SPIS TREŚCI
NUMERU 9(304)

W następnym numerze:

Tranzystor

Okładki i ilustracje
Anna Ludwicka

Rysunki techniczne
Marcin Adamski

Wybór artykułów w języku angielskim
http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 853-59-61, 843-02-41(-2) wewn. 21
BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Skład systemem TEX wykonała Redakcja.
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
w Warszawie, ul. Mińska 65.

Zasada nieoznaczoności w pociągu

Grzegorz WROCHNA

Jednym z podstawowych, a jednocześnie „tajemniczych” wyników mechaniki kwantowej jest zasada nieoznaczoności. Według niej niemożliwe jest jednoczesne określenie położenia i prędkości danego obiektu z dowolną dokładnością. Ściślej, iloczyn niepewności wyznaczenia położenia Δx i pędu Δp nie może być mniejszy niż połowa stałej Plancka $\hbar = h/2\pi = 1{,}0546 \cdot 10^{-34}$ Js, czyli

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2.$$

Wynik ten jest o tyle szokujący, że w mechanice klasycznej bez dokładnej znajomości położenia i pędu nie możemy nic powiedzieć o ewolucji układu. Dlatego często w popularnych przedstawieniach mechaniki kwantowej zasada nieoznaczoności ukazywana jest jako coś niezwykłego. W niniejszym artykule spróbujemy rozjaśnić nieco tę tajemniczość, odwołując się do prostej analogii.

Wyobraźmy sobie, że stoimy na peronie i chcemy zmierzyć prędkość przejeżdżającego pociągu. Do dyspozycji mamy zegarek i wiemy, że każdy wagon ma długość $\lambda = 20$ m. Pomiaru prędkości możemy dokonać, odmierzając zegarkiem określony odcinek czasu t i licząc wagony, które w tym czasie nas minęły. Jeśli minęło nas n wagonów, to pokonana przez pociąg droga wynosi $l = n\lambda$ z dokładnością do $\Delta l = \lambda/2$. W wyniku pomiaru otrzymamy prędkość

$$v = \frac{l}{t} = \frac{n\lambda}{t}$$

z dokładnością

$$\Delta v = \frac{\Delta l}{t} = \frac{\lambda}{2t} = \frac{v}{2n}.$$

Ze wzoru w sposób oczywisty wynika, że im większy interwał czasu, czy też im dłuższą drogę wybieramy, tym dokładniejszy będzie pomiar prędkości. Pamiętać jednak należy, że zawsze będzie to prędkość **średnia** na odcinku $l = n\lambda$. Innymi słowy, położenie pociągu x w chwili pomiaru znane jest z dokładnością $\Delta x = l/2 = n\lambda/2$. Mamy więc sytuację typową dla zasady nieoznaczoności: możemy niezbyt precyzyjnie zmierzyć prędkość na krótkim odcinku, ale w dość dobrze określonym miejscu, lub uzyskać dużą dokładność pomiaru prędkości średniej, rezygnując z precyzyjnego określenia miejsca. Ujmując rzecz matematycznie,

$$\Delta x \cdot \Delta v = \frac{v\lambda}{4}$$

lub w języku pędu

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{p\lambda}{4}. \tag{1}$$

W mechanice kwantowej położenie cząstki można opisać za pomocą tzw. paczki falowej. Paczka falowa to fala, której amplituda jest istotnie różna od zera dla skończonej liczby okresów n, a więc w ograniczonym obszarze $l = n\lambda$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo znalezienia cząstki koncentruje się w tym właśnie obszarze. Długość λ fali wyznaczona jest przez pęd p cząstki

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}. \tag{2}$$

W naszej analogii każdy wagon pociągu odpowiada jednemu

Podstawy matematyki w wieku XX

1. Wstęp

Wiktor MAREK,
Jan MYCIELSKI

Autorzy dziękują za wnikliwe uwagi p. Mirosławowi Truszczyńskiemu.

Podstawy są dziedziną matematyki zajmującą się poprawnością rozumowań matematycznych, podstawowymi strukturami matematyki (takimi, które pozwalają zdefiniować wszelkie inne struktury) oraz efektywnością obliczeń matematycznych. Te trzy obszary skrystalizowały się w XX wieku w postaci trzech dużych rozdziałów matematyki: *logiki matematycznej*, *teorii mnogości* i *teorii obliczalności*. Postaramy się opisać rozwój każdego z tych trzech rozdziałów podstaw. Oczywiście, opis nasz będzie, z konieczności, raczej pobieżnym szkicem.

W wieku dwudziestym podstawami matematyki zajmowali się bardzo znani matematycy i filozofowie, np. Cantor, Frege, Hilbert, Russell, Gödel, Tarski, Kleene, Martin, Skolem, Solovay, Shelah i Turing. Oczywiście, spotkamy poniżej wiele innych nazwisk – lista ta jest bardzo niekompletna. W Polsce, oprócz Tarskiego, badali podstawy: Chwistek, Ehrenfeucht, Grzegorczyk, Jaśkowski, Leśniewski, Lindenbaum, Łoś, Mostowski, Rasiowa, Sikorski, autorzy tego artykułu i wielu innych. Podręczniki logiki i podstaw (często książki bardzo obszerne) zawierają głównie wyniki badań matematyków dwudziestowiecznych. Obiektywne streszczenie dwudziestowiecznego rozwoju podstaw nie jest zatem zadaniem prostym, szczególnie że musimy to wszystko zmieścić na kilkunastu stronach maszynopisu. Ograniczymy się zatem do omówienia najistotniejszych rezultatów, m.in. twierdzeń Gödla o zupełności logiki pierwszego rzędu i o niezupełności bogatszych teorii matematycznych, niektórych twierdzeń o niezależności, informacji o roli aksjomatów istnienia bardzo dużych liczb kardynalnych itd.

Popatrzmy najpierw na stosunek podstaw matematyki do reszty matematyki. Nasuwa się nam następująca analogia. Dobry mechanik samochodowy nie musi znać termodynamiki (na której opiera się funkcjonowanie samochodów). Podobnie dobry matematyk, który nie ma pretensji do głębszego wykształcenia poza swoją specjalnością, nie musi znać podstaw matematyki. Co więcej, popularyzacja termodynamiki wśród mechaników samochodowych nie jest zadaniem łatwym – i na podobne trudności napotyka popularyzacja podstaw matematyki wśród matematyków. Niektórych matematyków irytuje sam fakt, że ktoś o zainteresowaniach filozoficznych usiłuje opisać, choćby w części, funkcjonowanie ich umysłów i wyjaśniać w abstrakcyjny sposób, czym jest matematyka. Podkreślają oni, że matematyka, jaką znamy, uprawiana jest od tysiącleci i osiągnęła wielkie sukcesy na polu opisywania rzeczywistości bez tego, by ktoś wyjaśniał jej naturę. Ale podstawy dają *matematyczną* teorię tego, czym jest matematyka, tak jak fizyka daje matematyczną teorię różnych innych zjawisk i procesów fizycznych. Jest naturalne, że – jak każdy opis rzeczywistości fizycznej – podstawy są niekompletne i stale są rozwijane i ulepszane.

Ponieważ podstawy traktują matematykę jako zjawisko fizyczne (proces konstrukcji pewnych tekstów), należy dodać, iż istnieją filozofowie i matematycy, którzy myślą, że ten punkt widzenia jest nierozsądny, że coś zaciemnia. Wierzą oni, iż matematyka jest nauką, która bada świat idei platońskich (które są transcendentalne, czyli istnieją poza światem fizycznym, niezależnie od ludzkości).

Gödel, o którym będziemy pisać wiele w tym artykule, reprezentował tę opinię.

A zatem, że matematyka nie jest zjawiskiem czysto fizycznym, bo ma na nią bezpośredni wpływ świat pozafizycznych idei.

Jednakże matematyczne podstawy matematyki obywają się bez takich założeń i prowadzą do czysto fizykalnego i nader kompletnego opisu zjawiska, jakim jest matematyka. Dlatego liczni filozofowie i matematycy (w tym autorzy tego artykułu) odrzucają platonizm, jako założenie sprzeczne z „brzytwą Ockhama” (tj. tym, że najprostsze teorie zgodne z faktami, czyli „nie mnożące bytów ponad potrzebę”, są najbardziej przekonywające).

Jak wspomnieliśmy wyżej, łatwo wykazać niekompletność współczesnych podstaw. Na przykład *nie* tłumaczą one, czym jest dobra matematyka. Wierzymy, że matematyka ma strukturę postaci: aksjomaty-definicje-twierdzenia-dowody,

okresowi takiej fali. Możemy więc podstawić (2) do (1) i otrzymamy

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar.$$

Pominęliśmy tu czynnik $2\pi/4$, gdyż niezbyt precyzyjna definicja Δx i Δp pozwala nam jedynie na dość grube oszacowanie.

Do podobnego rezultatu możemy dojść także w inny sposób, nie posługując się bezpośrednio formalizmem falowym. Zauważmy, że uzyskana „zasada nieoznaczoności” (1) jest konsekwencją „skwantowania” drogi, którą mierzyliśmy w dyskretnych jednostkach λ. Podobną rolę odgrywa w mechanice kwantowej wielkość fizyczna S zwana działaniem. Zazwyczaj działanie definiujemy jako całkę względem czasu z różnicy między energią kinetyczną i potencjalną. Dla ruchu jednostajnego prostoliniowego działanie można wyrazić iloczynem pędu p i drogi l,

$$S = \frac{pl}{2}.$$

Według mechaniki kwantowej działanie można określić z dokładnością rzędu stałej Plancka $\hbar$,

$$\Delta S \gtrsim \hbar.$$

Postać kwantowomechanicznej zasady nieoznaczoności możemy zatem odgadnąć przez analogię, zastępując we wzorze (1) kwant drogi λ kwantem działania $\hbar$. Przybierze on wówczas postać

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar.$$

Przedstawiona analogia, choć nie jest formalnym wyprowadzeniem, dobrze ilustruje jedną z podstawowych idei mechaniki kwantowej: niemożność jednoczesnego określenia położenia i pędu z dowolną dokładnością jest wynikiem istnienia kwantu działania $\hbar$.

Ułamki łańcuchowe okresowe

Marcin MAZUR

Ułamki łańcuchowe pojawiały się niejednokrotnie (ostatnio: w kwietniu 1999) na łamach *Delty*. Następujące ciekawe twierdzenie o nich udowodnił w roku 1770 francuski matematyk Lagrange.

Twierdzenie 1. *Liczba niewymierna x ma okresowe rozwinięcie na ułamek łańcuchowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych.*

Zetknąłem się z tym twierdzeniem jako uczeń szkoły średniej. Niestety, żadne dostępne mi wówczas źródła nie podawały dowodu. Nabrałem przez to przekonania, że dowód ów musi być niezmiernie skomplikowany i nie wierzyłem, że mógłbym twierdzenie Lagrange'a udowodnić sam, a – jak wiadomo – „bez wiary nie da się niczego udowodnić”.

Okazuje się jednak, że dowód wymaga wyłącznie pewnej spostrzegawczości i władania indukcją matematyczną; jest w zasięgu zdolnego ucznia szkoły średniej, o czym postaram się przekonać Czytelnika poniżej.

Zacznijmy od przypomnienia niezbędnych pojęć. Dla dowolnej liczby niewymiernej α określimy ciąg liczb rzeczywistych (a_k) i ciąg liczb całkowitych n_k, jak następuje:

$$(\star) \qquad a_0 = \alpha, \quad a_{k+1} = \frac{1}{\{a_k\}}, \quad n_k = [\,a_k\,].$$

Przez $[\,x\,]$ i $\{x\}$ oznaczamy odpowiednio część całkowitą i ułamkową liczby x. Ograniczamy się tu do liczb niewymiernych – dla wymiernych α otrzymalibyśmy $a_k \in \mathbb{Z}$, dla pewnego k, i wówczas definicja liczby a_{k+1} nie miałaby sensu. Zauważmy, że $a_k > 1$ i $n_k \geq 1$ dla każdego $k > 0$. Odnotujmy ponadto równości $a_k = n_k + 1/a_{k+1}$. Przez indukcję dowodzimy, że dla każdej liczby całkowitej $k \geq 0$ jest

$$\alpha = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ddots + \cfrac{1}{n_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}}.$$

Wynika stąd, że ciąg liczb wymiernych

$$n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ddots + \cfrac{1}{n_k}}} = [\,n_0; n_1; \ldots; n_k\,]$$

jest zbieżny do liczby α. Piszemy $\alpha = [\,n_0; n_1; n_2; \ldots\,]$, a ciąg (n_i) nazywamy *rozwinięciem liczby α na ułamek łańcuchowy*. Okazuje się, że każda liczba niewymierna ma jednoznaczny zapis postaci $[\,n_0; n_1; n_2; \ldots\,]$ dla pewnych całkowitych $n_0, n_1 > 0, n_2 > 0, \ldots$ danych wzorami $(\star)$ i odwrotnie, każdy taki ciąg odpowiada pewnej liczbie niewymiernej. Ułamki łańcuchowe stanowią więc swoisty sposób zapisywania liczb rzeczywistych, podobnie jak znacznie bardziej rozpowszechniony zapis dziesiętny. Następująca prosta obserwacja będzie dla naszych rozważań bardzo użyteczna: jeśli $\beta = [\,n_{k+1}; n_{k+2}; \ldots\,]$, to wówczas

$$(\star\star) \qquad \alpha = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ddots + \cfrac{1}{n_k + \cfrac{1}{\beta}}}}.$$

Powiemy, że liczba niewymierna x ma okresowe rozwinięcie na ułamek łańcuchowy, jeśli

$$x = [\,l_0; l_1; \ldots; l_i; m_1; m_2; \ldots; m_k; m_1; m_2; \ldots; m_k; m_1 \ldots\,].$$

Piszemy wówczas $x = [\,l_0; l_1; \ldots; l_i; \overline{m_1; m_2; \ldots; m_k}\,]$. Zauważmy, że jeśli $\alpha = [\,m_0; \overline{m_1; m_2; \ldots; m_k}\,]$, to wobec $(\star\star)$ otrzymujemy równość

$$\alpha = m_0 + \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \ddots + \cfrac{1}{m_k + \cfrac{1}{\alpha}}}} = \frac{A\alpha + B}{C\alpha + D}$$

ale nie wiemy, dlaczego niektóre prace matematyków wprawiają nas w zachwyt, a inne wydają się pozbawione pomysłów lub wręcz nudne. Podstawy nie tłumaczą też, *jak* matematycy budują dowody swych przypuszczeń. Ponieważ nie mamy dobrego modelu procesu budowy dowodów, jest więc jeszcze daleko do prawdziwie efektywnego automatycznego dowodzenia twierdzeń (choć i w tej dziedzinie osiągnięto spektakularne sukcesy).

