb 33333^{33333^n}. Nie powinno, gdyż w tak zmienionej wersji teza zadania jest fałszywa.

Niech $B = 33333$. Możemy zacząć przepisywać podane wyżej rozwiązanie, zamieniając A na B:

– liczba B^m kończy się na 3333 dla $m \equiv 1 \pmod{500}$;

– liczba B^m może kończyć się $k \geq 6$ trójkami dla $m \equiv R_k \pmod{5 \cdot 10^{k-2}}$ przy odpowiednio dobranym R_k, przy tym $R_k \equiv R_5 \equiv 1 \pmod{5000}$.

Przyglądając się R_6, stwierdzamy, że $R_6 = 5000c + R_5 = 5000c + 1$, gdzie $0 \leq c \leq 9$. Ponieważ zaś $B^{5000} = 10^5 Q + 1$, otrzymujemy

$$B^{R_6} = 33333 \cdot (10^5 Q + 1)^c \equiv 10^5 Qc \cdot 3 + 33333 \equiv$$
$$\equiv 333333 \pmod{10^6},$$

skąd $Qc \equiv 1 \pmod{10}$ i c musi być nieparzyste. Zatem $R_k \equiv R_6 \equiv 5001 \pmod{10000}$.

Czy liczba zakończona na 5001 może być postaci B^n? Gdyby $B^n \equiv 1 \pmod 5$, to n musiałoby być podzielne przez 4. W takiej sytuacji B^n musiałoby przy dzieleniu przez 16 dawać resztę 1, podczas gdy 5001 daje przy dzieleniu przez 16 resztę 9. Liczba B^n nie może się więc kończyć na 5001, a co za tym idzie, liczba $B^{B^n} = 33333^{33333^n}$ nie może być zakończona sześcioma trójkami.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (10)

Rozważmy liczbę $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n\sqrt[8]{88}]}{2^n}$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Bezpośrednie obliczenie wartości liczby S z dokładnością do 100 cyfr po przecinku za pomocą komputera pokazuje, że

$S = 2{,}9333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333\ldots,$

co nie pozostawia cienia wątpliwości, że $S = \frac{44}{15}$.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (11)

ZADANIE: Obliczyć całkę $\int \frac{x\,dx}{4x^2-1}$.

Rozwiązanie: Sposób I: Całkujemy, rozkładając funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\int \frac{x\,dx}{4x^2-1} = \int \frac{x\,dx}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{x\,dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{1}{8}\left(\ln\left|x-\frac{1}{2}\right| + \ln\left|x+\frac{1}{2}\right|\right) = \frac{1}{8}\ln\left|x^2-\frac{1}{4}\right|.$$

Sposób II: Wykonujemy podstawienie $x = \frac{\sqrt{t}}{2}$ (wtedy $t = 4x^2$ i formalnie $dx = \frac{dt}{4\sqrt{t}}$):

$$\int \frac{x\,dx}{4x^2-1} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t-1} = \frac{1}{8}\ln|t-1| = \frac{1}{8}\ln|4x^2-1|.$$

Porównując otrzymane wyniki, stwierdzamy, że $x^2 - \frac{1}{4} = 4x^2 - 1$, co oczywiście nie może mieć miejsca. Który ze sposobów całkowania daje poprawny wynik?

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl