

SPIS TREŚCI NUMERU 6(313)

Bęben <i>Anna Zatorska</i>	str. 1
Determinizm, chaos i fraktale <i>Grzegorz Świątek</i>	str. 2
Zadania	str. 5
Hipoteza <i>abc</i> <i>rozmowa z Jerzym Browkinem</i>	str. 6
Hipoteza <i>abcd</i>	str. 7
Liczby jedynekowe <i>Witold Bednarek</i>	str. 8
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str. 9
Mała Delta	str.10
Ankieta	str.11
Pole pod cykloidą <i>Marek Kordos</i>	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Czerwiec	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:

Prawdopodobieństwo, informacja
 i zasady nieoznaczoności

Okładki i ilustracje
Anna Ludwicka

Rysunki techniczne
Marcin Adamski

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:	Redaguje kolegium w składzie:
Andrzej Białynicki-Birula	Wiktor Bartol
Bogdan Cichocki	Krzysztof Biesaga
– wiceprzewodniczący	Ewa Czuchry
Krzysztof Ciesielski	Krzysztof Kordos – sekr. red.
Jan A. Gaj	Marek Kordos – red. nac.
Piotr Goldstein	Tomasz Kwast
Tomasz Hofmokr	Anna Ludwicka
Andrzej Hryniewicz	Anna Rudnik
Wiesław A. Kamiński	Witold Sadowski
Marta Kicińska-Habior	Joanna Udalska
Krzysztof Maślanka	Anna Wojtyra
Janusz Matkowski	Piotr Zalewski – z-ca red. nac.
Andrzej Mąkowski	
Zdzisław Pogoda	Adres Redakcji:
Michał Różycka	ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
Konrad Rudnicki	tel. 853-59-61
Grzegorz Sitarski	BARTOL@MIMUW.EDU.PL
Andrzej Woszczyk	Skład systemem T _E X wykonała Redakcja.
Eligiusz Złotkiewicz	Wydrukowano
Wiesław Żelazko – przewodniczący	w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
	w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2000 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2000 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

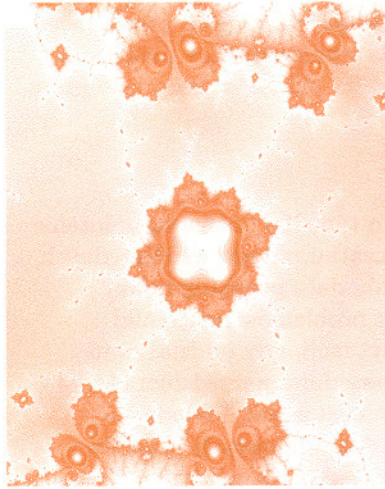
Konto AMOS-u: PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na IV kwartał 2000 r. wynosi 9 zł.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaką”.
- Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
- Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.
- Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.



Słyszac dźwięk, potrafimy bardzo często określić, jakie jest jego źródło. Z łatwością rozpoznajemy brzmienie perkusji, pianina czy kontrabas. Gdy dzwonią do nas przyjaciele, rozpoznajemy ich po głosie. Czy jednak w dźwiękach zawarta jest „cała” informacja o ich źródłach? Jakie własności źródeł dadzą się usłyszeć?

Zanim zajmiemy się tymi pytaniami, poznamy nieco bliżej świat dźwięków. Większość z nich składa się z szeregu drgań o różnych częstotliwościach. Częstotliwości te tworzą tzw. spektrum dźwięku. Drgania składowe nazywamy tonami czystymi lub alikwotami. Jeżeli wśród tych czystych tonów jeden wyróżnia się natężeniem, to możemy określić tzw. wysokość dźwięku, tzn. nasze ucho (a w zasadzie mózg) jest w stanie wyodrębnić częstotliwość tego wyróżniającego się drgania (częstotliwość podstawową). Natomiast skład pozostałych alikwotów i ich natężenia decydują o tym, jaką dźwięk ma barwę. Czystych tonów jest nieskończenie wiele, ale tylko część mieści się w naszym zakresie słyszalności.

To, jakie alikwoty są generowane, zależy od rodzaju ciała drgającego oraz od otoczenia, np. pudło rezonansowe może wzmacniać jedno, a wygaszać inne alikwoty. Stąd ten sam dźwięk (tzn. o ustalonej częstotliwości podstawowej) brzmi inaczej, gdy wydawany jest przez flet prosty i inaczej, gdy przez fortepian.

Niektóre ciała, np. bębny, powodują takie drgania, w których nie można wyróżnić tej jednej podstawowej częstotliwości, nie można więc określić wysokości wydawanego przez nie dźwięku. Inne, np. dzwony, wydają taki dźwięk, w którym częstotliwość podstawowa słabo się wyróżnia spośród innych.

Na początku naszego wieku H.A. Lorentz postawił następującą hipotezę: jeżeli znamy wszystkie generowane alikwoty, to możemy określić, jaką wielkość ma ciało, które drga. W rzeczywistości Lorentz nie interesował się falami akustycznymi, lecz falami elektromagnetycznymi powstającymi w ciele doskonale czarnym, ale ponieważ równanie falowe nadaje się do opisu wszelkich fal, więc możemy trzymać się terminologii dźwiękowej.

Hipoteza Lorentza została niedługo potem udowodniona przez Hermanna Weyla. Weyl wykazał bowiem, że zachodzi równość

$$|\Omega| = \lim_{t \rightarrow 0} 2\pi t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t},$$

gdzie λ_n to kwadraty częstotliwości odpowiadających czystym tonom, a $|\Omega|$ oznacza powierzchnię pewnego drgającego obszaru Ω na płaszczyźnie np. membrany głośnika lub bębna.

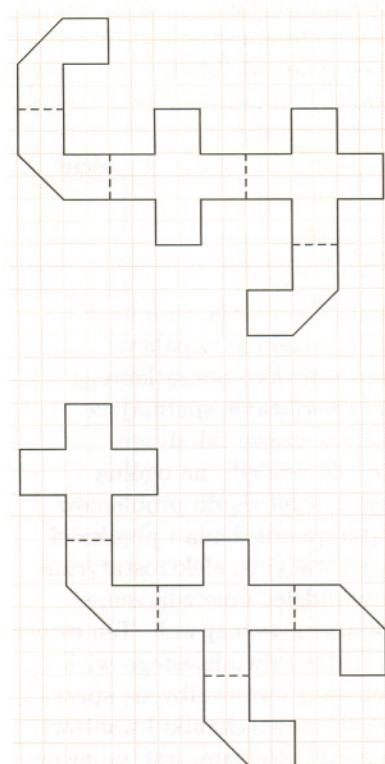
W latach 50. A. Pleijel udowodnił, że znając wszystkie alikwoty, możemy także określić obwód bębna (L)

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} 4\sqrt{2\pi t} \left(\sum_n e^{-\lambda_n t} - \frac{|\Omega|}{2\pi t} \right).$$

Zachęcony tymi sukcesami Mark Kac napisał słynną pracę „Czy można usłyszeć kształt bębna?” (np. *Wiadomości Matematyczne* 13(1971), 11–35), która nie tylko rozpowszechniła bębnową terminologię pochodzącą od Bersa, ale także dała początek licznym badaniom. Ostateczna odpowiedź na tytułowe pytanie artykułu Kaca okazała się negatywna. Na początku lat 90. podano przykład dwóch całkowicie różnych (nieizometrycznych) obszarów, które mają dokładnie to samo spektrum, czyli te same alikwoty.

Mimo negatywnego rozwiązania hipotezy Kaca pytania o to, co można jeszcze „usłyszeć” w bębnie, są nadal aktualne, np. jeżeli w membranie są jakieś dziury, to czy można określić, ile ich jest?

Na zakończenie warto dodać, że o bębnie mówiliśmy dla uproszczenia. Tak naprawdę problemy te dotyczą wszelkich drgań i różnych obszarów, gdzie te drgania zachodzą.



Nieizometryczne obszary, dające te same alikwoty. Kratka służy łatwiejszemu porównaniu tych obszarów, podobnie jak przerywane linie.

Determinizm, chaos i fraktale

Grzegorz ŚWIĄTEK

W latach 1605 i 1618 Jan Kepler opublikował swoje trzy prawa ruchu planet. Te proste reguły pozwoliły wyjaśnić ruchy planet na niebie w granicach błędu obserwacji, wieńcząc wysiłki uczonych od Arystarcha z Samos po Kopernika. W roku 1687 Izaak Newton wykazał, że postulowane przez niego prawo grawitacji powszechnej, przy założeniu, iż oddziaływania między planetami można zaniedbać, prowadzi do jednego prawa ruchu planet, wyrażonego przez równanie różniczkowe

$$(1) \quad \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = -\frac{GM\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^3},$$

które implikuje trzy prawa Keplera. W równaniu tym $\mathbf{X}(t)$ oznacza położenie planety w chwili t , Słońce z założenia jest w początku układu współrzędnych, a G i M są stałymi. Prawo powszechnego ciężenia dało początek nowej gałęzi nauki, zwanej mechaniką nieba. Jednym z problemów mechaniki nieba było przewidywanie trajektorii planet w sytuacji, gdy oddziaływań międzyplanetarnych nie można zaniedbać. Odpowiednim narzędziem okazał się tzw. rachunek zaburzeń, który wprawdzie nie dostarczał dokładnego rozwiązania, ale pozwalał wyznaczyć ciąg coraz dokładniejszych przybliżeń orbity. Rachunek zaburzeń odniósł spektakularny sukces w roku 1846, kiedy to obliczenia oparte na anomaliach ruchu Urana pozwoliły na dokładne przewidzenie położenia na niebie nieznanego uprzednio planety – Neptuna. Osiągnięcia te doprowadziły do umocnienia się poglądu zwanego *klasycznym determinizmem*. Głosi on, że znajomość praw ruchu i stanu układu w chwili początkowej pozwala na przewidzenie jego przyszłości. Matematycznym wyrazem determinizmu jest równanie różniczkowe. Jeśli \mathbf{y} jest zależnym od czasu wektorem w przestrzeni \mathbb{R}^n , to równanie różniczkowe ma ogólną postać

$$(2) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = F(\mathbf{y}, t).$$

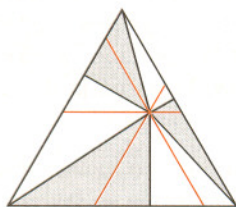
To jedno równanie wektorowe oznacza układ n równań skalarnych. Aby zapisać w tej formie równanie (1), musimy użyć wektora \mathbf{y} o sześciu składowych, z których pierwsze trzy są składowymi \mathbf{X} , trzy następne zaś składowymi wektora prędkości $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$. Ta, w tym przypadku sześciowymiarowa, przestrzeń wektorów \mathbf{y} jest zwana *przestrzenią fazową* układu, w odróżnieniu od trójwymiarowej *przestrzeni konfiguracyjnej* wektorów x . Dla przykładu, dwa spośród sześciu otrzymanych w ten sposób równań skalarnych mają postać

$$\frac{dy_1}{dt} = y_4 \quad \text{oraz} \quad \frac{dy_4}{dt} = -\frac{GM y_1}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{3/2}}.$$

Odpowiednie twierdzenia teorii równań różniczkowych orzekają, że o ile F jest „rozsadną” funkcją, na przykład mającą ciągle pochodne cząstkowe względem wszystkich argumentów, to przy zadaniu warunku początkowego $\mathbf{y}(t_0)$ w dziedzinie funkcji F istnieje jednoznaczne rozwiązanie spełniające ten warunek, które można przedłużać w obie strony w czasie tak długo, jak pary $(\mathbf{y}(t), t)$ pozostają w dziedzinie funkcji F . Ze względu na ogólną postać równania (2) klasyczny determinizm nie ograniczył się do problemów z mechaniki nieba. Sądzono, że gdyby znać początkowe położenia i prędkości wszystkich atomów i uwzględnić oddziaływania grawitacyjne, elektromagnetyczne i magnetyczne między nimi, można by również przewidzieć inne zdarzenia, włącznie z działaniami ludzkimi pozornie podlegającymi wolnej woli. Ten ostatni pogląd nie budzi sympatii w świetle doświadczeń historii dwudziestego wieku. Z drugiej strony, ogromny postęp techniki obliczeniowej wydawałby się sprzyjać celom klasycznego determinizmu. Jego krytyka ze strony mechaniki kwantowej, znajdująca swój wyraz w polemice między Bohrem i Einsteinem, jest zapewne wielu Czytelnikom znana. Nie dotyczy ona jednak, jak się wydaje, mechaniki nieba, ponieważ efekty kwantowe dotyczą małych mas i odległości. Mniej znany jest atak na klasyczny determinizm ze strony czysto matematycznej. Zanim przedyskutuję tę krytykę, chciałbym wspomnieć epizod z mojego dzieciństwa.



Rozwiązanie zadania M 919.
Rozważany trójkąt rozcinaamy trzema prostymi równoległymi do boków trójkąta i przechodzącymi przez wybrany punkt.



Otrzymamy w ten sposób trzy trójkąty równoboczne i trzy równoległoboki. Każda z tych sześciu figur zawiera część zacieniowaną o polu równym części niezacieniowanej.

W latach siedemdziesiątych w ramach programu Apollo został przeprowadzony eksperyment: człon rakiety zrzucono na powierzchnię Księżyca. Wywołało to wielki niepokój mojej Babci, która obawiała się zaburzenia porządku niebios i końca świata. Jak będę się starał wykazać w tym artykule, obawy te nie były nierozsądne.

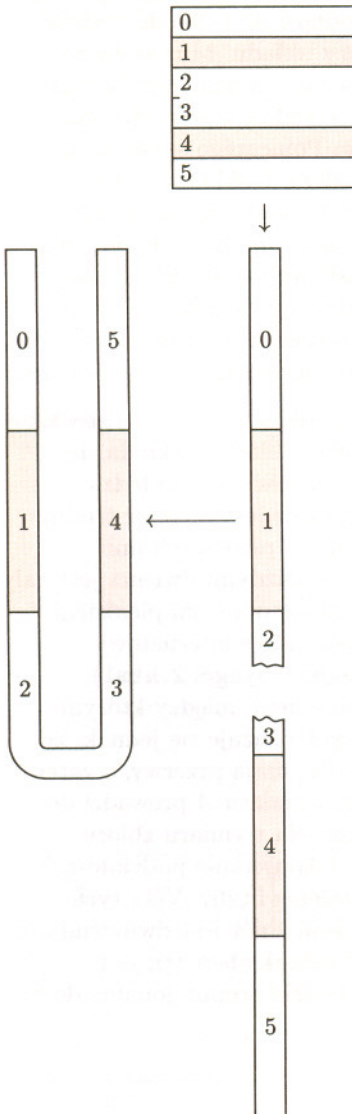
W latach 1889–1899 francuski matematyk, Henri Poincaré, opublikował wyniki swoich badań nad mechaniką nieba. Postawił on tak zwany problem trzech ciał, to jest trzech mas punktowych oddziałujących grawitacyjnie w myśl zasad klasycznej mechaniki Newtona. Jest to więc minimalne uogólnienie problemu dwóch ciał, rozwiązane przez Keplera i Newtona. Zagadnienie trzech ciał prowadzi do równania różniczkowego w osiemnastowym wymiarowej przestrzeni fazowej. Równanie to ma rozwiązanie jednoznaczne przy zadaniu warunków początkowych. Poincaré zauważył jednak, że rozwiązanie to jest niemożliwe do otrzymania nawet w przybliżeniu. Próba użycia rachunku zaburzeń doprowadziła go do odkrycia, że ciąg przybliżeń jest rozbieżny już dla niewielkich czasów. Nie ma też nadziei na odgadnięcie „wzoru” na rozwiązanie, bowiem Poincaré wykazał, iż rozwiązanie nie rozwija się w szereg potęgowy. Jedyna szansa może leżeć w numerycznym rozwiązywaniu równania. Opcja ta jest bardziej atrakcyjna dla nas, mających do dyspozycji potężne komputery, niż była dla Poincarégo. Bliższa analiza ukazuje jednak, że takie numeryczne rozwiązania mogą być bardzo dalekie od dokładnych.