Jak żąda tego nasza definicja, na wykładach podstaw matematyki studenci poznają zazwyczaj logikę matematyczną, teorię mnogości oraz wprowadzenie do teorii obliczalności (rekursji). Wszystkie te części podstaw są ze sobą powiązane i w historii, którą poniżej przedstawimy, będą przenikać się wzajemnie. Ale zapytajmy najpierw, jaki był ich stan w roku 1900.

Logika miała zawsze co najmniej dwa aspekty – matematyczny i filozoficzny. Aspekt filozoficzny pochodzi od starożytnych Greków. Filozofia wymagała pewnej precyzji rozumowania. W tym celu filozofowie greccy, przede wszystkim Arystoteles, chcieli zrozumieć, czym są poprawne dowody. Sformułowali więc sylogistykę, kodyfikującą niektóre poprawne rozumowania. Z punktu widzenia dzisiejszej logiki były to reguły dotyczące relacji jednoargumentowych, czyli unarnych. Tak więc, jeśli Sokrates jest Grekiem, a wszyscy Grecy są śmiertelni, to i Sokrates jest śmiertelny. Dziś zapisalibyśmy ten sylogizm jako

$$[\,grek(S) \wedge \forall x (grek(x) \Rightarrow \acute{s}miertelny\,(x))\,] \Rightarrow \acute{s}miertelny\,(S).$$

$grek\,(\cdot)$ i $\acute{s}miertelny\,(\cdot)$ są w tej formule symbolami do opisu relacji unarnych. Użyliśmy tu kwantyfikatora ogólnego $\forall x$ (dla każdego x). Podobnie wprowadza się kwantyfikator egzystencjalny $\exists x$ (istnieje x).

Grecy nie formalizowali sylogizmów za pomocą formuł. Niemniej jednak analizowali sylogizmy i przez ponad dwa tysiące lat teoria sylogizmów stanowiła centrum logiki. Matematycy starożytni rozumowali podobnie jak my, intuicyjnie rozumieli, co jest poprawnym dowodem matematycznym, a co nim nie jest. Dowody, które wymyślili, są po dziś dzień wykładane w szkołach i spełniają dzisiejsze standardy ścisłości. W wieku XVII Leibniz miał nadzieję stworzenia *lingua universalis*, języka, który pozwalałby wyrazić zdania matematyki, i *calculus ratiocinator*, który by sprowadzał rozumowania do rachunków.

W połowie XIX wieku Boole wprowadził, przez analogię z algebrą liczb, algebrę zdań. Dalszy rozwój logiki zawdzięczamy De Morganowi, Peirce'owi, Fregemu i innym matematykom i filozofom. Było rzeczą jasną, że logika, jaką posługuje się matematyka, wykracza poza sylogistykę, już choćby dlatego, że zajmuje się nie tylko relacjami unarnymi, lecz także takimi, które wiążą więcej niż jeden obiekt. Na przykład, podstawowa w matematyce relacja mniejszości wśród liczb nie jest unarna, lecz binarna, bo wiąże pary elementów.

Rozwój analizy matematycznej w wieku XVIII i brak dostatecznie jasnych definicji ciągłości, granicy funkcji i innych podstawowych pojęć analizy spowodował, że trzeba było sprecyzować takie pojęcia, jak liczba rzeczywista, ciąg, funkcja, etc. Pytanie, czym są liczby rzeczywiste, przewijało się w pracach wielu matematyków i filozofów dziewiętnastowiecznych. Trzeba było zdefiniować (by użyć terminologii informatycznej), jakie są podstawowe „struktury danych" matematyki. Epokowa książka Dedekinda z r. 1883, *Was sind und was sollen die Zahlen* zawierała następujące stwierdzenie: „W nauce, co dowód posiada, nie powinno być bez dowodu przyjęte". Dedekind *udowodnił* podstawowe własności liczb rzeczywistych, własności, które poprzednio przyjmowano jako oczywiste. Stąd też pod koniec wieku XIX nadszedł czas budowy podstaw matematyki.

Spośród wielu matematyków, którzy przyczynili się do rozpoznania podstawowych matematycznych struktur, najważniejszym był G. Cantor, który udowodnił, że wszystkie przedmioty, jakie rozważają matematycy, można rozumieć jako zbiory. Co więcej, okazało się, że taka interpretacja usuwa wszystkie niejasności, które dawniej pojawiały się w matematyce. Na przykład, za pomocą pojęcia zbioru łatwo zdefiniować pojęcie liczby naturalnej, stąd zaś liczby całkowitej i wymiernej. Jak pokazał Dedekind (i niezależnie Cantor), przy użyciu pojęcia zbioru (nieco trudniej) definiuje się też liczby rzeczywiste.

Pojęcie zbioru par pozwala zdefiniować z kolei pojęcie funkcji. Podejście takie zrywało z poprzednio używanym pojęciem funkcji jako przepisu, algorytmu, który z elementami dziedziny pozwalał łączyć wartości. W latach 80. i 90. XIX wieku Cantor udowodnił wiele twierdzeń teorii

dla pewnych liczb całkowitych A, B, C, D. Zatem α jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $Cz^2 + (D-A)z - B$ o współczynnikach całkowitych. Ponownie używając $(\star\star)$, otrzymujemy

$$x = l_0 + \cfrac{1}{l_1 + \cfrac{1}{l_2 + \ddots + \cfrac{1}{l_i + \cfrac{1}{\alpha}}}} = \frac{K\alpha + L}{M\alpha + N}$$

dla pewnych liczb całkowitych K, L, M, N. Zatem x jest również pierwiastkiem pewnego trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych. Tym samym udowodniliśmy, że liczba niewymierna, która ma okresowe rozwinięcie na ułamek łańcuchowy, jest pierwiastkiem pewnego trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych. Fakt ten został odnotowany już przez Eulera. Nieco trudniejszy dowód twierdzenia odwrotnego podał po raz pierwszy Lagrange.

Załóżmy teraz, że liczba niewymierna α jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ o współczynnikach całkowitych. Dobrze znane wzory na pierwiastki równania kwadratowego dają $\alpha = \dfrac{\sqrt{d} + u}{w}$, gdzie $d = b^2 - 4ac$, $u = \pm b$ i odpowiednio $w = \mp 2a$. Wykażemy, że odpowiadające liczbie α ciągi a_k i n_k, określone wzorem $(\star)$, są okresowe.

Oczywiście $w | (d - u^2)$. Ta prościutka obserwacja jest kluczowa dla całego dowodu. Istotnie, zauważmy, że

$$a_1 = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{d}+u}{w} - n_0} = \frac{\sqrt{d} + wn_0 - u}{\dfrac{d - (wn_0 - u)^2}{w}} = \frac{\sqrt{d} + u_1}{w_1},$$

gdzie $u_1 = wn_0 - u$ i $w_1 = \dfrac{d - u_1^2}{w}$. Skoro zaś $w|(d - u^2)$, to liczby u_1, w_1 są całkowite oraz $w_1|(d - u_1^2)$. Stosując powyższe rozumowanie do liczby a_1, otrzymamy, że $a_2 = \dfrac{\sqrt{d} + u_2}{w_2}$, gdzie $u_2 = w_1 n_1 - u_1$, $w_2 = \dfrac{d - u_2^2}{w_1}$ są liczbami całkowitymi i $w_2|(d - u_2^2)$. Oczywista indukcja dowodzi, że dla dowolnej liczby całkowitej $k \geq 0$ mamy $a_k = \dfrac{\sqrt{d} + u_k}{w_k}$, gdzie liczby całkowite u_k, w_k określone są rekurencyjnie następująco:

$$u_0 = u, \quad w_0 = w, \quad u_{k+1} = n_k w_k - u_k, \quad w_k w_{k+1} = d - u_{k+1}^2.$$

Odnotujmy równości $a_k = \dfrac{\sqrt{d} + u_k}{w_k} = \dfrac{w_{k-1}}{\sqrt{d} - u_k}$.

By osiągnąć cel i wykazać, iż ciąg a_k jest okresowy, wystarczy sprawdzić, że dla pewnych $s < t$ mamy $a_s = a_t$ (dlaczego?), co jest równoważne równościom $u_s = u_t$ i $w_s = w_t$. Ostatnie równości otrzymamy, jeśli uda nam się uzasadnić, że ciągi u_k i w_k są ograniczone. Istotnie, ponieważ ciągi te mają wyrazy całkowite, więc ciąg par (u_k, w_k) ma wówczas tylko skończenie wiele różnych wartości i dla pewnych $s < t$ mamy $(u_s, w_s) = (u_t, w_t)$.

Przystąpmy więc do dowodu ograniczoności ciągów u_k i w_k. Wynika on z następujących trzech obserwacji:

1. Jeśli $u_k < -\sqrt{d}$ dla pewnego $k > 0$, to $\sqrt{d} + u_k < 0$, a ponieważ $a_k = \dfrac{\sqrt{d} + u_k}{w_k} > 1$, więc $w_k < 0$. Jako że $a_{k+1} = \dfrac{w_k}{\sqrt{d} - u_{k+1}} > 1$, musi być $\sqrt{d} - u_{k+1} < 0$, tzn. $u_{k+1} > \sqrt{d} > 0$.
   Ponadto $u_{k+1} = n_k w_k - u_k < -u_k$, więc $|u_{k+1}| < |u_k|$.

2. Jeśli $u_k > \sqrt{d}$ dla pewnego $k > 0$, to $\sqrt{d} + u_k > 0$, a ponieważ $a_k = \dfrac{\sqrt{d} + u_k}{w_k} > 1$, więc $w_k > 0$. Jako że $a_{k+1} = \dfrac{w_k}{\sqrt{d} - u_{k+1}} > 1$, musi być $\sqrt{d} - u_{k+1} > 0$, tzn. $u_{k+1} < \sqrt{d} < u_k$.
   Ponadto $u_{k+1} = n_k w_k - u_k > -u_k$, więc $|u_{k+1}| < |u_k|$.

3. Jeśli $|u_k| < \sqrt{d}$ dla pewnego $k > 0$, to $\sqrt{d} + u_k > 0$, a ponieważ $a_k = \dfrac{\sqrt{d} + u_k}{w_k} > 1$, więc $w_k > 0$. Jako że $a_{k+1} = \dfrac{w_k}{\sqrt{d} - u_{k+1}} > 1$, musi być $\sqrt{d} - u_{k+1} > 0$, tzn. $u_{k+1} < \sqrt{d}$.
   Ponadto $u_{k+1} = n_k w_k - u_k > -u_k > -\sqrt{d}$, więc $|u_{k+1}| < \sqrt{d}$.

Zauważmy teraz, że jeśli spełnione są nierówności $|u_i| > \sqrt{d}$ dla $i = 1, 2, \ldots, s$, to wówczas wobec własności 1 i 2 mamy $|u_1| > |u_2| > \ldots > |u_s| > \sqrt{d}$. Liczby u_i są całkowite, a zatem otrzymujemy stąd nierówności $\sqrt{d} < |u_s| \leq |u_1| - s + 1$. W szczególności, musi być $s < |u_1| - \sqrt{d} + 1$. Innymi słowy, $|u_{k_0}| < \sqrt{d}$ dla pewnego $k_0 \leq |u_1| - \sqrt{d} + 1$. Z własności 3 wynika więc, że $|u_k| < \sqrt{d}$ dla każdego $k \geq k_0$. Tym samym ciąg u_k jest ograniczony. Ponadto, nierówność $a_k = (\sqrt{d} + u_k)/w_k > 1$ pociąga za sobą nierówności $0 < w_k < 2\sqrt{d}$ dla $k \geq k_0$. Wykazaliśmy więc, że ciągi u_k i w_k są ograniczone i co za tym idzie, liczba α ma okresowe rozwinięcie na ułamek łańcuchowy. Dowód **Twierdzenia 1** jest zakończony.

Nasze rozważania pozwalają uzyskać nieco dokładniejszą informację. Niech k_1 będzie najmniejszą taką liczbą, że $(\sqrt{d} - u_k)/w_k > 0$. Oczywiście $k_1 \leq k_0$. Łatwo zauważyć, że ciąg par (u_k, w_k), gdzie $k > k_1$, przyjmuje co najwyżej $\sqrt{d} \cdot 2\sqrt{d} = 2d$ różnych wartości.

Zatem istnieją takie $s < t$, że $(u_s, w_s) = (u_t, w_t)$ i $t - s < 2d$. Innymi słowy, okres podstawowy ułamka łańcuchowego, równego liczbie α, jest mniejszy niż $2d$. Czytelnik zdoła teraz bez trudu przekonać się, że zachodzi następujące

Twierdzenie 2. *Liczba niewymierna $(\sqrt{d} + u)/w$, gdzie u, w są liczbami całkowitymi i $w|(d - u^2)$, ma rozwinięcie na ułamek łańcuchowy postaci $[n_0; n_1; \ldots; n_i; \overline{n_{i+1}; \ldots; n_{i+j}}]$. Możemy przy tym przyjąć za i taką najmniejszą liczbę $k \geq 0$, że $(\sqrt{d} - u_k)/w_k > 0$ i wówczas $i \leq \max(1, |u_1| - \sqrt{d} + 1)$. Ponadto $j < 2d$.*

W szczególności, dla $u = 0$ i $w = 1$ otrzymujemy następujący wynik.

Twierdzenie 3. *Dla pewnego $j < 2d$ mamy $\sqrt{d} = [n_0; \overline{n_1; \ldots; n_j}]$. Ponadto $n_j = 2n_0$.*

Ostatnia część twierdzenia wymaga dodatkowych wyjaśnień. Ponieważ $w_0 = 1$, mamy $w_{j+1} = w_1 = w_0 w_1 = d - u_1^2$. Jako że $w_j w_{j+1} = d - u_{j+1}^2 = d - u_1^2 = w_{j+1}$, więc $w_j = 1$ i $a_j = \sqrt{d} + u_j$. Zatem $0 < \sqrt{d} - u_j < 1$, tzn. $u_j = [\sqrt{d}] = n_0$. Tym samym $n_j = [a_j] = 2n_0$.

Jako przyjemne zadanie pozostawiamy Czytelnikowi uzasadnienie, że dla $1 \leq s < j$ zachodzą równości $n_s = n_{j-s}$. **Twierdzenie 3** można też wykorzystać do opisu rozwiązań równania Pella $x^2 - dy^2 = 1$ w liczbach całkowitych, ale to już zupełnie inna historia.

mnogości (zbiorów). Cantor zanalizował też pojęcia takie, jak porządek liniowy, wprowadził pojęcie dobrego porządku (a w konsekwencji i liczby porządkowej). Stąd już był tylko krok do dowodów używających indukcji pozaskończonej. Było to całkowicie nowe i silne narzędzie w rękach matematyków. Wyszło ono istotnie poza indukcję względem liczb naturalnych oraz repertuar dowodowy odziedziczony po Grekach.

Teoria obliczalności w końcu XIX wieku jeszcze nie istniała. Istniały tylko liczne przykłady algorytmów. Na przykład algorytm Euklidesa dla znajdowania największego wspólnego podzielnika lub algorytm Cardano rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Sprawy efektywności zajmowały matematyków i filozofów greckich, a także matematyków późniejszych. Newton i inni wielcy analitycy aż do połowy XIX wieku nie akceptowali prawdziwości zdań egzystencjalnych nie popartych algorytmem konstrukcji odpowiedniego przykładu. Jeśli więc twierdzili oni, na przykład, że równanie różniczkowe $y' = -y$ z warunkiem początkowym $y(1{,}3) = 17$ ma rozwiązanie, to trzeba było wiedzieć, jak owo rozwiązanie skonstruować, innymi słowy, podać przepis na obliczanie wartości takiej funkcji $y(\cdot)$.

Urządzenia ułatwiające liczenie znane są od starożytności. Liczydła różnych systemów potrzebne były do obliczeń. Wielu wynalazców, inżynierów i matematyków budowało maszyny, które ułatwiały obliczenia. Artyleria i finanse wymagały szczególnie wielu obliczeń (i często dość dokładnych). Stąd też ze sztabów wojskowych, urzędów podatkowych i banków pochodziło zapotrzebowanie na urządzenia liczące. Zostały wynalezione maszyny do dodawania i mnożenia, potrzebne w spisach ludności, i inne maszyny mechaniczne ułatwiające obliczenia. Ale pytania o istotę pojęcia obliczenia były rzadkie. W pierwszej połowie XIX wieku Babbage zaprojektował nawet rodzaj mechanicznego komputera używającego programów, ale pytanie, czym jest funkcja obliczalna, nie zostało jeszcze postawione.

Spróbujemy dalej przedstawić rozwój trzech głównych nurtów podstaw matematyki: teorii mnogości, logiki i teorii modeli, oraz teorii funkcji obliczalnych w wieku XX.

Część druga ukaże się w *Delcie* 11/1999.

Przykład, w którym abstrahuje się od wszelkich twierdzeń o ułamkach łańcuchowych

W praktyce ułamek łańcuchowy powstaje poprzez systematyczne wyłączanie całości i odwracanie pozostałego ułamka właściwego, aby znów było co wyłączać:

$$\frac{1517}{1073}=1+\frac{444}{1073}=1+\frac{1}{\frac{1073}{444}}=1+\frac{1}{2+\frac{185}{444}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{444}{185}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{74}{185}}}=$$

$$=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{185}{74}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{37}{74}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}.$$

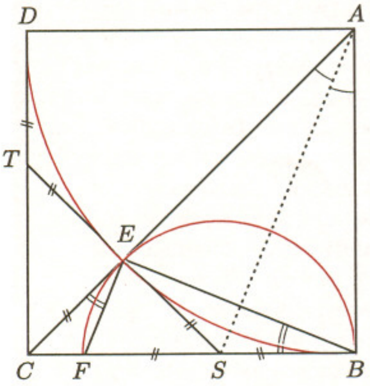
Dla liczby wymiernej operacja taka, oczywiście, zawsze się kończy. Gdy jednak ułamek łańcuchowy zwiniemy do postaci ułamka zwykłego, to otrzymamy jego postać skróconą:

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{2}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{2}{5}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{12}{5}}}=1+\frac{1}{2+\frac{5}{12}}=1+\frac{1}{\frac{29}{12}}=1+\frac{12}{29}=\frac{41}{29}.$$

To, przez co został skrócony, można odnaleźć jako ostatnią „resztę” uzyskaną poprzednio przy wyłączaniu całości, tu akurat 37. Nie zawsze jest to liczba pierwsza (jak tutaj). Ale zawsze jest to największy wspólny dzielnik licznika i mianownika rozwijanego ułamka (a właściwie, dlaczego tak jest?).

Dokładnie taka sama – wyłączanie całości i odwracanie pozostałości – jest praktyka rozwijania w ułamek łańcuchowy liczb niewymiernych. Oto przykład rozwinięcia najprostszej niewymierności kwadratowej. Pierwszy raz na sposób arytmetyczny.

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}=\ldots=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}}.$$



Jak widać, rzeczywiście otrzymuje się ułamek okresowy $[1;\overline{2}]$.

A teraz geometrycznie. W kwadracie $ABCD$ kreślimy okrąg o środku A i promieniu AB. Przecina on przekątną w punkcie E, przez który kreślimy styczną, otrzymując na bokach kwadratu punkty S i T. Kreślimy teraz okrąg o środku S i promieniu SB; przecina on BC w punkcie F. Tym, co trzeba zauważyć, są równości $SB=SE=ET=TD=SF=EC$ (rysunek) oraz podobieństwo trójkątów BCE i ECF (bo $\angle CBE=\angle CEF$, jako kąt wpisany i kąt dopisany, a kąt C jest wspólny).

Gdy to już wiemy, mamy:

$$\frac{AC}{AB}=1+\frac{CE}{CB}=1+\frac{1}{\frac{CB}{CE}}=1+\frac{1}{2+\frac{CF}{CE}}=1+\frac{1}{2+\frac{CE}{CB}}=\ldots=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}},$$

czyli tyle samo.

Zobaczyć, że faktycznie chodzi o niewymierność kwadratową, można tak.

Oznaczmy

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}.$$

Jest to równoważne

$$x + 1 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}},$$

czyli $x + 1 = 2 + \frac{1}{x+1}$, co dla $x \neq -1$ jest równoważne $x^2 = 2$. Oczywiście, żeby tak pisać, trzeba wiedzieć, że nieskończony ułamek przedstawiający x jest zbieżny.

Można chwilę poćwiczyć i wykonywać podobnie zamianę danego nieskomplikowanego równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych (oczywiście mającego pierwiastek) na ułamek łańcuchowy. Dla skomplikowanych potrzebny jest dowód z artykułu.

Warto tu przypomnieć inne twierdzenie Lagrange'a o ułamkach łańcuchowych: dają one najlepsze przybliżenia wymierne liczb niewymiernych. Znaczy to tyle, że jeśli początkowy fragment ułamka łańcuchowego, dla jakiejś liczby niewymiernej a, jest zwykłym ułamkiem nieskracalnym, to lepsze przybliżenia wymierne a można otrzymać tylko używając ułamków o większym mianowniku. Tak więc (patrz początek tej notki) $\frac{41}{29}$ jest najlepszym przybliżeniem $\sqrt{2}$ spośród ułamków o mianownikach mniejszych od 30.

Ułamki łańcuchowe wymyślił grecki matematyk Teajtetos (410–368 p.n.e.), uczeń Platona. Mają więc te ułamki już 2400 lat, zatem są prawie dwukrotnie starsze od ułamków dziesiętnych. Zostały one wymyślone właśnie dla poradzenia sobie z niewymiernością. Później jednak straciły pierwszoplanową pozycję w arytmetyce.

M.K.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 892. Wykazać, że jeśli p i q są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, to

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \left[\frac{3q}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Rozwiązanie na str. 12

Uwaga: *W zadaniach symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą liczby x.*

M 893. Udowodnić, że jeśli $\tau(k)$ jest liczbą dzielników naturalnych liczby k, to dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right] = \tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n).$$

Rozwiązanie na str. 14

M 894. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi równość

$$[\sqrt{n}\,] + [\sqrt[3]{n}\,] + \ldots + [\sqrt[n]{n}\,] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \ldots + [\log_n n].$$

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 507. Załóżmy, że na polaryzator pada wiązka światła spolaryzowanego liniowo. W przypadku, gdy oś polaryzatora jest równoległa do osi polaryzacji, zostaje przepuszczona część α^2 natężenia, natomiast gdy kąt między tymi osiami jest prosty – część ϵ^2. (Dla idealnego polaryzatora $\alpha^2 = 1$, $\epsilon^2 = 0$.) Jakie będzie natężenie przepuszczonego światła, jeżeli na parę polaryzatorów, których osie tworzą kąt θ, pada prostopadle światło niespolaryzowane o natężeniu I_0? (Odbicia pomijamy.)
Rozwiązanie na str. 11

F 508. Między dwa polaryzatory o wzajemnie prostopadłych osiach wsunięto trzeci polaryzator o osi tworzącej kąt θ z osią pierwszego polaryzatora. Jakie jest natężenie światła przepuszczanego przez ten układ? (Zakładamy, że polaryzatory są idealne i straty pomijamy.)
Rozwiązanie na str. 16

Aktualności (nie tylko) fizyczne

Koniec wakacji – czas do szkoły, w której na lekcjach (głównie) chemii i (trochę) fizyki dowiadujemy się, że materia jest zbudowana z atomów. Ale jak te atomy wyglądają? „Po pierwsze wcale nie wyglądają, bo są za małe, żeby je zobaczyć." No, to już od ładnych kilkunastu (kilkudziesięciu) lat nie jest prawdą. W różnych mikroskopach można już obejrzeć obrazki, na których widać pojedyncze atomy (choć oczywiście nie bezpośrednio, tzn. nie są to obrazki z mikroskopów optycznych). No i co widać? Ano widać takie kuleczki czy też kupeczki, a może guzeczki. Wszystkie o rozmiarach rzędu 1 angstrema. I wszystko wyglądałoby tak prosto, gdyby nie zimni naukowcy. Dokładniej chodzi o tych, którzy starają się złapać atomy w pułapki i bezwzględnie chłodzić. Jeżeli atomy są akurat bozonami, tzn. mają całkowity moment pędu będący liczbą całkowitą, to w takiej sytuacji mogą stać się kondensatem Bosego–Einsteina, a wtedy wszystkie atomy są w tym samym stanie kwantowym i każdy z nich rozpełza się po całym obszarze kondensatu. Taki kondensat ma zazwyczaj makroskopowe rozmiary i można go oczywiście zobaczyć, bo świeci, jak go grzecznie poprosić. Tylko co wtedy widać? Gdy wszystkie atomy są w jednym stanie, to każdy foton pochodzi z równym prawdopodobieństwem z każdego z nich. Jeżeli rozmiary czegoś zdefiniujemy jako miejsce w przestrzeni, gdzie to coś jest, to w tym przypadku atom można z powodzeniem zobaczyć gołym okiem! Dalsze rozważania nad tym, co to znaczy zobaczyć atom, pozostawmy filozofom, a sami zajmijmy się kondensatem. Co z takimi rozmazanymi atomami robić? Można zbudować z nich odpowiednik lasera, który powinien umieć wysłać wiązkę rozmazanych atomów, tak jak laser wysyła światło. Okazuje się, że to daje się zrobić, wybijając w odpowiedni sposób atomy z pułapki, w której utworzono kondensat. Osiągnięcia w tej dziedzinie ilustrują obrazki na ostatniej stronie okładki. Na uwagę zasługuje dokonanie zespołu z NIST w Gaithersburgu. W tym przypadku (w przeciwieństwie do pozostałych doświadczeń, w których uwolnione atomy opadają pod wpływem grawitacji) udało się zaprojektować eksperyment w sposób umożliwiający wysłanie prawie ciągłego strumienia atomów w dowolnym kierunku [1].

Inna grupa z tego samego instytutu wykorzystała podobny zestaw doświadczalny do zademonstrowania nieliniowej optyki atomowej [2]. Optyczny odpowiednik przeprowadzonego doświadczenia polega na skierowaniu trzech wiązek laserowych na ośrodek o nieliniowym współczynniku załamania (tzn. zależącym od intensywności światła), w którym powstaje dodatkowa czwarta wiązka. W przypadku atomów również użyto trzech fal, tylko że nieliniowy ośrodek nie był konieczny. Obdarzone masą i oddziałujące atomy same dla siebie tworzą taki nieliniowy ośrodek. Zaobserwowanie czwartej fali atomów o pędach różnych od wszystkich trzech fal pierwotnych można wytłumaczyć w ten sposób, że dwie wiązki tworzą falę stojącą, a trzecia się na niej częściowo rozprasza.

Wróćmy jeszcze raz na szkolną lekcję fizyki, na której poznajemy budowę „normalnego" atomu. A tam nadal wokół maciupeńkiego jądra krążą po orbitach elektrony. Ten hybrydowy, klasyczno-kwantowy obrazek wymyślony przez Bohra, przez długie lata kończył edukację szkolną, jeżeli chodzi o poznawanie budowy materii. Na fali reformy oświaty uda się prawdopodobnie zastąpić go orbitalami elektronowymi, w których występują rozmazane elektrony. Należy nadmienić, że elektrony te są rozmazane w zupełnie inny sposób niż bozonowe atomy. Każdy elektron jest rozmazany na własną rękę. (Dygresja: to jaki jest rozmiar punktowego podobno elektronu?) Czy obrazek z elektronami krążącymi po planetarnych orbitach należy wysłać na śmietnik historii nauki? Okazuje się, że nie do końca. Powodem są silnie wzbudzone tzw. atomy Rydberga. Odległość elektronu od jądra dochodzi w nich do mikrona. Zewnętrzne elektrony mogą krążyć w takich atomach po eliptycznych orbitach zamiast rozmazywać się po całym atomie. Turgay Uzer opowiadał w Atlancie (w czasie spotkania z okazji 100-lecia APS – patrz *Delta* 6/1999) o systemach słonecznych atomowej wielkości, w których udało się stworzyć atomowy analog planetoid trojańskich. To nie tylko ciekawostka. Układy takie świetnie nadają się do badania granicy pomiędzy światem kwantowym i makroskopowym. Te same atomy Rydberga służą jako materiał w nowej dziedzinie sztuki: rzeźbieniu Rydberga. Jednym z czołowych artystów jest Philip Bucksbaum z Uniwersytetu w Michigan. Za pomocą sekwencji pulsów laserowych on i jego współpracownicy potrafią wprowadzić atom w wiele stanów wzbudzonych jednocześnie, a następnie odczytać pełną informację w ten sposób zapisaną. Jest to jakby analog holografii [3]. Bucksbaum i współpracownicy planują zbudować w ten sposób komputer kwantowy zdolny do rozkładania na czynniki liczb rzędu 2^{10}.

