



Trwa jubileusz XXV lat *Delty*:

**6 czerwca 1973 roku** powołano redakcję *Delty*,  
**8 grudnia** odbyło się pierwsze posiedzenie Komitetu Redakcyjnego *Delty*, na którym przedstawiono próbny numer miesięcznika,  
**1 stycznia 1974 roku** ukazał się w kioskach w nakładzie 30 tys. egzemplarzy, w cenie 5 zł, pierwszy numer *Delty*.

XXV lat powinien zamknąć numer 300 miesięcznika, jednak w okresie parcelacji RSW straciliśmy pięć numerów, tak więc numer taki ukaże się jako 5/1999.

Składając Czytelnikom najserdeczniejsze jubileuszowe życzenia, informujemy, iż od czerwca 1998 do maja 1999 w każdym numerze przypominamy coś z dawnych lat.

Ten okazjonalny dział nazywa się **Stara Delta**.

## SPIS TREŚCI NUMERU 3(298)

O rycerzach, lotrach, wampirach i niespełna rozumu Zombich – czyli zagadki logiczne R.M. Smullyana <i>Adam Kolany</i>	str. 1
Sfera dwunastu punktów <i>Michał Ślęzak, Michał Tkacz</i>	str. 4
Zadania	str. 7
Mała Delta	str. 8
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str.10
Witalizm <i>Władysław J.H. Kunicki-Goldfinger</i>	str.11
Wiatr – ruch powietrza <i>Jan Waclaw Parfiniewicz</i>	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Marzec	str.16
Gammalimatias	str.17

### W następnym numerze:

Czy plastiki przewodzą prąd elektryczny?

Okladki i ilustracje wykonała  
*Anna Ludwicka*

Wybór artykułów z *Delty*  
ukazuje się w języku angielskim  
w sieci Internet pod adresem  
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 3 zł**

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący Krzysztof Ciesielski Jan A. Gaj Piotr Goldstein Tomasz Hofmokl Andrzej Hrynkiewicz Wiesław A. Kamiński Marta Kicińska-Habior Krzysztof Maślanka Andrzej Mąkowski Zdzisław Pogoda Feliks Przytycki Michał Różycka Konrad Rudnicki Zbigniew Semadeni Grzegorz Sitarski Andrzej Woszczyk Wiesław Żelazko – przewodniczący	Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol Krzysztof Biesaga Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac. Krystyna Kordos – sekr. red. Marek Kordos – red. nac. Tomasz Kwast Anna Ludwicka Anna Rudnik Paweł Strzelecki Joanna Udalska Anna Wojtyra Piotr Zalewski Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa tel. 843-02-41(-2) wewn. 21 PAWELST@MIMUW.EDU.PL Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65. Skład systemem TeX wykonała Redakcja.
---	--

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)  
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1999 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.  
W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1999 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.  
**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.  
Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na III kwartał 1999 r. wynosi 9 zł.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
- Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>.
- Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę  

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.
- Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numerzy archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

# O rycerzach, łotrach, wampirach i niespełna rozumu Zombich – czyli zagadki logiczne R.M. Smullyana

Adam KOLANY

W ogromnym skrócie: logika zdań zajmuje się dociekaniami warunków poprawności tzw. schematów zdaniowych. Jest to o tyle ważne, że schematy takie są logiczną podstawą poprawnych rozumowań (niektórzy twierdzą, że innych niż poprawne rozumowań nie ma – pozostałe to belkot!). Kiedyś logika była odrębnym przedmiotem w szkołach (i słusznie – brak tzw. higieny logicznej u współczesnych jest zatrważający).

Spójnik  $\leftrightarrow$ , zwany *równoważnością* ma następujące własności, które będą nam potrzebne:

1.  $\alpha \leftrightarrow \alpha = 1$ ,  $\alpha \leftrightarrow \alpha' = 0$ ,
2.  $\alpha \leftrightarrow \beta = \beta \leftrightarrow \alpha$ ,
3.  $\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \delta) = (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \delta$ ,
4.  $(\alpha \leftrightarrow \beta)' = \alpha \leftrightarrow \beta'$ ,
5.  $\alpha \leftrightarrow 1 = \alpha$ ,  $\alpha \leftrightarrow 0 = \alpha'$ ,
6.  $\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \cdot \beta + \alpha' \cdot \beta')$ ,

gdzie  $\alpha'$  oznacza negację zdania  $\alpha$ , 0 oznacza fałsz, 1 oznacza prawdę,  $\alpha \cdot \beta$  oznacza koniunkcję zdań  $\alpha$  i  $\beta$ ,  $\alpha + \beta$  – ich alternatywę, a  $\alpha \rightarrow \beta$  – implikację,  $\alpha = \beta$  oznacza równość ich wartości logicznych.

Zamiast pisać  $\alpha = 1$  piszemy po prostu  $\alpha$  – mając w domyśle, że jak formuła się pojawia podczas rozwiązania, to uznajemy ją za prawdziwą.

Wiadomo także, że jeśli  $\alpha \leftrightarrow \beta$ , to  $\alpha$  i  $\beta$  są wzajemnie wymienne w dowolnym kontekście bez zmiany wartości logicznej.

W rachunkach obok korzystamy ze znanych praw logiki:

$$(\alpha \cdot \beta)' \leftrightarrow (\alpha' + \beta'),$$
$$\alpha(\beta + \delta) \leftrightarrow (\alpha\beta + \alpha\delta).$$

Raymond M. Smullyan – współczesny logik amerykański. Główne swoje wyniki osiągnął w teorii rekursji i samoreferencji. Napisał także wiele książeczek dla dzieci i młodzieży popularyzujących logikę i teorię mnogości. Kilka z nich zostało przetłumaczonych na polski: *Dama i tygrys*, *Jak się nazywa ta książka*. W młodości zarabiał na życie jako iluzjonista.

Jeszcze nie tak dawno w szkole średniej uczono elementów logiki matematycznej. Sprowadzało się to właściwie do elementarnych wiadomości głównie z zakresu klasycznego rachunku zdań, a dokładniej do prezentacji tzw. metody *zero-jedynkowej* rozstrzygnięcia tautologiczności schematów zdaniowych. W artykule tym zobaczymy, w jaki sposób można niemal automatycznie rozwiązywać pewien typ zagadek logicznych R.M. Smullyana, korzystając z elementarnych wiadomości z zakresu logiki zdań właśnie.

W jednej ze wspomnianych na marginesie książeczek znajdujemy następującą zagadkę:

**Pewnego razu spotkałem dwóch mieszkańców A i B rzezczonej wyspy. Zapytawszy A, czy jest łotrem, usłyszałem: Jestem łotrem, ale B nie! Co możemy powiedzieć o A i B?**

*Sytuacja, w której odbywa się scenka z zagadki, jest następująca: istnieje gdzieś wyspa, którą zamieszkują dwa rodzaje mieszkańców: rycerze i łotry. Rycerze są bezwzględnie prawdomówni, łotry zaś bezwarunkowo łżą. Tym sposobem, cokolwiek powie łotr, jest fałszywe, a cokolwiek powie rycerz, jest na pewno prawdziwe.*

**Rozwiązanie.** Niech, dla dowolnego mieszkańca  $X$  tej wyspy oraz zdania  $\alpha$ , symbol  $X \triangleleft \alpha$  oznacza, że  $X$  powiedział, że  $\alpha$ . Niech dalej  $T_X$  oznacza, że  $X$  jest prawdomówny (czyli jest rycerzem) oraz niech  $F_X$  oznacza, że  $X$  jest łgarzem (tj. łotrem). Zauważmy, że warunki zadania narzucają, że  $X \triangleleft \alpha$  równoznaczne jest ze stwierdzeniem, że  $T_X$  i  $\alpha$  mają tę samą wartość logiczną, tj.  $X \triangleleft \alpha$  znaczy tyle samo, co  $T_X \leftrightarrow \alpha$ . Innymi słowy:

$$X \triangleleft \alpha \stackrel{\text{def}}{=} T_X \leftrightarrow \alpha.$$

Ponieważ na wyspie mieszkają jedynie rycerze i łotry, mamy  $T'_X = F_X$ . Mamy:

$$\begin{aligned} A \triangleleft (F_A \cdot T_B) &= T_A \leftrightarrow (F_A \cdot T_B) = T_A F_A T_B + T'_A (F'_A + T'_B) = \\ &= T_A T'_A T_B + F_A F'_A + F_A F_B = F_A F_B. \end{aligned}$$

Tym samym zarówno mówiący, jak i jego towarzyszący są łotrami. ■

To zadanie było oczywiście łatwe także do rozwiązania „zwykłymi” środkami. Spróbujmy innego.

**W pewnym ogrodzie rozmawiają trzech mieszkańcy: A, B i C. Przechodzący obok przybysz pyta A, ilu wśród nich jest rycerzy. Choć A odpowiedział, przybysz nie dostyszał odpowiedzi i zwrócił się do B z prośbą o powtórzenie odpowiedzi A. Ten odpowiada: »A powiedział, że jest wśród nas jeden rycerz«. W tym momencie C protestuje: »Nie wierz w to, B kłamie!«. Co można powiedzieć o A, B i C?**

**Rozwiązanie.** Dla wygody, zamiast  $T_X$  piszmy po prostu  $X$ , gdzie  $X = A, B, C$ . Mamy:

$$B \triangleleft [A \triangleleft (A'B'C + A'BC' + AB'C')]$$

i

$$C \triangleleft B'.$$

Wobec tego:

$$C \leftrightarrow B' \quad \text{oraz} \quad B \leftrightarrow A \leftrightarrow (A'B'C + A'BC' + AB'C').$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} [B \leftrightarrow A \leftrightarrow (A'B'C + A'BC' + AB'C')] &= \\ &= [B \leftrightarrow A \leftrightarrow (A'B'B' + A'BB + AB'B)] = \\ &= [B \leftrightarrow A \leftrightarrow (A'B' + A'B + 0)] = [B \leftrightarrow A \leftrightarrow A'(B' + B)] = \\ &= [B \leftrightarrow A \leftrightarrow A'] = [B \leftrightarrow 0] = B'. \end{aligned}$$

Można tu powiedzieć jedynie to, że  $B$  jest łotrem, a co za tym idzie,  $C$  jest rycerzem. O  $A$  nie wiadomo nic! ■

Zagadki Smullyana nie kończą się na rycerzach i łotrach. Na innej ze swoich wysp Smullyan dopuszcza jeszcze tzw. zwykłych ludzi. Ci czasem mówią prawdę, a czasem kłamią.

**Jesteś mieszkańcem wyspy, o której mowa, i jesteś podejrzany o popełnienie przestępstwa. Wiadomo, że winowajcą jest łotr. Ty łotrem nie jesteś. Jakie zdanie powinieneś w sądzie wygłosić, aby uznano Cię za niewinnego?**

Tutaj jedyne, co możemy stwierdzić, to:

$$X \triangleleft \alpha \rightarrow (T_X \rightarrow \alpha)(F_X \rightarrow \alpha')$$

oraz

$$T'_X + F'_X,$$

dla dowolnego mieszkańca  $X$  tej wyspy.

**Rozwiązanie.** Powiedzmy, że nazywałeś się  $A$ . Szukamy takiego zdania  $\alpha$ , dla którego:

$$A \triangleleft \alpha \rightarrow G(A)',$$

gdzie  $G(X)$  oznacza, że  $X$  jest winny. Ponieważ  $A \triangleleft \alpha$  implikuje  $T'_A + \alpha$  i  $F'_A + \alpha'$ , a wiadomo, że  $F_A + G(A)'$ , to w myśl tzw. reguły rezolucji widzimy, że  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} G(A)$  da żądany wynik. Ot, przewrotność czasem popłaca! ■

Innym razem znajdujemy się w Transylwanii – ojczyźnie słynnego Drakuli. Ziemię tę zamieszkują dwa rodzaje istot – ludzie, którzy zawsze mówią to, czego prawdziwości są pewni, oraz wampiry, czasem zwane upiorami – istoty przewrotne, mówiące rzeczy, o których fałszywości są przekonane. Żeby uniknąć analogii z wyspą rycerzy i łotrów, niektórzy mieszkańcy Transylwanii są obłąkani – ich przekonania są dokładnie przeciwne do faktycznego stanu rzeczy. Tak też obłąkany człowiek wypowiada zdania fałszywe, dokładnie jak zdrowy na umyśle wampir. Obłąkany wampir zaś wypowiada zdania prawdziwe – dokładnie jak zdrowy na umyśle człowiek. Spróbujmy rozwiązać zagadkę:

**Oto raport z przesłuchania dwójki znanych transylwańskich opryszków:**

- A)  $B$  jest całkowicie normalny.
- B)  $A$  jest kompletnym wariatem.
- A)  $B$  jest upiorem.
- B)  $A$  jest człowiekiem.

**Co można powiedzieć o  $A$  i  $B$ ?**

Niech  $X(\alpha)$  oznacza, że  $X$  jest przekonany o prawdziwości  $\alpha$  oraz niech  $S_X$  oznacza, że  $X$  jest zdrowy na umyśle. Niech ponadto  $H_X$  oznacza, że  $X$  jest człowiekiem. Wówczas:

$$X \triangleleft \alpha \stackrel{\text{def}}{=} [H_X \leftrightarrow X(\alpha)]$$

oraz

$$X(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} [S_X \alpha + S'_X \alpha'].$$

Ostatni warunek zapisujemy jako

$$X(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} [S_X \leftrightarrow \alpha],$$

dla dowolnego mieszkańca wyspy  $X$ . Zamiast  $H_X$  możemy pisać po prostu  $X$ .

**Rozwiązanie.** Mamy:

$$A \leftrightarrow A(S_B), \quad B \leftrightarrow B(S'_A), \quad A \leftrightarrow A(H'_B), \quad B \leftrightarrow B(H_A).$$

Tzn.

- (1)  $A \leftrightarrow S_A \leftrightarrow S_B,$
- (2)  $A \leftrightarrow S_A \leftrightarrow B',$
- (3)  $B \leftrightarrow S_B \leftrightarrow S'_A,$
- (4)  $B \leftrightarrow S_B \leftrightarrow A.$

Wówczas z (1) i (2) mamy  $S_B \leftrightarrow B'$ , a co za tym idzie z (3) i (4) dostajemy  $S_A$  i  $A'$ . Dalej, ponownie z (1) i (2)  $A \leftrightarrow S_B$  i  $A \leftrightarrow B'$ , skąd  $S'_B$  i  $B$ .

Tym samym  $A$  jest zdrowym wampirem, a  $B$  pomyślnym człowiekiem! ■

Korzystamy tutaj ze związku

$$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \alpha' + \beta.$$

Reguła rezolucji mówi, że wiedząc, iż  $\alpha + \delta$  i  $\alpha' + \beta$  są prawdziwe, wiemy, że  $\delta + \beta$  jest również prawdziwe.

DrAK – to autor tego artykułu.

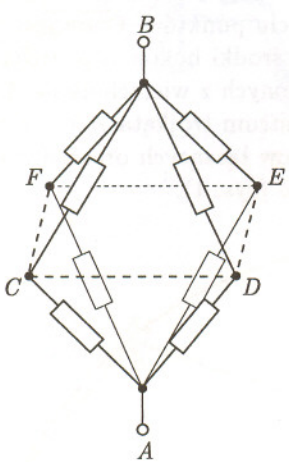


$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta, \quad \alpha \leftrightarrow \delta}{\beta \leftrightarrow \delta}$$

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta, \quad \alpha' \leftrightarrow \delta}{\beta \leftrightarrow \delta'}$$



**Rozwiązanie zadania F 496.**  
 Potencjały punktów  $C, D, E, F$  są równe, dlatego przez oporniki leżące między nimi nie płynie prąd, i nie wpływają one na oporność układu. Możemy więc przerysować nasz schemat tak jak na rysunku poniżej. Oznaczając przez  $r$  opór pojedynczego opornika, a przez  $R$  opór całego układu, znajdujemy, że  $\frac{1}{R} = 4 \frac{1}{2r}$ , a więc  $R = \frac{r}{2}$ .



Nieco bardziej skomplikowanie wygląda zagadka następująca:

**Półowa mieszkańców pewnej wyspy w pobliżu Haiti została za pomocą magicznych praktyk Voodoo zamieniona w Zombich. Podobnie jak Rycerze i Łotry, zwykli mieszkańcy tej wyspy mówią szczerą prawdę, Zombi zaś notorycznie kłamią. Uroku całej sytuacji dodaje fakt, że mieszkańcom tej wyspy, doskonale rozumiejącym nasz język, tabu zabrania odpowiadania na pytania inaczej niż: *Bal* albo *Da*. Nie wiadomo jednak, które z tych słów oznacza *Tak*, a które *Nie*.**

**Jakie pytanie należy zadać mieszkańcom tej wyspy, aby dowiedzieć się, co znaczy *Bal*?**

Niech  $\mathfrak{B}(\alpha)$  oznacza, że prawidłową odpowiedzią na to, czy zachodzi  $\alpha$ , jest *Bal* i niech  $\mathfrak{B}$  oznacza, że *Bal* znaczy *Tak*. Niech ponadto  $X \triangleleft_{\mathfrak{B}} \alpha$  oznacza, że  $X$  na pytanie o  $\alpha$  odpowiada słowem *Bal*. Mamy wówczas:

$$X \triangleleft_{\mathfrak{B}} \alpha \stackrel{\text{def}}{=} T_X \leftrightarrow \mathfrak{B}(\alpha), \quad \mathfrak{B}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \leftrightarrow \mathfrak{B}),$$

gdzie  $T_X$  oznacza, że  $X$  jest prawdziwy (czyli w tym przypadku jest człowiekiem).

**Rozwiązanie.** Celem zadania jest znalezienie takiego  $\alpha$ , żeby

$$(*) \quad X \triangleleft_{\mathfrak{B}} \alpha \leftrightarrow \mathfrak{B}.$$

Wówczas to, co  $X$  odpowie na pytanie o  $\alpha$ , oznaczać będzie *Tak*. W rzeczy samej. Jeśli  $X$  odpowie *Bal*, to prawdziwa będzie lewa strona równoważności (\*), a co za tym idzie, prawdziwa będzie jego strona prawa, tzn. *Bal*, czyli to, co  $X$  odpowiedział, oznaczać będzie *Tak*. Jeśli  $X$  odpowie *Da*, to lewa, a i w konsekwencji i prawa strona (\*) będzie fałszywa, skąd wynika, że *Bal* oznacza *Nie*. Tym samym *Da*, czyli to, co  $X$  odpowiedział, znaczy *Tak*. Tak więc cokolwiek  $X$  odpowie, oznaczać to będzie *Tak*. Przystąpmy do „wyliczenia”  $\alpha$ . W myśl poprzednich ustaleń mamy:

$$[X \triangleleft_{\mathfrak{B}} \alpha \leftrightarrow \mathfrak{B}] = [T_X \leftrightarrow \mathfrak{B}(\alpha) \leftrightarrow \mathfrak{B}] = [T_X \leftrightarrow \mathfrak{B} \leftrightarrow \alpha \leftrightarrow \mathfrak{B}] = [\alpha \leftrightarrow T_X].$$

Przyjmując zatem  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} T_X$ , widzimy, że warunek (\*) jest spełniony. Należy zatem zapytać napotkaną osobę, czy jest człowiekiem. Odpowiedź, jakiej udzieli, oznaczać będzie *Tak*. ■

Do samodzielnego rozwiązania proponujemy następującą zagadkę:

**Goszcząc swego czasu w Transylwanii, zostałem zaproszony do zamku Drakuli. Okazuje się jednak, że bywalcy tego miejsca mają w zwyczaju odpowiadać na wszelkie pytania używając słów *Bal* oraz *Da* – dokładnie tak, jak na wyspie Zombich. Przypomnieć warto, że mieszkańcy Transylwanii dzielą się na wampiry i ludzi, przy czym każdy z nich może być obłąkany i żywić nieprawdziwe przekonania. Jak za pomocą jednego pytania dowiedzieć się, czy napotkana osoba jest wampirem?**

Rozwiązanie podano na dole strony. Aby je odczytać, przystaw prostokątne lusterko do poziomej linii prostopadle do powierzchni papieru.



$\mathfrak{B}^{\alpha} \triangleleft_{\mathfrak{B}} \alpha$   
 [X  $\triangleleft_{\mathfrak{B}} \alpha$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$ ] = [X ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$ ] = [X ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\alpha$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$ ]  
 = [X ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\alpha$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\alpha$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$ ]  
 = [X ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\alpha$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\alpha$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\alpha$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$ ]  
 = [X ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\alpha$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\alpha$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\alpha$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$ ]  
 = [X ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\alpha$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\alpha$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$  ↔  $\alpha$  ↔  $\mathfrak{B}(\alpha)$ ]

Zauważmy, że dla każdego  $\alpha$  mamy:  $X \triangleleft_{\mathfrak{B}} \alpha \stackrel{\text{def}}{=} [X(\mathfrak{B}(\alpha)) \leftrightarrow H^X]$ ,  $X(\varrho) \stackrel{\text{def}}{=} [2^X \leftrightarrow \varrho]$ .

**Rozwiązanie.** Mamy:

# Sfera dwunastu punktów

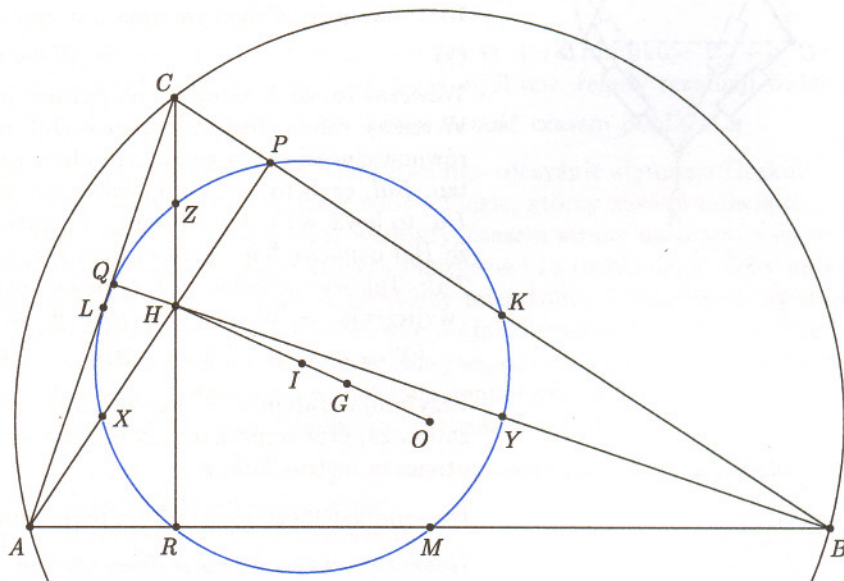
Michał ŚLĘZAK, Michał TKACZ

Skrót pracy nagrodzonej we wrześniu 1998 r. srebrnym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki.



**1. Wstęp.** Wiele zagadnień związanych z geometrią na płaszczyźnie znajduje swoje odpowiedniki w stereometrii. W niniejszej pracy zajmiemy się jedną z takich analogii. Nie będą to jednak podstawowe prawa, jak np. podobne własności trójkąta i czworościanu. Spróbujemy znaleźć powierzchnię, która jest odpowiednikiem okręgu dziewięciu punktów.

**2. Okrąg dziewięciu punktów – wiadomości wstępne.** Przypomnijmy podstawowe wiadomości dotyczące okręgu dziewięciu punktów. Dany jest dowolny trójkąt  $ABC$ . Niech  $K, L$  i  $M$  oznaczają środki boków tego trójkąta i niech  $P, Q, R$  będą spodkami wysokości opuszczonych z wierzchołków  $A, B$  i  $C$  odpowiednio. Ponadto, niech  $H$  będzie ortocentrum trójkąta  $ABC$ , a  $O$  środkiem okręgu na nim opisanego. Środki odcinków łączących ortocentrum  $H$  z wierzchołkami trójkąta oznaczmy przez  $X, Y$  i  $Z$  (rys. 1).



Rys. 1

**Definicja/Twierdzenie 2.1.** Okręgiem dziewięciu punktów nazywamy okrąg przechodzący przez punkty  $K, L, M, P, Q, R, X, Y$  i  $Z$ . Środek  $I$  tego okręgu leży w połowie odcinka  $HO$ .

Dziewięć szczególnych punktów trójkąta wyznacza więc okrąg, co może się wydać zaskakujące, bowiem już trzy punkty jednoznacznie wyznaczają okrąg. Z okręgiem dziewięciu punktów związana jest tzw. prosta Eulera. Jest to prosta przechodząca przez ortocentrum  $H$  i środek  $O$  okręgu opisanego. Jak już wiemy, zawiera ona środek okręgu dziewięciu punktów. Ponadto leży na niej środek ciężkości  $G$ , przy czym  $\frac{HG}{GO} = 2$ . Szczegółowe dowody powyższych własności można znaleźć w [1].

**3. Okrąg dziewięciu punktów a przestrzeń – hipotezy.** W dalszych rozważaniach potrzebne będą jeszcze dwie własności. Pierwsza z nich to fakt, że środkowe w czworościanie przecinając się, dzielą się w stosunku 1:3. Dowód jest prosty, dlatego nie będziemy go tu zamieszczać. Wynika z niego również, że czworościan utworzony ze środków ciężkości ścian jest podobny do wyjściowego czworościanu, a skala podobieństwa wynosi 1/3.

Możemy podejrzewać, że z czworościanem będzie związana powierzchnia, analogiczna do okręgu dziewięciu punktów. Aby określić tę powierzchnię,



## Rozwiązanie zadania M 874.

Oznaczmy rzuty prostokątne  $P$  na proste zawierające boki prostokąta  $ABCD$  przez  $X, Y, Z$ , i  $T$ .

Z twierdzenia Pitagorasa mamy

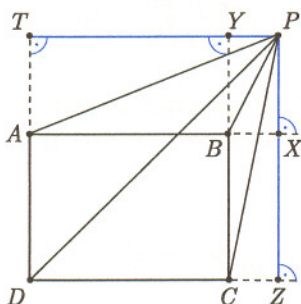
$$PA^2 = PT^2 + PX^2,$$

$$PB^2 = PX^2 + PY^2,$$

$$PC^2 = PY^2 + PZ^2,$$

$$PD^2 = PZ^2 + PT^2,$$

co po zsumowaniu daje tezę.



zastanówmy się, czemu w czworościanie odpowiadają wymienione w definicji 2.1 szczególne punkty trójkąta.

Środkom boków trójkąta, zgodnie z intuicją i doświadczeniem, odpowiadać będą środki ciężkości ścian czworościanu. Mogłyby to, co prawda, być również środki okręgów opisanych na ścianach bocznych, jednak taki wybór nie dałby ciekawego rezultatu. Punktami  $P, Q, R$  odpowiadać będą przypuszczalnie spodki wysokości opuszczonych z wierzchołków czworościanu. Logiczne będzie również zastąpienie punktów  $X, Y$  i  $Z$  środkami odcinków łączących ortocentrum czworościanu z jego wierzchołkami, jednak nie wszystkie czworościany mają ortocentrum. Czwościan ma ortocentrum, gdy każde dwie przeciwległe krawędzie są prostopadłe (tzn. istnieje płaszczyzna zawierająca jedną z nich, prostopadła do drugiej) lub (co jest warunkiem równoważnym) spodkiem każdej wysokości czworościanu jest ortocentrum przeciwległej ściany.

**Definicja 3.1.** Czwościan, mający ortocentrum, nazywamy ortocentryczny.

Dla dalszych rozważań konieczne jest więc założenie, że badany czwościan jest ortocentryczny.

**4. Sfera dwunastu punktów.** Weźmy dowolny, ortocentryczny czwościan  $A_1A_2A_3A_4$  i wprowadźmy następujące oznaczenia (rys. 2):

- $\pi_i$  – ściana czwościanu naprzeciw wierzchołka  $A_i$  lub jej płaszczyzna,
- $H_i$  – ortocentrum ściany  $\pi_i$  i równocześnie spodek wysokości z wierzchołka  $A_i$ ,
- $G_i$  – środek ciężkości ściany  $\pi_i$ ,
- $O_i$  – środek okręgu opisanego na ścianie  $\pi_i$ ,
- $H$  – ortocentrum czwościanu,
- $G$  – środek ciężkości czwościanu,
- $O$  – środek sfery opisanej na czwościanie,
- $pr_i(X)$  – rzut punktu  $X$  na płaszczyznę  $\pi_i$ .

Punkty  $A_4, H_4$  i  $O_4$  są niewspółliniowe ( $H_4$  i  $O_4$  w przeciwieństwie do  $A_4$  leżą w płaszczyźnie  $\pi_4$ ), a więc wyznaczają płaszczyznę. Płaszczyzna ta jest prostopadła do  $\pi_4$ , bo  $A_4H_4$  jest wysokością.

Do płaszczyzny tej należą również  $H$  ( $H \in A_4H_4$ , bo  $H$  jest przecięciem wysokości),  $O$  ( $A_1, A_2, A_3$  należą do sfery opisanej, wycinając z niej okrąg  $A_1A_2A_3$ ; promień sfery przechodzący przez środek tego okręgu jest prostopadły do jego płaszczyzny),  $G_4$  ( $G_4$  należy do prostej  $H_4O_4$  – własność prostej Eulera) i  $G$  ( $G \in A_4G_4$ , bo  $G$  jest przecięciem środkowych). Rysunek 3 przedstawia przekrój czwościanu tą płaszczyzną.

Wiemy, że  $G$  dzieli środkową  $A_4G_4$  czwościanu w stosunku 3:1, tzn.

$$(4.1) \quad \frac{A_4G}{GG_4} = 3.$$

Z równości tej, stosując twierdzenie Talesa dla  $\angle H_4G_4A_4$ , otrzymujemy:

$$(4.2) \quad \frac{H_4G'_4}{G'_4G_4} = 3,$$

przy czym za  $G'_4$  przyjmujemy rzut prostopadły  $G$  na  $H_4O_4$  (a więc i na płaszczyznę  $\pi_4$ ,  $G'_4 = pr_4(G)$ ). Ponadto z własności prostej Eulera wiemy, że

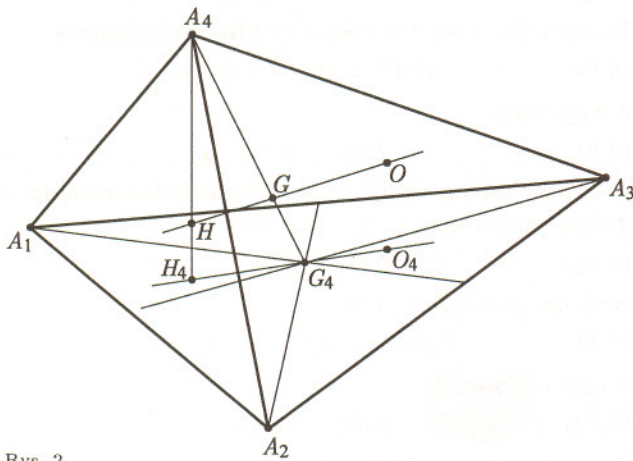
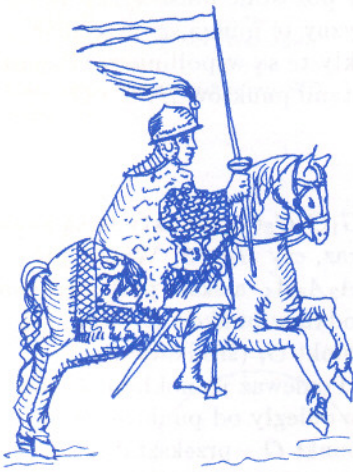
$$(4.3) \quad \frac{H_4G_4}{G_4O_4} = 2.$$

Z (2.1) i (4.3) wynika zaś, że

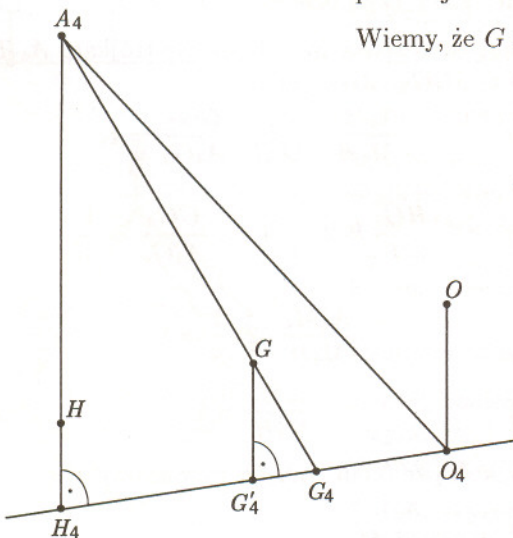
$$(4.4) \quad 2H_4G'_4 = 6G'_4G_4 = 3G_4O_4,$$

czyli także

$$(4.5) \quad H_4G'_4 = G'_4O_4.$$



Rys. 2



Rys. 3



Ponieważ analogicznie możemy zdefiniować trzy pozostałe płaszczyzny  $A_i H_i O_i$  i każda z nich zawiera  $H$ ,  $G$  i  $O$ , zatem płaszczyzny te muszą się przecinać w prostej, do której należą  $H$ ,  $G$  i  $O$ , czyli punkty te są współliniowe. Ponieważ jednak  $H_4 G'_4 = G'_4 O_4$ , a punkty  $H_4$  i  $O_4$  są rzutami punktów  $H$ ,  $G$  i  $O$  odpowiednio, mamy więc

$$(4.6) \quad HG = GO.$$

Niech  $S$  będzie sferą opisaną na czworościanie  $G_1 G_2 G_3 G_4$  (punkty te są zawsze niewspółpłaszczyznowe, rys. 4). Sprawdźmy teraz, czy  $H_i \in S$ . Wiemy już, że czworościan  $G_1 G_2 G_3 G_4$  jest podobny do  $A_1 A_2 A_3 A_4$ , a skala podobieństwa wynosi  $1:3$ . Niech  $\delta$  oznacza jednokładność o środku w punkcie  $G$  i skali  $-\frac{1}{3}$ . Obrazem punktu  $A_i$  w tej jednokładności jest punkt  $G_i$  (środkowe  $A_i G_i$  przecinają się w  $G$ , dzieląc się w stosunku  $1:3$ ). Ponieważ jednokładność nie zmienia stosunków odległości, więc punkt równo odległy od punktów  $A_1, \dots, A_4$  – czyli środek sfery opisananej na czworościanie, punkt  $O$  – przekształca się w punkt równo odległy od punktów  $G_1, \dots, G_4$  – czyli środek sfery  $S$ , punkt  $O'$  (czyli  $\delta(O) = O'$ , rys. 5). Ponieważ środek jednokładności  $G$  i punkt  $O$  leżą w omawianej wcześniej płaszczyźnie,  $O'$  również musi w niej leżeć. Co więcej, leży on na prostej  $GO$  i

$$(4.7) \quad GO = 3GO'.$$

Korzystając z tej równości i z (4.6), otrzymujemy:

$$(4.8) \quad 3HO' = 6O'G = 2GO,$$

a więc także

$$(4.9) \quad HO' = 2O'G.$$

Jeśli przyjmiemy, że  $O'_4 = \text{pr}_4(O')$ , to z twierdzenia Talesa otrzymamy

$$(4.10) \quad H_4 O'_4 = 2O'_4 G'_4,$$

czyli uwzględniając (4.4)

$$(4.11) \quad H_4 O'_4 = 2O'_4 G'_4 = 2G'_4 G_4,$$

a więc również

$$(4.12) \quad H_4 O'_4 = O'_4 G_4.$$

Ponieważ  $O'_4 = \text{pr}_4(O')$ , zatem

$$(4.13) \quad H_4 O' = G_4 O',$$

czyli  $H_4 \in S$  (do  $S$  należy  $G_4$ ) i analogicznie  $H_i \in S$ .

Niech  $M_4$  będzie punktem przecięcia wysokości  $A_4 H_4$  ze sferą  $S$ . Kąt  $A_4 H_4 O_4$  jest prosty, więc  $M_4 G_4$  jest średnicą sfery, czyli przechodzi przez  $O'$ .

Stosując twierdzenie Menelaosa dla trójkąta  $A_4 H G$  i prostej  $M_4 G_4$ , otrzymujemy:

$$(4.14) \quad \frac{A_4 M_4}{M_4 H} \cdot \frac{HO'}{O'G} \cdot \frac{GG_4}{A_4 G_4} = 1,$$

ale

$$(4.15) \quad \frac{HO'}{O'G} = 2 \quad \text{i} \quad \frac{GG_4}{A_4 G_4} = \frac{1}{4},$$

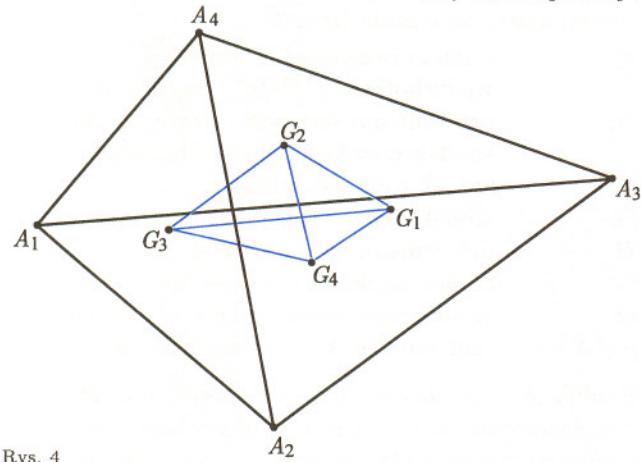
więc

$$(4.16) \quad \frac{A_4 M_4}{M_4 H} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 1,$$

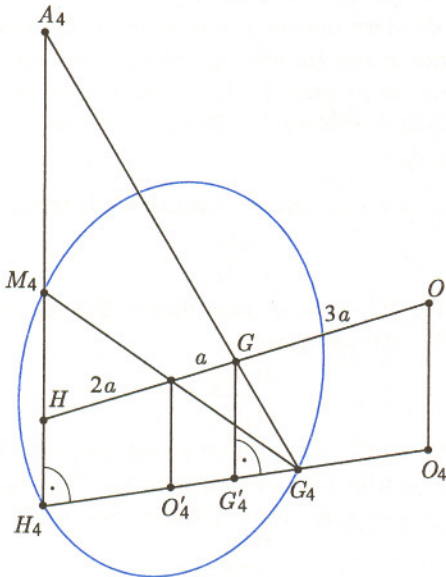
$$\frac{A_4 M_4}{M_4 H} = 2.$$

Stosunek ten nie zależy od tego, którą ze ścian  $A_i H_i O_i$  rozważamy, więc możemy powiedzieć, że:

$$\text{dla każdego } M_i : \quad \frac{A_i M_i}{M_i H} = 2, \quad M_i \in S.$$



Rys. 4



Rys. 5

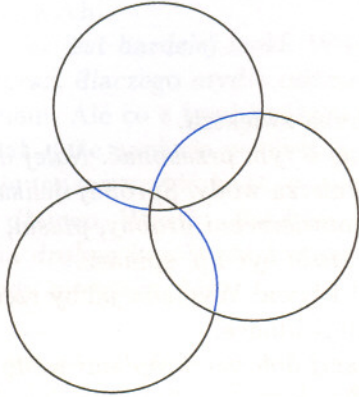
### Bibliografia

- [1] Coxeter H., *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, Warszawa 1967.
- [2] *Mały słownik matematyczny*, WP, Warszawa 1975.

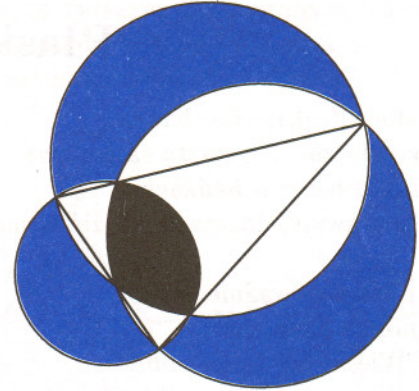
Znaleźliśmy więc sferę, na której leży 12 szczególnych punktów czworoscianu (środki ciężkości ścian  $G_i$ , spodki wysokości  $H_i$  i punkty  $M_i$  dzielące odcinki  $A_iH$  w stosunku 2:1). Cały dowód został przeprowadzony przy założeniu, że czworoscian jest ortocentryczny.

Istnienie takiej figury pozwala przypuszczać o istnieniu twierdzeń z nią związanych, analogicznych do tych dotyczących okręgu dziewięciu punktów na płaszczyźnie.

## Dlaczego?



Trzy tej samej wielkości okręgi parami się przecinają. Zaznaczone kolorem łuki dają w sumie półokrąg również wtedy, gdy trójkąt utworzony przez środki nie jest równoboczny, ani nawet równoramienny. Dlaczego?



Boki trójkąta ostrokątnego są odpowiednio średnicami trzech okręgów. Różnica sumy pól kolorowych i pola czarnego jest akurat dwa razy większa od pola trójkąta. Dlaczego?

M.K.



## Zadania

Przygotował Marek KORDOS

**M 874.** Wykazać, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu od wierzchołków danego prostokąta jest dwa razy większa od sumy kwadratów jego odległości od prostych zawierających boki tego prostokąta.

Rozwiązanie na str. 4

**M 875.** Wykazać, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu danego okręgu, mającego środek w środku ciężkości danego trójkąta od jego wierzchołków, ma wartość niezależną od wyboru tego punktu.

Rozwiązanie na str. 16

**M 876.** Ramiona kąta prostego o wierzchołku  $W$ , leżącym w jednym ze środków symetrii dwu danych prostych równoległych  $a$  i  $b$ , przecinają te proste w punktach  $A$  i  $B$ . Wykazać, że odległość  $W$  od prostej  $AB$  nie zależy od wyboru kąta prostego.

Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Ewa CZUCHRY

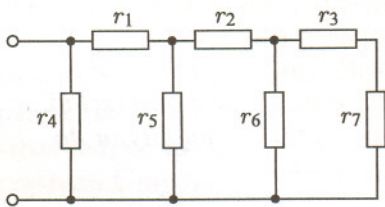
**F 495.** Znaleźć opór zastępczy układu przedstawionego na rysunku 1, przyjmując  $r_1 = r_2 = r_3 = r_7 = 1 \Omega$ , a  $r_4 = r_5 = r_6 = 2 \Omega$ .

Rozwiązanie na str. 15

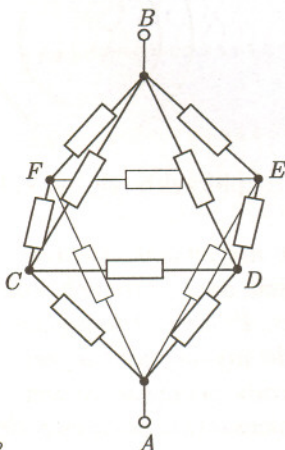
**F 496.** Wyznaczyć opór zastępczy pokazanego na rysunku 2 układu jednakowych oporników.

Rozwiązanie na str. 3

Rys. 1



Rys. 2



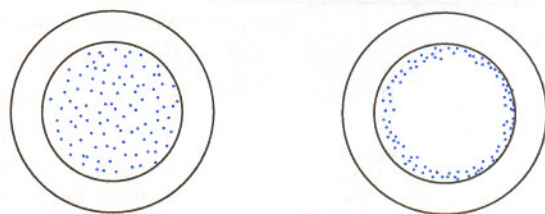




## Płaska bańka

- Zaraz, albo płaska, albo bańka.
- *No niby tak, ale ... zresztą sam zaraz zobaczysz. Co wiesz o bańkach?*
- Można je stawiać, dostawać, wozić w nich mleko...
- *Nie, ja pytam poważnie.*
- Bańki można puszczać.
- *Ciepło. Wiesz, jak to się robi?*
- Rozpuszcza się trochę mydła albo płynu do mycia naczyń w wodzie, bierze słomkę, zanurza i dmucha.
- *I co dalej?*
- Nic. Wychodzą bańki.
- *A dlaczego z samej wody nie wychodzą?*
- Bo ja wiem? Z samej wody takiej trwałej błony nie da się zrobić.
- *Dlaczego?*
- Hmm. To ma coś wspólnego z napięciem powierzchniowym.
- *A co to jest?*
- Na powierzchni cieczy tworzy się taka warstwa...
- *Jak kożuch na mleku?*
- Niezupełnie. Kożuch robi się z tłuszczu rozpuszczonego w mleku, a nie z samego mleka.
- *Właśnie. Cząsteczki cieczy przyciągają się. Jakby się nie przyciągały wystarczająco, to z cieczy zrobiłby się gaz. Cząsteczki wewnątrz cieczy są ciągnięte jednakowo we wszystkie strony, te na powierzchni tylko do środka i na boki. Każda z nich chce się dostać do środka. Położenie równowagi odpowiada najmniejszej powierzchni, czyli najmniejszej liczbie cząsteczek na niej.*
- Aha, to dlatego bańki mydlane są sferyczne?
- *Tak, ale wróćmy do napięcia powierzchniowego. Powiedziałeś, że nie można zrobić bańki z samej wody, a z wody z mydłem można, tak?*
- N...no tak.
- *To mydło zwiększa napięcie powierzchniowe czy zmniejsza?*

- N...no chyba zwiększa.
- *Możemy się o tym przekonać. Należy do głębokiego talerza wody. Spróbuj delikatnie położyć na powierzchni drobny, płaski, metalowy przedmiot. Może być np. spinacz.*
- *Udało się! Pływa! Wygląda jakby rzeczywiście leżał na jakiejś błonie.*
- *Teraz zacznij dolewać kroplami wodę. Czy coś się zmienia?*
- *Chyba nie. Dlaczego miałyby się coś zmieniać?*
- *To tylko „doświadczenie kontrolne”. Dodaj kroplę płynu do zmywania naczyń.*
- *Spinacz poruszył się, zatrzymał i zaraz utonął.*
- *Właśnie. Dlaczego utonął?*
- *Może dlatego, że się poruszył?*
- *Hmm. Nie da się tego wykluczyć. Ale spróbuj położyć inny spinacz na wodzie.*
- *Nie udaje się, wszystkie toną.*
- *Spróbuj z innym talerzem i świeżą wodą.*
- *Teraz można. Czy to znaczy, że płyn do mycia naczyń zmniejsza napięcie powierzchniowe wody?*
- *Tak. Ale nie tylko. Posyp wodę pieprzem, żebyśmy widzieli, co się dzieje na powierzchni. Dobrze. A teraz znów wpuść kroplę płynu do mycia naczyń na sam środek.*



- *Ale super! Ta kropla rozpierzchła się po całym talerzu!*
- *Tak, mydło i podobne mu związki tworzą cząsteczki o długich łańcuchach, których jeden koniec jest „wodolubny”. Ponieważ napięcie powierzchniowe płynu do mycia naczyń jest mniejsze niż wody, to woda „ciągnąc za ten wodolubny koniec” błyskawicznie pokrywa się*

warstewką płynu.

– A drugi koniec tych cząsteczek też do czegoś służy?

– Tak. Nawet powinieneś wymyśleć do czego, a nawet jak się o tym przekonać.

– Tłuszcz? Drugi koniec jest „tłuszczolubny”? Trzeba zrobić podobne doświadczenie z olejem.

– Tylko weź raczej spodek, zamiast talerza.

– Wygląda podobnie. Tylko rozprzestrzenia się nie tak błyskawicznie. Albo słabiej się przyciągają, albo nie ma takiej różnicy napięć powierzchniowych.

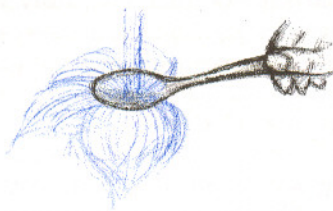
– Albo tłuszcz jest bardziej lepki. W każdym razie wiesz już teraz, dlaczego mydło odtłuszcza?

– Chyba wiem. Ale co z tymi bańkami. Jeżeli woda ma tak duże napięcie powierzchniowe, to dlaczego nie można zrobić bańki z samej wody?

– Właśnie dlatego. Wodzie „bardziej oplaca się” podzielić na drobne krople niż tworzyć bańkę. Ale błonę z wody można zrobić.

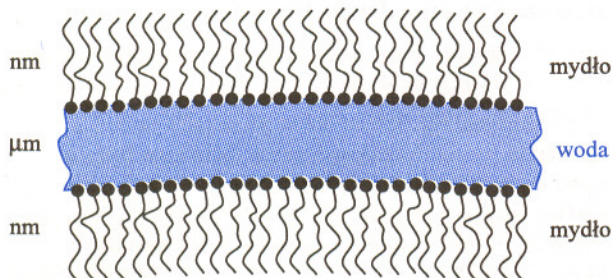
– Jak?

– Czy aby nie za rzadko zmywasz naczynia? Podstaw pod równy strumień wody łyżkę.



– Rzeczywiście, robi się taki śmieszny grzybek czy może raczej meduza. Ale to cały czas płynie.

– Płynie, ale kształt błony prawie się nie zmienia. Statyczne błony np. bańki można uzyskać praktycznie tylko dzięki „dwulicowości” takich związków jak mydło. Błona mydlana to cienka na parę mikronów warstewka wody obłożona z dwóch stron jednocząsteczkowymi powierzchniami cząsteczek mydła.



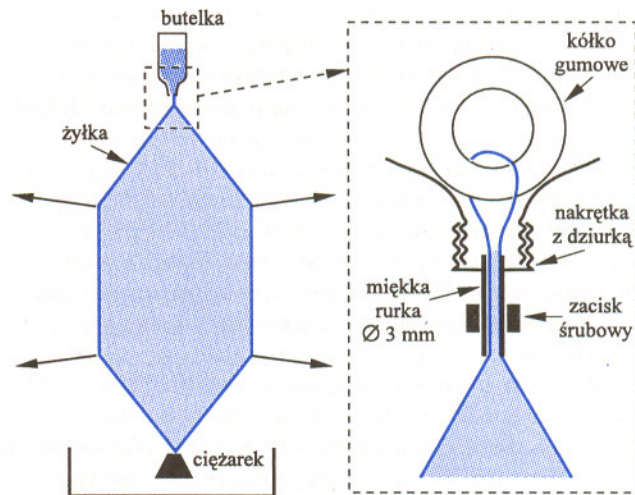
– To dlaczego bańki są takie nietrwałe?