Aby zrozumieć to zjawisko, przemyśmy dokładniej mały wycinek pracy Poincarégo, polegający na analizie zaburzeń rozwiązań okresowych. Na przykład orbita Ziemi nie jest dokładnie okresowa, ale mogą istnieć orbity okresowe zbliżone do niej. Dla zrozumienia takich zaburzonych orbit Poincaré przeciął wyjściową orbitę okresową ω prostopadłą do niej hiperpłaszczyzną P . Ta hiperpłaszczyzna może przecinać orbitę ω w kilku punktach; wybierzmy jeden z nich, O . Rozpatrzmy orbitę bliską ω , która z reguły nie jest już okresowa, i przecina P w punkcie X bliskim O . Po czasie bliskim okresowi ω orbita ta znów przetnie P w punkcie bliskim O , który oznaczamy przez $H(X)$. Otrzymujemy w ten sposób przekształcenie H z punktem stałym O . Badanie kolejnych powrotów orbit do P sprowadza się do *iterowania* H , tj. składania go z samym sobą. Poincaré zauważył, że iteracje H mogą prowadzić do niezwykle skomplikowanych zachowań. W szczególności, można w dziedzinie H znaleźć obszar, który jest przez H ściśnięty w pewnych kierunkach, rozciągnięty w innych, zgięty i odwzorowany tak, że jego obraz przecina wyjściowy obszar. Uproszczoną ilustracją H na takiej poddziedzinie jest *podkowa Smale'a* pokazana na rysunku.

Przekształcenie H jest tu obcięte do kwadratu jednostkowego, który jest odwzorowany w płaszczyznę tak, iż górny pasek poziomy przechodzi afinicznie na lewy pasek pionowy, dolny pasek poziomy zaś na prawy pasek pionowy. Zapiszmy współrzędne punktu X w układzie szóstkowym, jako $(0, v_1 v_2 \dots, 0, h_1 h_2 \dots)$. Jeśli X jest taki, że $H(X)$ jest znów w kwadracie, to h_1 równe jest 1 lub 4. Przekształcenie H jest określone tak, że jeśli $h_1 = 1$, to $H(X) = (0, 1 v_1 h_2 \dots, 0, h_2 h_3 \dots)$, gdy natomiast $h_1 = 4$, to

$$H(X) = (1, 1) - (0, 1 v_1 v_2 \dots, 0, h_2 h_3 \dots).$$

O ile $H(X)$ jest znów w kwadracie, to możemy dalej stosować H . Ta procedura nazywa się *iterowaniem* H i jest możliwa tak długo, dopóki obrazy punktu pozostają w dziedzinie, tj. w kwadracie. Chcąc przewidywać przyszłość punktu X pod działaniem kolejnych iteracji H , musimy znać kolejne cyfry h_n . Pomiar położenia X z dokładnością do 10^{-20} , co odpowiada skali molekularnej w odniesieniu do odległości między planetami, daje 26 cyfr szóstkowych ($20 / \log_{10} 6$). Aby przewidzieć przyszłość na tysiąc iteracji, trzeba by znać X z błędem nie przekraczającym 10^{-700} . Zakładając znajomość początkowego położenia X z dokładnością do 10^{-20} , spróbujmy przewidzieć, czy obrazy jego pozostaną w kwadracie przez 30 iteracji.



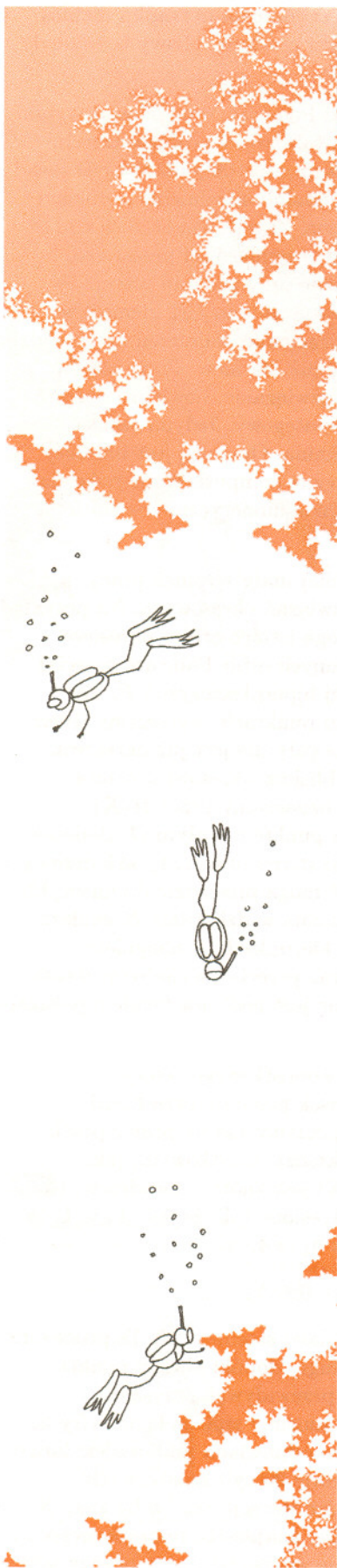
Być może nasza znajomość pierwszych 26 cyfr wykaże, iż któraś z nich jest inna niż 1 lub 4. Wówczas możemy odpowiedzieć, że nie. Jeśli jednak taka analiza wykaże, że punkt pozostaje w kwadracie przez 26 iteracji, to prognozę postawić możemy tylko w terminach prawdopodobieństwa. Każda z następujących czterech cyfr jest 1 lub 4 z prawdopodobieństwem $1/3$, a zatem punkt pozostanie w kwadracie przez kolejne cztery iteracje z prawdopodobieństwem $(1/3)^4$. W ten sposób podkowa Smale'a, która z jednej strony jest prostym układem deterministycznym, poza krótkimi czasami zachowuje się w sposób losowy. Deterministyczne wnioskowanie zakłada niemożliwą w praktyce idealną znajomość warunków początkowych, przy skończonej zaś, choćby ogromnej, dokładności już dla stosunkowo niewielkich czasów zachowanie układu daje się najlepiej opisać jako losowe. Układy tego typu zwane są *chaotycznymi*.

Powtórzmy jeszcze raz, że problem trzech ciał zawiera w sobie podkwy Smale'a jako niewielkie wycinki. Właściwie zawiera ich nieliniowe i wyżej wymiarowe wersje, co oczywiście tylko powiększa chaotyczność układu. Poza tym, w rozwiązywaniu problemów mechaniki nieba niewielkie błędy wypływają nie tylko z ograniczonej dokładności ustalenia warunków początkowych, lecz również z błędów arytmetyki komputera oraz zaniedbania efektów oddziaływań sąsiednich gwiazd, a nawet działań ludzkich w rodzaju tych, które niepokoiły Babcie. Czy może istotnie dojść do wielkiej katastrofy w rodzaju zderzenia dwóch planet lub wyrzucenia jednej z nich poza Układ Słoneczny? Dowód oparty o mechanikę nieba byłby bardzo trudny. W chwili obecnej matematycy skłaniają się do poglądu, że takich katastrof w długiej perspektywie czasowej należy oczekiwać. Pogląd przeciwny, stabilność Układu Słonecznego, głosiłby, że cała nieprzewidywalność, o której mówiliśmy, odnosi się tylko do ruchów w ograniczonej skali i nie zaburza ogólnej struktury układu. Musiałoby to być spowodowane przez jakiś nieznaną jeszcze mechanizm samoregulacyjny. Teoria nie dostarcza rozstrzygającego argumentu w żadną stronę. Natomiast orbit obliczonych na komputerach dotyczy krytyka Poincarégo sugerująca, iż są one obarczone nie dającym się oszacować błędem. Dokładniej, dla stosunkowo krótkich czasów błąd daje się oszacować, ponieważ komputer może wyznaczać wiązkę rozwiązań, wśród których na pewno znajduje się prawdziwe. Tego typu obliczenia sugerują, że do wielkiej katastrofy nie dojdzie w ciągu paru najbliższych milionów lat. Nieuchronnie jednak, i niezależnie od mocy komputera, przy przedłużaniu rozwiązania w przyszłość wiązka taka w tempie wykładniczym się rozszerza i w końcu przestaje być użyteczna jako prognoza.

Przedyskutujmy na koniec geometryczne aspekty podkwy Smale'a. Rozważmy zbiór punktów A , które nigdy nie opuszczą podkwy. Zbiór ten składa się z punktów, których współrzędna pionowa może być zapisana w układzie szóstkowym przy użyciu tylko cyfr 1 i 4. Geometrycznie jest to zbiór trudny do przedstawienia, składający się z nieskończenie wielu pionowych linii. Pomimo iż linii tych jest nieskończenie wiele, między każdymi dwiema jest cały pasek rozłączny z A . Nasuwa się tu analogia ze znanym obrazem pierścieni Saturna (zainteresowany Czytelnik może zajrzeć pod adres internetowy <http://ringmaster.arc.nasa.gov/saturn/voyager/voyager2.html>). Pierścienie te nie są jednolite: składają się z podpierścieni, między którymi są przerwy. W miarę rozwoju technik obserwacyjnych okazuje się jednak, że nawet te podpierścienie, które wydawały się jednolite, mają przerwy, a zatem ich struktura przypomina zbiór A . Próba ustalenia wymiaru A prowadzi do ciekawego rezultatu. Jednym ze sposobów zdefiniowania wymiaru zbioru, powiedzmy zawartego w kwadracie o boku a , jest dokonywanie podziałów tego kwadratu na małe kwadraty o boku a/k i ustalenie liczby $N(k)$ tych kwadratów, które przecinają niepusto nasz zbiór. Jeśli zbiór jest dwuwymiarowy, $N(k)$ powinno być w stałej proporcji do k^2 . Jeżeli jednak zbiór ten jest jednowymiarową krzywą, to oczekujemy, że $N(k)$ będzie proporcjonalne do k . Liczba

$$(3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(k)}{\log k},$$

o ile istnieje, ma więc interpretację wymiaru zbioru. Zastosujmy tę metodę do





ustalenia wymiaru zbioru A z podkwoy Smale'a, przyjmując $k = 6^j$. Wówczas $N(k) = 2^j 6^j = 12^j$. Wskazuje to na wymiar $\log 12^j / \log 6^j = \log 12 / \log 6 = 1 + \log_6 2$. Nieco bardziej wyrafinowane rachunki wykazują, że granica (3) faktycznie istnieje. Wymiar jest zawarty między 1 a 2, co odpowiada temu, że zbiór A jest za mały jak na dwa wymiary, lecz za duży na jeden. Zbiory o wymiarze różnym od liczby całkowitej zwane są *fraktalami*. Fraktale mają często własność samopodobieństwa polegającą na tym, że ich wycinki w dowolnie małych skalach po powiększeniu są podobne do całego zbioru. Ma tę własność zbiór A , w którym deseń, składający się z linii i dziur, powtarza się we wszystkich skalach. Współczesny matematyk, Benoit Mandelbrot, znajduje fraktale w wielu zjawiskach naturalnych i modelach matematycznych. Wspomniałem, na przykład, o analogii z pierścieniami Saturna. Wyjaśnieniem powszechnej obecności fraktali może być fakt, że są one generowane przez chaotyczne układy dynamiczne. Być może są to spekulacje. Niewątpliwie jednak popularyzacja fraktali przyczyniła się do lepszego zrozumienia teorii układów dynamicznych przez naukowców z innych dziedzin, jak i przez szersze kręgi społeczeństwa. Efektowne obrazy fraktali generowanych przez nieliniowe chaotyczne układy dynamiczne można znaleźć w Internecie pod adresem <http://www.cnam.fr/fractals/mandel11.html>.



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 919. Wewnątrz trójkąta równobocznego wybrano pewien punkt, a następnie połączono go z wierzchołkami trójkąta oraz jego rzutami na boki trójkąta (rys. 1). Wykazać, że suma pól zacieniowanych trójkątów równa jest sumie pól niezacieniowanych trójkątów.

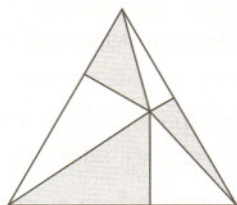
Rozwiązanie na str. 2

M 920. Przez punkt wewnętrzny kwadratu poprowadzono proste równoległe do jego boków i przekątnych (rys. 2). Wykazać, że suma pól figur zacieniowanych jest równa sumie pól figur niezacieniowanych.

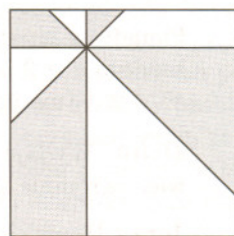
Rozwiązanie na str. 6

M 921. W trapezie równoramiennym poprowadzono przekątne oraz wysokości z wierzchołków górnej podstawy (mniejszej, rys. 3). Wykazać, że suma pól trójkątów szarych jest równa polu pięciokąta kolorowego.

Rozwiązanie na str. 7



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Redaguje Ewa CZUCHRY

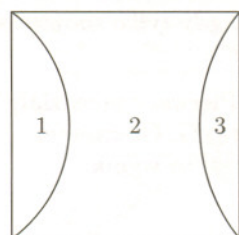
F 525. Promień krzywizny wypukłej powierzchni soczewki wynosi 100 cm, a wklęsłej 20 cm. Czy jest to soczewka skupiająca czy rozpraszająca?

Współczynnik załamania materiału soczewki wynosi 1,6.

Rozwiązanie na str. 8

F 526. Z płytki szklanej płasko-równoległej wykonano trzy soczewki (rys. 4). Okazało się, że ogniskowa soczewek 1 i 2, ściśle do siebie przylegających, jest równa F , a soczewek 2 i 3 – f . Zakładając, że soczewki są cienkie, znaleźć ogniskową każdej z nich.

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 4

Hipoteza *abc*

Delta: Czy można w jednym zdaniu powiedzieć, co to jest hipoteza *abc*?

Jerzy Browkin: W jednym zdaniu może nie, ale w kilku na pewno tak. Najpierw umówmy się, że dla danej liczby naturalnej n przez $r(n)$ będziemy oznaczać iloczyn wszystkich różnych dzielników pierwszych liczby n . Jeżeli liczba n jest bardzo duża w porównaniu z liczbą $r(n)$, to nazywać ją będziemy liczbą „bardzo złożoną”. Za miarę tej złożoności możemy uznać liczbę

$$\frac{\log n}{\log r(n)}.$$

Mówiąc trochę mgliście można powiedzieć, iż hipoteza *abc* stwierdza, że jeśli c jest sumą dwóch względnie pierwszych liczb a i b , to liczba abc nie może być liczbą „bardzo złożoną”.

Delta: W praktyce stosuje się pewnie bardziej ściśle wysłowienie tego faktu...

Jerzy Browkin: Oczywiście. Oto ono: Niech a oraz b będą liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, natomiast c ich sumą, tzn.

$$\text{NWD}(a, b) = 1 \quad \text{oraz} \quad a + b = c.$$

Niech ponadto

$$L(a, b) = \frac{\log c}{\log r(abc)},$$

gdzie $r(n)$ jest określone jak wyżej. Hipoteza *abc* stwierdza, że dla każdej liczby $q > 1$ istnieje tylko skończenie wiele trójek a, b, c spełniających powyższe warunki i takich, że $L(a, b) > q$.

Delta: Czy hipoteza *abc* to tylko problem interesujący „sam w sobie”, czy też jest ona powiązana z innymi twierdzeniami?

Jerzy Browkin: Hipoteza *abc* ma wiele bardzo poważnych konsekwencji. Jest ona związana z teorią krzywych algebraicznych, a także z wieloma twierdzeniami teorii liczb, np. z Wielkim Twierdzeniem Fermata. Wynika z niej mianowicie, że istnieje tylko skończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, x, y, z spełniających warunki: $n > 3$ oraz $\text{NWD}(x, y) = 1$ i takich, że

$$x^n + y^n = z^n.$$

Wystarczy bowiem wziąć $a = x^n$, $b = y^n$ oraz $c = z^n$ i zauważyć, że

$$L(a, b) = \frac{n \log z}{\log r(xyz)} > \frac{n \log z}{\log(z^3)} = \frac{n}{3} \geq \frac{4}{3}.$$

Ponadto z hipotezy *abc* wynika – jak dowiódł J.H. Silverman – że dla każdego $a \geq 2$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p , że $a^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

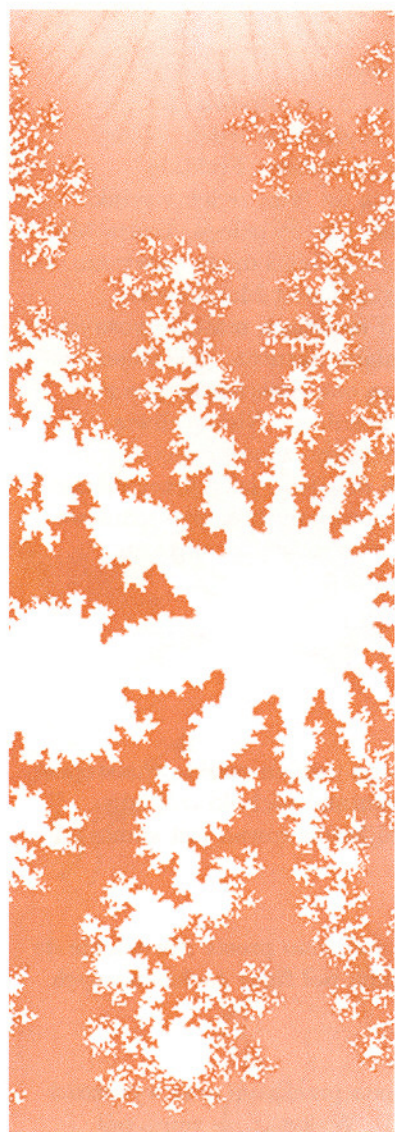
Delta: Wydaje się zatem, że hipoteza *abc* jest bardzo silna. Jej dowód może być więc ogromnie trudny. Co do tej pory udało się osiągnąć?

Jerzy Browkin: Wiemy na przykład, że w każdym otoczeniu dowolnego punktu z przedziału $[\frac{1}{3}, \frac{36}{37}]$ znajduje się nieskończenie wiele wartości $L(a, b)$ dla różnych trójek a, b, c , spełniających podane wcześniej założenia. Oczywiście dążymy do tego, by wykazać, że przedział takich punktów jest równy $[\frac{1}{3}, 1]$, ale obecnie nie wiemy nawet, czy sama liczba 1 ma rozważaną tu własność.

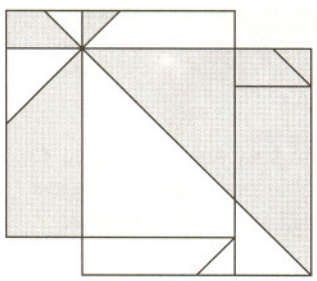
Delta: Wartość $\frac{1}{3}$ jest dość oczywista w tym kontekście, gdy tylko spojrzysz na definicję $L(a, b)$. Wartość $\frac{36}{37}$ jest już bardziej zagadkowa...

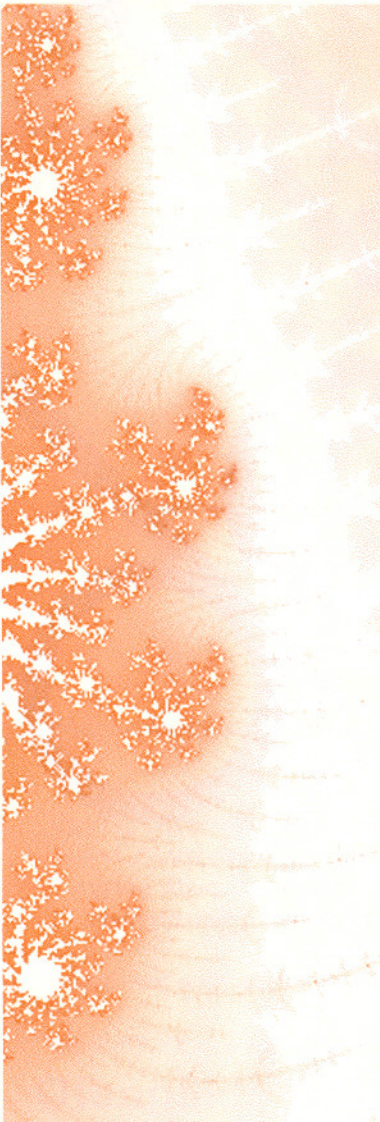
Jerzy Browkin: To po prostu kolejny etap „wyścigu”. Pierwszy przedział, jaki uzyskano, był równy $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. Potem wraz z M. Filasetą, G. Greavesem i A. Schinzlem poprawiliśmy go do $[\frac{1}{3}, \frac{15}{16}]$. Przedział $[\frac{1}{3}, \frac{36}{37}]$ to wynik G. Greavesa i A. Nitaja.

Delta: Z hipotezy *abc* wynika, że istnieje największa wartość $L(a, b)$ dla a, b określonych wyżej. Czy wartość ta jest znana?



Rozwiązanie zadania M 920.
Rysunek pokazuje, jak z rozważanych części kwadratu złożyć na nowo kwadrat tak, by rozważana równość pól stała się oczywista.





Jerzy Browkin: Istnieje hipoteza, że jest ona mniejsza od 2. Nadal jest to jednak tylko hipoteza. Największa znana obecnie wartość $L(a, b)$ dla liczb a i b względnie pierwszych wynosi 1,629912... dla $a = 2$, $b = 3^9 \cdot 109$, $c = 23^5$. Znalazł ją Eric Reyssat.

Delta: Czy do poszukiwania takich ekstremalnych wartości $L(a, b)$ wystarcza kartka papieru, czy też konieczne są „superkomputery”?

Jerzy Browkin: Jeszcze niedawno wystarczał... kalkulator. Obecnie używa się już raczej „superkomputerów”.

Delta: Dziękuję za rozmowę.

Rozmawiał W.S.

Hipoteza $abcd$

Niech a, b, c, d będą takimi liczbami całkowitymi różnymi od zera, że

$$NWD(a, b, c, d) = 1, \quad |abcd| > 1, \quad a + b + c + d = 0$$

oraz każda podsuma sumy $a + b + c + d$ jest różna od zera.

Określamy

$$L(a, b, c, d) = \frac{\log(\max(|a|, |b|, |c|, |d|))}{\log(r(abcd))},$$

gdzie $r(n)$ jak zwykle oznacza iloczyn różnych dzielników pierwszych liczby n . Hipoteza $abcd$ stwierdza, że dla każdego $q > 3$ istnieje tylko skończenie wiele takich układów (a, b, c, d) , że $L(a, b, c, d) \geq q$.

Uwaga 1. Jeżeli $a + b = c$ spełnia założenia hipotezy abc , to podnosząc do sześciastu, otrzymamy przykład dla hipotezy $abcd$

$$a^3 + b^3 - c^3 + 3abc = 0.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli liczba abc jest podzielna przez 3, to $L(a^3, b^3, c^3, 3abc) = 3L(a, b, c)$, co wyjaśnia, dlaczego w hipotezie $abcd$ mamy liczbę 3.

Uwaga 2. Hipotezy abc i $abcd$ dotyczą liczb całkowitych. Można sformułować analogiczne hipotezy dla wielomianów (jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych), zastępując logarytm liczby naturalnej przez stopień wielomianu. Otóż hipotezy abc i $abcd$ dla wielomianów zostały udowodnione – przestały więc być hipotezami, a stały się twierdzeniami.

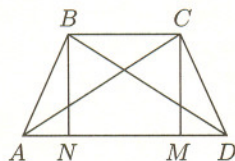
Najlepszy znany przykład dla hipotezy $abcd$ pochodzi od najlepszego przykładu znanego dla hipotezy abc , tzn. od przykładu Reyssata za pomocą podniesienia do sześciastu. W przypadku hipotezy $abcd$ nie prowadzono poszukiwań dobrych przykładów za pomocą komputerów ani bez ich pomocy. Jest to zatem pole do popisu dla Czytelników *Delty*. Inny ciekawy problem, związany z hipotezą $abcd$, to pytanie, jak ją sformułować, przy założeniu, że liczby a, b, c, d są parami względnie pierwsze. Zapewne liczba 3 nie jest w tej sytuacji odpowiednia. To również może być przedmiotem interesujących eksperymentów Czytelników.

Jerzy BROWKIN



Rozwiązanie zadania M 921.

Przy oznaczeniach z rysunku rozważmy trójkąt ACM . Jego wysokość jest równa wysokości trapezu, podstawa AM – długości środkowej trapezu, a więc pole tego trójkąta, jak również pole trójkąta BDN , jest równe połowie pola trapezu. Wynika stąd, że pole części wspólnej obu trójkątów (pięciokąt) jest równe polu figury nie pokrytej tymi trójkątami.



Rozwiązanie problemu Speedlimit z *Małej Delty*

Przypuśćmy, że wujek Zenon zbliża się do miasteczka Speedlimit z prędkością x mil na godzinę, gdy jest oddalony od Speedlimit o x mil. Kiedy znajdzie się w odległości 1 mili od miasteczka, jechać więc będzie z szybkością 1 mili na godzinę. Najbliższe pół mili pokona więc z szybkością nie większą niż 1 mila/godz., co zajmie mu nie mniej niż 0,5 mili/(1 mila/godz.) = 0,5 godziny. Połowę pozostałej drogi (czyli 0,25 mili) pokona z prędkością nie większą niż 0,5 mili na godzinę (dlaczego?), a zatem zajmie mu to nie mniej niż 0,25/0,5 = 0,5 godziny. Pokonanie połowy pozostałej części drogi znów zajmie mu nie mniej niż pół godziny itd., itd. Stąd, żeby dotrzeć do celu, potrzebować będzie nie mniej godzin niż: $1/2 + 1/2 + 1/2 + \dots = \infty$. A zatem do miasteczka Speedlimit nie można w ten sposób dojechać w skończonym czasie.

Liczby jedynekowe

Witold BEDNAREK

Liczbę naturalną, której zapis dziesiętny składa się z samych jedynek, nazywać będziemy liczbą jedynekową. Kolejne liczby jedynekowe to:

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \dots$$

Liczby jedynekowe mają ciekawe własności:

1. $\underbrace{11\dots1}_{m \text{ cyfr}}$ dzieli liczbę $\underbrace{11\dots1}_{n \text{ cyfr}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy m dzieli n .

2. $\text{NWD}(\underbrace{11\dots1}_{m \text{ cyfr}}, \underbrace{11\dots1}_{n \text{ cyfr}}) = \underbrace{11\dots1}_{\text{NWD}(m,n) \text{ cyfr}}$.

W szczególności liczby $\underbrace{11\dots1}_{m \text{ cyfr}}$ i $\underbrace{11\dots1}_{n \text{ cyfr}}$ są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy m i n są względnie pierwsze.

3. Jeśli $p > 5$ jest liczbą pierwszą, to p dzieli $\underbrace{11\dots1}_{p-1 \text{ cyfr}}$.

4. Każda liczba naturalna niepodzielna przez 2 i przez 5 ma wielokrotność będącą liczbą jedynekową.

5. Nie wiadomo, czy jakaś liczba jedynekowa większa od 1 może być potęgą liczby naturalnej (o wykładniku większym od 1). Łatwo jest wykazać, że nie może być to kwadrat; trudniej, że nie może to być trzecia ani piąta potęga. Problem, czy może to być p -ta potęga dla $p > 5$, nie został rozstrzygnięty.

6. Łatwo jest wykazać, że jeśli $\underbrace{11\dots1}_{n \text{ cyfr}}$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe (np. dla $n = 3$). Obecnie znamy następujące liczby pierwsze jedynekowe:

$$11, \underbrace{11\dots1}_{19 \text{ cyfr}}, \underbrace{11\dots1}_{23 \text{ cyfr}}, \underbrace{11\dots1}_{317 \text{ cyfr}}, \underbrace{11\dots1}_{1031 \text{ cyfr}}.$$

7. Wykażemy, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n , że n dzieli $\underbrace{11\dots1}_{n \text{ cyfr}}$.

Pokażemy indukcyjnie, że liczby $n = 3^k$ dla $k = 1, 2, 3, \dots$, spełniają postulowaną podzielność.

Dla $k = 1$, oczywiście, 3^1 dzieli 111.

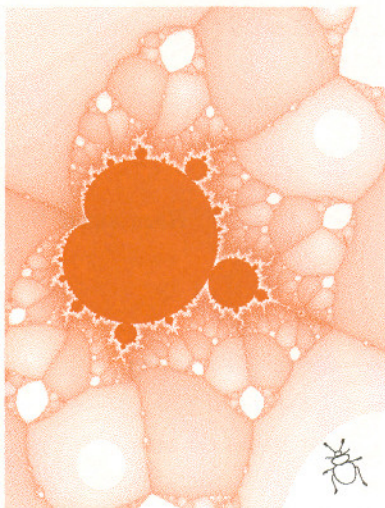
Załóżmy, że 3^k dzieli $\underbrace{11\dots1}_{3^k \text{ cyfr}}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, czyli

$$\underbrace{11\dots1}_{3^k \text{ cyfr}} = A \cdot 3^k,$$

gdzie A jest liczbą całkowitą. Zatem $\frac{10^{3^k} - 1}{9} = A \cdot 3^k$, skąd $10^{3^k} = A \cdot 3^{k+2} + 1$. Wobec tego

$$\begin{aligned} \underbrace{11\dots1}_{3^{k+1} \text{ cyfr}} &= \frac{10^{3^{k+1}} - 1}{9} = \frac{(10^{3^k})^3 - 1}{9} = \frac{(A \cdot 3^{k+2} + 1)^3 - 1}{9} = \\ &= ((A^3) \cdot (3^{2k+3}) + (A^2) \cdot (3^{k+2}) + A) \cdot 3^{k+1}, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny, gdyż liczba ujęta w nawias jest całkowita.



Rozwiązanie zadania F 525.

Aby odpowiedzieć na pytanie, czy jest to soczewka rozpraszająca czy skupiająca, wyznaczmy wartość jej zdolności skupiającej D . Dla $D > 0$ soczewka jest skupiająca, dla $D < 0$ rozpraszająca. Zdolność skupiająca wyrażona jest wzorem

$$D = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

gdzie: n – współczynnik załamania materiału, R_1, R_2 – promienie powierzchni sferycznych soczewki.

Podstawiając wartości z treści zadania, otrzymujemy

$$D \approx -2,4 \text{ dioptrii},$$

czyli soczewka jest rozpraszająca.

Co widzi DAMA?

Lato, lato, lato czeka.

Razem z latem czeka rzeka.

Razem z rzeką czeka las

– a tam ciągle nie ma nas!

*Już za parę dni, za dni parę,
weźmiesz plecak swój i gitarę.*

Pożegnania kilka słów.

Pitagoras – bywaj zdrów!

Do widzenia wam – canto, cantare! [1]

Tak, to już lada dzień! W poszukiwaniu *większego kawałka świata* [2] wyrwą się spragnione nowych wrażeń zastępy. A gdyby tak udało się odkryć jakiś nieznaną łąd, znaleźć nowy najwyższy szczyt, wytropić nieznaną nikomu zwierzę? Mówicie, że to niemożliwe? Że nie ma już białych plam na mapach? Są, są. Trzeba tylko dobrze poszukać.

Nie wiemy np., z czego składa się większa część materii Wszechświata. A wiemy, że nie wiemy, z obserwacji dynamiki coraz większych struktur kosmicznych od galaktyk po wielkie skupiska galaktyk. Im większa struktura, tym większa dysproporcja między efektami grawitacji a widocznymi źródłami siły przyciągania. Niewidocznej, tzw. ciemnej materii (ang. *dark matter*), musi być dużo więcej niż tej świecącej. Jednym z pomysłów na ten „większy kawałek Wszechświata” są tzw. WIMPy (ang. *Weakly Interacting Massive Particles*), czyli słabo oddziałujące masywne cząstki przewidywane np. przez modele rozszerzające model standardowy cząstek elementarnych o supersymetrię (zobacz poprzedni, specjalny numer *Delta*).

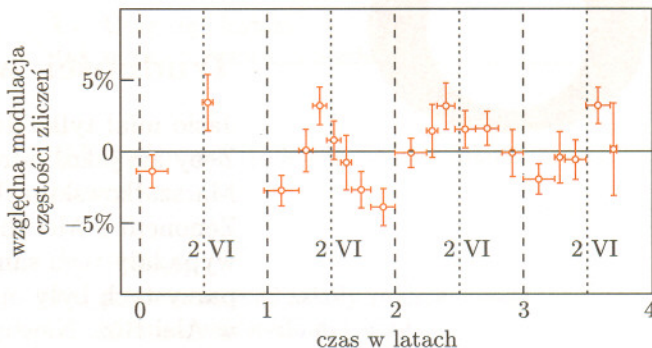
WIMPy, jeżeli istnieją, wiążą się grawitacyjnie ze strukturami kosmicznymi, tworząc wokół nich mniej lub bardziej kuliste otoczki. W jaki sposób przekonać się o ich istnieniu? Słabo oddziałujące WIMPy byłyby bardzo dobrym przykładem gazu doskonałego umieszczonego w potencjale grawitacyjnym danej struktury. Ich obecność mogłaby się manifestować w postaci „wiatru własnego” wywołanego ruchem obserwatora. Co pewien czas WIMP idealnie „trafia” w jądro atomowe (tzn. nie tylko trafia do punktu toto-lotka, ale jeszcze trafia szóstkę). Wystarczy zmierzyć energię kinetyczną uderzonego jądra, aby zarejestrować przejście WIMPU. Byłoby to takie proste, gdyby nie różnego rodzaju tło.

Naukowcy z eksperymentu DAMA (ang. *particle DARK MATter searches with low activity scintillators at Gran Sasso*) postanowili wykorzystać sezonową różnicę prędkości Ziemi wokół centrum Galaktyki w celu wyeliminowania wpływu tła. W czerwcu prędkości Ziemi wokół Słońca i Słońca wokół centrum Galaktyki sumują się, a w grudniu odejmują. W takim razie wiatr własny WIMPów, mierzony częstością zliczeń w detektorze odrzutów jąder, powinien wykazywać względną modulację o następujących cechach:

- (i) sinusoidalność,
- (ii) okres równy jednemu rokowi,

- (iii) maksimum 2 czerwca,
- (iv) względna amplituda nie przekraczająca 7%.

Dodatkowo modulacja powinna być widziana tylko dla małych energii odrzutu rzędu kilku keV (dla większych energii zmiana prędkości Ziemi byłaby zanedbywalna w stosunku do prędkości WIMPU przed zderzeniem).



Zamieszczony rysunek przedstawia wyniki z czterech lat zbierania danych za pomocą detektora zbudowanego z ultraczystych kryształów scyntylatora (jodku sodu NaI). W celu zminimalizowania tła detektor umieszczono w atmosferze ultraczystego azotu w klimatyzowanym pomieszczeniu schowanym w laboratorium w Gran Sasso we Włoszech, które ukrywa się we wnętrzu góry przebitej przez autostradę. Z samego rysunku wynika, że DAMA widzi dokładnie to, czego szuka. Szczegółowa analiza danych [3] pozwala wyznaczyć masę WIMPów na około $50 \text{ GeV}/c^2$, a istotność statystyczną wyniku na 4σ .

Czy jest to w takim razie jedno z największych odkryć fizyki? Większość specjalistów wypowiada się na ten temat z rezerwą. Z jednej strony nikomu nie udało się wskazać innego niż WIMPy wytłumaczenia opublikowanych wyników. Z drugiej jednak strony nikomu – jak na razie – nie udało się potwierdzić tej obserwacji. Jedna z konkurencyjnych grup badawczych (CDMS) twierdzi nawet, że wyklucza wynik DAMY, ale same wyniki CDMS budzą dużo więcej zastrzeżeń.

Zastrzeżenia budzi też fakt, że czułość DAMY wystarcza jedynie na zaobserwowanie WIMPów o wyjątkowych cechach. Z jednej strony muszą oddziaływać z materią na tyle silnie, żeby DAMA je widziała, a z drugiej strony na tyle słabo, aby nie zdążyły dotąd wzajemnie zanihilować. Modele przewidujące takie WIMPy istnieją, ale jeżeli akurat one odpowiadają gustom Natury, to DAMA jest wyjątkową szczęściarą.

Tak czy inaczej, choć na weryfikację zeznań DAMY trzeba będzie poczekać jeszcze kilka lat, to chyba zgodzicie się ze mną, że warto wybierać się w drogę, nawet jeżeli mamy zaledwie cień szansy na przeżycie fantastycznej przygody.

Piotr ZALEWSKI

[1] piosenka z filmu *Szatan z siódmej klasy*,

[2] Joanna Chmielewska *Większy kawałek świata*,

[3] preprint INFN/AE-00/01 dostępny przez

<http://www.lngs.infn.it>



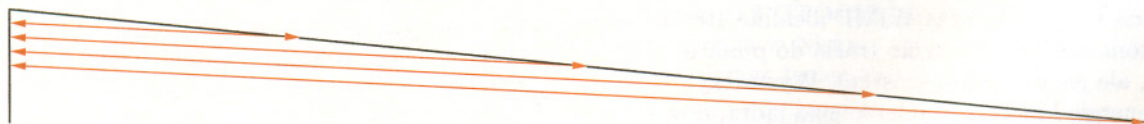
Trudności wujka Zenona

Jasio miał tylko dwóch wujków i każdy z nich miał na imię Zenon. Żeby ich jakoś odróżnić, Jasio nazywał jednego wujka Zenonem Marszałkowskim (bo mieszkał na Marszałkowskiej), a drugiego wujka Zenonem z Alei (bo mieszkał w Alei Róż). Ponieważ imieniny obu wujków wypadały tego samego dnia, więc w rodzinie przyjęto zasadę, że w latach parzystych były one obchodzone na Marszałkowskiej, a w nieparzystych w Alei Róż. Niestety, wujek Zenon z Alei zawsze się na imieniny drugiego wujka spóźniał. I zawsze miał na to wytłumaczenie.

Pierwsze wytłumaczenie, jakie Jasio pamiętał, brzmiało tak: *Szedłem sobie Kruczą, a przede mną facet z żółwiem. Myślę sobie – zaraz ich dogonię. Doszedłem do miejsca, w którym przed chwilą byli, ale w tym czasie znów się posunęli do przodu i musiałem ich znowu gonić. Znowu dotarłem do miejsca, w którym niedawno byli, a oni w tym czasie znów do przodu. No ta ja za nimi, a oni znów... I tak przez całą Kruczą. A czy wy wiecie, jak długo żółw idzie Kruczą?!*

Dwa lata później nie było na Kruczej żadnego żółwia, ale wujek Zenon z Alei znów się spóźnił. I znów się tłumaczył: *Wyszedłem sobie z domu, idę ulicą i nagle myśl – czy ja w tej chwili idę, czy stoję? No bo przecież w danej chwili muszę być w jakimś miejscu, a nie w dwóch miejscach. A skoro jestem w jednym miejscu, to stoję! Ojej – pomyślałem – to ja już nigdy nie dojdę na imieniny Zenka...*

– *Ale jakoś doszedłeś* – kwaśno rzekł Zenon Marszałkowski. – *Zawsze stwarzasz jakieś problemy! Popatrz, ciocia Klementyna mieszka na Żoliborzu, ma dziesięć razy dłuższą drogę niż twoja i nigdy się nie spóźnia. – A to dlatego, że w 10 razy dłuższym odcinku jest dwa razy mniej punktów.* – powiedział Zenon z Alei i narysował (na obrusie zresztą) taki oto rysunek



Teraz widzicie, że gdy ciocia Klementyna minie jakiś punkt, ja muszę minąć jakiś punkt mu odpowiadający. Dlatego, gdy ona jest już u was, zostaje mi jeszcze połowa drogi!

Tego roku Jasio oczekiwał, że wujek Zenon z Alei znów się spóźni i znów wymyśli jakieś usprawiedliwienie. Kiedy więc zobaczył, że wujek przyszedł punktualnie, poczuł się trochę zawiedziony. Dopiero po dwóch godzinach okazało się, że wujek Zenon znów miał trudności z przybyciem do celu. Tym razem jednak nie w Polsce, ale w... Ameryce.

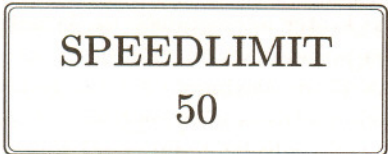
– *Pojechałem odwiedzić moją przyjaciółkę, a ona dała mi samochód, bym trochę pozwiedział. Jadę więc sobie taką szeroką drogą przez pustynię, a tu nagle widzę taki znak*

SPEEDLIMIT

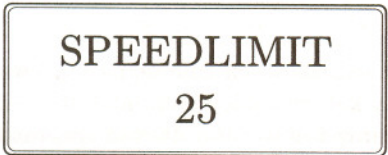
100

Szybko sięgnąłem po rozmówki i słowniczek, patrzę: „speed” – szybkość; „limit” – ograniczenie. Zwolniłem do 100 mil na godzinę, jadę dalej,

a za pół godziny znów znak



Jadę więc 50 na godzinę, a za pół godziny patrzę



Zwolniłem do 25, a potem podobne sytuacje powtarzały się kilka razy, aż w końcu musiałem jechać 5 mil na godzinę. Silnik z trudem chodził, ale jak przepisy, to przepisy. Wreszcie wyjechałem zza zakrętu, patrzę, a tu



Ledwie wujek Zenon z Alei skończył swą opowieść, niemal jednocześnie rozległy się trzy okrzyki.

5-letnia Ania spytała – *Co to znaczy?*
Ciocia Klementyna odpowiedziała – *Witajcie w Speedlimit,*

a wujek Zenon Marszałkowski wykrzyknął – *To niemożliwe! Żadne miasteczko nie może się tak nazywać!*

– *Jak ktoś nie wierzy w zółwie na Kruczej, to i w Speedlimit nie uwierzy* – filozoficznie odparł Zenon z Alei. – *Ale gdybyś na chwilę przypościł, że jest takie miasteczko, do którego zbliżasz się z prędkością x mil na godzinę, gdy jesteś od niego oddalony o x mil, to powiedz mi, proszę, jak myślisz, czy możesz do tego miasteczka dojechać?*

A Ty jak sądzisz, Czytelniku?

Paradoksy czy raczej aporie (trudności) wujek Zenon z Alei pożyczyl przede wszystkim od starożytnego filozofa Zenona z Elei. Matematycy radzą dziś sobie z trudnościami Zenona głównie za pomocą dwóch narzędzi: pojęcia granicy i teorii mnogości. Czytelnik zainteresowany bliżej tą problematyką znaleźć może wiele interesujących wiadomości w książce J. Mioduszewskiego pt. *Ciągłość*. Natomiast rozwiązanie problemu Speedlimit znajduje się w tym numerze *Delty*.

Małą Deltę przygotował Witold SADOWSKI

Ankieta dla Czytelników *Delty*

Jesteśmy bardzo ciekawi opinii naszych Czytelników – chcemy brać je pod uwagę przy redagowaniu czasopisma. Prosimy o wypełnienie ankiety, a także o rozwinięcie wypowiedzi na odrębnych kartkach.

Czytelnik o sobie:

1. Uczę się. Jestem

(a) uczniem/uczennicą szkoły

.....

(b) studentem/studentką na kierunku

.....

2. Pracuję

(a) jako nauczyciel szkoły podstawowej/
gimnazjum/średniej i uczę

.....

(b) jako pracownik naukowy i/lub dydaktyczny
lub doktorant/doktorantka na kierunku

.....

(c) poza szkołą, uczelnią i instytutem naukowym
w dziedzinie związanej bezpośrednio
z matematyką/fizyką/astronomią

.....

(d) w dziedzinie nie związanej z żadną z tych nauk

.....

3. Czytam *Delte*

(a) regularnie w prenumeracie

(b) regularnie bez prenumeraty

(c) dorywczo, ale często

(d) od przypadku do przypadku

(e) inaczej

.....

Czytelnik o *Delcie*:

4. Uważam, że artykuły w *Delcie* w większości

(a) są za trudne

(b) są za łatwe

(c) mają odpowiedni stopień trudności

(d) inaczej

.....

5. Zapamiętałem/łam następujące pozycje, które mi się spodobały (z dowolnego okresu):

(a)

.....

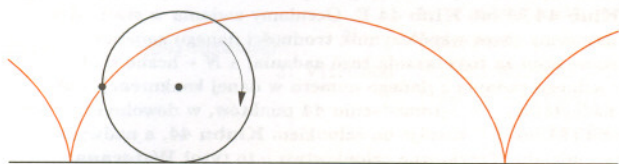
(b)

.....

(c)

.....

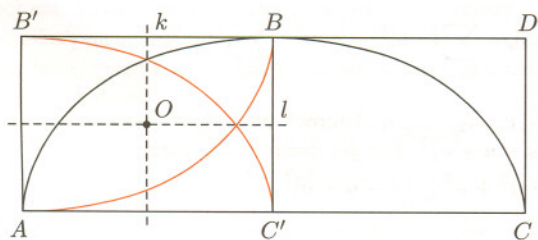
Gilles Roberval, XVII-wieczny matematyk francuski, pierwszy obliczył to pole, posługując się metodą podobną do tej, której użył Archimedes do obliczenia objętości kuli – badając przekroje – dziś tę metodę nazywa się zasadą



Rys. 1

Cavalieriego. Przypomnijmy, że cykloida to krzywa, którą zakreśla ustalony punkt okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej. Składa się ona z łuków połączonych ostrzami. Długość łuku od ostrza do ostrza jest równa $8r$, co obliczył Christiaan Huygens, a każdy może to powtórzyć, sięgając po *Małą Deltę* z numeru 11/1999: dowód jest tam zakodowany w rysunku 7.

Łuk cykloidy od ostrza do ostrza w sposób naturalny mieści się w prostokącie o wymiarach $2r \times 2\pi r$: wysokość to średnica toczącego się okręgu, a długość to długość tego okręgu. Na rysunku 2 druga połowa cykloidy została przesunięta tak, aby się znalazła nad pierwszą połową. Ponieważ prosta BC' jest osią symetrii cykloidy, więc symetria względem równoległej do niej prostej k , przechodzącej przez środek O prostokąta $AC'BB'$, nakłada łuk $B'C'$ na pierwszą połowę cykloidy. Narysujmy jeszcze jeden obraz pierwszej połowy cykloidy, tym razem w symetrii względem O . Bez trudu stwierdzamy, że jest to równocześnie obraz symetryczny łuku $B'C'$ w symetrii względem prostej l , równoległej do AC' i przechodzącej przez O (faktycznie: wykonanie symetrii względem dwu prostych prostopadłych to symetria względem ich punktu przecięcia).



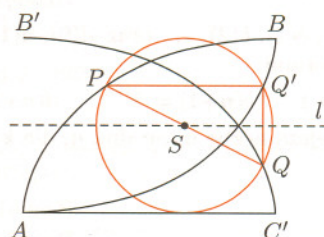
Rys. 2

Decydującym krokiem w obliczaniu pola pod cykloidą jest stwierdzenie, że pole otrzymanej soczewki AB jest równe polu koła ograniczonego przez okrąg wyznaczający cykloidę.

W tym celu dogodnie jest spojrzeć na łuk $B'C'$ w jeszcze jeden sposób – jest to krzywa, którą zakreśla antypodyczny (położony na drugim końcu średnicy) punkt do tego, który zakreśla wyjściową cykloidę.

Faktycznie – jeśli punkt P zakreśli już pierwszą połowę cykloidy, to będzie u góry, w punkcie B , i podczas dalszego toczenia zakreśli łuk BC , taki sam, jak antypodyczny punkt Q (znajdujący się na początku ruchu u góry, w punkcie B') zakreśli podczas pierwszej połowy

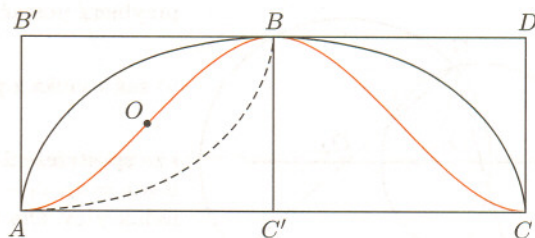
obrotu. Słowem, gdy punkt P będzie zakreślał łuk cykloidy od A do B , punkt Q będzie zakreślał łuk od B' do C' . Narysujmy więc (w dowolnym położeniu) okrąg wyznaczający wyjściową cykloidę (rys. 3). Punkt P znajduje się na górnym łuku AB , a antypodyczny punkt Q na łuku $B'C'$. Gdziekolwiek jednak nie narysowalibyśmy okręgu, jego środek S będzie leżał na prostej l . Prosta l jest więc osią symetrii narysowanego okręgu. Zatem obraz Q' punktu Q w symetrii względem l będzie dalej leżał na okręgu, a ponadto (patrz uwagi do rysunku 2) na dolnym łuku AB . Co więcej, ponieważ S jest środkiem PQ , więc (twierdzenie Talesa!) prosta l jest równoległa do PQ' , czyli $PQ' \parallel AC'$.



Rys. 3

I tak stwierdziliśmy, że na każdej prostej równoległej do AC' okrąg wyznaczający cykloidę i soczewka AB mają przekrój tej samej długości. Dla kuli i wydrążonego walca Archimedes posłużył się wodą. Tu możemy wyobrażać sobie, że do naczynia w kształcie soczewki AB i w kształcie wyznaczającego cykloidę okręgu nalewamy sprawiedliwie „płaską wodę” – jej poziom będzie w obu naczyniach rósł tak samo, więc napelnia się też jednocześnie. Stąd mają jednakowe „płaskie objętości”, czyli pola.

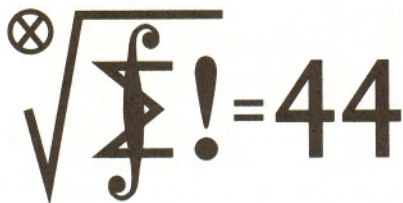
Właśnie, jak to się ma do obliczenia pola pod cykloidą? Otóż bardzo prosto. Roberval zastosował tu sinusoidę o osi l , mającą najniższe punkty w A i C , a najwyższy w B . Nazywał ją towarzyszką cykloidy. Łuk sinusoidy ma środek symetrii w punkcie O , podobnie jak prostokąt $AC'BB'$ i soczewka AB . Zatem sinusoida dzieli tak prostokąt, jak soczewkę, na połowy.



Rys. 4

Stąd pole pod (pierwszą) połową cykloidy to pół pola prostokąta plus pół pola soczewki. A więc całe pole pod cykloidą to całe pole prostokąta $AC'BB'$ – czyli $2r \cdot \pi r = 2\pi r^2$ – plus całe pole soczewki, czyli całe pole koła, a więc πr^2 . Łącznie zatem pole pod jednym łukiem cykloidy od ostrza do ostrza to $3\pi r^2$.

Oczywiście sinusoida nie jest jedyną linią, jakiej można było użyć w tym rozumowaniu. Polecam znalezienie kilku innych linii nadających się na towarzyszkę cykloidy.



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2000

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Zadania z matematyki nr 403, 404

Redaguje Marcin E. KUCZMA

403. Ciągi $b(0), b(1), b(2), \dots$ oraz $d(0), d(1), d(2), \dots$ są określone wzorami:

$$b(0) = d(0) = 1, \quad b(n+1) = 2^{b(n)}, \quad d(n+1) = 10^{d(n)}.$$

Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n , dla której $b(n) > d(44)$.

404. Udowodnić, że liczba wszystkich podziałów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na zbiory niepuste, rozłączne, jest równa wartości, jaką przyjmuje w punkcie $x = 0$ pochodna n -tego rzędu funkcji $f(x) = \exp(e^x - 1)$.

Zadanie 404 zaproponował pan Piotr Żmijewski z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2000

Przypominamy treść zadań:

395. Liczby rzeczywiste $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2000}$ tworzą ciąg monotoniczny. Udowodnić, że

$$\sum_{k=0}^{2000} (-1)^k a_k^2 \geq \left(\sum_{k=0}^{2000} (-1)^k a_k \right)^2.$$

396. Dane są dwie przecinające się sfery oraz sześć różnych punktów A, B, C, D, E, F . Punkty A i B leżą na jednej z tych sfer, punkty C i D na drugiej; punkty E i F należą do obu sfer. Punkt E leży na odcinku AC , a punkt F leży na odcinku BD , który jest równoległy do prostej przechodzącej przez środki danych sfer. Dowieść, że rzuty prostokątne odcinków AB i CD na prostą AC mają jednakową długość.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 387 ($WT=1,97$) i 388 ($WT=1,27$)
z numeru 10/1999

Janusz Olszewski	– Suwałki	44,68
Andrzej Daniluk	– Kraków	43,64
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	42,22
Rafał Pikula	– Wrocław	41,33
Jarosław Łazuka	– Warszawa	36,01
Jerzy Witkowski	– Radlin	34,62

Pan Olszewski (Weteran) kończy już czwartą rundę.

395. Dowiedzimy przez indukcję, że jeżeli liczby $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ tworzą ciąg monotoniczny, to

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k^2 \geq \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \right)^2.$$

Dla $n = 0$ zachodzi równość. Ustalmy $n \geq 0$ i przyjmijmy słuszność dowodzonej tezy dla tej liczby n . Weźmy pod uwagę dowolne liczby $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}$ tworzące ciąg monotoniczny. Przyjmijmy oznaczenia

$$a_{2n+1} = u, \quad a_{2n+2} = v, \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = s, \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k^2 = w.$$

Założenie indukcyjne (dla ciągu $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$) mówi, że $w \geq s^2$; teza indukcyjna przybiera postać $w - u^2 + v^2 \geq (s - u + v)^2$. Dla jej dowodu wystarczy wykazać, że

$$s^2 - u^2 + v^2 \geq (s - u + v)^2;$$

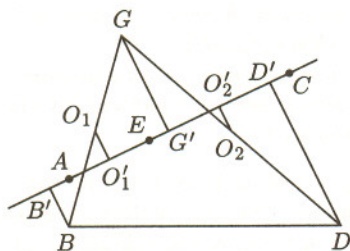
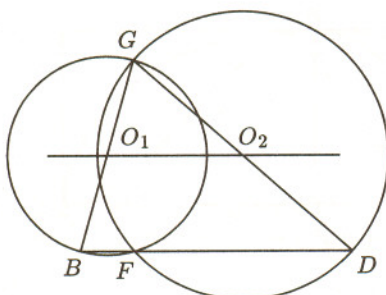
to zaś wynika z przekształcenia

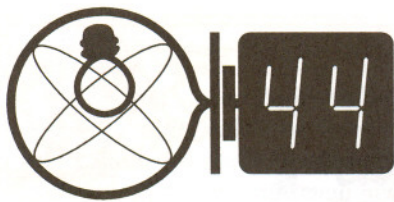
$$s^2 - u^2 + v^2 - (s - u + v)^2 = 2(s - u)(u - v)$$

i ze spostrzeżenia, że liczby $s - u = a_0 - a_1 + \dots + a_{2n} - a_{2n+1}$ oraz $u - v = a_{2n+1} - a_{2n+2}$ są jednocześnie nieujemne lub niedodatnie. To kończy dowód indukcyjny. Dla $n = 1000$ mamy tezę zadania.

396. Oznaczmy przez O_1 środek sfery zawierającej punkty A, B, E i F , a przez O_2 środek sfery zawierającej punkty C, D, E i F . Równoległe proste O_1O_2 i BD wyznaczają płaszczyznę, która przecina obie sfery wzdłuż ich okręgów wielkich. Jednym z punktów przecięcia tych okręgów jest F ; oznaczmy ich drugi punkt przecięcia przez G . Odcinki BG i DG są średnicami danych sfer.

Niech O'_1, O'_2, B', D', G' będą rzutami prostokątnymi punktów O_1, O_2, B, D, G na prostą AC . Punkt O'_1 jest środkiem cięwiwy AE pierwszej z rozważanych sfer; a ponieważ O_1 jest środkiem jej średnicy BG , to O'_1 jest jednocześnie środkiem odcinka $B'G'$; zatem $|AB'| = |EG'|$. Analogicznie uzasadniamy, że O'_2 jest wspólnym środkiem odcinków $D'G'$ i CE , więc $|CD'| = |EG'|$. Otrzymujemy równość $|AB'| = |CD'|$, która była dana do udowodnienia.





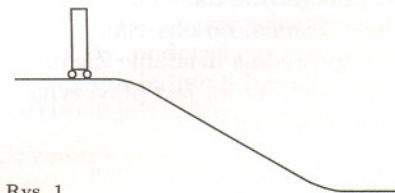
Zadania z fizyki nr 300, 301

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2000

300. Przedstawiony na rysunku 1 przekrój pochylni składa się z odcinka o długości $l = 2$ m nachylonego pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu oraz dwóch łuków o promieniu $R = 10$ m gładko łączących ten odcinek z półprostymi poziomymi. Na górnym poziomie postawiono wózek i nadano mu bardzo niewielką prędkość w prawo. Czy w czasie zjazdu wózek oderwie się jedną parą kółek od podłoża? Korpus wózka jest jednorodną płytką prostokątną o długości $d = 5$ cm i wysokości $h = 20$ cm (trzeci wymiar jest nieistotny), osie kółek są osadzone na końcach dolnego boku płytki (tzn. w odległości 5 cm), a masę kółek, ich promień i tarcie należy pominąć. Uwaga: wystarczające jest rozwiązanie przybliżone, słuszne dla podanych wartości liczbowych.

301. Z jednorodnego drutu o oporze ρ na jednostkę długości wykonano pięciokąt foremny o boku a . Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej B w środku tego pięciokąta, jeśli do dwóch sąsiednich wierzchołków pięciokąta przyłączyć źródło napięcia U ? Pominąć pole przewodów doprowadzających i przyjąć względną przenikalność magnetyczną ośrodka równą 1.



Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2000

Przypominamy treść zadań:

292. Jednorodna bryła ma kształt graniastoslupa, którego podstawa jest n -kątem foremnym. Dla jakich n bryła ta może się toczyć po poziomej powierzchni, tzn. po zetknięciu ściany z podłożem będzie się dalej obracała w tę samą stronę, bez poślizgu? Można przyjąć, że siła działa ze strony podłoża tylko na kolejne krawędzie graniastoslupa i ma charakter niesprężysty, tzn. bryła nie podskakuje.

Pytanie poza konkursem: Jeśli n spełnia powyższy warunek, to ile wynosi podczas toczenia się bryły maksymalna liczba „przeskoków” od jednej krawędzi do następnej (uwarunkowana z jednej strony tym, aby bryła pokonała wzniesienie między przeskokami, a z drugiej strony tym, aby siła odśrodkowa nie oderwała jej od podłoża)? Pominąć straty energii poza przeskokami.

Idea zadania pochodzi od dr. Sławomira Brzezowskiego

292. W momencie zetknięcia ściany graniastoslupa z podłożem następuje „zderzenie” – na krawędź graniastoslupa będącą nową osią obrotu działa przez krótką chwilę duża siła ze strony podłoża. W tym krótkim przedziale czasu rolę siły ciężkości można zaniedbać, więc obowiązuje zasada zachowania momentu pędu względem nowej osi. Przedstawiając moment pędu jako sumę składnika pochodzącego od ruchu środka masy i składnika odpowiadającego ruchowi wokół środka masy, otrzymujemy równanie (zob. rys. 3)

$$mr^2\omega_0 \cos \alpha + I\omega_0 = (I + mr^2)\omega_1,$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia:

m – masa bryły,

r – promień okręgu opisanego na jej podstawie,

ω_0 i ω_1 – prędkości kątowe przed „zderzeniem” i po nim,

I – centralny moment bezwładności graniastoslupa.

$\alpha = 360^\circ/n$ – kąt utworzony przez dwie sąsiednie krawędzie i oś graniastoslupa,

Równanie to ma sens pod warunkiem, że lewa strona jest dodatnia (inaczej bryła się zatrzyma), tak więc szukany warunek ma postać

$$mr^2 \cos \alpha + I > 0.$$

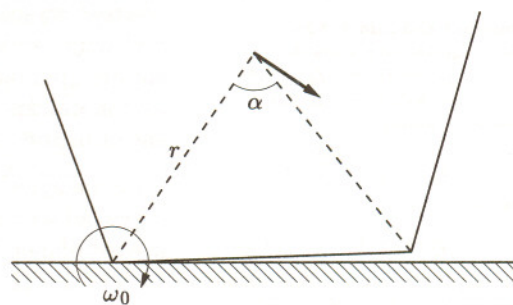
Widzimy, że tylko dla $n = 3$ nierówność może nie być spełniona, gdyż wtedy $\alpha = 120^\circ$ i pierwszy składnik jest ujemny. Jak można obliczyć, centralny moment bezwładności trójkąta równobocznego wynosi $I = (1/4)mr^2$, czyli ujemny składnik przeważa. Graniastosłup trójkątny nie może się więc toczyć (proponujemy Czytelnikom sprawdzić na czekoladzie Toblerone).

z Krakowa, a została przekazana przez jego uczniów – zwycięzców Olimpiady Fizycznej.

293. Po napompowaniu powietrza do komory ciśnieniowej w dolnej części ustawionej pionowo rury metalowej (rys. 2) zwolniono tłok, który został wyrzucony w górę (tłokiem tym może być zabawka, np. flara opadająca na spadochronie). Obliczyć wysokość osiąganą przez ciężarek o masie 0,4 kg, jeśli rura ma długość 2 m (z czego 75 cm zajmuje komora ciśnieniowa) i średnicę wewnętrzną 28 mm, ciśnienie atmosferyczne wynosi 10^5 Pa, a ciśnienie w komorze w chwili zwolnienia spustu – $5 \cdot 10^5$ Pa. Ponadto dana jest wartość stosunku ciepła właściwych dla powietrza $\gamma = c_p/c_v = 1,4$.

Rys. 2

Obliczenia prowadzące do odpowiedzi na pytanie dodatkowe są nieco zbyt długie, aby je zamieścić na stronach *Delty*. O ile Autor się nie pomylił, to prostokątów ($n = 4$) może się przewrócić tylko raz, dla $n = 5$ możliwe są dwa kolejne przeskoki, dla $n = 6$ – trzy, dla $n = 7$ – cztery, a dla wyższych n liczba przeskoków rośnie coraz szybciej.