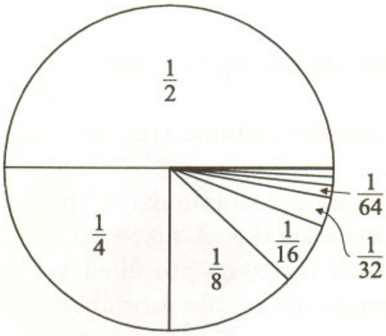
Atomy, jak widać, (właśnie – widać) są różne. W dodatku nie wiadomo, ile ich jest. Niedawno Robert Smolańczuk zastanawiał się na naszych łamach „Gdzie kończy się tablica Mendelejewa?" (*Delta* 3/1998). Nasz autor nie poprzestał na tym, tylko opublikował [4] przepis na wytworzenie 118 pierwiastka. Grupa z Lawrance Berkeley Laboratory postanowiła sprawdzić receptę i na początku czerwca ogłosiła odkrycie pierwiastków 118 i 116 oraz wcześniej nie obserwowanych izotopów 114, 112, 110, Hs i Sg [5]. O prawdopodobnym odkryciu pierwiastka 114 wcześniej doniosła grupa z Dubnej. Byłoby to jądro o większej liczbie neutronów niż wytworzone w LBNL, o niezwykle długim, jak na superciężkie jądra, czasie życia – aż 30 sekund. Obydwa odkrycia potwierdzają istnienie długo poszukiwanej wyspy stabilności w okolicach jądra o 114 protonach i 184 neutronach i dają nadzieję na dotarcie do niej w niedługiej przyszłości. Może takie atomy będą żyły wystarczająco długo, żeby sobie w nich porzeźbić?

Piotr ZALEWSKI

[1] E.W. Hagley i inni, *Science* **283** (1999) 1706.
[2] L. Deng i inni, *Nature* **398** (1999) 218.
[3] http://www.aip.org/physnews/graphics.
[4] R. Smolańczuk, *Phys. Rev.* **C59** (1999) 2634.
[5] http://enews.lbl.gov./.

Podział świątecznej pomarańczy

Nasi chłopcy, Paweł (7 lat) i Tomek (9 lat), dobrze wiedzą, że jeśli dostaną ode mnie pół jabłka $\left(\frac{1}{2}\right)$, potem pół połówki $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$, potem pół pozostałej ćwiartki $\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\right)$, to dostaną, gdy będę im tak bez końca dodawał po kawałku, całe jabłko. Wytłumaczyłem im zapis: w naszym podziale $\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$ jest rozmiarem kawałka jabłka, który chłopcy dostali w n-tym podziale, równy kawałkowi, którego im jeszcze nie oddałem. Wzór



Rys. 1. Dzieci dostały całe jabłko.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots=1$$

miał dla Pawła i Tomka jasne znaczenie – całe jabłko otrzymane w kawałkach!!! Nie mieli też chłopcy problemu ze zrozumieniem zapisu

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n},$$

bo oddawał on dokładnie sytuację po n-tym krojeniu, gdy został mi jeszcze kawałek $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, a im tego kawałka brakowało do całego jabłka.

Ale jak wytłumaczyć dzieciom wzór na sumę

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\ldots$$

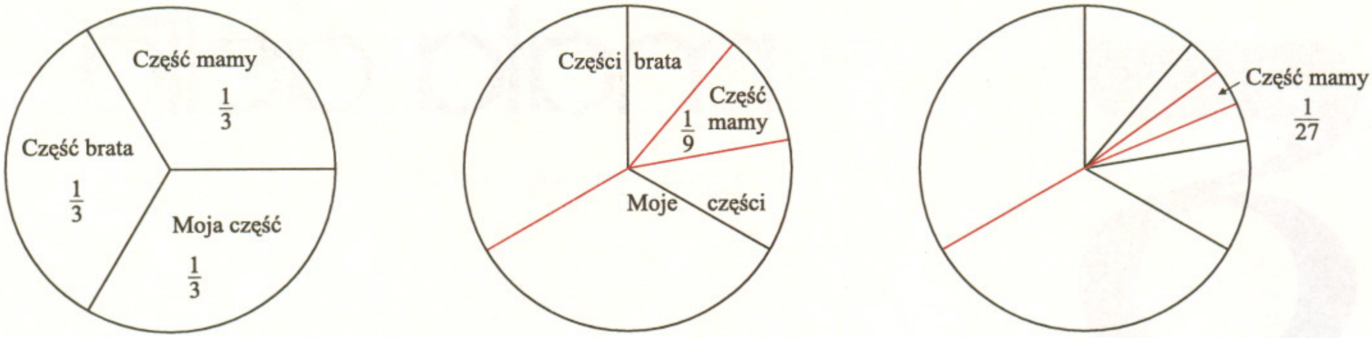
czy

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}+\ldots?$$

My, matematycy, znamy dziesiątki metod obliczenia powyższych sum. Wiemy, że opisują one ciąg geometryczny; ale jak przedstawić rozwiązanie dostępne dla dzieci?

*****

Dawno, dawno temu, gdy miałem siedem lat, mama zdobyła na Wigilię pomarańczę. W tamtych czasach była to prawdziwa zdobycz; specjał wigilijny. Doczekaliśmy się, przy końcu wieczerzy wigilijnej, podziału pomarańczy. Mama rozdzieliła ją na trzy równe części, po jednej dała mnie i bratu, a jedną zostawiła sobie. Szybko połknęliśmy nasze kawałki i poprosiliśmy mamę o więcej. Mama podzieliła swoją część na trzy równe kawałki, jeden zostawiła sobie, a nam dała resztę. Po chwili z naszych kawałków nic nie zostało i jeszcze raz poprosiliśmy o więcej. I znowu mama podzieliła swój mały kawałek pomiędzy nas i siebie. Nie minęło wiele czasu i mama nie miała już nic. Ja i mój brat zjedliśmy po pół pomarańczy. Bardzo nam smakowała.



Rys. 2

Z tej historii, dzieci, płyną dwa morały:
1. Mama zrobi wszystko dla swoich dzieci.
2. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\ldots=\frac{1}{2}$.

*****

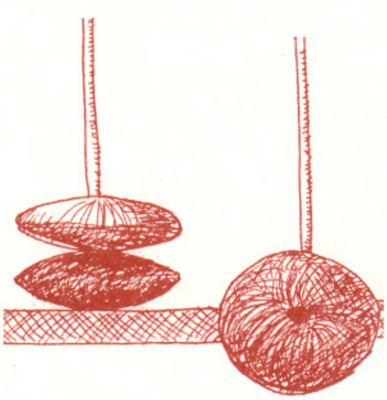
– A co będzie – zapytał Tomek – jeśli mamie znudzi się dzielenie i przerwie po stu podziałach?
– Nic nie będzie – dopowiedział Pawełek – mamie zostanie trochę soku, a może tylko atom.
– Masz rację – odpowiedziałem – ale jeśli mama przestanie dzielić po trzech cięciach, to będzie coś miała, chociaż dla smaku. A może po kilku podziałach na trzy równe części mama podzieli resztę na pół między dzieci. Każde z dzieci dostanie znowu pół pomarańczy, ale formuła będzie miała postać:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\ldots\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}.$$

W formule n oznacza liczbę podziałów na 3 równe części, a $\frac{1}{3^n}$ jest wielkością ostatniego kawałka pozostałego mamie i rozdzielonego przez nią na pół między chłopców. Możemy też naszą formułę zapisać w postaci:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\ldots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n}\right).$$

– A co by było – zapytał Tomek – gdyby i mama, i tata przynieśli po pomarańczy, a dzieci było troje?
– Każdy dostałby po $\frac{2}{5}$ pomarańczy – szybko powiedział Pawełek, który właśnie nauczył się ułamków – ale myślę – dorzucił – że rodzice podzieliliby dalej swoje części.
– Jeśli rodzice podzieliliby swoje części na pięć równych kawałków, każde z dzieci dostałoby dodatkowo $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\left(\frac{2}{5}\right)^2$ pomarańczy i rodzicom zostałoby także po kawałku wielkości $\left(\frac{2}{5}\right)^2$. Jeśli tak rodzice bedą dzielić bez końca, to dzieci dostaną obie pomarańcze, czyli każde z nich $\frac{2}{3}$ pomarańczy – podsumował Tomek.



Zgodziłem się i zapisałem formalnie, przeprowadzone przez dzieci, rozumowanie:

$$\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\ldots=\frac{2}{3}.$$

A co będzie, jeśli po n cięciach rodzicom znudzi się podział i oddadzą resztę dzieciom? Pamiętajcie, że każde z rodziców ma kawałek z n-tego

podziału, wielkości $\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

– Jasne! Dzieci jest troje, więc każde dostanie od rodzica dodatkowo $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$, czyli od obojga rodziców $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ – zauważył Tomek.

– Możemy to zapisać formułą – podsumowałem:

$$\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\ldots+\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n=\frac{2}{3}.$$

Czy możemy przeprowadzić podobne rozumowanie, na przykład, z $\frac{11}{41}+\left(\frac{11}{41}\right)^2+\ldots$?

– Chyba tak – powiedział po zastanowieniu Tomek i zaczął swoje opowiadanie.

– Na poczęstunek do naszej klasy, która ma 30 dzieci, przyszło 11 rodziców, każdy z pizzą. Podzielili pizzę między dzieci i siebie. Każdy dostał $\frac{11}{30+11}=\frac{11}{41}$ pizzy. Dzieci zjadły swoje porcje i rodzice dzielili dalej. W końcu każde dziecko zjadło $\frac{11}{30}$ pizzy, a rodzicom nie zostało nic – zaśmiał się Tomek.

– Algebraicznie otrzymamy – podsumowałem:

$$\frac{11}{41}+\left(\frac{11}{41}\right)^2+\left(\frac{11}{41}\right)^3+\left(\frac{11}{41}\right)^4+\left(\frac{11}{41}\right)^5+\ldots=\frac{11}{30}.$$

– To ja umiem rozwiązać „nieskończoną sumę" dla każdej liczby dzieci i rodziców – wykrzyknął Tomek.

Pomogłem Tomkowi zapisać formułę dla d dzieci i r rodziców:

$$\frac{r}{d+r}+\left(\frac{r}{d+r}\right)^2+\left(\frac{r}{d+r}\right)^3+\left(\frac{r}{d+r}\right)^4+\left(\frac{r}{d+r}\right)^5+\ldots=\frac{r}{d}.$$

– A co będzie, gdy rodzicom znudzi się dzielenie i po prostu każą dzieciom wziąć resztę pizzy? – zapytali chłopcy. Z pewnym trudem zapisaliśmy:

$$\frac{r}{d+r}+\left(\frac{r}{d+r}\right)^2+\left(\frac{r}{d+r}\right)^3+\left(\frac{r}{d+r}\right)^4+\left(\frac{r}{d+r}\right)^5+\ldots+\left(\frac{r}{d+r}\right)^n+\frac{r}{d}\left(\frac{r}{d+r}\right)^n=\frac{r}{d}.$$

– Ale to śmieszne – zachichotał Pawełek – jeśli rodzice mają jedno dziecko, to zje ono dwie pomarańcze.

– Tak – powiedzieliśmy jednocześnie z Tomkiem. Otrzymamy formułę:

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\ldots=2.$$

***

Zjedliśmy ze smakiem przygotowaną przez mamę pizzę, a potem jabłka i pomarańcze.

Małą Deltę z pomocą Pawełka i Tomka przygotował Józef PRZYTYCKI

Rozwiązanie zadania F 507.

Załóżmy, że na układ pada światło o wektorze pola elektrycznego $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Jeżeli oś pierwszego polaryzatora jest zorientowana wzdłuż osi x, to przepuszczone światło będzie opisane wektorem $(\alpha\cos\varphi, \epsilon\sin\varphi)$. Obróćmy teraz ten wektor o kąt θ, aby przejść do układu współrzędnych związanego z drugim polaryzatorem. Otrzymamy:

$$(\alpha\cos\varphi\cos\theta - \epsilon\sin\varphi\sin\theta, \alpha\cos\varphi\sin\theta + \epsilon\sin\varphi\cos\theta).$$

Wektor polaryzacji po przejściu przez drugi polaryzator ma następującą postać w nowym układzie współrzędnych:

$$(\alpha^2\cos\varphi\cos\theta - \alpha\epsilon\sin\varphi\sin\theta, \epsilon\alpha\cos\varphi\sin\theta + \epsilon^2\sin\varphi\cos\theta).$$

Natężenie światła jest dane przez sumę kwadratów składowych tego wektora:

$$I_t(\varphi)/I_0 = \alpha^2(\alpha\cos\varphi\cos\theta - \epsilon\sin\varphi\sin\theta)^2 + \epsilon^2(\alpha\cos\varphi\sin\theta + \epsilon\sin\varphi\cos\theta)^2.$$

Dla światła niespolaryzowanego musimy uśrednić natężenie względem kąta φ, co daje:

$$I_t/I_0 = \frac{1}{2}(\alpha^4+\epsilon^4)\cos^2\theta + \alpha^2\epsilon^2\sin^2\theta.$$

Sumowanie odwrotności

Paweł STRZELECKI

Suma odwrotności wszystkich liczb naturalnych jest nieskończona. Spośród niezliczonych dowodów tego faktu przypomnijmy dla porządku jeden: gdyby ciąg $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ miał skończoną granicę S, to istniałaby liczba $n \in \mathbb{N}$ o tej własności, że $|S - S_n| < \frac{1}{2}$. W szczególności, nierówność $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k} < \frac{1}{2}$ zachodziłaby wtedy dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Tymczasem,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

a zatem ciąg S_n nie ma skończonej granicy.

To, czy dodając odwrotności wszystkich liczb naturalnych należących do pewnego podzbioru $A \subset \mathbb{N}$, otrzymamy skończony wynik, zależy od tego, czy zbiór A jest odpowiednio „mały”. Jeśli, na przykład, zbiór A składa się tylko z potęg pewnej liczby większej od 1 – powiedzmy 2, 3 czy 5 – to wtedy suma wszystkich odwrotności liczb ze zbioru A jest skończona. (Jeśli ktoś nie wie, dlaczego tak jest, niech przeczyta *Małą Deltę* o dzieleniu pomarańczy.) Popatrzmy teraz na inne sytuacje.

Przykład 1. Gdy wiadomo już, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, nietrudno wykazać, że

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = +\infty \tag{1}$$

dla każdego $A \subset \mathbb{N}$, który spełnia następujący warunek: dla pewnej liczby $\delta > 0$ część wspólna zbioru A i zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ ma, dla wszystkich dostatecznie dużych n, przynajmniej $[\delta n]$ elementów.

Intuicyjnie biorąc, własność (1) jest wtedy oczywista: zbiór A jest stosunkowo duży, zawiera „ustalony procent” liczb naturalnych, więc i suma odwrotności wszystkich liczb z tego zbioru jest „ustalonym procentem” (nieskończonej) sumy wszystkich odwrotności $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Czytelnicy bez trudu zdołają zamienić to intuicyjne rozumowanie w ścisły dowód.

Jeśli weźmiemy mniejszy zbiór A, utworzony z rzadziej rozrzuconych liczb naturalnych, wtedy z sumą odwrotności może być rozmaicie. Oto kolejne przykłady.