– Bo ich „zbrojenie” – woda – stopniowo z nich paruje. Zamkniętą w szczelnym słoju bańkę udało się utrzymać przez prawie rok. Aby ograniczyć parowanie, dodaje się czasami do roztworu na

bańki mydlane trochę gliceryny, której zadaniem jest wytworzenie jeszcze jednej powierzchni ochronnej.

– Wykorzystuje się w ten sposób tłuszczolubną stronę mydła?

– Dokładnie. Ale to nie jest jedyny sposób na trwałą błonę. Na bardzo ciekawy pomysł wpadł Maarten A. Rutgers. Zaprojektował maszynę do wytwarzania płaskiej błony mydlanej, która cały czas płynie. Pomysł polega na puszczeniu cieniutkiego strumyczka roztworu mydła po dwóch obciążonych żyłkach. Rozciągnięcie ich powoduje powstanie pomiędzy nimi błony, która (nie zaburzana) może przetrwać dowolnie długo.



– Jak duża może być taka błona?

– To zależy od roztworu, prędkości przepływu i ... treningu. Największa błona miała wymiary 20 na 4 metry. W czasie zeszłorocznego Festiwalu Nauki redakcji DELTY udało się zrobić błonę o wymiarach 8 na 1,5 metra, która przetrwała kilkadziesiąt sekund, oraz 180 na 80 centymetrów, która trwała rozpięta przez kilka godzin.

– A jak się w taką błonę dmucha, to co?

– Tego się nie da opowiedzieć. To trzeba zobaczyć. Ta błona jest tak fantastycznie plastyczna, że tylko na rysunkowych filmach o duchach można zobaczyć coś podobnego.

– Ale gdzie to można zobaczyć?

– Albo zrobić sobie samemu, albo przyjść we wrześniu na Wydział Fizyki UW. Dla Ciebie mam jednak niespodziankę. Mam na strychu małą przenośną instalację. Przecież obiecałem Ci płaską bańkę.

Małą Deltę opracował Piotr ZALEWSKI

Dokładne informacje o płaskiej bańce można znaleźć w sieci Internet pod adresem <http://www.physics.ohio.state.edu/~maarten>

## Aktualności (nie tylko) fizyczne

Ujmowanie prawidłowości obserwowanych w zachowaniu dużych populacji w prawa wywodzące się z fizyki statystycznej ma już na swoim koncie wiele sukcesów. Niemniej jednak podejście takie wymaga dużej wyobraźni z jednej strony oraz powoduje pewne zdziwienie z drugiej. Zwłaszcza gdy sami wchodzimy w skład rozpatrywanej populacji. Choć we własnym zachowaniu z łatwością odnajdujemy znamiona racjonalności, to jako grupa przypominamy stado... no, zresztą nieważne czego.

Artykuły relacjonujące wyniki tego typu podejścia pojawiają się w najbardziej renomowanych czasopismach naukowych, *Physical Review Letters (PRL)*, wyroczni fizyków nie wyłączając. Według aktualności fizycznych American Institute of Physics z 23 grudnia zeszłego roku, redagowanych przez Phillipa F. Schewe i Bena Steina, a rozsyłanych pocztą elektroniczną, pod koniec stycznia (piszę to 11 stycznia), właśnie w *PRLu* ma się ukazać artykuł przedstawiający za pomocą równań dyfuzji zadowalający opis rozprzestrzeniania się kultury rolniczej w neolitycznej Europie. Autorzy: Joaquim Fort i (nieznany z imienia) Mendez za pomocą modelu odpowiadającego mieszanemu się dwóch reagujących chemicznie płynów uzyskali dobrą zgodność z danymi antropologicznymi, lingwistycznymi i genetycznymi, wprowadzając równania z dodatkowym „opóźnieniem czasowym” używanym z powodzeniem do opisu rozprzestrzeniania się pożarów i epidemii. W przypadku migracji kulturowej takie opóźnienie czasowe miałoby odpowiadać potrzebie dorostania dzieci nowo osiedlonych rolników przed dalszym rozprzestrzenianiem się. Autorzy uważają, że tego typu matematyczne modelowanie będzie odgrywało coraz większą rolę w antropologii i historii, o ile tylko będziemy dysponować wysokiej jakości danymi.

Podobnie ciekawym zastosowaniem idei fizycznych w innych dziedzinach jest modelowanie zachowania stada ptaków. Myślę, że każdy z nas widział nie raz takie stado, które z daleka wydaje się być jakby jednym organizmem, a przecież każdy ptak bezpośrednio komunikuje się tylko z najbliższymi sąsiadami i często musi mylić się co do średniego zachowania całej grupy w najbliższej chwili.

W artykule opublikowanym w *Physical Review E* w październiku ubiegłego roku J. Toner i Y. Tu porównują kolektywne zachowanie ptaków do układu magnesików, jeżeli chodzi o porządkowanie stada poprzez oddziaływanie między najbliższymi sąsiadami, do zachowania cząsteczek kurzu, które mogą szybko znaleźć się daleko od siebie czy też do mechanizmu konwekcji. Używając dobrze rozwiniętych matematycznych opisów takich zjawisk i przyjmując typowe wartości parametrów, takich jak prędkość ptaków, są w stanie przewidzieć np. gęstość i fluktuacje gęstości stada.

Możliwość zastosowania matematycznych modeli opisujących układy fizyczne w takich dziedzinach, jak ekonomia, archeologia czy socjologia nie zmienia faktu, że wiele zjawisk z codziennego życia, należących do standardowego zakresu zainteresowań fizyki, nie doczekało się jeszcze zadowalającego wytłumaczenia.

Jednym z takich, wydawałoby się, prostych fenomenów, jest kleistość niektórych substancji. Okazuje się, że nikt nie potrafi wyjaśnić zmienności siły, z jaką musimy działać, aby ruchem jednostajnym oderwać metalową sondę od lepkiej powierzchni. Siła ta szybko osiąga maksimum o wartości kilka rzędów wielkości większej, niż wynikałoby to z prostych modeli uwzględniających siły van der Waalsa, a następnie spada i utrzymuje mniej więcej stałą wartość do czasu całkowitego oderwania sondy od podłoża. Pewne światło na mechanizm tego zjawiska rzuca model zaproponowany przez C. Gaya i L. Leiblera w mającym się ukazać w *PRLu* artykule. Autorzy sugerują, że dodatkowe przywieranie wywołane jest przez pęcherzyki powietrza uwięzione pomiędzy stykającymi się powierzchniami. Odciąganie powierzchni od siebie powoduje, według tej teorii, zmianę kształtu pęcherzyków, co początkowo zwiększa siłę przywierania na zasadzie przyssawki, do momentu, gdy powietrze zacznie wdziierać się pomiędzy rozdzielane powierzchnie. Wtedy rozwój sieci punktów „bezkontaktowych” powoduje spadek siły przyciągania do stałej wartości, która utrzymuje się aż do całkowitego rozdzielania powierzchni.

Piotr ZALEWSKI

## Koło Matematyków Studentów Uniwersytetu Jagiellońskiego

zaprasza swoich aktualnych i byłych członków, a także sympatyków Koła, na spotkanie z okazji czterdziestolecia reaktywowania działalności. Spotkanie odbędzie się 20 marca 1999 roku o godz. 14 w Instytucie Matematyki UJ w Krakowie, ul. Reymonta 4.

20 marca 1959 roku KMS UJ rozpoczęło swoją pracę, kontynuując chlubne tradycje Kółka Matematyczno-Fizycznego (założonego w 1893 roku), którego działalność w latach pięćdziesiątych została zawieszona; od roku 1973 Koło nosi imię profesora Stanisława Zaremby. Oprócz działalności naukowej (niezależnie od licznych jednorazowych odczytów corocznie odbywają się cztery kilkudniowe wyjazdy turystyczno-naukowe) koło organizuje wiele innych imprez (bale, rozmaite konkursy, mecze piłkarskie i brydżowe, turnieje szachowe, spotkania z ciekawymi ludźmi).

Koło działa bardzo prężnie, o czym świadczy bogate archiwum, w którym – między innymi – można znaleźć mnóstwo rozmaitych tekstów humorystycznych, wierszy, kalendarzy. Część dorobku członków Koła została wydana w dwóch skryptach: *Rozmaitości Absurdalne* oraz *Rozmaitości Uśmiechnięte*. Biblioteka Koła liczy ponad 2000 książek, w tym sporo wydanych jeszcze w XIX, a nawet w XVIII wieku.

Piękny jubileusz czterdziestolecia będzie wspaniałą okazją do spotkania się razem i wspomnienia.

Bliższe informacje można uzyskać pod adresem [kmsuj@im.uj.edu.pl](mailto:kmsuj@im.uj.edu.pl) lub na stronie [www.omega.im.uj.edu.pl](http://www.omega.im.uj.edu.pl).



Otocza nas urzekająca i trudno dająca się opisać różnorodność istot żywych – niewidocznych gołym okiem drobnoustrojów, tysięcy roślin, milionów zwierząt. Każda z tych istot jest odmienna, niepowtarzalna; każda rośnie, rozwija się w sobie właściwym cyklu rozwojowym; każda na swój sposób stara się o pożywienie i miejsce na świecie, walczy z wrogami i przeciwnościami, a wreszcie albo ginie, albo wydaje przed śmiercią sobie podobne potomstwo. Dostrzegał to bogactwo form, ich wiecznie powtarzający się i regulowany rozwój, ich zmienność, każdy człowiek od zarania istnienia ludzkości. Dostrzegał to na tle mało zmiennej przyrody nieożywionej, pełnej form powtarzalnych, nie podlegających rozwojowi, niezdolnych do aktywnego, kierunkowego oddziaływania na otoczenie wykorzystywane na swoje potrzeby.

Nic dziwnego, że w życiu, w żywych istotach doszukiwano się jakiegoś specjalnego czynnika, jakiegoś elementu występującego jedynie w nich, a nieobecnego w przyrodzie nieożywionej. Ten domniemywany element różnie nazywano. Opisywał go w starożytności Arystoteles jako *duszę roślinną* i *zwierzęcą*, van Helmont w Odrodzeniu jako *archeje*, Bergson w XIX w. jako *élan vital*. Charakteryzowano ten poszukiwany element życia nie przez jego właściwości, jakich nie umiano wskazać, ale przez właściwości życia – ruch, rozwój, dziedziczność, zmienność, ewolucja – jakie miały od tego elementu życia zależeć. Pogląd ten, przypisujący życiu specyficzny, niewykrywalny w fizyce i chemii parametr – nazywamy witalizmem. Witalizm wyjaśnia zjawisko życia przez „siłę życiową” (*vis vitalis*), która z kolei jest wyjaśniana jedynie przez właściwości samego życia. Jest to więc pozorne wyjaśnienie, będące przyznaniem się do niemożności właściwego wyjaśnienia. Nauka służy jednak wyjaśnianiu świata, a przynajmniej tego obszaru rzeczywistości, który daje się badać metodami naukowymi. W takim ujęciu witalizm umiejscawia się poza zakresem nauki. Zjawiska życia należą bowiem do obszaru rzeczywistości poddającego się badaniom metodami naukowymi.

Witalizm odegrał jednak w nauce rolę bodźca, pobudzającego do szukania innych wyjaśnień zjawiska życia. Pierwszą taką próbą był mechanicyzm Kartezjusza, traktującego organizm żywy, a właściwie zwierzę, jako maszynę. Model mechanicznej maszyny okazał się dla organizmu żywego za prymitywny, zastąpiono go więc z czasem modelem maszyny chemicznej.

I ten model uznano z czasem za zbyt prosty. Wiek XX przyniósł kolejny model – cybernetyczny. Model ten opiera się o sprzężenie zwrotne, jakie możemy odnaleźć także w układach nieożywionych. Model ten obejmuje jednak również sterowanie, program, pamięć,

odbieranie, wartościowanie i przetwarzanie dopływającej informacji, i na tej podstawie modyfikowanie programu „zależnie od potrzeb”.

Wreszcie model ten może zawierać wbudowany węzeł element nieoznaczoności. Układy cybernetyczne tego typu napotykaamy tylko w świecie żywym i wśród maszyn cybernetycznych skonstruowanych przez człowieka, a więc przez żywą istotę. Maszyny te, choć nieożywione, są wytworem jedynie żywego organizmu.

Model cybernetyczno-chemiczny tłumaczy zjawisko życia, co nie oznacza, że wyjaśnia je już w pełni i bez reszty. Model ten opiera się na pojęciach niewyprowadzalnych z samej fizyki, choć nie wykraczających poza jej prawa.