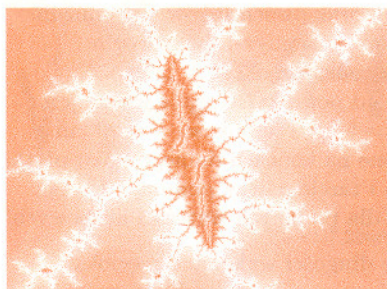
Rys. 3

293. Ze względu na dużą szybkość rozprężenia powietrza założymy, że jest to przemiana adiabatyczna, tzn. spełnione jest równanie $pV^\gamma = \text{const}$. Energia przekazana „pociskowi” przez rozprężający się gaz jest dana wyrażeniem $W = \int (p - p_{\text{atm}})dV$, a po podstawieniu powyższej zależności $p(V)$ i scałkowaniu obliczamy

$$W = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\gamma - 1} \right) - p_{\text{atm}}(V_1 - V_0) = 110 \text{ J}.$$

Jeśli straty są pomijalnie małe, to energia ta pozwala ciało o masie 0,4 kg wznieść się na wysokość 28 m.

Patrz w niebo



Miesiąc temu stwierdziliśmy, że łączne działanie pływowe na Ziemię wszystkich planet jest do zaniedbania w porównaniu z działaniem Księżyca – no, może jeszcze z dodatkiem Słońca. Czyżbyśmy zapomnieli o działaniu bezpośrednim? Okazuje się, że obliczenie działań bezpośrednich też może zgotować niespodziankę. Mianowicie na podstawie newtonowskiego prawa grawitacji bez trudu obliczamy, że przyspieszenie Księżyca ze strony Słońca (o masie 2×10^{30} kg z odległości $1,5 \times 10^{11}$ m) jest w przybliżeniu dwa razy większe niż ze strony Ziemi (o masie 6×10^{24} kg z odległości tylko $3,84 \times 10^8$ m). To dlaczego Księżyc w ogóle trzyma się Ziemi?! Odpowiedź jest prosta, ale jakby znowu odwołująca się do zjawiska pływów: praktycznie takiemu samemu jak Księżyc przyspieszeniu ze strony Słońca podlega Ziemia, bo oba ciała są niemal w tej samej odległości od Słońca. Zatem bezpośrednie działanie Ziemi na Księżyc dominuje nad małą różnicą tych przyspieszeń, która jest przyczyną jedynie niewielkich zaburzeń okołozemskiego ruchu Księżyca.

Ale jednak można by mieć obawy, że jeżeli planety „ustawią się na jednej linii”, to może wspólnymi siłami zdołają ściągnąć Ziemię z jej orbity, i co wtedy? Oszacowanie tych oddziaływań (tj. składników przyspieszenia Ziemi) na podstawie tego samego prawa powszechnego ciężenia jest sprawą banalną. Okazuje się, że najsilniej na Ziemię działa Słońce, jest w końcu najmasywniejszym ciałem Układu Słonecznego. Dwieście razy słabiej działa Księżyc – bo choć jest znacznie bliżej, to jego masa jest drobnym ułamkiem masy Słońca. Jowisz jest tysiąc razy lżejszy od Słońca i pięć razy niż ono dalej, działa więc na Ziemię 25 000 razy słabiej. Wenus jest lżejsza od Słońca 400 000 razy i jej działanie jest znikome, mimo że bywa trzy razy bliżej Ziemi niż Słońce. Przyspieszenie ze strony innych planet jest już porównywalne z przyspieszeniem wywieranym przez człowieka stojącego w odległości metra. Tak czy inaczej, skoro te połączone oddziaływania przez kilka miliardów lat nie ściągnęły Ziemi z orbity, to zapewne i tym razem nic się Ziemi nie stanie.

Tomasz KWAST

Czerwiec

Rozpoczynamy wakacje, nadchodzi miesiąc najkrótszych i najjaśniejszych nocy. Formalnie uważa się, że tzw. noc astronomiczna to czas, gdy Słońce znajduje się co najmniej 18° pod horyzontem. Otóż w czerwcu nawet o północy Słońce nie obniża się tak bardzo, oczywiście w naszej szerokości geograficznej. Ta graniczna wartość wysokości Słońca jest wprawdzie dość umowna, praktyka jednak wykazuje, że istotnie, gdy Słońce zejdzie niżej pod horyzont, to niebo staje się już „porządnie” czarne i można prowadzić równie „porządne” obserwacje astronomiczne. Ale nie oznacza to, że w czerwcu polscy obserwatorzy uważają się za usprawiedliwionych i nic nie robią.

Lato zaczyna się 21 VI. Słońce wstępuje wtedy w znak Raka, a więc przechodzi z gwiazdozbioru Byka do Bliźniąt. W tej też okolicy znajdują się Wenus i Mars, a więc planet tych nie widać, a ich złączenia ze Słońcem zachodzą odpowiednio 11 VI i 1 VII. Jowisz i Saturn (ich złączenia ze Słońcem były w maju) znajdują się na granicy Barana i Byka, a więc już około 30° od Słońca i planety te można już widzieć nad ranem. Tak więc kończy się seria złączeń jasnych planet ze Słońcem, czyli „ustawienie planet na jednej linii” odchodzi do przeszłości. Nów Księżyca wypada 2 VI, pełnia 16 VI. W czerwcu Księżyc nie zakrywa żadnej jasnej gwiazdy.

T.K.



Rozwiązanie zadania F 526.

Oznaczmy ogniskowe soczewek odpowiednio przez f_1 , f_2 , f_3 . Jeżeli soczewki są cienkie, to dla układu soczewek 1 i 2 mamy

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{F},$$

a dla układu 2 i 3

$$\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = -\frac{1}{f}.$$

Rozpatrując płytkę szklaną jako układ ściśle przylegających soczewek, mamy

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = 0.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$f_1 = f, \quad f_2 = -\frac{fF}{F+f}, \quad f_3 = F.$$

Każda płaszczyzna przechodząca przez środek sześciianu dzieli go na dwie jednakowe bryły. Spośród płaszczyzn przechodzących przez środek czworościanu foremnego jedynie 7 ma tę własność – które?

◇ Trójkąt dzielimy na trójkąty w ten sposób, aby
◇ zarówno w starych, jak i nowych wierzchołkach
◇ spotykało się ich tyle samo. Ile? Jedyne możliwości to
◇ 3, 7 i 19. Dlaczego akurat tyle?

GRY (13)

Zasiadamy teraz do gry RÓŻNE STOSY z przeciwnikiem, który jest dziwnie przesądny i stawia warunek: **Nigdy, przenigdy, podczas gry nie może się pojawić stos mający dokładnie 6 bierek.** Nie mamy wyjścia, przeciwnik jest uparty, więc przystajemy na ten warunek.

Co zmienia przyjęcie takiego ograniczenia? Dopóki w grze są tylko stosy mające mniej niż 6 bierek, wszystko jest po staremu.

Dla stosu złożonego z 7 bierek mieliśmy dotychczas trzy możliwe posunięcia prowadzące do pozycji o liczbie Grundy'ego odpowiednio 1, 2 i 1, skąd wyliczyliśmy, że liczba Grundy'ego $r(7)$ stosu 7-elementowego jest równa 0 (jako najmniejsza liczba całkowita nieujemna niewystępująca wśród liczb 1, 2 i 1).

7 bierek	
Pozycja	Liczba Grundy'ego
1, 6	$0 +_2 1 = 1$
2, 5	$0 +_2 2 = 2$
3, 4	$1 +_2 0 = 1$

7 bierek (6 zabronione)	
Pozycja	Liczba Grundy'ego
2, 5	$0 +_2 2 = 2$
3, 4	$1 +_2 0 = 1$

Jeżeli zabronimy tworzenia stosów 6-bierkowych, odpadnie

nam możliwość dokonania podziału stosu 7-elementowego na stosy o liczebnościach 1 i 6, co nie zmienia faktu, że liczba Grundy'ego $r_6(7)$ pozycji złożonej z jednego stosu 7-bierkowego w grze RÓŻNE STOSY wynosi 0 pomimo wprowadzenia zakazu tworzenia stosów złożonych z 6 bierek.

Dla stosu złożonego z 8 bierek zabroniony jest podział na stosy 2 i 6, co już ma wpływ na liczbę Grundy'ego, gdyż $r(8) = 2$, podczas gdy $r_6(8) = 1$.

8 bierek	
Pozycja	Liczba Grundy'ego
1, 7	$0 +_2 0 = 0$
2, 6	$0 +_2 1 = 1$
3, 5	$1 +_2 2 = 3$

8 bierek (6 zabronione)	
Pozycja	Liczba Grundy'ego
1, 7	$0 +_2 0 = 0$
3, 5	$1 +_2 2 = 3$

Przy 9 bierkach modyfikacja gry daje znać o sobie jeszcze bardziej, gdyż oprócz zakazu podziału na stosy 3 i 6, do głosu dochodzi zmiana liczby Grundy'ego stosu 8-elementowego.

9 bierek	
Pozycja	Liczba Grundy'ego
1, 8	$0 +_2 2 = 2$
2, 7	$0 +_2 0 = 0$
3, 6	$1 +_2 1 = 0$
4, 5	$0 +_2 2 = 2$

9 bierek (6 zabronione)	
Pozycja	Liczba Grundy'ego
1, 8	$0 +_2 2 = 2$
2, 7	$0 +_2 0 = 0$
4, 5	$0 +_2 2 = 2$

Zastanów się, Drogi Czytelniku, jak zmieni się po wyżej wprowadzonym ograniczeniu przebieg gry rozpoczynającej się od stosu złożonego z 37 bierek, którą opisaliśmy w poprzednim Γ-limatiasie. Odpowiedź za dwa miesiące.

JWR

Najgorsze przybliżenia liczby π (1)

Jest dużo wzorów dających bardzo dobre przybliżenia liczby π . W poszukiwaniu przybliżeń *najgorszych* jest oczywiście sporo przekory. Nie chodzi jednak o podanie przybliżeń z *sufitu*. Przedstawiamy wzory, które w granicy dają dokładną wartość π , jednak zbieżność jest, mówiąc delikatnie, nie najszybsza. Wzory te pojawiają się w sposób naturalny, jednak nakład pracy włożonej w obliczenie przybliżonej wartości π przy ich użyciu procentuje nie najlepiej.

Arcus sinus

Korzystamy z rozwinięcia funkcji arcsin w szereg potęgowy. Dla $x \in [-1, 1]$ mamy

$$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot (2n+1)} + \dots,$$

skąd po podstawieniu $x = 1$ otrzymujemy

$$\pi = 2 \arcsin 1 = 2 \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot (2n+1)} + \dots \right).$$

Uwzględnimy 50 wyrazów powyższego szeregu, aby otrzymać isticie imponująco wyglądające przybliżenie

$$\pi \approx \frac{64341351001831558926908434473869802762184342487946190274503565130433}{21577411012715429447243757700009128948046771365134424924090059980800},$$

w którym licznik i mianownik mają po 68 cyfr.

Nie pytaj, Drogi Czytelniku, ile cyfr po przecinku daje to przybliżenie, zobacz lepiej, co jest przed przecinkiem. Powyższy ułamek daje bowiem $\pi \approx 2,98188$.

Przy 1000 wyrazów otrzymujemy przybliżenie π ułamkiem o 1463-cyfrowym liczniku i 1462-cyfrowym mianowniku.

Nie będziemy przytaczać tego ułamka ograniczając się do przybliżeń, jakie on daje: $\pi \approx 3,1059$.

10 000 wyrazów daje $\pi \approx 3,1303$, a przy 100 000 wyrazów otrzymujemy $\pi \approx 3,138$, widać więc, że sumy częściowe szeregu zaczynają się upodabniać do rzeczywistej wartości π bardzo powoli.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl

delta

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY

$$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \quad \pi=3,141592\dots$$



Dodatek Olimpijski

Zadania II stopnia oraz finału Olimpiad: Astronomicznej, Matematycznej i Fizycznej

XLII OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 1999/2000

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA (druga seria)

1. Za pomocą kamery o ogniskowej 19 m uzyskano obrazy trzech ciał spośród planet i księżyców Układu Słonecznego. Liniowe rozmiary tych obrazów wynosiły $d_1 = 17,1$ cm, $d_2 = 0,41$ cm i $d_3 = 0,82$ cm. Przedyskutuj, czy jednoznacznie można rozstrzygnąć, jakich ciał niebieskich obrazy uzyskano. Potrzebne dane znajdź samodzielnie.

2. Narysuj tarczę zegara z 24-godziną podziałką. W miejscach tarczy odpowiadających momentowi górowania w lokalnym czasie gwiazdowym w dniu równonocy wiosennej 1999 r., umieść symbole Księżyca (z graficznie zaznaczoną fazą), Słońca i planet, a także punktów równonocy i przesileń. Potrzebne dane znajdź samodzielnie.

3. W grudniu 1995 r. zarejestrowano niezwykle słabe obiekty. Po dwóch latach okazało się, że przemieściły się one o kąt około $1/20$ sekundy łuku. Czym mogą być te obiekty? Czy mogą to być obiekty położone:

- w naszym Układzie Planetarnym,
- w przestrzeni międzygwiazdowej,
- w przestrzeni międzygalaktycznej?

Uwaga: Sformułowanie „niezwykle słabe obiekty” oznacza, że były one na granicy możliwości rejestracyjnych teleskopu Hubble’a.

4. Krótko scharakteryzuj gwiazdy Wolfa-Rayeta.

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. W maju 1997 roku za pomocą HST uzyskano widmo centralnej części galaktyki M84. Z widma wynika, że w odległości 26 lat świetlnych od środka galaktyki prędkość orbitalna wynosi 400 km/s. Przedyskutuj, czy w centrum tej galaktyki może być czarna dziura.

2. W bieżącym roku Ziemia będzie w punkcie odslonecznym 4 lipca. ($\alpha_{\odot} = 6^{\text{h}}54^{\text{m}}$; $\delta_{\odot} = +22^{\circ}52'$). Punkt odsloneczny – uwzględniając również precesję – porusza się ruchem prostym $61''7$ rocznie. Oblicz, po jakim czasie Ziemia znajdzie się w aphelium w dniu równonocy jesiennej.

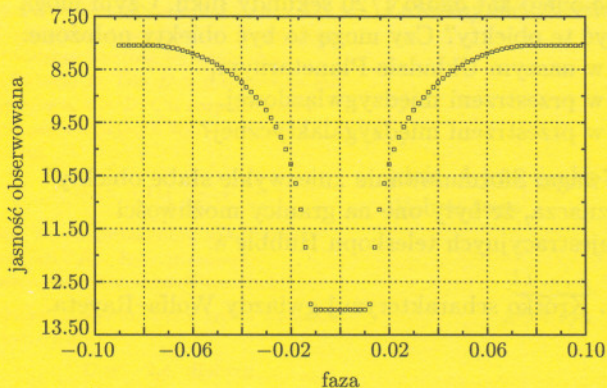
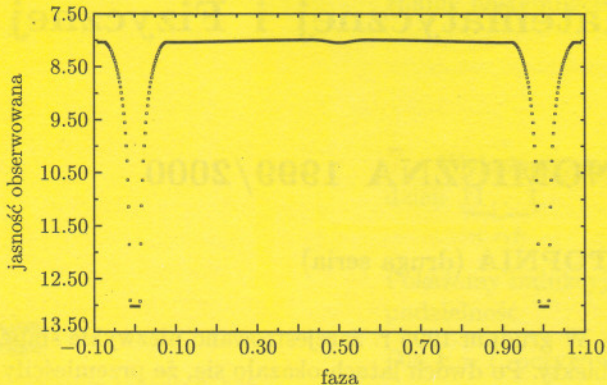
3. Jasności obserwowane dwóch gwiazd tworzących układ wizualnie podwójny różnią się o $\Delta m = 1,25$ mag, a różnica ich jasności absolutnych wynosi $\Delta M = 1$ mag. Jak są usytuowane te gwiazdy względem obserwatora i czy mogą one tworzyć układ fizycznie podwójny?