Przykład 2. Suma odwrotności wszystkich pełnych kwadratów jest skończona, gdyż z oczywistej nierówności $\frac{1}{n^2} \le 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)}$ oraz równości $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ wynika, że dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} \le 2 \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$
$$= 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) < 2.$$

Dodając odwrotności pełnych kwadratów, z pewnością nie otrzymamy więc wyniku większego od 2.

Przykład 3. Gdy jako A weźmiemy zbiór wszystkich liczb pierwszych, to wtedy suma $\sum\limits_{p \in A} \frac{1}{p}$ będzie nieskończona – co oznacza, że liczb pierwszych jest (w pewnym sensie) znacznie więcej niż pełnych kwadratów. Rozbieżności szeregu odwrotności wszystkich liczb pierwszych dowiódł Leonard Euler. Przedstawimy tu znacznie późniejszy dowód tego faktu, pochodzący od amerykańskiego matematyka I. Nivena.

Rozwiązanie zadania M 892.
Rozważmy prostokąt P o wierzchołkach w punktach $A(0,0)$, $B(p,0)$, $C(p,q)$ i $D(0,q)$. Liczba punktów kratowych (o współrzędnych całkowitych) wewnątrz P jest równa $(p-1)(q-1)$. Ponieważ liczby p i q są względnie pierwsze, więc jedynymi punktami kratowymi na przekątnej AC są jej końce. Zatem trójkąt ABC zawiera w swoim wnętrzu $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ punktów kratowych. Z drugiej strony, liczba punktów kratowych o pierwszej współrzędnej równej k $(0 < k < p)$, należących do wnętrza $\triangle ABC$, jest równa $\left[\frac{kq}{p}\right]$. Sumując względem k, otrzymujemy żądaną równość.

Dowód prowadzimy nie wprost. Niech $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ... będzie ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Załóżmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < +\infty$. Istnieje wtedy taka liczba M, że $\sum_{p_n \le k} \frac{1}{p_n} < M$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Z nierówności $\exp(x) = e^x \geq$ $\geq 1 + x$ otrzymujemy

$$\exp(M) \geq \exp\left(\sum_{p_n \le k} \frac{1}{p_n}\right) = \prod_{p_n \le k} \exp\left(\frac{1}{p_n}\right) \geq$$
$$\geq \prod_{p_n \le k} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right) \geq \sum_{n \le k}{}' \frac{1}{n} = S'_k \,,$$

gdzie suma z primem, $S'_k = \sum'_{n \le k} \frac{1}{n}$, oznacza sumę odwrotności wszystkich liczb *bezkwadratowych* – to znaczy takich, które nie są podzielne przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej od 1, albo równoważnie, są iloczynem *różnych* liczb pierwszych.

Ostatnia nierówność bierze się stąd, że mnożąc wszystkie nawiasy $(1 + \frac{1}{p_n})$, otrzymujemy sumę odwrotności wszystkich liczb bezkwadratowych, których czynniki pierwsze nie przekraczają k. Suma ta jest, oczywiście, większa niż S'_k, gdyż prócz odwrotności wszystkich liczb bezkwadratowych nie większych od k zawiera też odwrotności niektórych większych liczb.

Pomnóżmy prawą stronę otrzymanej nierówności przez sumę $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$, która, jak już wiemy, z pewnością jest mniejsza od 2. Otrzymamy wtedy nową nierówność

$$2\exp(M) \geq \left(\sum_{n \le k}{}' \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}\right).$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że mnożąc składniki obu nawiasów po prawej stronie, z pewnością otrzymamy odwrotności wszystkich liczb naturalnych nie większych od k, a prócz tego odwrotności niektórych większych liczb. Zatem

$$2\exp(M) \geq S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}\,.$$

To już jest oczywista sprzeczność: dla k dążących do nieskończoności prawa strona nierówności może być dowolnie duża, natomiast lewa strona w ogóle od k nie zależy. Owa sprzeczność wzięła się stąd, że przypuściliśmy, iż szereg odwrotności liczb pierwszych jest zbieżny – a zatem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$.

Z sumowaniem odwrotności liczb naturalnych wiąże się następująca, do dziś otwarta, hipoteza Erdősa:

Niech A będzie takim podzbiorem zbioru liczb naturalnych, że

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = +\infty\,.$$

Wtedy dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zbiór A zawiera pewien ciąg arytmetyczny długości k.

Każdy widzi, że dla $A = \mathbb{N}$ to prawda (i nie jest to zbyt odkrywcze spostrzeżenie). Wykazać, że jest tak również dla takich zbiorów A, o jakich była mowa w Przykładzie 1, jest bardzo trudno – tę wersję hipotezy Erdősa udowodnił w 1975 roku Szemerédi. Dla tego przypadku nowy, istotnie inny dowód podał niedawno William Timothy Gowers, jeden z ubiegłorocznych medalistów Fieldsa, nagrodzony przede wszystkim za wyniki z zakresu analizy funkcjonalnej – i było to osiągnięcie, o którym wspomniano przy okazji nadawania medalu.

A w ogólnym przypadku nic nie wiadomo nawet dla $k = 3$, czyli dla najmniejszej liczby k, dla której określenie *ciąg arytmetyczny długości k* cokolwiek znaczy.

Rozwiązanie zadania M 894.
Obliczmy, ile liczb postaci x^y, gdzie x, y są liczbami całkowitymi większymi od 1, zawiera zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$. Możemy to zrobić na dwa sposoby. Dla ustalonej podstawy x liczb takich jest $[\log_x n] - 1$, a dla ustalonego wykładnika y jest ich $[\sqrt[y]{n}] - 1$. Sumując te wyrażenia, otrzymujemy

$$\sum_{x=2}^{n} [\log_x n] - (n-1) =$$
$$= \sum_{y=2}^{n} [\sqrt[y]{n}] - (n-1),$$

a stąd natychmiast wynika żądana równość.

Klub 44

$$\otimes\!\!\sqrt{\int\!\!\!\!\sum!} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1999

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 371 (WT=2,45), 372 (WT=1,50), 373 (WT=1,74) i 374 (WT=1,48) z numeru 12/1998 i 1/1999

Witold Bednorz	– Tychy	43,87
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	42,19
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	39,07

Zadania z matematyki nr 385, 386

Redaguje Marcin E. KUCZMA

385. Wyznaczyć wszystkie liczby $\delta > 0$, dla których jest prawdziwe następujące zdanie: jeżeli $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ jest dowolną funkcją ciągłą spełniającą warunek $f(0) = f(1)$, to dla pewnej liczby x zachodzi równość: $f(x) = f(x+\delta)$.

386. Niech $n \geq 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Obliczyć maksymalną wartość, jaką może mieć suma $\sum |P_iP_j|^2$ dla n punktów $P_1, \ldots, P_n$ leżących na sferze o promieniu 1 (suma $\binom{n}{2}$ składników, odpowiadających wszystkim parom (i,j), $i<j$).

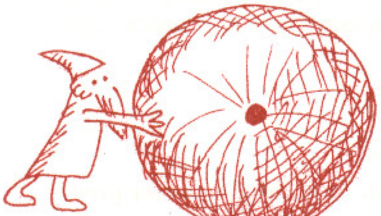
Zadanie **386** zaproponował pan Krystian Bartniczek z Würselen.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1999

Przypominamy treść zadań:

381. Mamy dwie identyczne talie po n kart ($n \geq 3$); na kartach każdej talii są napisane liczby od 1 do n, po jednej na każdej karcie. Przy okrągłym stole siedzi n osób; każda trzyma dwie karty. Co sekundę każda osoba podaje kartę z większą liczbą sąsiadowi z prawej strony (ruch jest wykonywany jednocześnie przez wszystkie n osób). Zabawa się kończy, gdy któraś z osób ma w ręce dwie jednakowe karty. Wyznaczyć wszystkie wartości n, dla których opisany proces może trwać nieskończenie.

382. Ciąg (a_n) jest określony wzorami: $a_0 = 2$, $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_n = -\frac{3}{7}a_{n-1} - \frac{3}{7}a_{n-2} + \frac{4}{7}a_{n-3}$ dla $n \geq 3$. Czy szereg $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny?



381. Załóżmy, że n jest liczbą nieparzystą: $n = 2k+1$. Wykażemy, że zabawa musi się zakończyć w skończonej liczbie ruchów. Obie karty, na których jest napisana liczba „1", nie ruszają się w trakcie gry. Pozycja obu kart „2" staje się także stabilna po co najwyżej dwóch ruchach. Po dalszych kilku ruchach stabilizuje się pozycja obu kart „3". I tak dalej: po skończenie wielu ruchach ustabilizuje się położenie obu kart „k" (i wszystkich kart z numerami mniejszymi) oraz położenie *jednej* karty „k+1". Jeśli gra się do tej pory nie zakończyła, karty o ustabilizowanym położeniu znajdują się u różnych osób. Druga karta „k+1" wędruje teraz wokół stołu aż do spotkania ze swoją bliźniaczką. W tym momencie zabawa się kończy.

Jeżeli natomiast n jest liczbą parzystą, to gra może trwać nieograniczenie. Wystarczy, żeby na starcie każda osoba miała w ręce jedną kartę z liczbą $\leq n/2$ i jedną kartę z liczbą $> n/2$. Po wykonaniu każdego kolejnego ruchu każda osoba nadal ma jedną kartę „dużą" i jedną „małą", więc cóż, trzeba grać dalej (wesołej zabawy).

382. Mamy tu rekurencję liniową trzeciego rzędu, o stałych współczynnikach. Wielomian charakterystyczny $x^3 + \frac{3}{7}x^2 + \frac{3}{7}x - \frac{4}{7}$ ma pierwiastki: $\alpha = \frac{4}{7}$, $\beta = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i)$, $\gamma = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\,i)$. Szukamy wzoru jawnego w postaci $a_n = A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n$. Podstawiając $n = 0, 1, 2$ (i znając wartości początkowe a_0, a_1, a_2), dostajemy układ trzech równań z niewiadomymi A, B, C, z których wyznaczamy: $A = \frac{196}{93}$, $B = \frac{1}{93}(-5+8\sqrt{3}\,i)$, $C = \frac{1}{93}(-5-8\sqrt{3}\,i)$. Po kilku nieciekawych przekształceniach postulowany wzór jawny przybiera postać:

$$a_n = \frac{1}{93}\left(196 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^n + \delta_n\right), \quad \text{gdzie} \quad \delta_n = \begin{cases} -10 & \text{dla } n = 3k, \\ -19 & \text{dla } n = 3k+1, \\ 29 & \text{dla } n = 3k+2. \end{cases}$$

Ciąg (a_n) nie dąży do zera, więc szereg $\sum a_n$ nie jest zbieżny.

Rozwiązanie zadania M 893.
$\left[\frac{n}{k}\right]$ jest liczbą liczb całkowitych z przedziału $[1,n]$, które są podzielne przez k. Tak więc każda ze stron równości, którą należy udowodnić, jest równa sumie liczb dzielników wszystkich liczb całkowitych z przedziału $[1,n]$.

Zadania z fizyki nr 282, 283

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1999

282. W zewnętrznym jednorodnym polu elektrycznym umieszczono prostopadle do niego dwie przewodzące płytki i zwarto je, tak że wskutek indukcji na płytkach pojawiły się ładunki przeciwnego znaku. Czy wzajemne przyciąganie tych płytek jest silniejsze, czy słabsze od rozciągającego je oddziaływania ze strony pola zewnętrznego?

283. 4 lutego br. rosyjscy kosmonauci przeprowadzili (nieudany) eksperyment z oświetleniem powierzchni Ziemi światłem słonecznym odbitym od zwierciadła umieszczonego na orbicie. Jak podawała prasa, zwierciadło było kołem o średnicy 25 m, a wysokość orbity wynosiła 360 km. Jeśli odbita wiązka światła pada na powierzchnię Ziemi prostopadle, a zwierciadło jest płaskie, to jaka jest średnica wytworzonego „zajączka”? Czy można ją zmniejszyć, stosując zwierciadło wklęsłe? Ile razy silniejsze jest oświetlenie takim zwierciadłem od Księżyca w pełni? Dane: średnica kątowa Słońca i Księżyca na niebie – około 32′, średnie albedo Księżyca (współczynnik odbicia światła od jego powierzchni) – 0,073.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 272 (WT=3,70) i 273 (WT=1,33) z numeru 2/1999

Zbigniew Galias	– Kraków	38,08
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	30,41
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	29,54
Aleksander Surma	– Myszków	22,53
Artur Arciszewski	– Kielce	15,62

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1999

Przypominamy treść zadań:

278. Ocenić orientacyjnie minimalną prędkość jazdy na nartach wodnych. Przyjąć masę narciarza $m = 70$ kg, a łączną powierzchnię nart $S = 0{,}4$ m^2.

279. Jak wiadomo, dla obserwatora patrzącego znad wody obraz przedmiotów położonych w głębi wody znajduje się płycej. Czy dla obserwatora patrzącego ukośnie obraz ten jest:
a) przesunięty względem przedmiotu tylko w pionie, czy również w poziomie, a jeśli tak, to w stronę obserwatora, czy w przeciwną?
b) położony głębiej, niż dla patrzącego z góry, płycej, czy dokładnie na tej samej głębokości?

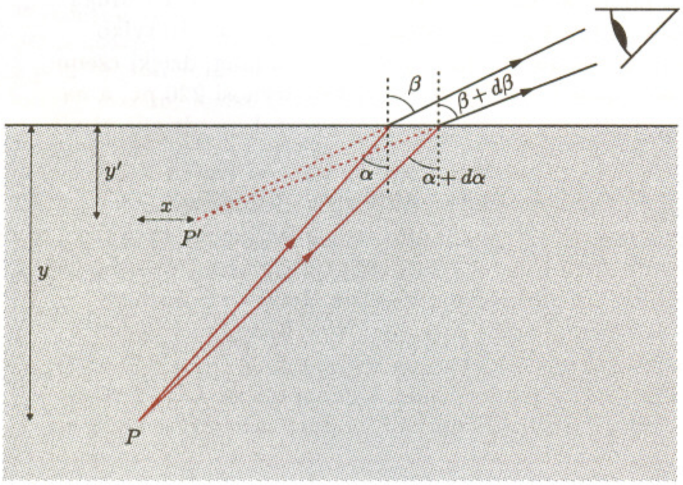
278. Jeśli narty są nachylone do poziomu pod kątem α i całkowicie zanurzone w wodzie, to pole przekroju odchylanego w dół strumienia wody wynosi $S\sin\alpha$, masa wody przepływająca w ciągu czasu Δt przez ten przekrój równa się $\varrho v\Delta t\cdot S\sin\alpha$, czyli pęd $p = mv = \varrho v^2 S\Delta t\sin\alpha$. Zmianę tego pędu wynikającą z odchylenia strumienia przez narty otrzymamy, mnożąc pęd przez $\sin\alpha$, zatem siła działająca na narty jest dana wzorem $F = \varrho v^2 S\sin^2\alpha$, a jej pionowa składowa wynosi $F_{\text{pion}} = F\cos\alpha = \varrho v^2 S\sin^2\alpha\cos\alpha$. Maksymalną wartością wyrażenia $\sin^2\alpha\cos\alpha$ jest $2/(3\sqrt{3}) \approx 0{,}38$; w wyniku przyrównania $F_{\text{pion max}}$ do ciężaru narciarza mg otrzymujemy

$$v_{\min} \approx \sqrt{\frac{mg}{0{,}38\varrho S}} \approx 2{,}1 \text{ m/s}.$$

Pewne wątpliwości w powyższym rachunku może budzić obliczenie ilości wody odchylanej przez narty oraz wartość zmiany pędu. Ewentualne korekty objęłyby zależność siły nośnej od kąta α, a stąd i współczynnik 0,38 w końcowym wzorze.