Spór witalizmu z mechanicyzmem jest już chyba w pełni martwy. Witalizm, jako przebrzmiała koncepcja, jest przedmiotem zainteresowania historyków myśli ludzkiej. Kontrowersja przyjęła obecnie postać sporu między redukcjonistami, uważającymi, że wszelkie zjawiska życia można sprowadzić do znanych nam praw fizyki i zarazem wyjaśnić za pomocą tych praw, a antyredukcjonistami, sądzącymi, iż zjawiska biologiczne, nie wykraczając poza prawa fizyki, nie dają się ani sprowadzić, ani wyjaśnić bez reszty przez te prawa. Rzecz ciekawa, że antyredukcjonistami są często właśnie fizycy, np. Bohr, Jordan, Elassen, obok takich biologów jak Jacob; redukcjonistami jest przede wszystkim wielu biologów molekularnych, jak np. Crick i Monod. Ale ten spór, jak również proponowany przez Bohra komplementaryzm, są już inną historią. Chcieliśmy tu tylko pokazać, że nawet taka niesprawdzalna hipoteza, jak witalizm, będąca w istocie wyrazem kapitulacji wobec trudności wyjaśnienia problemu naukowego, może, mieszcząc się w określonym kontekście historii nauki, odegrać rolę bodźczą. Nauce bowiem nie szkodzi błędne koncepcje, które są właściwe każdej epoce i każdej dyscyplinie. Nauce szkodzi natomiast brak wolności myśli, brak krytycyzmu, brak tolerancji.

# Wiatr – ruch powietrza

Jan Wacław PARFINIEWICZ



## RYСУNKI DO ARTYKUŁU ZNAJDUJĄ SIĘ NA OKŁADCE.

Rysunek 1 prezentuje echo radaru z wysokości 2000 m n.p.m. i poziome linie prądu odtworzonego pola wiatru w ruchu względnym (tzn. po odjęciu prędkości średniej) na tym poziomie. W centrum obszaru znajduje się radar z Legionowa, oś odciętych biegnie z zachodu na wschód, a oś rzędnych z południa na północ.

Na rysunku 2 pokazany jest przekrój wiru z rozkładem temperatury i z liniami ruchu względnego. Oś pionowa skierowana jest od poziomu morza ku górze, rysunek obejmuje zakres od 500 m do 10 km. Oś pozioma przechodzi przez Legionowo i skierowana jest z zachodu na wschód, zakres poziomy przekroju 400 km. Wysokie wartości temperatury w przedniej części wiru wskazują na stratosferyczne pochodzenie mas powietrza, ogranych przy adiabatycznym sprężeniu w ruchu zstępującym. W tylnej (zachodniej) części wiru widać wyraźną ścianę chłodnego powietrza pochodzenia arktycznego wlewającego się od północnego-zachodu nad Polskę. Na wysokości około 8,5 km zalega powierzchnia tropopauzy oddzielającej stratosferę (powyżej) od troposfery (poniżej), gdzie dominuje huraganowy cyklon. Na powierzchni tej wiatr wieje najsilniej, dochodząc do 50 m/s. Ruch osiadający dominuje obraz. W pobliżu centrum niżu, gdzie następuje zakrzywienie tropopauzy i załamanie głównego nurtu ruchu powietrza, względny ruch w dół jest szczególnie silny. Warto nadmienić, że w tym czasie, to jest około godziny 12 czasu uniwersalnego, gdy „oko” cyklonu przemieszczało się w rejonie Legionowa, niebo nad Warszawą przez krótki okres stało się prawie bezchmurne.

1. O ruchu gazu idealnego, za jaki przyjmuje się powietrze, traktuje mechanika ośrodka ciągłego (meteorologia dynamiczna). Układ równań powstaje ze zbilansowania pędu i masy:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0,$$

gdzie  $\rho$  – gęstość,  $\vec{v}$  – wektor prędkości,  $p$  – ciśnienie,  $\vec{g}$  – natężenie pola grawitacyjnego. W odróżnieniu np. od wody powietrze jest ściśliwe, a jego gęstość zależy istotnie od wysokości, przy czym ciśnienie nie jest jednoznacznie określone przez gęstość. Niezbędne zatem staje się wprowadzenie temperatury, która wiąże, poprzez równanie stanu gazu, ciśnienie i gęstość. Zamknięcie systemu wymaga wówczas zbilansowania energii na gruncie pierwszej zasady termodynamiki. Gdyby nie zmienna gęstość, pole prędkości powietrza dawałoby się zanalizować za pomocą twierdzenia Bernoulliego (całki pierwszej układu) wiążącego energię kinetyczną i potencjalną  $\rho gh$  z polem ciśnienia.

Można wykazać (np. [1]), że o ile znana jest zależność średnich wartości ciśnienia i gęstości od wysokości, to fluktuacje ciśnienia, gęstości i temperatury wyrażają się przez pole prędkości, czyli rozkład wiatru.

Proste wyjaśnienie ruchu powietrza mogłoby być następujące. W dowolnym momencie dane jest pole prędkości i średnie wartości ciśnienia oraz gęstości. Ruch powietrza powoduje lokalnie w różnych miejscach przyrost lub ubytek masy. Gęstość powietrza, zależna w sposób znaczący od wysokości, zmienia się nieznacznie w poziomie. Ciśnienie w danym miejscu zależne jest od rozkładu gęstości nad tym miejscem. Powoduje to, że te nieznaczne zmiany gęstości prowadzą do istotnych zmian ciśnienia w kierunkach poziomych. Powstają wymuszenia przyspieszające lub opóźniające ruch powietrza. Jednocześnie zmianie ulegają wartości średnie ciśnienia i gęstości. Powstaje nowy obraz ruchu i cykl się powtarza.

W rozumowaniu powyższym celowo pominięto efekty związane z lepkością i efekty wypornościowe oraz efekt rotacji układu odniesienia (siła Coriolisa), uwypuklając powiązanie ruchu z rozkładem ciśnienia jako mechanizm dominujący.

2. Związek rozkładu energii potencjalnej z rozkładem ciśnienia jest przez meteorologów wykorzystywany od chwili rozpoczęcia regularnych sondowań atmosfery i analizy tzw. map górnych w troposferze. Zależność ciśnienia od wysokości określa składowa pionowa bilansu wektora pędu

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g,$$

gdzie  $g$  – przyspieszenie ziemskie. To równanie zwane jest równaniem hydrostatyki i po scałkowaniu względem  $z$  daje podstawową formułę barometryczną służącą do wyznaczania stopnia barometrycznego (zmiany wysokości w zależności od zmian ciśnienia [m/hPa]) i do konstrukcji altimetrów.

Podstawowe trudności z interpretacją danych pomiarowych w meteorologii związane były z dwoma faktami: 1) sondy meteorologiczne (do czasu zastosowania techniki radarowej do pomiaru wysokości) reagowały bezpośrednio na ciśnienie, a nie na wysokość, 2) brakuje pomiaru pionowej składowej prędkości (mierzonej jest tylko wiatr poziomy).

Jak wspomniano, ten stan rzeczy ulega stopniowo zmianie przez wprowadzanie techniki radarowej. Do pomiaru wysokości sondy używa się popularnych radarów radiolokacyjnych, natomiast pionowe prędkości ruchu powietrza można wyznaczać za pomocą kosztownych systemów radarów dopplerowskich.

Silna zależność ciśnienia od pionowego rozkładu gęstości pozwala na zamianę współrzędnej  $z$  na ciśnienie  $p$ . Do tej pory obliczenia meteorologiczne prowadzi

Rysunek 3 ilustruje pionowy przekrój pola ciśnienia ahydrostatycznego w ruchu względnym – pośredni obraz rotującej struktury. Ułożenie osi jak na rysunku 2. W środku obszaru dominują ujemne wartości ciśnienia, a ich przestrzenny rozkład do złudzenia przypomina formy spotykane w trąbach powietrznych (por. film dokumentalny „Fenomeny Pogody: Tornada”, prezentowany na kanale TV „Discovery”). I chociaż skala przestrzenna i czasowa są w obu przypadkach różne, to domniemywać należy, że natura (tj. dynamika) obu procesów jest podobna.

Prezentowane rysunki powstały w trakcie realizacji grantu finansowanego przez KBN.



Jan.Parfiniewicz@imgw.pl Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej, ul. Podleśna 61, 01–673 Warszawa

#### Literatura

- [1] Gal-Chen, T., 1978: *A method for the initialisation of the anelastic equations: Implications for matching models with observations*. Mon. Wea. Rev., 106, 587-606.
- [2] E. Dziekańska, 1998, *Prognozy Meteorologiczne*, CHIP, Magazyn Komputerowy, maj 5/98, 52-59.
- [3] J. Parfiniewicz, 1997, *Asymilacja danych pomiarowych z radaru dopplerowskiego do meteorologicznej analizy i prognozy mezoskalowej*, Sprawozdanie merytoryczne KBN, Projekt badawczy 4/S401 017 07, KBN, Biblioteka IMGW.

się w układzie współrzędnych, w którym pionowa współrzędna geometryczna zamieniona jest na ciśnieniową lub na pewną kombinację współrzędnej geometrycznej i ciśnieniowej. Współrzędna ta z reguły zależna jest od czasu.

Założenie hydrostatyczności wykorzystywane jest aktualnie we wszystkich operacyjnych modelach numerycznych stosowanych do prognozowania pogody. Modele hydrostatyczne zastąpiły w latach 70. mniej dokładne modele bezźródłowe ( $\text{div} \vec{v} = 0$ ), zwane quasi-solenoidalnymi lub quasi-geostroficznymi, gdzie poziomy wiatr wyznaczany był bezpośrednio przez gradient ciśnienia. Tym samym „dozwolono” w nowej generacji modeli na zaburzenia związane z rozbieżnością i zbieżnością linii prądów powietrza. Ze względu na związek dywergencji prędkości z rozkładem masy powietrza w polu siły ciężkości zaburzenia te nazywa się grawitacyjnymi.

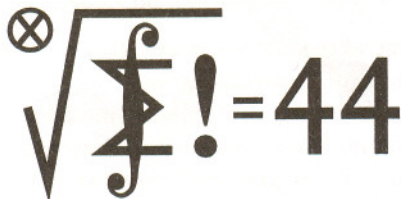
Prognoza pogody, oparta na całkowaniu względem czasu układu równań różniczkowych, realizowana jest zatem w złożonym (krzywoliniowym i nieortonormalnym) i zmiennym w czasie układzie współrzędnych w następującym schemacie. W chwili początkowej z pomiarów uzyskuje się pola poziomych składowych prędkości wiatru, temperatury i ciśnienia. Z równania bilansu masy oblicza się prędkość pionową (przy założeniu lokalnej nieściśliwości). Znając trójwymiarowe pole ruchu, można rozwiązać zagadnienia prognozy temperatury i poziomych składowych prędkości wiatru przy odpowiednio dobranym kroku całkowania numerycznego względem czasu. Wyliczony rozkład temperatury pozwala z równania hydrostatyki wyliczyć ciśnienie. Rozkład ciśnienia definiuje współrzędną pionową i cykl całkowania względem czasu powtarza się.

Numeryczne prognozowanie pogody wyparło tradycyjne, subiektywne (synoptyczne) procedury. Pomimo braku dowodu istnienia rozwiązania skomplikowanego układu równań opisujących ruch powietrza (podstawowy szkielet prognoz pogody), na systemy prognostyczne niektóre kraje przeznaczają olbrzymie środki i angażują znaczny potencjał intelektualny. Zauroczenie prognozami meteorologicznymi wynika z faktu, że: 1) są one potrzebne, 2) są ciekawe i skomplikowane, 3) sprawdzają się w znacznej mierze i 4) zaspokajają zapotrzebowanie uczonych na sukces praktyczny. Następna generacja modeli jest gotowa i intensywnie testowana. Są to modele ahydrostatyczne. Więcej informacji o numerycznym prognozowaniu pogody i sprawdzalności prognoz – patrz [2].

3. Efekty ahydrostatyczne manifestują się w gwałtownie przebiegających procesach pogodowych związanych z cyklonami tropikalnymi, huraganami, tornadami i pospolitymi burzami. W tych obszarach fluktuacje ciśnienia, gęstości (i temperatury) wyrażają się poprzez pole prędkości, czyli rozkład wiatru.