4. W dniu 5 listopada 1999 r. drogą astrometryczną odkryto, że gwiazdę HD209458 (o parametrach niemal identycznych ze Słońcem) obiega planeta. Jej okres obiegu wynosi 3,523 doby. Jakich efektów fotometrycznych należałoby się spodziewać, gdyby założyć, że płaszczyzna orbity planety leży blisko kierunku Ziemia-gwiazda, a promień planety jest o 60% większy od promienia Jowisza?

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Wykaż, że grawitacyjna energia gromadzona w formie ciepła w fazie formowania się ciała planetarnego podczas spadku na to ciało kolejnych porcji materii jest proporcjonalna do $\rho^2 R^5$, gdzie ρ jest średnią gęstością powstałego ciała planetarnego, a R – jego promieniem.

2. Na załączonym wykresie przedstawiono uśrednioną krzywą jasności zmiennej zaćmieniowej w zależności od fazy. Określ parametry charakteryzujące gwiazdy tego



układu i sam układ podwójny, wiedząc, że okres zmienności wynosi 2,77 doby, a typ widmowy gorętszego składnika B5V. Załóż, że zaćmienia są centralne.

3. W 1910 roku kometa Halleya przechodziła przez peryhelium. Podczas tego zbliżenia Ziemia znalazła się w gazowym warkoczu komety. Oblicz, kiedy miało miejsce to zjawisko i jaka była wówczas odległość jądra komety od Ziemi? Elementy orbity komety Halleya podane są w załączonej tabelce. W rozwiązaniu przyjmij kołowość orbity Ziemi oraz radialnie odsloneczny kierunek warkocza komety.

odległość w peryhelium	q	0,58715 AU
mimośród	e	0,96728
długość węzła wstępującego	Ω	$57^{\circ} 50$
długość peryhelium	ω	$111^{\circ} 75$
nachylenie orbity	i	$162^{\circ} 21$
moment przejścia przez peryhelium		1910 IV 20 ^d 1777

4. Aparatura planetarium odtwarza wygląd nieba o godz. 21:00 UT. Wyznacz współrzędne równikowe równonocne oraz horyzontalne widocznej na niebie komety.

- 1) Określ z możliwie największą dokładnością miejsce obserwacji odpowiadające temu wyglądowi nieba.
- 2) Określ datę obserwacji, wiedząc, że dotyczy ona 2000 r.
- 3) Wymień wszystkie te obiekty z katalogu Messiera, które są odtwarzane na niebie planetarium. Wyniki obserwacji zapisz na załączonym arkuszu obserwacyjnym.

5. Dwa identyczne meteoroidy lecą obok siebie równoległymi torami z prędkością 20 km/s względem Ziemi. Pierwszy wpał w atmosferę Ziemi pod

kątem 45° bezpośrednio nad obserwatorem, a drugi 150 km dalej. Spaliły się w identyczny sposób na wysokości 80 km, tworząc ślady o długości 5 km. Obserwator zauważył, że pierwszy ślad rozpoczyna się w zenicie oraz że oba ślady meteorów leżały w południku niebieskim. Opisz, jakie różnice między oboma zjawiskami dostrzeże obserwator.

6. Zjawisko Hawkinga, dotyczące czarnych dziur, polega na ich parowaniu w wyniku emisji promieniowania ciała doskonale czarnego. Temperaturę czarnej dziury można opisać wzorem $T = 6,2 \cdot 10^{-8} \frac{M_\odot}{M}$, w którym temperatura jest wyrażona w kelwinach. Za promień czarnej dziury można uznać wielkość $r_g = \frac{2MG}{c^2}$. W powyższych

wzorach M_\odot , M , G oraz c są odpowiednio masą Słońca, masą rozważanej czarnej dziury, stałą grawitacji i prędkością światła. Łatwo zauważyć, że ostatnie stadia istnienia czarnej dziury mają gwałtowny charakter, a ich opis jest dość skomplikowany. Jednak wykonując proste rachunki, można uzyskać interesujące oszacowania. Rozważmy czarną dziurę o masie tysiąca ton.

I. Zakładając, że w trakcie parowania promień i temperatura czarnej dziury są stałe, a promieniowanie ogranicza się do widma fal elektromagnetycznych, oblicz:

- a) jak długo będzie jeszcze istnieć ta czarna dziura?
- b) jaka będzie jej moc promieniowania?
- c) w jakim zakresie widma należy poszukiwać tych zjawisk?

II. W trakcie parowania promień i temperatura czarnej dziury ulega zmianie. Określ jakościowo, jaki wpływ mają te zmiany na uzyskane w poprzednim punkcie oszacowania. W szczególności zastanów się, czy w realistycznym przypadku odpowiedź w punkcie „c” ulegnie istotnym zmianom.

Końcowa klasyfikacja

Laureaci

I miejsce Aleksander SĄDOWSKI, kl. II, I LO im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Mariusz Sobczak).

II miejsce Tomasz TYRANOWSKI, kl. II, I LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: mgr Ryszard Zapala, opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Teresa Mach).

III miejsce *ex aequo*: Miłosz JERKIEWICZ, kl. IV, I LO im. Stefana Żeromskiego w Jeleniej Górze (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Benedykt Lubiszewski);

Lech ŁOBODZIŃSKI, kl. III, I LO im. Antoniego Osuchowskiego w Cieszynie (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Urszula Klemczak).

IV miejsce Marcin PIENKOWSKI, kl. IV, I LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: mgr Stanisław Brzezowski, opiekun przygotowujący do olimpiady: Patryk Mach).

Finaliści

V miejsce Gabriel PIETRZYKOWSKI, kl. IV, LO im. Bolesława Prusa w Skierniewicach (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Jan Malka).

VI miejsce *ex aequo*: Damian BOGDANOWICZ, kl. III, Zespół Szkół

Ogólnokształcących Nr 1 im. Stefana Żeromskiego w Łęborku (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Włodzimierz Klata).

Tomasz SKIBA, kl. IV, IV LO im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Franciszka Kita).

Pozostali uczestnicy finału w kolejności alfabetycznej:

Andrzej JASTRZĘBSKI, kl. III, II LO im. Króla Jana III Sobieskiego w Grudziądzu;

Agnieszka KONDRAT, kl. IV, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu;

Aleksander KORZYŃSKI, kl. III, II LO im. Stefana Batorego w Warszawie;

Robert KUŹMIAK, kl. III, I LO im. Władysława Sikorskiego w Międzyrzecu Podlaskim;

Marek MISZTAL, kl. II, II LO w Końskiem;

Andrzej NIEWĘGŁOWSKI, kl. III, LO w Radzynie Podlaskim;

Maciej PASZKOWSKI-ROGACZ, kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi;

Piotr SADOWSKI, kl. IV, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu;

Joanna Maja SŁAWIŃSKA, kl. IV, II LO im. Hetmana Jana Zamoyskiego w Lublinie;

Radosław WOJTAK, kl. III, II LO im. Mikołaja Reja w Kraśniku;

Paweł WOLAK, kl. II, I LO im. Aleksandra Patkowskiego w Sandomierzu.

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA (25–26 lutego 2000)

1. Rozstrzygnąć, czy każdą liczbę wymierną dodatnią można przedstawić w postaci

$$\frac{a^2 + b^3}{c^5 + d^7},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi.

2. Dwusieczna kąta BAC trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D różnym od A . Punkty K i L są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na prostą AD . Dowieść, że

$$AD \geq BK + CL.$$

3. Na polach szachownicy $n \times n$ rozmieszczono n^2 różnych liczb całkowitych, po jednej na każdym polu. W każdej kolumnie pole z największą liczbą pomalowano na czerwono. Zbiór n pól szachownicy nazwiemy *dopuszczalnym*, jeżeli żadne dwa z tych pól nie znajdują się w tym samym wierszu ani w tej samej kolumnie. Spośród wszystkich zbiorów dopuszczalnych

wybrano zbiór, dla którego suma liczb umieszczonych na jego polach jest największa. Wykazać, że w tak wybranym zbiorze jest czerwone pole.

4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , w którym $AB \neq AC$. Proste BI i CI przecinają boki AC i AB odpowiednio w punktach D i E . Wyznaczyć wszystkie miary kąta BAC , dla których może zachodzić równość $DI = EI$.

5. Niech \mathbb{N} oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(f(n)) = 2n$.

6. Wielomian $w(x)$ stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla całkowitych x wartości będące kwadratami liczb całkowitych. Dowieść, że wielomian $w(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA (3–4 kwietnia 2000)

1. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Wyznaczyć liczbę rozwiązań (x_1, x_2, \dots, x_n) układu równań

$$\begin{cases} x_2 + x_1^2 = 4x_1 \\ x_3 + x_2^2 = 4x_2 \\ x_4 + x_3^2 = 4x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_n + x_{n-1}^2 = 4x_{n-1} \\ x_1 + x_n^2 = 4x_n \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych.

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym $\angle PAB = \angle PBC$. Punkt M jest środkiem boku AB . Dowieść, że

$$\angle APM + \angle BPC = 180^\circ.$$

3. Ciąg liczb naturalnych (p_n) spełnia następujące warunki:

- 1° p_1 i p_2 są liczbami pierwszymi,
- 2° dla $n \geq 3$ liczba p_n jest największym dzielnikiem pierwszym liczby

$$p_{n-1} + p_{n-2} + 2000.$$

Udowodnić, że ciąg (p_n) jest ograniczony.

4. W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2 \dots A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° . Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty B_2, B_3, \dots, B_n leżące odpowiednio na krawędziach A_2S, A_3S, \dots, A_nS , że

$$A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \dots + B_{n-1}B_n + B_nA_1 < 2A_1S.$$

5. Dla danej liczby naturalnej $n \geq 2$ znaleźć najmniejszą liczbę k o następującej własności: Z dowolnego, k -elementowego zbioru pól szachownicy $n \times n$, można wybrać taki niepusty podzbiór, że liczba pól tego podzbioru w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy jest parzysta.

6. Stopień wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdego x

$$P(x^2 - 1) = (P(x))^2 - 1.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$P(x) = x.$$



Nagroda stopnia pierwszego

1. Mateusz KWAŚNICKI, kl. III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (nauczyciele: Przemysław Szczepaniak, Augustyn Kaluża, Krystyna Czycza i Krzysztof Omiljanowski).

Nagrody stopnia drugiego

2. Tomasz CZAJKA, kl. IV, LO im. Komisji Edukacji Narodowej w Stalowej Woli (nauczyciele: Waldemar Rożek i Henryk Pawłowski).

3. Michał ADAMASZEK, kl. III, V LO w Bielsku-Białej (nauczyciel: Tomasz Szymczyk).

4. Lech DURAJ, kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Urszula Szwedzicka, Paweł Gniadek i Lesław Skrzypek).

5. Wojciech CZERWIŃSKI, kl. II, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Jerzy Konarski i Kazimierz Cegiela).

Nagrody stopnia trzeciego

6–10. Przemysław BRONIEK, kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Armen Edigarian, Jacek Dymel, Lesław Skrzypek, Maja Jasińska, Urszula Szwedzicka i Michał Kapustka).

Paweł PARYS, kl. II, LO im. Stanisława Staszica w Tarnowskich Górach (nauczyciele: Dariusz Nowak i Józef Kalinowski).

Bartosz SUŁKOWSKI, kl. III, V LO w Bielsku-Białej (nauczyciel: Tomasz Szymczyk).

Paweł WALTER, kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Urszula Szwedzicka i Lesław Skrzypek).

Marcin WOJNARSKI, kl. IV, Katolickie LO Ks. Pijarów w Krakowie (nauczyciel: Krzysztof Reczek).

11–13. Katarzyna JACHIM, kl. III, LO im. Komisji Edukacji Narodowej w Stalowej Woli (nauczyciel: Waldemar Rożek).

Artur JEŻ, kl. III, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (nauczyciele: Stefan Mizia i Zbigniew Romanowicz).

Marcin SABOK, kl. IV, XV LO im. mjr. Piotra Wysockiego we Wrocławiu (nauczyciele: Grażyna Piłkowska, Augustyn Kaluża i Zbigniew Romanowicz).

14. Wojciech KAMIŃSKI, kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi (nauczyciele: Adam Paszkiewicz, Andrzej Komisarski i Maciej Czarnecki).

15. Jakub GISMATULLIN, kl. IV, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (nauczyciel: Stefan Mizia).

16. Grzegorz HERMAN, kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Urszula Szwedzicka i Paweł Gniadek).

Wyróżnienia

Michał BORNY, kl. IV, II LO im. Jana Zamoyskiego w Lublinie (nauczyciel: Jacek Klisowski).

Jakub BYSZEWSKI, kl. III, I LO im. Juliusza Słowackiego w Chorzowie (nauczyciel: Dariusz Kuziar).

Przemysław GRUDZIŃSKI, kl. IV, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu (nauczyciel: Henryk Pawłowski).

Michał JABŁONOWSKI, kl. IV, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (nauczyciel: Wojciech Tomalczyk).

Jacek JUREWICZ, kl. III, II LO im. Konstantego Ildefonsa Gałczyńskiego w Olsztynie (nauczyciel: Teresa Pik).

Roman ŁOMOWSKI, kl. II, VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy (nauczyciele: Henryk Pawłowski i Anna Karaszewska).

Krzysztof MACZYŃSKI, kl. IV, V LO w Bielsku-Białej (nauczyciel: Tomasz Szymczyk).

Piotr NIEMCZYK, kl. IV, V LO w Bielsku-Białej (nauczyciel: Tomasz Szymczyk).

Krzysztof ONAK, kl. IV, III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie (nauczyciele: Józef Citak i Edward Tutaj).

Lech STAWIKOWSKI, kl. VIII Szkoły Podstawowej nr 84 we Wrocławiu (nauczyciele: Bogusław Merdas, Monika Waszkiewicz-Bolenowska, Zbigniew Romanowicz i Zdzisław Słomian).

Andrzej TYMOCZKO, kl. IV, IV LO im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie (nauczyciel: Mariusz Kraus).

Jarosław WRONA, kl. II, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (nauczyciel: Andrzej Bysiewicz).

Tadeusz ZIMIRSKI, kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Armen Edigarian i Urszula Szwedzicka).

Jakub ZWIERZ, kl. III, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (nauczyciele: Stanisław Buś i Zbigniew Romanowicz).

* W skład delegacji polskiej na XLI Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną, która odbędzie się w Korei Południowej w dniach 16–25 lipca br., powołani zostali: Michał Adamaszek, Tomasz Czajka, Wojciech Czerwiński, Lech Duraj, Mateusz Kwaśnicki i Marcin Wojnarski. Na zawodników rezerwowych powołano Wojciecha Kamińskiego i Jakuba Gismatullina.

* Na XXIII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne, które odbędą się w dniach 25 czerwca – 5 lipca br. w Polsce, powołano delegację, w skład której wejdą: Przemysław Broniek, Jakub Byszewski, Artur Jeż, Roman Łomowski, Marcin Sabok i Bartosz Sułkowski. Zawodnicy rezerwowi: Jacek Jurewicz, Jakub Zwierz i Lech Stawikowski.

* Powołano też delegację na XI Olimpiadę Matematyczną Państw Bałtyckich, która odbędzie się w Norwegii w listopadzie br. Skład delegacji: Grzegorz Herman, Katarzyna Jachim, Paweł Parys, Paweł Walter i Jarosław Wrona. Zawodnicy rezerwowi: Jacek Jurewicz, Jakub Zwierz i Lech Stawikowski.

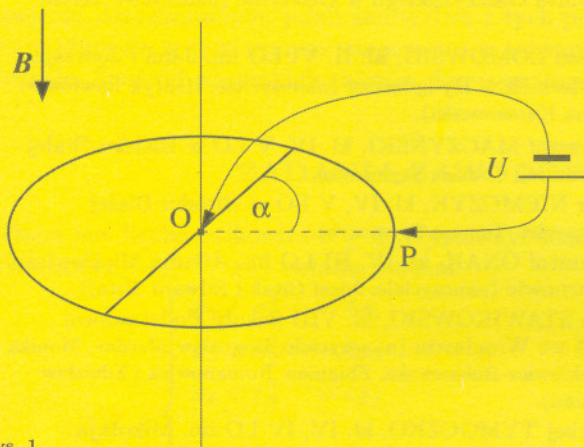
* Na obóz naukowy Olimpiady Matematycznej, który odbędzie się w Zwardoniu w dniach 4–17 czerwca br., powołano następujące osoby: Michał Adamaszek, Przemysław Broniek, Jakub Byszewski, Wojciech Czerwiński, Lech Duraj, Jakub Gismatullin, Grzegorz Herman, Katarzyna Jachim, Artur Jeż, Jacek Jurewicz, Mateusz Kwaśnicki, Paweł Parys, Marcin Sabok, Lech Stawikowski, Bartosz Sułkowski, Paweł Walter, Marcin Wojnarski, Jarosław Wrona i Jakub Zwierz.

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA



1. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B , w płaszczyźnie prostopadłej do linii pola znajduje się sztywny przewód kołowy z poprzeczką wzdłuż średnicy koła o promieniu r (rys. 1), wykonany z cienkiego, jednorodnego drutu o stałym oporze ρ przypadającym na jednostkę długości. Przewód może obracać się wokół ustalonej osi, równoległej do linii pola B , przechodzącej przez środek O koła. Do punktu O oraz punktu P leżącego na obwodzie koła dołączono źródło stałego napięcia U . Kąt, jaki tworzy promień OP z poprzeczką, wynosi α (rys. 1). W jakim zakresie kątów taki silnik ruszy z miejsca, jeżeli musi pokonać moment sił tarcia równy M_0 ?

Dane: $B = 5 \cdot 10^{-3} \text{ T}$, $U = 2 \text{ V}$, $\rho = 0,1 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$, $r = 0,1 \text{ m}$, $M_0 = 4,63 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$.



Rys. 1

2. Dwa samochody A i B jadą naprzeciw siebie na prostej drodze. Prędkość A wynosi 90 km/h, zaś prędkość B wynosi 54 km/h. Po minięciu się samochodów rejestrowana przez A częstotliwość dźwięku emitowanego przez B zmienia się o 127,3 Hz.

- Ile wynosi częstotliwość dźwięku emitowanego przez samochód B?
- Jaką częstotliwość dźwięku odbiera kierowca samochodu A przed, a jaką po minięciu samochodu B?
- Jak zmienią się wyniki, jeśli podczas jazdy samochodów wieje wiatr z prędkością 36 km/h w kierunku jazdy samochodu B?

Przyjmij, że prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 340 m/s.

3. Pomieszczenie o wymiarach $2 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 2,24 \text{ m}$ zawiera powietrze o składzie: 21% objętości – tlen, 79% – azot. Temperatura powietrza wynosi 0°C , a ciśnienie – 101,3 kPa. Na ścianach pomieszczenia

znajduje się 0,2 kg sadzy (czystego węgla). Iskra elektryczna zapoczątkowuje gwałtowny proces spalania. Zakładając, że ściany są sztywne i nie przewodzą ciepła, oblicz końcowe wartości temperatury i ciśnienia w pomieszczeniu.

Przyjmij, że występujące gazy zachowują się jak gazy doskonałe, że cząsteczki tych gazów są sztywne oraz że węgiel ulega całkowitemu spalaniu na CO_2 .

Stała gazowa $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, ciepło wydzielone podczas spalania węgla wynosi $q = 3,95 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$.

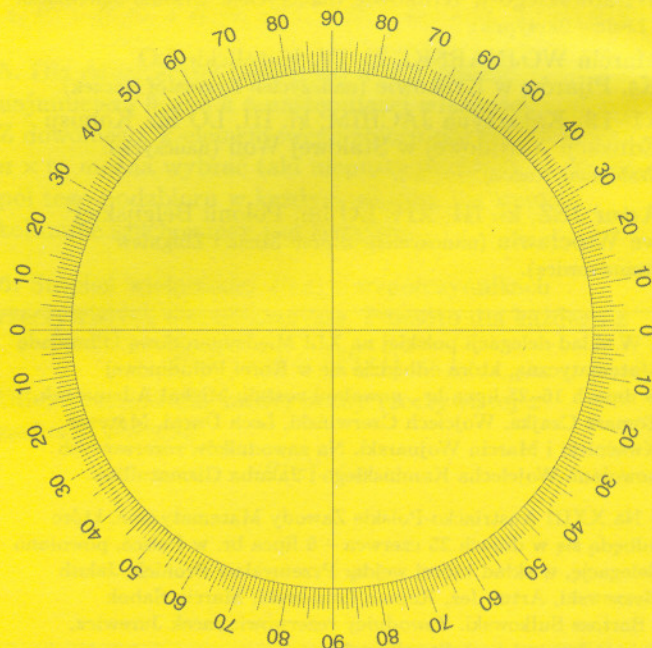
Zadanie doświadczalne. Masz do dyspozycji:

- igłę magnetyczną na podstawie niemagnetycznej,
- kawałki drutu miedzianego, pręt drewniany, taśmę samoprzylepną, plastelinę,
- linijkę i papier milimetrowy,
- statyw,
- zasilacz prądu stałego do 5 A, amperomierz, opornicę suwakową, przewody i krokodyłki,
- kątomierz zamieszczony poniżej treści zadania.

Wyznacz wielkość poziomej składowej wektora indukcji ziemskiego pola magnetycznego. Wskaż źródła błędów pomiarowych, zaproponuj sposoby jego zmniejszenia i zastosuj je w rozwiązaniu.

Oceń wielkość błędów pomiarowych otrzymanego wyniku.

Wyjaśnij przyczyny, dlaczego otrzymany wynik może się różnić od rzeczywistej wartości poziomej składowej wektora indukcji ziemskiego pola magnetycznego.

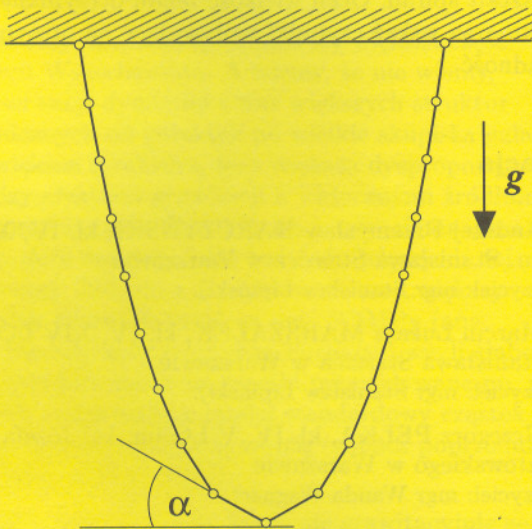


Rys. 2

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

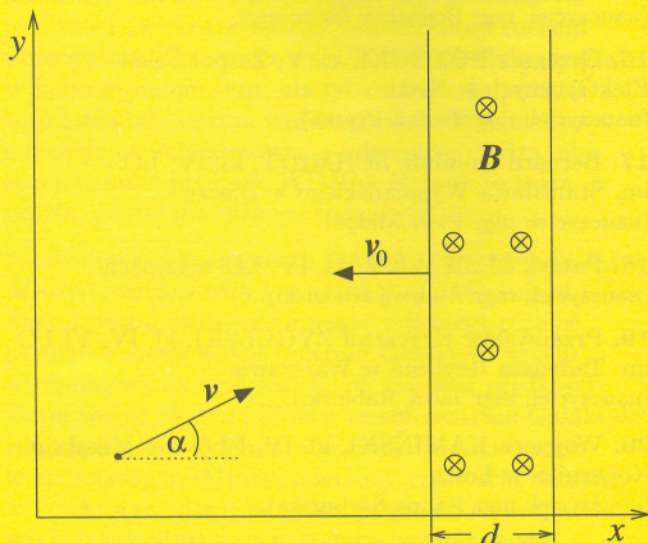
1. Łańcuch złożony z 18 jednakowych, jednorodnych, sztywnych cienkich prętów został podwieszony do poziomego sufitu (rys. 1). Pręty mogą obracać się swobodnie wokół złączy. Najniżej wiszące pręty tworzą z poziomem kąt $\alpha = 30^\circ$.

- Jaki kąt tworzą z sufitem końcowe pręty?
- Jaka jest wartość siły działającej na sufit w punkcie zaczepienia łańcucha, jeżeli jego ciężar wynosi P ?



Rys. 1

2. Magnes stały wytwarza jednorodne pole magnetyczne o indukcji B w obszarze o szerokości d (indukcję poza tym obszarem można zaniedbać).



Rys. 2

Magnes ten porusza się z prędkością $\vec{v}_0 = (-v_0, 0)$, prostopadle do linii pola (rys. 2). Z lewej strony (patrz rys. 2) nadlatuje cząstka o masie m , naładowana dodatnim ładunkiem elektrycznym q . Przed wejściem w obszar pola magnetycznego cząstka porusza się z prędkością v skierowaną pod kątem α do osi x .

Znajdź taką szerokość d , dla której cząstka po opuszczeniu obszaru pola magnetycznego porusza się równoległe do osi y .

Dane: $B = 10^{-3}$ T, $q = 1,6 \cdot 10^{-17}$ C, $m = 1,7 \cdot 10^{-21}$ kg, $v_0 = 3$ m/s, $v = 10$ m/s, $\alpha = 30^\circ$.

3. Kulisty mikrometeoryt porusza się w kierunku środka Ziemi. W wyniku zderzeń z cząsteczkami powietrza następuje zmniejszenie prędkości oraz ogrzanie mikrometeorytu. Zderzenia z cząsteczkami powietrza nie są sprężyste, ale w ich wyniku nie zmienia się masa mikrometeorytu. Prędkość v mikrometeorytu na wysokości h nad powierzchnią Ziemi jest powiązana z gęstością powietrza przybliżoną zależnością:

$$v(h) = v_0 e^{-\gamma H \rho(h)},$$

gdzie $\rho(h)$ oznacza gęstość atmosfery na wysokości h , $\gamma = \pi R^2/m$, R – promień mikrometeorytu, a m – jego masa, stała $H = 8400$ m; v_0 jest prędkością mikrometeorytu w chwili wejścia w atmosferę.

Prędkości termiczne cząsteczek powietrza są znacznie mniejsze od rozważanych prędkości mikrometeorytu. Wyznacz:

- liczbę zderzeń cząsteczek powietrza z mikrometeorystem w jednostce czasu w zależności od jego prędkości.

W zakresie wysokich temperatur energia potrzebna na zmianę temperatury ciała jest znikoma w porównaniu z energią wypromieniowywaną. Przyjmując, że w każdym zderzeniu cząsteczki powietrza z mikrometeorystem połowa energii kinetycznej ruchu cząsteczki względem mikrometeorytu jest zużywana na jego ogrzewanie, wyznacz:

- zależność temperatury mikrometeorytu od jego prędkości w zakresie wysokich temperatur;
- maksymalną temperaturę osiąganą przez mikrometeoryt.

Przyjmij, że: $R = 3 \cdot 10^{-5}$ m, $m = 6 \cdot 10^{-10}$ kg, $v_0 = 12 \cdot 10^3$ m/s, masa cząsteczkowa powietrza $\mu = 28$, stała Stefana-Boltzmannia $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Wm⁻²K⁻⁴, liczba Avogadra $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$. Mikrometeoryt traktuj jako ciało doskonale czarne.

Zadanie doświadczalne

A) Mając do dyspozycji wyłącznie:

- źródło światła — wskaźnik laserowy,
 - taśmę mierniczą o długości 2 m,
 - 10 cm linijkę z podziałką,
 - pionowy ekran i kartkę papieru,
 - kawałki plasteliny, bloczek kartek, pudełko kartonowe oraz kawałki taśmy samoprzylepnej,
- wyznacz długość fali światła laserowego. Oceń wielkość błędu otrzymanego wyniku oraz wskaż czynniki wpływające na otrzymaną dokładność.

B) Korzystając z wyniku z poprzedniej części oraz mając do dyspozycji dodatkowo płytę CD, wyznacz średnią odległość między ścieżkami na płycie CD oraz średnią długość ścieżki przypadającą na 1 bit informacji.

Założ, że całkowita ilość informacji na płycie CD równa jest 650 MB (1 MB = 2^{23} bitów) oraz że ścieżka ma kształt spirali. Oceń wielkość błędu otrzymanego wyniku oraz wskaż czynniki wpływające na otrzymaną dokładność.

Końcowa klasyfikacja

1. Rafał SARNECKI, kl. IV, XXXIII LO im. Mikołaja Kopernika w Warszawie,
wyróżniony za rozwiązanie zadania doświadczalnego (nauczyciel: mgr Włodzimierz Zielić).

2. Przemysław BRONIEK, kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie,
wyróżniony za rozwiązanie zadania 1 (nauczyciel: dr Sławomir Brzezowski).

3. Andrzej Janusz JAROSZ, kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
(nauczyciel: dr Sławomir Brzezowski).

4. Jakub Maksymilian GAC, kl. IV, XLI LO im. Joachima Lelewela w Warszawie
(nauczyciel: mgr Lech Sadoś).

5. Piotr KOŁACZKOWSKI, kl. IV, XXXIII LO im. Mikołaja Kopernika w Warszawie
(nauczyciel: mgr Włodzimierz Zielić).

6. Andrzej Tomasz GÖRLICH, kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
(nauczyciel: dr Jerzy Mucha).

7. Mateusz Marek GORYCA, kl. II, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu
(nauczyciel: mgr Marek Golka).

8. Piotr Paweł SKIBIŃSKI, kl. IV, IV LO im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie
(nauczyciel: mgr Franciszka Kita).

9. Artur JEŻ, kl. III, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu
(nauczyciel: mgr Marian Bąk).

10. Grzegorz MIŁOŚ, kl. II, II LO im. Mikołaja Kopernika w Mielcu
(nauczyciel: mgr Janusz Kopecki).

11. Andrzej Przemysław KARCZYŃSKI, kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
(nauczyciel: mgr Stanisław Lipiński).

12. Marcin Łukasz MARSZAŁEK, kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
(nauczyciel: mgr Stanisław Lipiński).

13. Grzegorz PEŁKA, kl. IV, V LO im. ks. Józefa Poniatowskiego w Warszawie
(nauczyciel: mgr Wanda Wagner).

14. Stanisław Konrad SKOWRONEK, kl. III, VIII LO im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
(nauczyciel: mgr Teresa Pollak).

15. Tomasz Maksymilian KŁODA, kl. III, VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach,
wyróżniony za rozwiązanie zadania 3 (nauczyciel: mgr Bogusław Lanuszny).

16. Grzegorz POTOCKI, kl. V, Zespół Szkół Elektrycznych w Nisku
(nauczyciel: mgr Janina Prytek).

17. Bernard Dominik SCHMIDT, kl. IV, LO im. Stanisława Wyspiańskiego w Bieczu
(nauczyciel: mgr Piotr Matys).

18. Patryk LESIEWICZ, kl. IV, LO w Łapach
(nauczyciel: mgr Andrzej Kudelski).

19. Przemysław Krzysztof ZYGULSKI, kl. IV, VI LO im. Tadeusza Reytana w Warszawie
(nauczyciel: mgr Jacek Rabiński).

20. Wojciech KAMIŃSKI, kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi
(nauczyciel: mgr Hanna Szyburska).