279. Aby wyznaczyć położenie obrazu P', powinniśmy rozpatrzeć bieg dwóch bliskich sobie promieni wybiegających z punktu P (rys.). Niech y będzie głębokością P, n – współczynnikiem załamania wody, α i $\alpha + \mathrm{d}\alpha$ – kątami padania, β i $\beta + \mathrm{d}\beta$ – kątami załamania, y' – głębokością P', natomiast x – przesunięciem poziomym P' (z dodatnim zwrotem w stronę obserwatora). Z rysunku odczytujemy, że

$$y\,\mathrm{tg}\,\alpha = x + y'\,\mathrm{tg}\,\beta, \qquad y\,\mathrm{tg}(\alpha + \mathrm{d}\alpha) = x + y'\,\mathrm{tg}(\beta + \mathrm{d}\beta).$$



Odejmując te równania stronami, znajdujemy

$$y' = y\frac{\mathrm{tg}(\alpha + \mathrm{d}\alpha) - \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}(\beta + \mathrm{d}\beta) - \mathrm{tg}\,\beta}.$$

Przyrost funkcji tangens w liczniku i mianowniku należy wyrazić za pomocą jej pochodnej i podstawić prawo załamania $\sin\beta = n\sin\alpha$ (albo jego różniczkową wersję $\cos\beta\mathrm{d}\beta = n\cos\alpha\mathrm{d}\alpha$). Otrzymujemy

$$y' = y\frac{\cos^3\beta}{n\cos^3\alpha} = y\frac{(1 - n^2\sin^2\alpha)^{3/2}}{n\cos^3\alpha}.$$

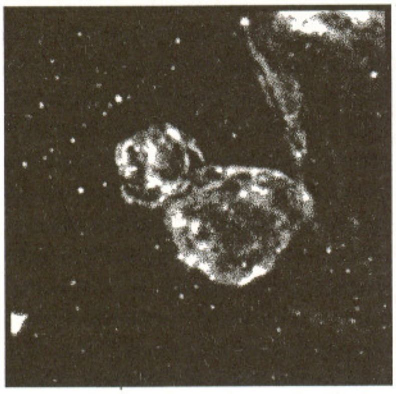
Jak można się przekonać, jest to malejąca funkcja zmiennej α, czyli dla obserwatora z boku obraz leży płycej – odpowiedź na pytanie b). Aby odpowiedzieć na pytanie a), wyznaczmy przesunięcie poziome x

$$x = y\,\mathrm{tg}\,\alpha - y'\,\mathrm{tg}\,\beta = y\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}(n^2 - 1).$$

Jak widać, wielkość ta jest dodatnia.

Patrz w niebo

Często słyszy się, że swoje istnienie zawdzięczamy Słońcu, bo to ono jest dla nas źródłem wszelkiej energii. Można jednak tę myśl dalej rozwijać i spytać, czemu zawdzięczamy istnienie Słońca itd. Jasne, że w ostatecznym rachunku wszystko zawdzięczamy Wielkiemu Wybuchowi. Nie sięgajmy jednak tak daleko w przeszłość i skupmy się na jednym ogniwie tego łańcuszka wzajemnych zależności, a stanowią go chyba niedoceniane przez ogół supernowe. Wiadomo wprawdzie, że wybuch supernowej to gigantyczna eksplozja gwiazdy, ale na szczęście jest zjawiskiem tak rzadkim i odległym, że niczym nam nie grozi. Rzeczywiście, wybuch supernowej w odległości kilku parseków od Słońca oznaczałby nasz koniec, wygląda jednak na to, że w tak bliskim sąsiedztwie nie ma kandydatek na supernowe. Za to kiedyś gwiazdy te przyczyniły się do naszego powstania, tworząc budulec zarówno naszych ciał, jak i Słońca – mianowicie pierwiastki ciężkie.



Gwiazdy więcej niż sześciokrotnie masywniejsze od Słońca kończą swoje życie eksplozją, która powoduje rozsianie w przestrzeni ciężkich pierwiastków wyprodukowanych uprzednio w ich wnętrzach. Bąbel eksplozji rozpycha zarazem otaczającą supernową materię międzygwiazdową, ogrzewa ją i po około stu tysiącach lat rozprasza się w niej. Ocenia się, że w Galaktyce wybucha średnio jedna supernowa na dziesięć lat, przy czym widzimy tylko nieliczne. Praktycznie niemożliwe jest więc np. zaobserwowanie dwóch bąbli eksplozji jednocześnie, tymczasem taki właśnie obiekt znaleźli w Wielkim Obłoku Magellana astronomowie z University of Illinois około trzech lat temu. Obiektem tym jest mgławica o symbolu DEM L316. W świetle widzialnym (linii H_α wodoru) ma ona kształt bałwanka o rozmiarach $5'$, co przy odległości Wielkiego Obłoku Magellana, wynoszącej w przybliżeniu 50 kpc, daje rozmiary liniowe 70 pc. „Szyja" tego bałwanka świeci w zakresie rentgenowskim, co dowodzi wysokiej temperatury. Tam też obserwuje się silne turbulencje materii mgławicy i chaotyczny przebieg linii pola magnetycznego. Wszystko więc dowodzi, że rzeczywiście bałwanek powstał z połączenia dwóch rozszerzających się bąbli, czyli musiały tam wybuchnąć dwie supernowe rozdzielone małą odległością zarówno w przestrzeni, jak i w czasie. Astronomowie mają nadzieję, że skrupulatne badania tego wyjątkowego obiektu przyczynią się do lepszego zrozumienia procesów towarzyszących eksplozji supernowych – ale na to trzeba jeszcze poczekać.

Tomasz KWAST

Wrzesień

Letni Trójkąt, czyli trójka bardzo jasnych gwiazd, w której skład wchodzą Deneb (α Łabędzia), Wega (α Lutni) i Altair (α Orła), przesunął się już lekko ku zachodowi. Prawie w zenicie widzimy wieczorami Łabędzia, a tuż na południe od niego niepozorny gwiazdozbiór Lisa. Znajduje się w nim sporo słabych gwiazd, żadnej jednak charakterystycznej konfiguracji. Dlatego trudno jest tam określić położenie dość ciekawego obiektu, mianowicie mgławicy planetarnej M 27 (NGC 6853), zwanej od swego kształtu Hantlami. Na zdjęciach z długą ekspozycją widać, że mgławica jest tarczką o średnicy $8'$, a Hantle to tylko najsilniej świecące jej obszary. Jasność mgławicy wynosi 7,6 mag, dzięki czemu można jej poszukiwać nawet przez lornetkę. Jej odległość wynosi 220 pc, a na podstawie tempa ekspansji mgławicy jej wiek oceniony został na nie więcej niż 4000 lat.

Wenus jest na granicy Raka i Lwa i wschodzi przed wschodem Słońca, a 26 IX osiąga maksymalną jasność. Mars znajduje się w Wężowniku (to duży gwiazdozbiór nie zaliczany do zodiakalnych, choć ekliptyka przezeń przechodzi) i wieczorem widać go nisko na południowym zachodzie. Jowisz i Saturn są w Baranie i planety te widać niemal przez całą noc. Nów Księżyca wypada 9 IX, a pełnia 25 IX. Księżyc zakryje Aldebarana wieczorem 2 IX, a ponadto zbliży się mocno do Regulusa 8 IX i ponownie do Aldebarana 30 IX. Wreszcie równonoc, czyli początek jesieni, przypada na 23 IX i dni – niestety – będą już odtąd krótsze od nocy.

T.K.

Rozwiązanie zadania F 508.
Oznaczmy przez I_1 natężenie światła przepuszczonego przez pierwszy polaryzator. Wsunięty trzeci polaryzator przepuszcza $I_1 \cos^2\theta$ światła, a w takim razie ostatni $I_1 \cos^2\theta \cos^2(\pi/2-\theta) = \frac{I_1}{4}\sin^2 2\theta$. Natężenie światła przepuszczanego przez ten układ osiąga największą wartość dla $\theta = \pi/4$.

9/99 (21)
Γlimatias $_{n\to\infty}$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (18′)

– To dla jakiej największej liczby, którą mi podasz, zabawa się zakończy?
– No, dla jakiej?
– Dobre pytanie!
– Dobre, niedobre, spróbuj na nie odpowiedzieć. – Celestyn wyraźnie chce zmusić Ambrożego do dalszego myślenia.
– Wiesz już, że taka największa liczba istnieje. Oznacz ją sobie jakoś.
– Niech będzie k.
– Co wiesz o tym k?
– Że jeśli podasz mi liczbę k, to zabawa się zakończy, natomiast jeśli podasz mi $k+1$, to przez cały czas będziemy mówili *Nie wiem*.
– A jak to wygląda z punktu widzenia Bazylego?
– Bazyli jest prawie w tej samej sytuacji, co ja. Wprawdzie to ja zaczynam odpowiadanie na twoje pytania, więc pozycja Bazylego nie jest identyczna, ale te pół kolejki do tyłu nie powinno wpłynąć na to, czy zabawa się zakończy, czy nie. Sądzę, że Bazyli też może powiedzieć: *Jeśli dostanę liczbę k, to zabawa się zakończy, a jeśli $k+1$, to nie.*
– A co będzie, jeżeli liczbami, które dla was przygotowałem, są k i $k+1$?
– Wtedy zabawa się... eee... zaraz... Ten z nas, który otrzyma liczbę k, wie, że zabawa się zakończy, a ten, który dostanie $k+1$, jest przekonany, że swoich liczb nie odgadniemy nigdy.
– To który się myli?
– No... niby każdy ma rację, każdy swoją... Już wiem! Założenie, że to, czy gra się zakończy, zależy tylko od liczby, którą ja otrzymam, było błędne! Losy zabawy zależą od obu liczb przygotowanych przez ciebie. Jeśli te liczby są małe, to gra się zakończy, a jak duże, to nie.
– To znaczy, iż istnieje takie k, że jeśli przygotowałem liczby $k-1$ i k, to gra się jeszcze zakończy, ale jeśli przygotowałem k i $k+1$, to już nie.
– Właśnie!
– Co więc będzie, jeśli podam ci liczbę k?
– To proste. Jeśli Bazyli dostanie liczbę $k-1$, to zabawa się zakończy, a jeśli $k+1$, to nie.
– A jeśli podam ci liczbę k, a następnie będziecie mówić z Bazylim *Nie wiem* przez 5 godzin?
– Myślę, że gdyby zabawa miała się zakończyć, zakończyłaby się stosunkowo szybko, a przynajmniej dobrze byłoby wiadomo, jak długo ma trwać. Po 5 godzinach *Niewiemowania* byłoby jasne, że gra się nigdy nie skończy.
– Wiedziałbyś, że gra się nie skończy?
– Oczywiście.
– To co miałby Bazyli?
– Oczywiście $k+1$.
– Wiedziałbyś to po 5 godzinach?
– Tak!!!
– To czemu kłamałbyś mówiąc *Nie wiem*?

JWR

GRY (6)

Stosy w zaprezentowanej w poprzednim Γ-limatiasie grze możemy dostrzec, patrząc na pola między pierwszą i drugą bierką od prawej, trzecią i czwartą, itd. Przy nieparzystej liczbie bierek ostatni stos reprezentują pola leżące między bierką położoną najbardziej na lewo i lewym końcem planszy. W przedstawionej poprzednio pozycji dostrzegamy 3 stosy mające 2, 3 i 7 pól:

1	2	○	○	5	6	7	○	9	○	11	12	13	14	15	16	17	○	19	20
$\underbrace{\quad}_{2}$					$\underbrace{\quad}_{3}$								$\underbrace{\quad}_{7}$						

Właściwie każdy może wskazać, co chce i powiedzieć: *to są stosy*. Trzeba więc uzasadnić, że przy powyższym określeniu stosów zaprezentowana gra zachowuje się tak, jak gra *Nim*.

Wykonanie ruchu bierką z pola 18 powoduje „zabranie” pól ze stosu 11–17, natomiast wykonanie ruchu bierką z pola 10 powoduje dodanie pól do tego stosu (w powyższej pozycji możemy dodać tylko 1 pole).

Podobnie, ze stosu 5–7 możemy zabierać pola, wykonując ruch bierką 8. Gdyby bierka 4 nie była chwilowo zablokowana, moglibyśmy także dodać pola do tego stosu.

Ostatni stos złożony jest z pól 1–2, zabieranie pól dokonuje się przez wykonanie ruchu bierką z pola 3.

Widzimy, że gra jest równoważna grze *Nim*, w której mamy prawo nie tylko zabierać pola (nie używamy słowa bierki, aby nie mylić ich z bierkami stojącymi na planszy) ze stosów, ale również je dokładać, jednak dokładanie obwarowane jest takimi ograniczeniami, które gwarantują, że gra się zakończy.

Chcąc znaleźć wygrywające posunięcie, musimy wyobrazić sobie, jak zagralibyśmy w grze *Nim*, mając przed sobą stosy o licznościach 2, 3 i 7. Oczywiście zabralibyśmy 6 bierek z trzeciego stosu. W naszej grze takie posunięcie odpowiada przesunięciu bierki z pola 18 na pole 12. Jest to jedyny ruch wygrywający. Do pierwszego stosu pól dokładać nie możemy, bo trudno przesunąć lewy koniec planszy. Liczby pól w drugim stosie w tym momencie też nie można zwiększyć, gdyż bierka na polu 4 jest chwilowo zablokowana.

A jaki ruch można wykonać w pozycji złożonej z 6 bierek na polach 6, 13, 19, 28, 29 i 33?
A w pozycji złożonej z 7 bierek na polach 6, 8, 20, 25, 26, 35 i 50?

Pomyśl nad tym, drogi Czytelniku, i sprawdź za miesiąc, czy miałeś rację.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl

delta

$h=6{,}63\cdot10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ $\pi=3{,}141592\ldots$

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY

Dodatek Olimpijski

Zadania I stopnia Olimpiady Fizycznej, Matematycznej i Astronomicznej 1999/2000

Olimpiada Fizyczna

W Olimpiadzie Fizycznej mogą uczestniczyć uczniowie szkół średnich dla młodzieży, a także – za zgodą komitetów okręgowych – niektórzy uczniowie szkół podstawowych, a mianowicie laureaci konkursów przedmiotowych z fizyki rekomendowani przez komisje konkursowe oraz rekomendowani przez szkołę uczniowie realizujący indywidualny tok nauki.

Rozwiązania zadań I stopnia należy przesyłać w podanych terminach do komitetów okręgowych OF właściwych dla miejscowości, w których znajdują się szkoły, do których zawodnicy uczęszczają.

Do zawodów II stopnia uczestnicy kwalifikowani są przez komitety okręgowe na podstawie łącznej oceny za zadania obu części zawodów I stopnia. Zawody II stopnia odbywają się w dwóch turach – teoretycznej i doświadczalnej – w miastach, w których mają siedziby komitety okręgowe OF, jednocześnie we wszystkich okręgach. Do tury doświadczalnej kwalifikowani są uczniowie, którzy za zadania tury teoretycznej uzyskali najwyższe oceny.

Kwalifikację do zawodów III stopnia przeprowadza Komitet Główny po sprawdzeniu, według ujednoliconych kryteriów, prac zawodników typowanych przez komitety okręgowe. Zawody III stopnia odbywają się w Warszawie.

Na podstawie łącznej oceny za rozwiązania zadań teoretycznych i zadania doświadczalnego w zawodach III stopnia Komitet Główny ustala listę laureatów i finalistów. Przyznawane są również wyróżnienia za rozwiązanie poszczególnych zadań.

Wszyscy uczniowie zakwalifikowani do zawodów III stopnia są zwolnieni z egzaminu maturalnego z fizyki. Ułatwienia dla uczestników olimpiady przy ubieganiu się o przyjęcie na studia ustalają senaty poszczególnych uczelni. Laureaci i finaliści są z reguły zwalniani z całości lub części egzaminów wstępnych na kierunkach przyrodniczych, technicznych, ekonomicznych, a nawet humanistycznych. Laureaci mogą być również przyjęci z pominięciem postępowania kwalifikacyjnego na studia medyczne. Niektóre uczelnie przyznały pewne przywileje uczestnikom zawodów doświadczalnych II stopnia.

XLIX OLIMPIADA FIZYCZNA

– ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

Rozwiązania zadań I stopnia należy przesyłać do Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej w terminach: część I – do **25 października br.**, część II – do **20 listopada br.** O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II. Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć w broszurze i na afiszu rozesłanych do szkół średnich.

CZĘŚĆ I (termin wysyłania rozwiązań – **25 października 1999 r.**)

Podaj lub wybierz i krótko uzasadnij prawidłową odpowiedź (za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty).

Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres domowy autora pracy, a także nazwę i adres szkoły, klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki.

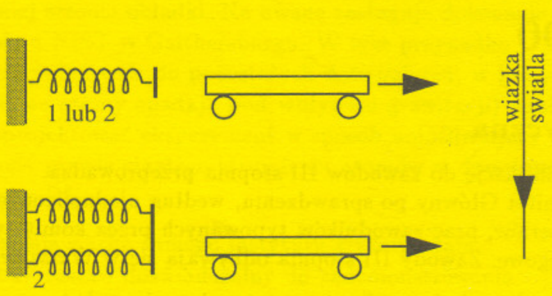
1. Dwa poruszające się samochody doznają takich samych oporów ruchu, zależnych tylko od szybkości v. Silnik samochodu o masie m pracuje z mocą $P(v)$, a silnik samochodu o masie $2m$ – z mocą $2P(v)$. Który z nich wcześniej osiągnie odległość 100 m od chwili rozpoczęcia ruchu?

2. Ze sprężynowej wyrzutni 1 wystrzelono wózek, który zasłonił wąską wiązkę światła na czas 0,25 s (rys. 1). Gdy wózek wystrzelono z wyrzutni 2, czas ten wyniósł 0,4 s. Na jak długo wózek zasłoni wiązkę, jeżeli wystrzelimy go za pomocą obu sprężynek, umieszczonych w wyrzutni jedna obok drugiej (połączonych równolegle)?

Uwaga!

a) Masa sprężynek jest do zaniedbania.

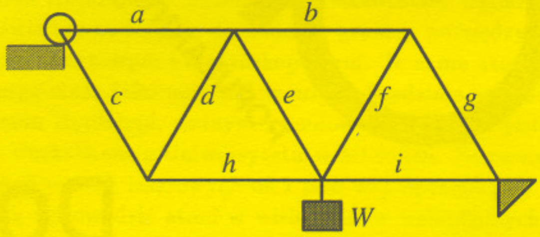
b) W każdym przypadku wystrzelenia wózka sprężynki były ściskane do tego samego rozmiaru.



Rys. 1

3. Pewna kometa okrąża Słońce w czasie 75,7 lat. Odległość komety od Słońca w perihelium wynosi 0,60 jednostki astronomicznej (AU). Jaki jest stosunek maksymalnej prędkości komety do jej prędkości minimalnej?

4. Do płaskiej kratownicy podczepiono ciężar W (rys. 2). Kratownica może obracać się swobodnie wokół złącza przymocowanego do prawej podpory. Z lewej strony przymocowano do kratownicy kółko, które może toczyć się po poziomej podporze. Wszystkie pręty kratownicy mają jednakową długość. Pręty mogą się swobodnie obracać wokół złączy. Ciężar kratownicy można pominąć. Które z elementów kratownicy można zastąpić wiotkimi, nierozciągliwymi linami nie naruszając przy tym geometrii konstrukcji?



Rys. 2

5. W punktach A i B (rys. 3) znajdują się dwa jednakowe głośniki skierowane w stronę punktu C, w którym znajduje się mikrofon. Gdy włączony jest głośnik A, natężenie dźwięku odbieranego przez mikrofon jest równe 0,8 W/m^2. Ile wynosi natężenie dźwięku, gdy włączony jest tylko głośnik B, a ile wynosi, gdy włączone są oba głośniki? Prędkość dźwięku jest równa 340 m/s. Oba głośniki są zasilane tym samym napięciem sinusoidalnym o częstotliwości 170 Hz.

Rys. 3

6. Wiązka światła pada na szczelinę, ugina się i jest rejestrowana w punkcie A (rys. 4). Jeśli szczelinę zwężymy, natężenie światła w A

a) zmaleje niezależnie od długości fali światła,

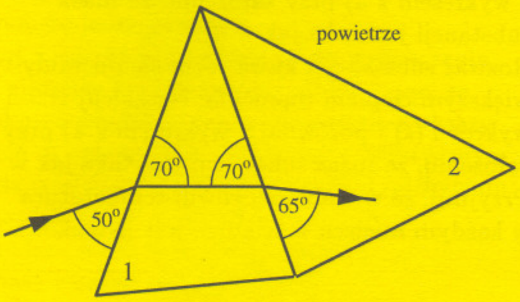
b) wzrośnie niezależnie od długości fali światła,

c) wzrośnie lub zmaleje w zależności od długości fali światła.

Rys. 4

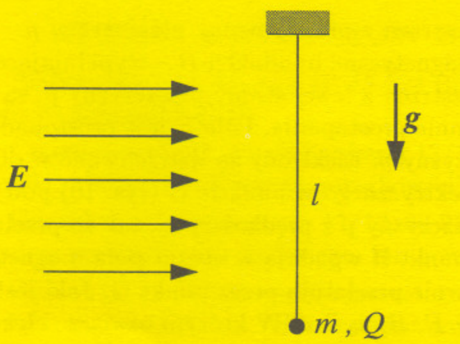
7. Aby krótkowidz mógł widzieć odległy przedmiot ostro, w lunecie zbudowanej z dwóch soczewek skupiających należy zmienić odległość między tymi soczewkami. Czy trzeba ją zwiększyć, czy zmniejszyć?

8. Na dwa pryzmaty sklejone ze sobą skierowano promień światła, którego bieg pokazano na rysunku 5. Oblicz współczynnik załamania światła względem powietrza dla każdego z pryzmatów.



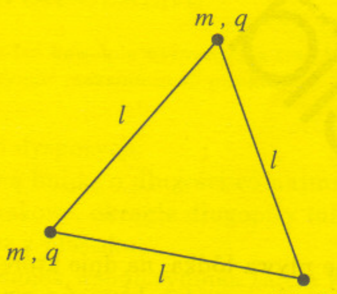
Rys. 5

9. Małe ciało o masie m i ładunku Q zawieszono na nieprzewodzącej i nieważkiej nici o długości l (rys. 6). W pewnej chwili nagle włączono jednorodne pole elektryczne o natężeniu E. Oblicz maksymalną prędkość uzyskaną przez ciało.
Podaj wynik liczbowy dla: $l = 0{,}5$ m, $Q = 10^{-7}$ C, $m = 2 \cdot 10^{-3}$ kg, $E = 10^5$ V/m.



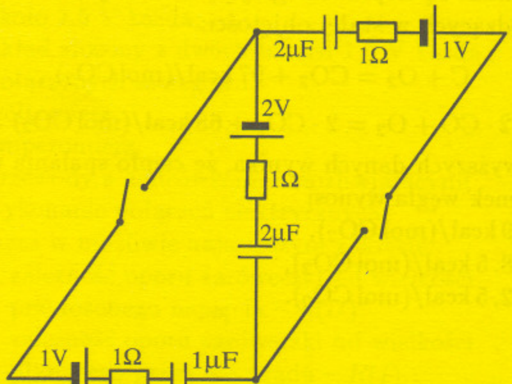
Rys. 6

10. Trzy jednakowe, małe kulki o masie m każda, jednakowo naelektryzowane ładunkami q, są połączone nieprzewodzącymi, nierozciągliwymi i nieważkimi nitkami o długości l każda (rys. 7). Początkowo nitki są napięte, zaś kulki spoczywają względem pewnego inercjalnego układu odniesienia, w którym nie działają żadne siły zewnętrzne. Oblicz maksymalne prędkości kulek po przecięciu jednej z nitek.



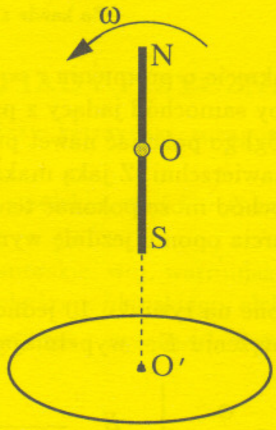
Rys. 7

11. W obwodzie przedstawionym na rysunku 8 kondensatory są nienaładowane. Do jakich napięć naładują się poszczególne kondensatory, gdy zamkniemy oba klucze?



Rys. 8

12. Namagnesowany pręt, wytwarzający pole magnetyczne o symetrii osiowej, obraca się w płaszczyźnie pionowej wokół swojego nieruchomego środka O. W płaszczyźnie poziomej spoczywa cienki



Rys. 9

przewodnik w kształcie okręgu o środku O′ będącym rzutem pionowym punktu O (rys. 9). Wiedząc, że wartość strumienia pola magnetycznego przez powierzchnię ograniczoną przewodnikiem osiąga podczas obrotu magnesu maksymalną wartość $\Phi_{max} = 0{,}2$ Wb, oblicz średnią bezwzględną wartość SEM. Magnes obraca się jednostajnie z częstością $\nu = 10\ s^{-1}$.

13. W basenie pływa łódka, na dnie której leży kamień. Jeżeli wyjmiemy ten kamień z wnętrza łódki i podczepimy go pod dnem, to poziom wody w basenie
a) pozostanie taki sam,
b) obniży się,
c) podniesie się.

14. Znane są ciepła następujących reakcji zachodzących w stałej objętości:

$$C + O_2 = CO_2 + 97\,\mathrm{kcal/(mol\,CO_2)}\ ,$$

$$2 \cdot CO + O_2 = 2 \cdot CO_2 + 68\,\mathrm{kcal/(mol\,CO_2)}\ .$$

Z powyższych danych wynika, że ciepło spalania węgla na tlenek węgla wynosi
a) $29\,\mathrm{kcal/(mol\,CO_2)}$,
b) $48,5\,\mathrm{kcal/(mol\,CO_2)}$,
c) $82,5\,\mathrm{kcal/(mol\,CO_2)}$.

15. Wiadro z lodem o temperaturze początkowej $-10°$ C wstawiono do pomieszczenia o temperaturze $+20°$ C.
a) Naszkicuj wykres zależności od czasu t temperatury T lodu (wody) znajdującej się w wiadrze.
b) Rozważ substancję, która różni się od wody tylko większym ciepłem właściwym w stanie stałym. Naszkicuj drugi wykres $T(t)$ i porównaj z wykresem z a) przy założeniu, że masa substancji jest taka jak w a).
c) Rozważ substancję, która różni się od wody tylko większym ciepłem topnienia. Naszkicuj trzeci wykres $T(t)$ i porównaj z wykresem z a) przy założeniu, że masa substancji jest taka jak w a).
Przyjmij, że w ustalonej chwili temperatura w każdym miejscu w wiadrze jest jednakowa.

CZĘŚĆ II (termin wysyłania rozwiązań – **20 listopada 1999 r.**)

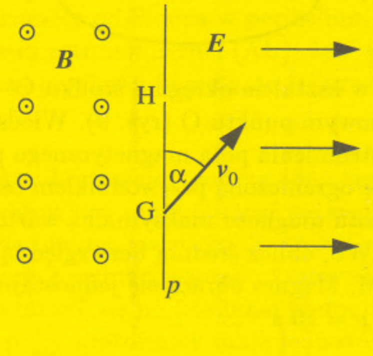
Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres domowy autora pracy, a także nazwę i adres szkoły, klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

ZADANIA TEORETYCZNE

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

T1. Szosa na zakręcie o promieniu $r = 60$ m jest tak nachylona, by samochód jadący z prędkością $v = 40$ km/h mógł go pokonać nawet przy bardzo śliskiej nawierzchni. Z jaką maksymalną prędkością samochód może pokonać ten zakręt, jeżeli współczynnik tarcia opon o jezdnię wynosi $f = 0{,}5$?

T2. Przedstawione na rysunku 10 jednorodne pola, elektryczne o natężeniu E – wypełniające półprzestrzeń z prawej strony płaszczyzny p oraz magnetyczne o indukcji B – wypełniające półprzestrzeń z lewej strony płaszczyzny p, są wzajemnie prostopadłe. Pole $\vec{E}$ jest prostopadłe do płaszczyzny p. Elektrony są wstrzeliwane w obszar pola elektrycznego w punkcie G (rys. 10) pod kątem α do płaszczyzny p z prędkością v_0, tak że przelatując przez punkt H wpadają w obszar pola magnetycznego i ponownie przelatują przez punkt G. Jaki jest związek między E, B, v_0 i α? W którym obszarze elektrony przebywają dłużej, jeżeli $\alpha = 60°$?



Rys. 10

T3. Kulistą planetę o promieniu R otacza przezroczysta atmosfera, rozciągająca się na dużą wysokość ($> R$) nad powierzchnię. Współczynnik załamania światła w tej atmosferze zmienia się wraz z wysokością zgodnie ze wzorem $n = n_0 - \alpha h$ i przyjmuje wartości z zakresu od $n = 1$ do $n = n_0$. Na jakiej wysokości h nad powierzchnią planety promień świetlny może obiegać planetę po okręgu?

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.

D1. Masz do dyspozycji:
- listewkę o przekroju kwadratowym o długości około 0,5 m,
- dwa kawałki tektury lub grubego kartonu o rozmiarach około 5 cm × 5 cm,
- nitkę lub cienki drut,
- ostry nóż (np. nóż do tapet),
- statyw z uchwytem,
- odważnik o masie 2 g,
- kaszę gryczaną prażoną,
- monetę jednogroszową.

Zbuduj wagę, która posłuży Ci do wyznaczenia masy ziarenka kaszy i monety. Zakładając, że prawdopodobieństwo znalezienia ziarenka kaszy o masie m opisane jest rozkładem statystycznym Gaussa o średniej wartości masy m_s i odchyleniu standardowym σ, wyznacz:
- średnią masę m ziarenka kaszy,
- masę monety jednogroszowej.

Oceń błąd pomiarowy i podaj jego główne źródła.

Uwaga: Jeżeli nie dysponujesz odważnikiem 2 g, to możesz wykorzystać monetę dwugroszową. Przyjmij, że masa czystej, niezniszczonej monety dwugroszowej równa jest 2,10 g.

Wskazówka: Przed pomiarami usuń zarówno ziarna połamane, jak i wyraźnie odbiegające wielkością od pozostałych.

D2. Masz do dyspozycji:
- plastikową linijkę o długości co najmniej 30 cm,
- dwa jednakowe, okrągłe długopisy lub flamastry wykonane z plastiku.

Wyznacz stosunek współczynnika tarcia kinetycznego do współczynnika tarcia statycznego między linijką i długopisem (flamastrem). Oceń dokładność swoich pomiarów.

D3. Masz do dyspozycji:
- 5 jednakowych żarówek z dolutowanymi drucikami miedzianymi, o napięciu znamionowym około 2,5 V każda,
- układ złożony z dwóch baterii 1,5 V każda, połączonych szeregowo,
- woltomierz,
- amperomierz,
- przewody z końcówkami umożliwiającymi wykonanie połączeń elektrycznych.

Wyznacz w możliwie najszerszym zakresie:
- zależność oporu żaróweczki od wielkości przyłożonego napięcia – $R(U)$;
- zależność oporu żaróweczki od wielkości płynącego przez nią prądu – $R(I)$.

Zinterpretuj wyniki i zaproponuj wyjaśnienie kształtu otrzymanej zależności $R(I)$.

Uwaga: Ze względu na mały opór żaróweczki zwróć uwagę na dokładne łączenie obwodu oraz na poprawne podłączenie woltomierza i amperomierza. Do łączenia elementów układu możesz wykorzystać standardowe złącza elektryczne, tzw. kostki.

ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY FIZYCZNEJ

KOOF w Białymstoku, ul. Lipowa 41, 15-224 Białystok (woj. podlaskie, powiaty: kętrzyński, mrągowski, piski, giżycki, olecko-gołdapski, ełcki).

KOOF w Częstochowie, Al. Armii Krajowej 13/15, 42-201 Częstochowa (woj. opolskie, woj. świętokrzyskie, powiaty: częstochowski, kłobucki, lubliniecki, myszkowski).

KOOF w Gdańsku, ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk-Wrzeszcz (woj. pomorskie, woj. warmińsko-mazurskie z wyłączeniem powiatów: kętrzyńskiego, mrągowskiego, piskiego, giżyckiego, olecko-gołdapskiego, ełckiego).

KOOF w Gliwicach, ul. Bolesława Krzywoustego 2, 44-100 Gliwice (woj. katowickie z wyłączeniem powiatów: częstochowskiego, kłobuckiego, lublinieckiego, myszkowskiego).

KOOF w Krakowie, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków (woj. małopolskie).

KOOF w Lublinie, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin (woj. lubelskie).

KOOF w Łodzi, ul. Pomorska 149, 90-236 Łódź (woj. łódzkie).

KOOF w Poznaniu, ul. Umultowska 85, 60-780 Poznań (woj. wielkopolskie).

KOOF w Rzeszowie, ul. Reytana 16A, 35-310 Rzeszów (woj. podkarpackie).

KOOF w Szczecinie, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin (woj. zachodnio-pomorskie, woj. lubuskie).

KOOF w Toruniu, ul. Grudziądzka 5, 87-100 Toruń (woj. kujawsko-pomorskie).

KOOF w Warszawie, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa (woj. mazowieckie).

KOOF we Wrocławiu, pl. M. Borna 9, 50-205 Wrocław (woj. wrocławskie).

LI OLIMPIADA MATEMATYCZNA

ZADANIA KONKURSOWE ZAWODÓW I STOPNIA

I SERIA

1. Dana jest liczba naturalna $n \geq 3$. Udowodnić, że suma sześcianów wszystkich liczb naturalnych mniejszych od n, względnie pierwszych z n, dzieli się przez n.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC spełniony jest warunek $\angle ACB = 2\angle ABC$. Punkt D leży na boku BC, przy czym $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle ABC$. Dowieść, że
$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

3. Suma liczb dodatnich a, b, c równa jest 1. Udowodnić, że $a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1$.

4. Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z trzech kolorów. Dowieść, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia **11 października 1999 r.** *Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

II SERIA

5. Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb naturalnych, dla których liczby $a^3 + 6ab + 1$ i $b^3 + 6ab + 1$ są sześcianami liczb naturalnych.

6. Punkt X leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta ABC, w którym kąt C jest prosty. Punkty P, Q i R są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktu X na boki BC, CA i AB. Udowodnić, że równość $AR \cdot RB = BP \cdot PC + AQ \cdot QC$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt X leży na boku AB.

7. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n i dowolnej liczby $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ istnieją takie liczby $a, b \in (1999, 2000)$, że
$$\frac{1}{2}a^n + \frac{1}{2}b^n < \big(ta + (1-t)b\big)^n.$$

8. Liczby $c(n, k)$ są określone dla liczb całkowitych nieujemnych $n \geq k$ w ten sposób, że zachodzą równości:
$$c(n,0) = c(n,n) = 1 \qquad \text{dla każdej liczby } n \geq 0,$$
$$c(n{+}1,k) = 2^k c(n,k) + c(n,k{-}1) \qquad \text{dla } n \geq k \geq 1.$$
Dowieść, że $c(n,k) = c(n,n{-}k)$ dla $n \geq k \geq 0$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia **10 listopada 1999 r.** *Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

III SERIA

9. Dane są takie liczby całkowite dodatnie m i n, że $mn | m^2 + n^2 + m$. Wykazać, że m jest kwadratem liczby całkowitej.

10. W przestrzeni dane są trzy wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Niech ω będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt O, zaś A', B', C' – rzutami punktów A, B, C odpowiednio na płaszczyznę ω. Wyznaczyć zbiór wartości wyrażenia $OA'^2 + OB'^2 + OC'^2$ dla wszystkich płaszczyzn ω.

11. Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz zbiór M, złożony z $n^2{+}1$ liczb całkowitych dodatnich i mający następującą własność: wśród $n{+}1$ liczb dowolnie wybranych ze zbioru M znajduje się para liczb, z których jedna dzieli się przez drugą. Udowodnić, że w zbiorze M istnieją różne liczby $a_1, \ldots, a_{n+1}$ spełniające warunek: dla $i = 1, \ldots, n$ liczba a_i dzieli się przez a_{i+1}.

12. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Okręgi opisane na trójkątach AEF, BFD, CDE przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że jeżeli
$$\frac{PD}{PE} = \frac{BD}{AE}, \qquad \frac{PE}{PF} = \frac{CE}{BF}, \qquad \frac{PF}{PD} = \frac{AF}{CD},$$
to AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ABC.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia **10 grudnia 1999 r.** *Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

Olimpiada matematyczna wkracza w tym roku szkolnym w drugą połowę pierwszej setki swoich edycji. Z grubsza biorąc, oznacza to, że lada chwila będą w niej mogły startować wnuki pierwszych uczestników. Trochę w tym przenośni, a trochę własnych doświadczeń, bowiem z perspektywy warszawskiego komitetu okręgowego olimpiady widać wyraźnie, że impreza jest rodzinna: w kolejnych latach wypada nam sprawdzać (między innymi) prace dzieci naszych bliższych i dalszych kolegów po fachu. Dzieje się to na tyle często, że teza o rodzinnym charakterze olimpiady nie wydaje się całkowicie bezsensowna.

W mojej własnej szkole średniej, wtedy, gdy do niej chodziłem, obyczaj startowania w olimpiadzie nie był rozpowszechniony. Ot, zadania pierwszego etapu wisiały sobie cichutko i skromnie w jednej z szarych gablotek na jednym ze szkolnych korytarzy, a nam wpajano, że przede wszystkim mamy zdać na studia, najlepiej politechniczne (czytaj: nauczyć się rozwiązywać kilkanaście rodzajów typowych zadań, i przećwiczyć tę umiejętność na materiale z tego czy innego znanego zbioru). Zmagania z trudnymi i nietypowymi zadaniami z szarej gablotki cieszyły się znacznie mniejszym powodzeniem, niż inne dostępne licealistom ekstrawagancje.

Olimpiadę poznałem później, najpierw z opowieści kolegów na studiach, a potem niejako z drugiej strony barykady (choć to niedobre słowo, bo olimpiada zaciera różnice wieku i doświadczenia). Widziałem przygodę, pasję i zrodzone na wiele lat przyjaźnie – i trochę mi dziś żal, że sam w olimpiadzie nie startowałem. Jeśli więc, drogi Czytelniku, jesteś w takim wieku, że możesz jeszcze wybierać, zachęcam Cię: spróbuj. Nie czekaj, aż w olimpiadzie wystartują Twoje dzieci.

P.S.

ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Dla województwa pomorskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa śląskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

Dla województwa małopolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 223, 20-031 Lublin.

Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa wielkopolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Matejki 48/49, 60-769 Poznań.

Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

XLIII OLIMPIADA ASTRONOMICZNA

INFORMACJE REGULAMINOWE

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół średnich.

2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne. Rozwiązywanie zadań zawodów II stopnia i III stopnia odbywa się w warunkach kontrolowanej samodzielności.

3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, do **12 października 1999 r.**, rozwiązania 3 zadań, dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.

4. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, do **16 listopada br.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.

5. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu, do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).

6. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem: **KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY ASTRONOMICZNEJ, Planetarium Śląskie, 41-500 Chorzów, skr. poczt. 10**, w terminach podanych w p. 3 i 4. Decyduje data stempla pocztowego.

7. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.

8. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A-4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: rok i miejsce urodzenia, pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi).

9. O uprawnieniach laureatów i finalistów decydują senaty wyższych uczelni. Wśród nagród dla najlepszych znajdują się teleskopy.

ZALECANA LITERATURA: obowiązujące w szkołach średnich podręczniki do przedmiotów ścisłych; H. Chrupała, M.T. Szczepański *25 lat olimpiad astronomicznych; Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach); H. Chrupała, J. Kreiner, M. Szczepański *Zadania z astronomii z rozwiązaniami*; J.M. Kreiner *Astronomia z astrofizyką*; J. Mietelski *Astronomia w geografii*; E. Rybka *Astronomia ogólna*; David H. Levy *NIEBO – Poradnik użytkownika*; D.L. Moché *Astronomia – Przewodnik po Wszechświecie*; *Słownik szkolny – Astronomia* – praca zbiorowa; atlas nieba; obrotowa mapa nieba; czasopisma: *Urania – Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie*, *Świat Nauki*, *Delta*, *Fizyka w Szkole*.

PIERWSZA SERIA ZADAŃ

1. O trzech różnych parach gwiazd wiadomo, że:
a) moc promieniowania jednej gwiazdy jest milion razy większa, a jej promień tysiąc razy większy od drugiej;
b) temperatura efektywna jednej gwiazdy jest dwukrotnie wyższa, a jej moc promieniowania szesnastokrotnie większa od drugiej;
c) obydwie gwiazdy są tego samego typu widmowego i mają jednakowe moce promieniowania.
Jakie można by podać dodatkowe relacje dotyczące cech fizycznych danej pary gwiazd?

2. W dniu równonocy wiosennej, o godzinie 23.00 lokalnego czasu prawdziwego słonecznego, satelita geostacjonarny był obserwowany w południku w miejscowości o szerokości geograficznej $\varphi = 50^\circ$. Na tle jakiego gwiazdozbioru był on wtedy widoczny?

3. W odległości $r = 400$ Mpc od nas znajduje się gromada galaktyk o średnicy kątowej $p = 15'$. Maksymalna różnica przesunięć ku czerwieni wynosi $\Delta z = 0{,}003$, przy czym różnice te zdarzają się między galaktykami położonymi na całym obszarze sfery niebieskiej zajmowanym przez tę gromadę. Określ kształt przestrzenny tej gromady wynikający z prawa Hubble'a i skomentuj orientację przestrzenną uzyskanej bryły, wiedząc, że jest ona charakterystyczna dla większości gromad galaktyk.
Uwaga: odległość gromady określono z prawa Hubble'a, dla $H = 75$ km/(s·Mpc).

4. Na podstawie literatury opracuj temat: Metody i dotychczasowe rezultaty poszukiwania planet wokół gwiazd.

ZADANIA OBSERWACYJNE

1. Oszacuj średnią godzinną częstotliwość co najmniej dwóch znanych rojów meteorów w okolicy daty maksimum aktywności danego roju.

2. Wyznacz moment zachodu Słońca rozumiany jako moment styczności górnego brzegu tarczy Słońca z linią horyzontu.

3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji astronomicznych prowadzonych w latach 1998, 1999, a w szczególności z obserwacji zaćmienia Słońca w dniu 11 sierpnia 1999 r.

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. W przypadku zastosowania metody fotograficznej należy dołączyć negatyw. Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 16 listopada 1999 r.