Zostało to potwierdzone przez autora [3] na przykładzie przypadku wichury z dnia 28.03.97. Wówczas to intensywny wir atmosferyczny (gwałtownie rozwinięty cyklon) został uchwycony przez radar meteorologiczny w Legionowie, mieszcząc się o godzinie 12 GMT prawie idealnie w polu widzenia radaru, to jest w obszarze  $400 \times 400$  km. Przemieszczenie echa radaru pozwoliło na dokładną analizę pola wiatru. W rezultacie trójwymiarowe pola ciśnienia, temperatury i wiatru zostały odtworzone na siatce o kroku poziomym 4 km i pionowym 100 m. Interpretacja wizualna tych pól pozwoliła wykryć pewne, wydaje się, interesujące osobliwości i w ogólności potwierdziła uznany powszechnie pogląd o wpływie stratosfery na proces gwałtownego tworzenia cyklonów.

Na narzędzia numeryczne, pozwalające analizować (asymilować) duże ilości danych, składają się programy interpolacyjne, oprogramowanie zagadnienia wariacyjnego tzw. metodą sprzężonych gradientów oraz oprogramowanie odtworzenia fluktuacji ciśnienia i gęstości. Ważnym elementem procedury asymilacyjnej jest algorytm obliczania pionowej składowej ruchu w naturalnym, kartezyjskim układzie współrzędnych z dowolnie skomplikowaną geometrią rzeźby terenu.



Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 V 1999

**Skrót regulaminu**

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

**Zadania z matematyki nr 377, 378**

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**377.** Rozważamy wielomian  $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$  zmiennej zespolonej  $z$ , o współczynnikach zespolonych. Dowieść, że jeżeli wszystkie pierwiastki wielomianu  $P(z)$  są liczbami zespolonymi o module 1, to również wszystkie pierwiastki wielomianu  $Q(z) = z^3 + |a|z^2 + |b|z + |c|$  są liczbami zespolonymi o module 1.

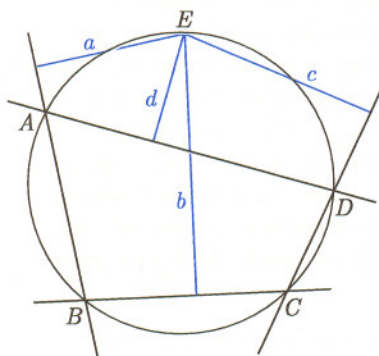
**378.** Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej  $k$  istnieją dwie kolejne liczby naturalne, z których każda ma co najmniej  $k$  różnych dzielników pierwszych.

Zadanie 378 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1998**

Przypominamy treść zadań:

**369.** Pięciokąt  $ABCDE$  jest wpisany w okrąg. Odległości punktu  $E$  od prostych  $AB, BC, CD, DA$  są odpowiednio równe  $a, b, c, d$ . Wyrazić  $d$  przez  $a, b, c$ .



**370.** Dane są liczby naturalne  $n \geq k \geq 1$ . Ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  losujemy ze zwracaniem  $k$  liczb. Obliczyć wartość oczekiwaną iloczynu tych liczb pod warunkiem, że ich suma jest równa  $n$ .

**369.** Oznaczmy promień okręgu przez  $R$ . Pole trójkąta  $ABE$  wyraża się wzorami:

$$S_{ABE} = \frac{|AB| \cdot |AE| \cdot |BE|}{4R} \quad \text{oraz} \quad S_{ABE} = \frac{|AB| \cdot a}{2}.$$

Stąd wynika pierwsza z napisanych niżej równości; a pozostałe otrzymujemy przez cykliczne przesunięcie oznaczeń:

$$a = \frac{|AE| \cdot |BE|}{2R}, \quad b = \frac{|BE| \cdot |CE|}{2R}, \quad c = \frac{|CE| \cdot |DE|}{2R}, \quad d = \frac{|DE| \cdot |AE|}{2R}.$$

Zatem  $2Ra \cdot 2Rc = 2Rb \cdot 2Rd$  ( $= |AE| \cdot |BE| \cdot |CE| \cdot |DE|$ ) i mamy odpowiedź:  $d = ac/b$ .

(Zauważmy, że  $A, B, C, D, E$  mogą być dowolnymi pięcioma punktami na okręgu, niekoniecznie kolejnymi wierzchołkami pięciokąta.)

**370.** Zdarzenia elementarne w rozważanym problemie warunkowym – to ciągi  $(x_1, \dots, x_k)$  o wyrazach całkowitych nieujemnych, o sumie równej  $n$ . Każdy taki ciąg kodujemy w postaci ciągu zerojedynkowego utworzonego z  $k$  bloków złożonych z zer; kolejne bloki mają długości  $x_1, \dots, x_k$ ; między blokami zer umieszczamy jedynek – powstały ciąg ma więc długość  $n+k-1$ . (Oto przykład: dla  $n = 8, k = 4, x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 2$ , kod ma postać: 00010100100.)

Jedynek, których jest  $k-1$ , są dowolnie rozmieszczone na  $n-1$  pozycjach rozdzielających zera; liczba takich rozmieszczeń jest równa  $\binom{n-1}{k-1}$ , a prawdopodobieństwo pojedynczego zdarzenia elementarnego jest odwrotnością tej liczby.

W każdym bloku złożonym z zer zastąpmy teraz jedno zero, dowolnie wybrane, jedyką – liczba możliwości jest równa iloczynowi  $x_1 x_2 \dots x_k$ . (Oto jeden z możliwych rezultatów takiej operacji dla ciągu z poprzedniego przykładu: 0101110101; podkreślone są „stare” jedynek.)

W otrzymanym ciągu zerojedynkowym długości  $n+k-1$  jest  $2k-1$  jedynek, przy czym mogą się one znaleźć na zupełnie dowolnych pozycjach. Na odwrót, mając dany ciąg takiej postaci, możemy jednoznacznie odtworzyć ciąg liczb  $x_1, \dots, x_k$ : podział na bloki o tych właśnie długościach wyznacza jedynek; druga, czwarta, szósta, itd. („stare” jedynek).

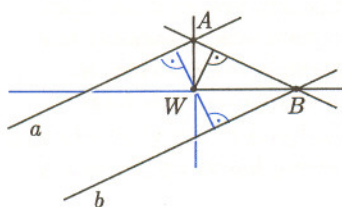
Dla ustalonego zdarzenia elementarnego (czyli ustalonej pozycji „starych” jedynek), iloczyn  $x_1 x_2 \dots x_k$  jest liczbą możliwych rozmieszczeń „nowych” jedynek. Suma takich iloczynów dla wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa po prostu liczbie rozmieszczeń  $2k-1$  jedynek w ciągu zerojedynkowym długości  $n+k-1$  i wynosi  $\binom{n+k-1}{2k-1}$ . Mnożąc ją przez prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego, otrzymamy szukaną wartość oczekiwaną  $E$

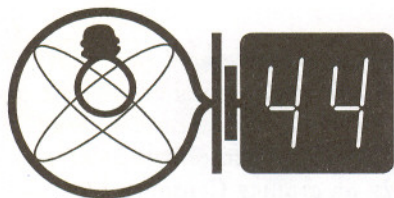
$$\text{iloczynu } x_1 x_2 \dots x_k. \text{ Wynik: } E = \binom{n+k-1}{2k-1} \binom{n-1}{k-1}^{-1} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n+j}{k+j}.$$



**Rozwiązanie zadania M 876.**

Rysując proste zawierające ramiona kąta, stwierdzamy z przystawiania powstałych trójkątów, że rozważana odległość jest połową odległości  $a$  i  $b$ .





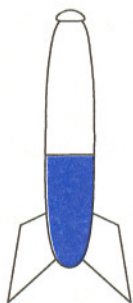
Termin nadsyłania rozwiązań:

31 V 1999

Czołówka ligi zadaniowej  
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 262 (WT=2,20) i 263 (WT=2,14)  
z numeru 9/1998

Jarosław Łazuka	- Warszawa	38,58
Marek Wójcicki	- Szczecin	34,97
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	26,51
Tomasz Wietecha	- Tarnów	26,49
Aleksander Surma	- Myszków	16,32
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	14,49



266. Przy pominięciu siły oporu powietrza równanie ruchu rakiety z działającym silnikiem ma postać

$$U \frac{dm}{dt} = Mg + Ma,$$

gdzie  $U = \sqrt{2(p - p_{atm})/\rho}$  jest prędkością wylotu wody względem rakiety,  $dm$  jest masą wody wyrzuconej w ciągu czasu  $dt$ , a  $M$  jest zmienną masą rakiety. Oznaczmy przez  $v_0(t)$

całkę  $\int_0^t U \frac{dm}{M}$  (jest to prędkość, którą osiągnęłaby rakietka po

czasie  $t$ , gdyby można było pominąć siłę ciężkości). Zauważmy, że chociaż czas działania silnika zależy od wielkości otworu wylotowego, to końcowa wartość  $v_0$  (w chwili ustania pracy silnika i później; oznaczmy tę wartość przez  $v_1$ ) od niego nie zależy. Przy uwzględnieniu grawitacji prędkość rakiety w chwili  $t$  wynosi  $v(t) = v_0(t) - gt$ , a osiągnięta wysokość  $h = \int v(t') dt' = \int v_0(t') dt' - \frac{1}{2}gt^2$ . Widzimy, że maksymalną wysokość rakieta osiągnie wtedy, gdy funkcja  $v_0(t)$  osiągnie swoją maksymalną wartość  $v_1$  w jak najkrótszym czasie,

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1998

Przypominamy treść zadań:

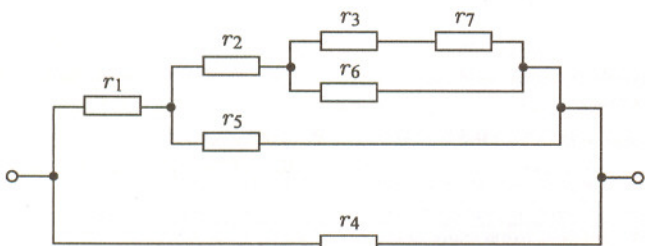
266. Rakietka-zabawka zawiera komorę, do której nalewa się wody, pozostawiając w części komory powietrze, a następnie dopompowuje się powietrze do odpowiednio wysokiego ciśnienia. Po ustawieniu rakiety pionowo (rys.) odłącza się pompkę, a sprężone powietrze wyrzuca wodę, zapewniając rakięcie napęd. Obliczyć numerycznie maksymalną wysokość możliwą do osiągnięcia przez rakieta, jeśli dane są: masa samej rakiety 200 g, objętość komory 400 cm<sup>3</sup> i maksymalne ciśnienie (nadwyżka nad ciśnieniem atmosferycznym) 0,5 MPa. Przyjąć wartość ciśnienia atmosferycznego równą 0,1 MPa. Co można powiedzieć o optymalnej wielkości otworu wylotowego? Jaką ilość wody należy nalać do komory, aby osiągnąć maksymalną wysokość?

267. Gdy samochód uderzył w nieruchomą ścianę, pasy bezpieczeństwa napięły się siłą  $F$ . Ocenic orientacyjnie, jaką siłą napną się pasy w tym samochodzie, jeśli jadąc z tą samą prędkością uderzy on w taki sam samochód: a) stojący nieruchomo, b) jadący naprzeciw z tą samą prędkością.

tnz. gdy otwór dyszy jest jak największy. Wtedy  $h = v_1 t - \frac{1}{2}gt^2$ , a maksymalna wysokość rakiety wyniesie  $v_1^2/2g$ .

Obliczenie całki  $v_1$  autor zadania przeprowadził numerycznie. Jeśli założymy, że rozprężenie powietrza zachodzi adiabatycznie (według wzoru  $pV^{1,4} = \text{const}$ ), to dla podanych wartości masy rakiety, ciśnienia początkowego i objętości komory otrzymuje się, że maksymalne  $v_1$ , równe 15,0 m/s, występuje wtedy, gdy na początku napełnimy 51% komory (204 cm<sup>3</sup>) wodą. Rakietka osiągnie wysokość 11,5 m.

267. W przypadku b) ze względu na symetrię zderzenie przebiega tak samo, jak zderzenie z nieruchomą ścianą. W przypadku a) analizę najwygodniej jest przeprowadzić w układzie środka masy, w którym oba samochody jadą naprzeciw siebie z prędkością dwukrotnie mniejszą. Jeśli założymy, że siła hamująca jest proporcjonalna do „ugięcia sprężyny” (wgniecenia karoserii), to ruch samochodów jest harmoniczny, a dwukrotne zmniejszenie prędkości początkowej oznacza dwukrotne zmniejszenie amplitudy i maksymalnej wartości siły.



Rozwiązanie zadania F 495.

Dany układ wygodniej jest przedstawić tak, jak na rysunku obok.

Opór zastępczy oporników  $r_3$  i  $r_7$ , połączonych równolegle z  $r_6$ , wynosi  $R_1 = \frac{r_6(r_3 + r_7)}{r_6 + r_3 + r_7} = 1 \Omega$ , a opór układu oporników  $r_2$  i  $R_1$ ,

połączonych równolegle z  $r_5$ , wynosi  $R_2 = \frac{r_5(r_2 + R_1)}{r_5 + r_2 + R_1} = 1 \Omega$ . Stąd

całkowity opór układu wynosi  $R = \frac{r_4(r_1 + R_2)}{r_4 + r_1 + R_2} = 1 \Omega$ .



Wszechświat jako całość rozszerza się. Wiadomo to nie od dziś, a dowodem tego jest przesunięcie ku czerwieni widm odległych galaktyk. Fakt ten znany jest jako prawo Hubble'a, zgodnie z którym prędkość  $v$  „ucieczki” galaktyki jest wprost proporcjonalna do jej odległości  $r$ ,  $v = Hr$ , gdzie  $H$  jest stałą Hubble'a wynoszącą w przybliżeniu  $75 \text{ (km/s)/Mpc}$ . Związek ten Hubble odkrył, mierząc prędkości radialne galaktyk, których odległości dawało się wyznaczyć niezależnie. Trzeba tu przyznać, że odległości były wówczas znane źle, dlatego wartość stałej Hubble'a, obliczanej jako współczynnik proporcjonalności, była do dziś kilkakrotnie korygowana. Z czasem prawo Hubble'a stało się ważnym narzędziem do wyznaczania odległości galaktyk, gdyż prędkość radialna jest wielkością mierzoną stosunkowo łatwo i dokładnie.

Tak prosta zależność między prędkością radialną i odległością galaktyki zachodzi, gdy galaktyka jest na tyle odległa, że jej prędkość „ucieczki” jest znacznie większa od prędkości ruchu własnego. Nie jest niczym dziwnym, gdy jakaś bliska galaktyka ma nawet ujemną prędkość radialną (zbliża się do naszej). Natomiast „hubblewski” ruch galaktyk odległych może zostać zakłócony np. przez grawitacyjne oddziaływanie ze strony wyjątkowo wielkiego skupienia materii. Otóż od

kilkunastu już lat wiadomo było, że analiza ruchów galaktyk (łącznie z naszą) świadczy o obecności przynajmniej jednego takiego skupienia, nazwanego Wielkim Atraktorem. Tak się nieszczęśliwie złożyło, że Wielki Atraktor leży na granicy Centaura i Cyrkla, a więc w Drodze Mlecznej, gdzie obserwacje innych galaktyk poważnie utrudnia należąca do naszej Galaktyki materia międzygwiazdowa. Niemniej jednak nowy przegląd tej okolicy nieba wykazał, że obecna tam gromada galaktyk Abell 3627 (George Abell to autor katalogu gromad galaktyk), uważana dotychczas za bardzo skromną, jest w istocie najbogatszą gromadą na południowym niebie. Pomiar prędkości radialnych jej składowych galaktyk zgodnie wskazują na średnią wartość  $5000 \text{ km/s}$ , skąd odległość gromady wynosiłaby  $60\text{--}70 \text{ Mpc}$ . Masa gromady, szacowana na podstawie liczby i typów składających się na nią galaktyk, wynosiłaby  $5 \times 10^{15} M_{\odot}$ . Wprawdzie jest to zaledwie  $1/10$  masy Wielkiego Atraktora ocenianej na podstawie zakłóceń „hubblewskiego” ruchu galaktyk, nie należy jednak zapominać, że zapewne w gromadzie Abell 3627 również znajduje się ogromna ilość tajemniczej do dziś, niewidocznej materii. Pozostaje więc uznać, że natura Wielkiego Atraktora została odkryta.

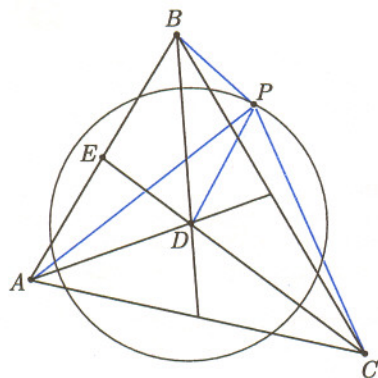
Tomasz KWAST

Marzec

W marcu (21 III) Słońce przechodzi przez punkt równonocy wiosennej (punkt Barana), formalnie zaczyna się więc wiosna. Punkt ten – wskutek precesji – leży obecnie w Rybach, a więc w środku nocy widzimy przeciwległy mu obszar nieba, czyli okolice punktu równonocy jesiennej, punktu Wagi, znajdującego się obecnie w Pannie. Natomiast w godzinach wieczornych w południowej części nieba widać na lewo od Bliźniąt niepozorny gwiazdozbiór Raka, a w nim prawie na ekliptyce otwartą gromadę gwiazd zwaną Praesepe, M 44 (po polsku Ul, ale nazwa ta raczej nie jest popularna). Ta dość młoda gromada słabo jest widoczna gołym okiem, a piękny widok przedstawia już w lornetce. Zawiera w ogóle kilkaset gwiazd na powierzchni trzykrotnie przekraczającej rozmiarami rozmiar tarczy Księżyca i leży w odległości  $180 \text{ pc}$ .

Wenus w ciągu marca przechodzi z Ryb do Barana, oddala się więc od Słońca i można ją oglądać po jego zachodzie. Mars jest w Wadze, widać go więc przez całą noc, Jowisz w Rybach i Saturn niedaleko w Baranie, obie więc te planety wieczorem już zachodzą. Pełnia Księżyca będzie w marcu dwa razy: 2 i 31 III, nów 17 III. Księżyc zbliży się mocno do Regulusa (dwukrotnie: 1 i 28 III – tu wieczorem zakrycie) i do Aldebarana 22 III – również wieczorem zakrycie. Wreszcie 3 III Merkury znajdzie się dość daleko od Słońca i można próbować znaleźć go o zmroku nisko na zachodnim niebie.

T.K.



**Rozwiązanie zadania M 875.** Niech  $D$  będzie środkiem ciężkości trójkąta  $ABC$ , a  $P$  dowolnym punktem okręgu o środku w  $D$ . Wówczas

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = (\overline{AD} + \overline{DP})^2 + (\overline{BD} + \overline{DP})^2 + (\overline{CD} + \overline{DP})^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + 3 \cdot \overline{DP}^2 + 2 \cdot \overline{DP}(\overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}).$$

Pierwsze cztery składniki nie zależą od wyboru punktu  $P$ , wystarczy więc wykazać, że suma w ostatnim nawiasie jest zerem. W tym celu oznaczamy przez  $E$  przecięcie prostych  $AB$  i  $CD$ . Wówczas  $\overline{AD} + \overline{BD} = 2 \cdot \overline{ED} = -\overline{CD}$ , bo środkowe dzielą się w stosunku 2:1.

### MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (14)

ZADANIE: Dla jakich wartości parametru  $a$  równanie  $\log_7(x^2 + ax) = \log_7(2x^2 + 3x + 1)$  ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste  $x$ ?

*Rozwiązanie:* Po opuszczeniu logarytmów równanie przyjmuje postać

$$x^2 + ax = 2x^2 + 3x + 1,$$

skąd

$$x^2 + (3 - a)x + 1 = 0.$$

Równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy  $\Delta = 0$ . W naszym przypadku  $\Delta = (3 - a)^2 - 4$ , co po przyrównaniu do zera daje dwa rozwiązania:  $a = 1$  i  $a = 5$ .

JWR

### MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (15)

Ambroży proponuje Bazylemu:

- Zagramy...
- Nie mam czasu. Muszę rozwiązać kilka równań.
- Jakich?
- $(2 + x)^x = 16$ .

- $x = 2$ . Widzisz, jak szybko rozwiązałem!
- Tyle to i ja wiem. Zgadnąć rozwiązanie każdy potrafi. Ale jak do niego dojść?
- To proste. Nakładamy na obie strony logarytm dwójkowy i otrzymujemy  $x \log_2 2 + x = 4$ , skąd  $x + x = 4$ , czyli  $x = 2$ .
- Sprytnie! Mam jeszcze dwa równania do rozwiązania, zaraz je przeliczę i możemy w coś zagrać.  $(3 + x)^x = 3^{12}$ , pewnie trzeba nałożyć logarytm trójkowy:  $x \log_3 3 + x = 12$ ,  $x + x = 12$ ,  $x = 6 \dots$  Wyszło! Ambroży, twoja metoda jest genialna. Jeszcze jedno.  $(2 + x)^x = 2^{18}$ .
- Nie masz co liczyć, wyjdzie 6.
- Czekaj, policzę... logarytmujemy dwójkowo,  $x \log_2 2 + x = 18$ ,  $x + x = 18$ ,  $x = 9 \dots$  Oj, chyba jednak prędko nie zagramy. Muszę pomyśleć, czemu wynik wyszedł do góry nogami.

JWR

### MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (16)

ZADANIE: Dany jest trójkąt prostokątny o bokach całkowitych  $a, b, c$ . Wiadomo, że  $c = a + 7$ . Udowodnić, że wówczas  $a$  jest liczbą parzystą.

*Rozwiązanie:* Z twierdzenia Pitagorasa mamy  $a^2 + b^2 = c^2$ . Przeprowadzimy dowód nie wprost. Gdyby liczba  $a$  była nieparzysta, to wówczas  $c$  byłaby parzysta. Liczba  $b$  musiałaby więc być nieparzysta.

Popatrzmy na reszty z dzielenia przez 4 liczb  $a^2, b^2$  i  $c^2$ . Pierwsze dwie dzielą się przez 4 z resztą 1, ostatnia zaś bez reszty, co pokazuje, że równość  $a^2 + b^2 = c^2$  nie może mieć miejsca. Zatem  $a$  musi być liczbą parzystą.

JWR

## PISZEMY PRACE (3)

Rubryka adresowana jest do uczniów. Wyniki uzyskane w najlepszych pracach zostaną omówione w Gammalimatiášie. Najlepsze prace wezmą udział w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki.

### WOKÓŁ WIELKIEGO TWIERDZENIA FERMATA

Rozstrzygnięcie, czy równanie  $x^n + y^n = z^n$  ma rozwiązania w liczbach naturalnych  $x, y, z$ , dla  $n > 2$ , nie jest sprawą prostą, ale wykonalną. Dzięki Andrew Wilesowi wiemy od niedawna, że takich rozwiązań nie ma. Nie zamierzamy nikogo namawiać na dowodzenie Wielkiego Twierdzenia Fermata.

Spróbujmy trochę ułatwić ten temat. Może zająć się równaniem  $x^n + y^n = z^{n+1}$ ? To z kolei za łatwe:  $x = y = z = 2$  i już.

A co z  $x^3 + y^4 = z^5$ ? To już trochę trudniej rozwiązać w pamięci. Ale po chwili namysłu znajdujemy  $x = 2^8, y = 2^6, z = 2^5$ . Wystarczy bowiem w równości  $2^n + 2^n = 2^{n+1}$  dobrać takie  $n$ , aby  $3|n, 4|n$  i  $5|(n+1)$ .

Już wiemy, jak się za takie równania zabierać! Weźmy więc równanie  $x^4 + y^5 = z^6$ . Wystarczy znaleźć takie  $n$ , które dzieli się przez  $4 \cdot 5 = 20$  i przy tym  $n+1$  dzieli się przez 6... O nie! Za dużo byśmy chcieli - liczby  $n$  i  $n+1$  nie mogą być jednocześnie parzyste.

Trzeba trochę innej metody. Wyjdźmy od równości  $1 + 3 = 4$  i przemnożmy ją obustronnie przez  $2^k \cdot 3^l$ . Mamy wtedy

$$2^k \cdot 3^l + 2^k \cdot 3^{l+1} = 2^{k+2} \cdot 3^l.$$

Dobierzmy  $k$  i  $l$  tak, aby składniki po lewej stronie tej równości były odpowiednio czwartą i piątą potęgą, a liczba po prawej szóstą. Chwila namysłu i znajdujemy  $k = 40$  oraz  $l = 24$ , skąd  $x = 2^{10} \cdot 3^6, y = 2^8 \cdot 3^5, z = 2^7 \cdot 3^4$ .

A czy potrafisz rozstrzygnąć, czy inne równania typu  $x^{n_1} + y^{n_2} = z^{n_3}$  mają rozwiązania? Przejrzyj *Deltę* 11/1997 - może znajdziesz tam coś pomocnego przy pisaniu pracy.

Prace prosimy przysyłać pod adresem Gammalimatiášu do 30 kwietnia 1999 r. Autorów prosimy o podanie imienia, nazwiska, adresu prywatnego, klasy oraz nazwy i adresu szkoły. Prosimy o zaznaczenie, czy praca była pisana pod kierunkiem opiekuna - jeśli tak, prosimy o podanie jego imienia, nazwiska i adresu.

JWR

Korespondencję do Gammalimatiášu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl