

SPIS TREŚCI NUMERU 9 (340)

Demony Maxwella i Laplace'a	str. 1
Naszyjnik Antoine'a	str. 1
Trąbka Borsuka	str. 2
Zadania	str. 2
Okna Kirkwooda	str. 3
Kostka Hilberta i kostka Tichonowa	str. 3
Broda Platona	
Brzytwa Ockhama	str. 4
Róg Gabriela	str. 4
Łańcuchy Markowa	str. 5
Śruba Archimedesza	str. 5
Przerwa Cassiniego i przerwa Enckego	str. 6
Krzyż Einsteina	str. 6
Dywan Sierpińskiego	str. 7
Słowo Banacha	str. 7
Nurek Kartezjusza	str. 8
Pasy van Allena	str. 8
Ślimak Pascala	str. 9
Kot Schrödingera	str. 9
Mała Delta	str.10
Igła Buffona	str.12
Pierścienie Newtona	str.12
Aktualności	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Wrzesień	str.16
Gammalimatias	str.17

Numer przygotowali:

Wiktor Bartol, Anna Czuchry,
Ewa Czuchry, Ewa Gnatowska,
Marek Kordos, Tomasz Kwast,
Jacek Miękiś, Zdzisław Pogoda,
Witold Sadowski, Piotr Zalewski.

W następnym numerze:

Życie

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący, Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Piotr Goldstein, Andrzej Hrynkiewicz, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Zbigniew Marciniak, Krzysztof Maślanka, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Zdzisław Pogoda, Michał Różyczka, Konrad Rudnicki, Grzegorz Sitarski, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko – przewodniczący.

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Ewa Czuchry, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Joanna Udalska, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2002 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2002 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 2003 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie; wybór artykułów archiwalnych: <http://www.wiw.pl>

Wybór artykułów w języku angielskim: <http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetowa wersja *Malej Delty*: <http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Demony Maxwella i Laplace'a

Wyobraźmy sobie naczynie przedzielone przegrodą na dwie części zawierające dwa różne gazy. Co się stanie po usunięciu tej przegrody (i odczekaniu odpowiednio długo)? Gazy wymieszają się, a temperatury wyrównają. Towarzyszy temu wzrost entropii, która jest miarą nieporządku układu. Ale co można zrobić, aby przywrócić jego stan początkowy? Wstawienie przegrody nic nie pomoże – no, chyba żeby posadzić przy niej istotę potrafiącą segregować cząsteczki, np. podnosząc ją i opuszczając tak, aby przepuszczać molekuly jednego gazu tylko na prawo, a drugiego tylko na lewo. Taki gość, zwany **demonem Maxwella**, wykonywałby iście czarzą robotę, doprowadzając do złamania drugiej zasady termodynamiki mówiącej, że entropia izolowanego układu nie może maleć. Procesy, w których rośnie entropia, związane są z ograniczeniem stopnia uporządkowania układu i utratą pewnej informacji o nim – uznaje się je za nieodwracalne. Zakładając, że demon (jako element nadprzyrodzony) może jednak przywrócić pierwotny stan naczynia, dochodzimy do wniosku, że wykonując tę pracę, musiałby on nieźle się napocić, bowiem zgodnie z zasadą Landauera zapisanie pewnej ilości informacji – w tym przypadku o tym, który gaz reprezentuje dana cząsteczka – wymaga dostarczenia ciepła do układu.

Inny problem stwarza **demon Laplace'a**, który nie gwałci co prawda praw fizyki, ale je aż nazbyt uporczywie stosuje. Chciałby uzyskać całą wiedzę o przyszłości i przeszłości poprzez wypisanie i rozwiązanie równań dynamiki Newtona dla każdej cząsteczki we Wszechświecie. Potrzebowałby do tego celu znać wszystkie siły działające między cząsteczkami, jak również początkowe położenia i pędy. Sporo z tym roboty, ale posadzano go o boską cierpliwość i wszechwiedzę. Filozofowie długo dyskutowali, czy takie stworzenie istnieje i dopiero wraz z rozwojem mechaniki kwantowej odetchnęli z ulgą. Gdyby nawet istniało, to i tak nie byłoby w stanie wyjaśnić pewnych zjawisk, do opisu których nie wystarczą równania klasycznej mechaniki. Procesy kwantowe ze względu na swoją naturę wymykają się demonowi Laplace'a spod kontroli. Nie podlegają one już prawom Newtona, poza tym zasada nieoznaczoności Heisenberga poucza nas, że jednoczesny pomiar położenia i pędu cząstki jest niemożliwy. Co gorsza, każdy przeprowadzony pomiar zmienia stan układu, a o pewnych procesach nie można powiedzieć, że zajdą na pewno, lecz jedynie z pewnym prawdopodobieństwem.

Ewa GNATOWSKA

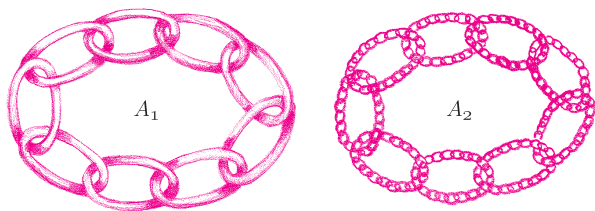
Naszyjnik Antoine'a

Czy zbiór Cantora można tak umieścić w przestrzeni, żeby istniała pętla, której nie da się ściągnąć do punktu, bo zawsze będzie zahaczała o zbiór?

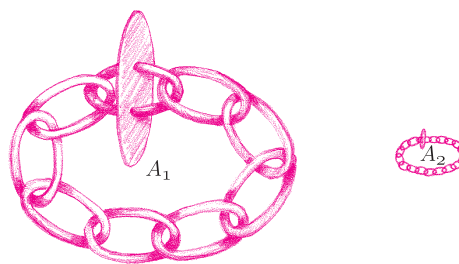
Aby otrzymać zbiór Cantora z odcinka usuwamy jego środkową jedną trzecią (uwaga! bez końców), to samo robimy z pozostawionymi odcinkami i powtarzamy ten zabieg nieskończenie wiele razy. To, co zostanie, to właśnie zbiór Cantora.

Wydaje się to niemożliwe; zbiór Cantora jest przecież taki „rzadki”. A jednak... Wyobraźmy sobie naszyjnik-łańcuszek, którego ogniwami są pełne torusy. Następnie, każdy z torusów zastąpmy przez łańcuszek podobny do wyjściowego, tylko odpowiednio mniejszy. Można sobie wyobrazić, że z każdego ogniwa wykonano mniejszy łańcuszek. Potem z każdego ogniwa tego mniejszego łańcuszka robimy jeszcze mniejszy łańcuszek itd. Niech A_1 oznacza wyjściowy naszyjnik pełnych torusów, A_2 – zbiór, w którym każde ogniwo z A_1 zastąpiono przez mniejszy łańcuszek i ogólnie A_{n+1} – zbiór powstały z A_n przez zastąpienie każdego pełnego torusa zawartym w nim łańcuszkiem podobnym do wyjściowego. Dostaniemy ciąg zstępujący zbiorów.

Przecięcie tych zbiorów nazywane jest **naszyjnikiem Antoine'a**. Można udowodnić, że naszyjnik Antoine'a topologicznie jest identyczny ze zbiorem Cantora, natomiast okrąg „zaczepiony” na naszyjniku nie da się z niego ściągnąć. Dokładniej: wyobraźmy sobie okrąg tak umieszczony, że wyznaczone przez niego koło przecina jedno z ogniw zbioru A_1 i częścią wspólną są dwa koła.



Rys. 1. $A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$



Rys. 2

Widzimy więc, że tak wybrane koło ma punkty wspólne z każdym ze zbiorów A_n . Gdybyśmy zatem próbowali „zdjąć” wybrany okrąg, to zawsze zahaczylibyśmy o naszyjnik. Możemy powiedzieć, że zewnątrz naszyjnika Antoine'a nie jest jednospójne, choć przecież jest to tylko zbiór Cantora... Naszyjnik Antoine'a służy także do konstrukcji dziko położonej sfery, tj. takiej, że jej suma z obszarem wewnątrz nie będzie homeomorficzna z kulą.

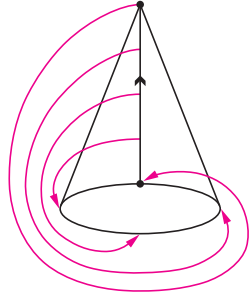
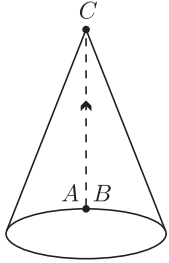
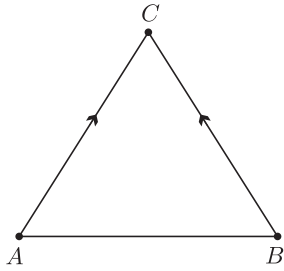
Zdzisław POGODA

Trąbka Borsuka

Wyobraźmy sobie trójkąt równoboczny o wierzchołkach A , B i C . Gdy sklejimy boki AC i BC , dostaniemy figurę przypominającą lejek lub trąbkę – w zależności od tego, co nam podpowiada wyobraźnia.

A gdyby tak skleić wszystkie boki trójkąta? To już trudniej zobaczyć. Można jednak w naszym lejku skleić jego tworzącą, czyli „szew” ze sklejonych dwóch poprzednich boków przykleić do brzegu trąbki. W ten sposób obwód trójkąta zostaje przekształcony niehomeomorficznie na okrąg. Powstały twór nazywany jest **trąbką Borsuka** albo osłą czapką. Okazuje się, że trąbka Borsuka pod pewnymi względami jest podobna do dowolnego zbioru wypukłego na płaszczyźnie lub w przestrzeni. Każdy taki zbiór można w sposób ciągły ściągnąć do dowolnego punktu do niego należącego (np. po odcinkach schodzących się w tym punkcie); mówimy, że zbiór wypukły jest ściągalny. Może tego nie widać od razu, ale trąbka Borsuka też jest zbiorem ściągalnym.

Zdzisław POGODA



Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i Delty!

Rozwiąż we wrześniu październikowe zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

Więcej informacji: <http://www.wiw.pl/delta/konkurs>



Zadania

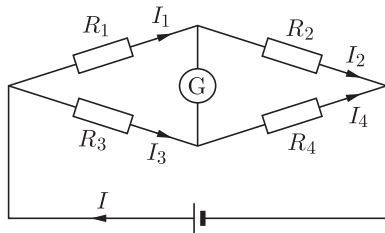
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 579. Znaleźć natężenie prądu w ramionach mostka Wheatstone'a (rys. 1), jeśli żaden prąd nie przepływa przez galvanometr G . Siła elektromotoryczna baterii wynosi $\mathcal{E} = 2 \text{ V}$, $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 45 \Omega$ i $R_3 = 200 \Omega$.

Rozwiązanie na str. 8

F 580. Przestrzeń między szklaną płaszczyzną a soczewką w układzie używanym do obserwowania pierścieni Newtona (zob. str. 12) jest wypełniona jakąś cieczą. Znaleźć współczynnik załamania n tej cieczy, jeśli promień trzeciego jasnego pierścienia Newtona wynosi $r_3 = 3,65 \text{ mm}$. Obserwacji dokonuje się w świetle przechodzącym, promień krzywizny soczewki wynosi $R = 10 \text{ m}$, a długość fali światła $\lambda = 5,89 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$.

Rozwiązanie na str. 8



Rys. 1

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1000 (Kwadratura koła). Wykazać, że kwadratu nie można pociąć nożyczkami na skończoną liczbę kawałków, z których dałoby się złożyć koło.

Uwaga: Mamy tu na myśli „wielokąty” krzywoliniowe. Laczko w 1991 roku wykazał, że kwadrat można podzielić na skończoną liczbę zbiorów, z których można złożyć koło (!), ale jego zbiory są bardzo złożone i na pewno nie da się ich wyciąć z kartki papieru.

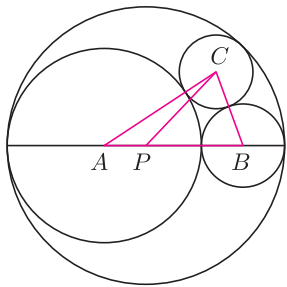
Rozwiązanie na str. 13

M 1001. Księżycem Hipokratesa opartym na przyprostokątnej BC trójkąta prostokątnego ABC nazywamy różnicę kół o średnicach BC i AB (rys. 3).

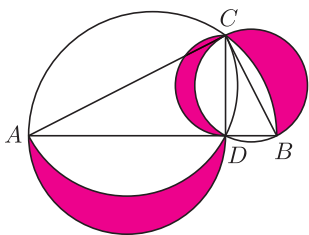
Wykazać, że suma pól kolorowych księżyców jest równa polu trójkąta ABC .
Rozwiązanie na str. 6

M 1002. Trzy okręgi o środkach A , B , C są parami styczne zewnętrznie oraz styczne wewnętrznie do okręgu o środku P (rys. 2). Punkty A , B leżą na średnicy dużego okręgu. Wykazać, że trójkąty APC i BCP mają taki sam obwód, równy średnicy dużego okręgu.

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2



Rys. 3

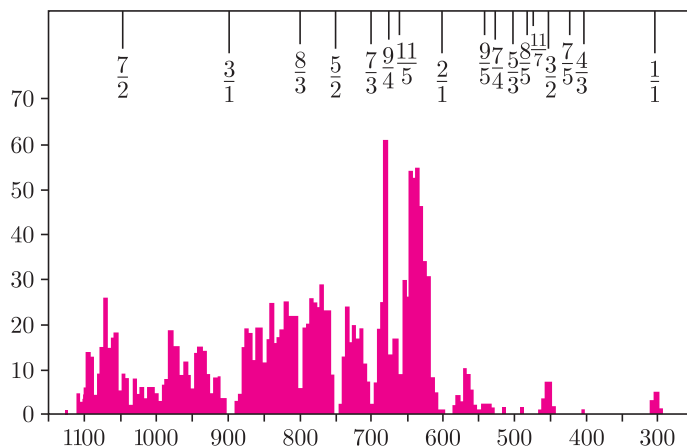
Okna Kirkwooda

Pierwszą planetoidę odkrył Giuseppe Piazzi na samym początku XIX w. Wkrótce znaleziono ich całe mnóstwo i w roku 1865 Daniel Kirkwood zrobił pierwszą, niezmiernie ważną ich statystykę: zależność liczby planetoid od pól orbity (lub – co na jedno wychodzi – od okresu obiegu czy też kątownej prędkości obiegowej; na rysunku argumentem wykresu jest prędkość kątowna, zwana w astronomii średnim ruchem dziennym, gdyż doba jest wygodną i powszechnie stosowaną jednostką czasu). Na oko wykres jest

po prostu mocno nieregularny, pewne orbity są gęsto obsadzone przez planetoidy, a inne orbity są puste. Otóż to! Kluczem do uzyskania odpowiedzi na pytanie, co to są za orbity, jest ustalenie, gdzie na osi poziomej wykresu jest... Jowisz. Obiega on Słońce po orbicie o półosi 5,2 j.a., zatem jego średni ruch dzienny wynosi 300".

Dla tej wartości – jak widać – istnieje niewielka liczba planetoid, podobnie inne planetoidy skupione są przy 450" oraz przy 570". Nie ma natomiast lub prawie nie ma planetoid o ruchu dziennym 550, 600, 700, 750, 800, 900". Nietrudno zauważyć, że podane liczby to odpowiednio 1/1, 3/2, 19/10 dla pierwszej grupy oraz dla drugiej 9/5, 2/1, 7/3, 5/2, 8/3 i 3/1 prędkości kątownej Jowisza. Inaczej mówiąc, orbity będące w rezonansie z Jowiszem są jakiegoś osobliwe: planetoidy albo się na nich skupiają, albo ich unikają.

Brak planetoid na orbitach rezonansowych – czyli obecność „okien”, przerw w wykresie **Kirkwooda** – nietrudno wytłumaczyć. Rezonans np. 5/2 oznacza, że 5 obiegów planetoidy trwałoby tyle samo (w rozsądnym przybliżeniu) co 2 obiegi Jowisza. Po takim czasie powtarzałyby się więc konfiguracja Jowisz-Słońce-planetoida, a więc też taka sama perturbacja planetoidy przez Jowisza, co zmusiłoby planetoidę do opuszczenia takiej orbity. Najwyraźniej tak właśnie się stało. W dodatku tendencja do



wyrzucania planetoid z ich orbit rezonansowych jest tym słabsza, im wyższy jest rząd rezonansu, czyli różnica między licznikiem i mianownikiem odpowiedniego ułamka. Dlatego orbity o rezonansach wyższych rzędów nie są całkiem puste. Nie potrafimy natomiast ogólnie

uzasadnić skupiania się planetoid na innych orbitach rezonansowych. W rezonansie 1/1 z Jowiszem są, jak wiadomo, planetoidy trojańskie (Grecy i Trojanie), obiegające Słońce po orbicie Jowisza, ale rezonansów przyciągających jest w Układzie Słonecznym dużo więcej. Nie wiadomo nawet, czy istnieje teoria wspólna dla nich wszystkich, czy każdy z nich to indywidualny przypadek.

T. K.



Kostka Hilberta i kostka Tichonowa

Każdy wie, jak wygląda kostka. Matematycznie kostka jest to sześciian, a używając formalnego zapisu $I^3 = I \times I \times I$, gdzie $I = [0, 1]$ jest przedziałem jednostkowym. Bez problemu definiujemy też kostkę n -wymiarową I^n jako iloczyn kartezjański n egzemplarzy przedziału jednostkowego albo jako zbiór ciągów n -elementowych o wartościach w I . Czy można badać kostkę nieskończoną $I \times I \times I \times \dots \times I \times \dots$? Naturalnie, będzie to zbiór nieskończonych ciągów przyjmujących wartości w przedziale jednostkowym. Często oznacza się taką kostkę przez $I^{\mathbb{N}}$ albo I^{\aleph_0} i nazywa **kostką Hilberta**. Dokładniej kostką Hilberta jest I^{\aleph_0} wyposażona w specjalnie zdefiniowaną odległość, czyli jest to przestrzeń metryczna. Kostka Hilberta jest w pewnym sensie uniwersalną przestrzenią metryczną. Okazuje się, że każda przestrzeń metryczna ośrodkowa może

być w kostce Hilberta odpowiednio zanurzona (tj. włożona homeomorficznie). Czyli kostka Hilberta jakby zawiera w sobie kopie wszystkich takich przestrzeni. Ośrodkowość oznacza, że w przestrzeni jest zbiór przeliczalny i gęsty – coś takiego, jak zbiór liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zamiast ciągów możemy też rozważać funkcje określone na dowolnym zbiorze X (np. $X = \mathbb{R}$) o wartościach w I . Zbiór takich funkcji (szczególnie, gdy X jest nieprzeliczalny) nazywamy często **kostką Tichonowa** i oznaczamy I^X , trzeba tylko odpowiednio określić w nim zbiory otwarte. Kostki Tichonowa też są przestrzeniami uniwersalnymi dla obiektów znanych jako przestrzenie Tichonowa, będących w pewnym sensie uogólnieniami przestrzeni metrycznych.

Zdzisław POGODA

Broda Platona

Według Platona ujmowane w pojęciach przedmioty są obiektywnymi ideami, istniejącymi we własnym odrębnym świecie, niezależnie od rzeczy zmysłowych, które stanowią jedynie ich kopie. Doktrynie tej zarzucano podważanie świata rzeczywistego, brak dostatecznego uzasadnienia, a także brak zadowalającego wyjaśnienia stosunku między zmysłowymi rzeczami a ideami. Konstrukcja Platona zdawała się być jeszcze jedną fantastyczną, niewiele wyjaśniającą teorią, a próba tłumaczenia świata w taki dosyć skomplikowany sposób przybrała nieformalną nazwę **brody Platona**. Powstała kilkanaście wieków później słynna brzytwa Ockhama była próbą obalenia wszelkich podobnych teorii.

Brzytwa Ockhama

Wilhelm Ockham (a właściwie William of Ockham) ur. około 1300 r. w Occham (hrabstwo Surrey, Anglia), zmarł około 1349 r.

Ockham, jako filozof, był przede wszystkim logikiem, logika zaś, jego zdaniem, miała spełniać dwie ogólniejsze funkcje – z jednej strony miała być narzędziem filozofii, metodologią nauk, z drugiej stawać się nauką, której celem głównym byłoby nie tyle określanie warunków prawdziwego poznania, co analiza najistotniejszych funkcji samego pojęcia. Zasada oszczędności – *non sunt multiplicanda entia sine necessitate* (nie należy mnożyć bytów ponad potrzebę), znana pod nazwą **brzytwy Ockhama**, była główną podstawą jego teoretycznych, antymetafizycznych dociekań. Głosiła ona potrzebę oszczędnego postępowania w tworzeniu i formułowaniu nowych pojęć ogólnych. Ockham uznawał za zbędne przyjmowanie nowych pojęć w wyjaśnianiu zagadnień związanych z relacjami między pojęciami a rzeczami – rzeczywistość powinna być wyjaśniana przez nią samą. Nie należy tłumaczyć istnienia jakiegokolwiek rzeczy materialnej, doświadczalnie poznawalnej, w ten oto sposób, że przyjmuje się i wyobraża – poza nią

i ponad nią – istnienie jakiejś innej rzeczy, której hipotetycznego istnienia nie daje się w żaden sposób sprawdzić.

Podstawową intencją Ockhama było wykazanie, że nie należy postulować żadnych zewnętrznych czynników oprócz umysłu i rzeczy jednostkowych.

rzecz jednostkowa – każda pojedyncza rozróżnialna rzecz w przyrodzie (np. ten stół, mój kot)

pojęcie ogólne – wspólna nazwa dla pewnej ilości rzeczy jednostkowych (np. stół, kot)

Pojęcia ogólne powstają dlatego, iż istnieją różne stopnie podobieństwa między rzeczami jednostkowymi. Np. Sokrates i Platon są bardziej do siebie podobni, niż Sokrates do osła; i fakt ten znajduje odbicie w gatunkowym pojęciu człowieka. Jednakże w określaniu relacji między pojęciami a rzeczami musimy być ostrożni – nie ma czegoś takiego, jak realna, obiektywnie istniejąca natura wspólna Sokratesowi i Platonowi, w której oni mogliby uczestniczyć, jest zaś tak, iż natura, którą jest Sokrates, i natura, którą jest Platon, są podobne. Nie ma i nie może być wspólnej rzeczywistości istniejącej równocześnie w dwóch przedstawicielach jakiegoś gatunku.

Powstanie brzytwy, czyli zasady oszczędności, miało na celu przede wszystkim wyeliminowanie jakichkolwiek nieobserwowalnych bytów, których istnienia nie domagałyby się dane uzyskane z doświadczenia i, ogólnie rzecz biorąc, ostateczne uproszczenie naszego poglądu na Wszechświat. Zastosowanie przez Ockhama jego brzytwy do ogólnie dotąd akceptowanej teorii ruchu Arystotelesa – według której każde ciało ma swoje naturalne miejsce i porusza się, aby to miejsce osiągnąć – doprowadziło pośrednio do powstania prawa bezwładności: według Ockhama ciało porusza się, bo jest w ruchu, sam fakt ruchu wystarcza i innych przyczyn szukać nie trzeba. Odrzucenie arystotelesowskiej teorii ruchu stało się początkiem rozkwitu mechaniki i nauk przyrodniczych.

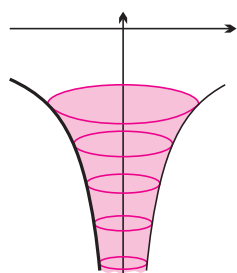
Anna CZUCHRY

Róg Gabriela

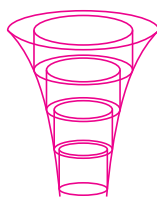
Kiedy obrócimy gałąź hiperboli $y = 1/x$, $y < 0$, wokół osi OY powstanie gigantyczny twór zwany **rogiem Gabriela**.

Lejkowata część rogu zaznaczona kolorem na rysunku 1, a złożona

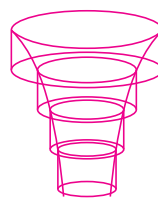
z tych punktów rogu, które mają współrzędną y mniejszą od -1 , stanowić by mogła dość osobliwe naczynie. Może być bowiem wypełniona farbą po brzegi, a mimo to farby tej zabraknie, by pomalować jej powierzchnię... Żeby się o tym przekonać, spójrzmy na rysunek 2 i zauważmy, że pole



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

powierzchni lejka P_l spełnia nierówność:

$$P_l \geq 2\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right),$$

podczas gdy objętość V_l zawarta we wnętrzu lejka (rys. 3) spełnia nierówność

$$V_l \leq \pi\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right).$$

Skoro pierwszy z tych szeregów jest

rozbieżny, a drugi zbieżny, więc lejek ma nieskończone pole powierzchni, a skończoną objętość... Ale przecież to niemożliwe, żeby farba wypełniająca kubek o jakimkolwiek kształcie nie pomalowała go! Jak więc rozwiązać ten paradoks?

W. S.

Łańcuchy Markowa

Wyobraźmy sobie, że mamy 2 tysiące złotych, a potrzebujemy 5 tysięcy. Aby osiągnąć nasz cel, bierzemy udział w następującej grze hazardowej. Rzucamy wielokrotnie monetą i gdy wypadnie orzeł, wygrywamy 1 tysiąc, natomiast w przypadku reszki tracimy 1 tysiąc. Stan naszego portfela to całkowita liczba tysięcy. W każdym dyskretnym kroku czasowym przesuwamy się z jednakowym prawdopodobieństwem $1/2$ w prawo lub w lewo (na osi liczbowej), a jak trafimy do 0 (bankructwo) lub 5 (osiągnięcie celu), to przerywamy grę i w stanie tym pozostajemy na zawsze.

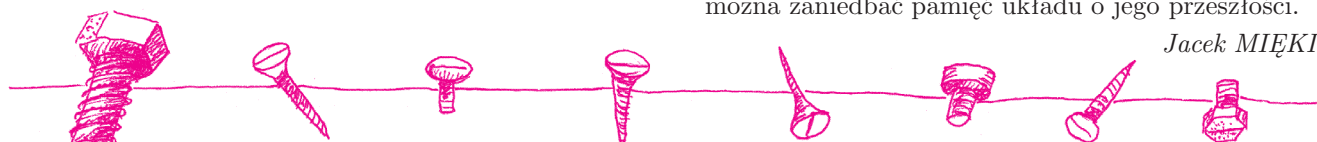
Powyższy przykład określany jest mianem błędzenia przypadkowego, nazywanym przez niektórych spacerem pijaka. Jest to przykład **łańcucha Markowa** (procesu stochastycznego, rodziny zmiennych losowych zależnych od czasu), w którym prawdopodobieństwo tego, że układ w czasie $t + 1$ będzie w określonym stanie, zależy tylko od stanu układu w czasie t , a nie od jego wcześniejszych stanów. Jest to tak zwana własność Markowa braku pamięci,

którą krótko można scharakteryzować tak: przyszłość nie zależy od przeszłości pod warunkiem, że znana jest teraźniejszość.

Jeżeli, dodatkowo, z każdego stanu możemy przejść z niezerowym prawdopodobieństwem, w skończonej liczbie kroków, do każdego innego stanu, to łańcuch taki nazywamy nieprzywiedlnym. Nasz przykładowy łańcuch nie jest, oczywiście, nieprzywiedlny. Możemy go „unieprzywiedlnić”, przyjmując że ze stanu 0 możemy przejść z pewnym dodatnim prawdopodobieństwem do stanu 1 (pomoc uczynnego przyjaciela), a ze stanu 5 do stanu 4, gubiąc 1 tysiąc złotych. Długookresowe zachowanie się łańcucha nieprzywiedlnego nie zależy od stanu początkowego – dla każdego stanu częstotliwość jego odwiedzania jest taka sama wzdłuż „prawie każdej” trajektorii czasowej (to jest jedno z wielu tak zwanych twierdzeń ergodycznych).

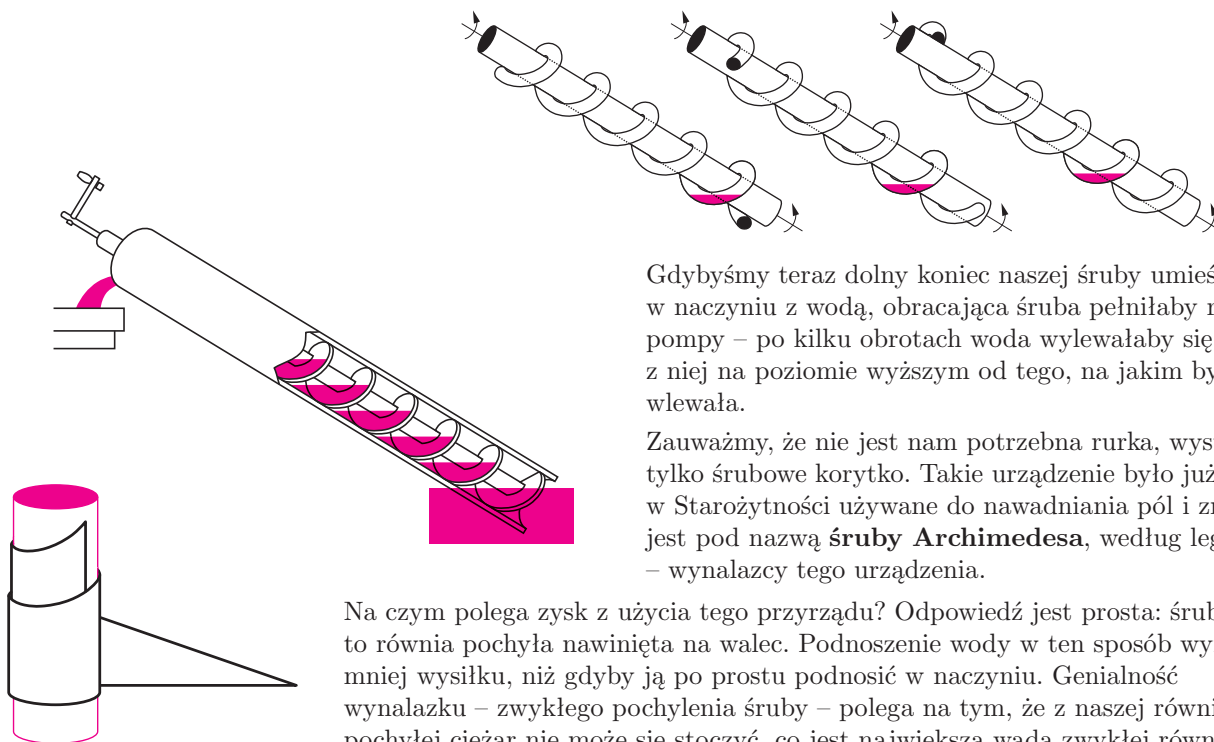
Łańcuch Markowa to przykład dynamicznego układu stochastycznego opisującego wiele zjawisk przyrodniczych i społeczno-ekonomicznych, w których można zaniedbać pamięć układu o jego przeszłości.

Jacek MIĘKISZ



Śruba Archimedesa

Śruba, dokładniej – linia śrubowa – to jedyna niepłaska linia ślizgająca się po sobie. Weźmy taką grubą linię i na dodatek pustą w środku, czyli rurkę w kształcie śruby. Pochylmy ją tak, aby niektóre jej fragmenty biegingły w dół. Nalejmy do rurki trochę wody. A następnie obracajmy rurkę wokół osi. Przy właściwym wyborze kierunku obrotu zobaczymy ciekawe zjawisko: woda wybierając dla siebie możliwie najniższe położenie, będzie się podnosiła do góry.



Gdybyśmy teraz dolny koniec naszej śruby umieścili w naczyniu z wodą, obracająca śruba pełniłaby rolę pompy – po kilku obrotach woda wylewałaby się z niej na poziomie wyższym od tego, na jakim by się wlewała.

Zauważmy, że nie jest nam potrzebna rurka, wystarczy tylko śrubowe korytko. Takie urządzenie było już w Starożytności używane do nawadniania pól i znane jest pod nazwą **śruby Archimedesa**, według legendy – wynalazcy tego urządzenia.

Na czym polega zysk z użycia tego przyrządu? Odpowiedź jest prosta: śruba to równia pochyła nawinięta na walec. Podnoszenie wody w ten sposób wymaga mniej wysiłku, niż gdyby ją po prostu podnosić w naczyniu. Genialność wynalazku – zwykłego pochylenia śruby – polega na tym, że z naszej równi pochyłej ciężar nie może się stoczyć, co jest największą wadą zwykłej równi.

M. K.

Przerwa Cassiniego i przerwa Enckego

Wykonane przed laty przez sondy Pioneer zdjęcia pierścieni Saturna ujawniły, że wyglądają one jak dawnego typu płyta gramofonowa. Składają się z mnóstwa wąskich jasnych pierścieni poprzedzielanych mnóstwem wąskich przerw. Z Ziemi przez średnie teleskopy widać tylko trzy szerokie pierścienie oznaczone symbolami A, B i C (kolejno coraz bliższe Saturnowi). Najjaśniejszy jest pierścień B o promieniu wewnętrznym równym 1,52 i zewnętrznym 1,95 promienia planety (wynoszącego 60 000 km). Od pierścienia A oddziela go przerwa, widoczna za pomocą nawet niewielkich teleskopów amatorskich, zwana **przerwą Cassiniego**, dość szeroka, bo aż na 4500 km. Jej promień wynosi w przybliżeniu 2 promienie Saturna.

Kto przeczytał notatkę o oknach Kirkwooda w pasie planetoid, niewątpliwie zacznie podejrzewać, że brak lodowych bryłek w przerwie Cassiniego może też być skutkiem rezonansowego oddziaływania z jakimiś satelitami Saturna. Wybór jest duży, więc szukanie rezonansów na ślepo może być zajęciem trochę

nużącym. Najmasywniejszy satelita, Tytan, obiega Saturna trochę za daleko, by rezonans z nim cząstki obiegającej Saturna w przerwie Cassiniego był niskiego rzędu – promień jego orbity to 20 promieni planety. Za to najbliższy i w miarę masywny Mimas – to właśnie to. Promień jego orbity wynosi 3,1 promieni Saturna, więc rezonans z przerwą Cassiniego wynosi $(3,1 / 2)^{3/2} \approx 2/1$. Stwierdzamy więc, że ten właśnie niskiego rzędu rezonans z Mimasem musi być przyczyną istnienia przerwy. Dlaczego jest ona tak szeroka? To zupełnie inna i dużo trudniejsza sprawa.

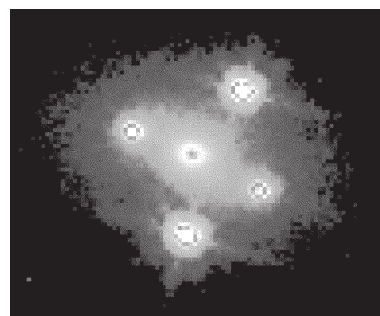
Trudniejsza też sprawa jest z drugą dość słynną przerwą w pierścieniach, mianowicie **przerwą Enckego**. Znajduje się ona w pierścieniu A, blisko jego zewnętrznej krawędzi. Jest szeroka na 330 km i jej promień jest równy 2,23 promieni Saturna. Rezonans z Mimasem wynosi więc $(3,1 / 2,23)^{3/2} \approx 8/5$. Można by uznać, że jest to właściwy wynik, gdyby nie fakt, iż w przerwie Enckego obiega Saturna jego najbliższy satelita, Pan. Dlaczego rezonans nie wyrzucił go z przerwy?

T. K.

Krzyż Einsteina

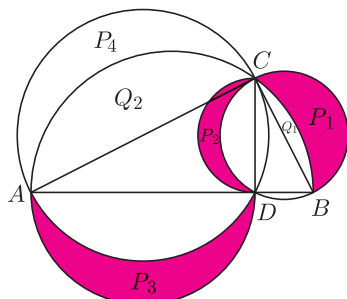
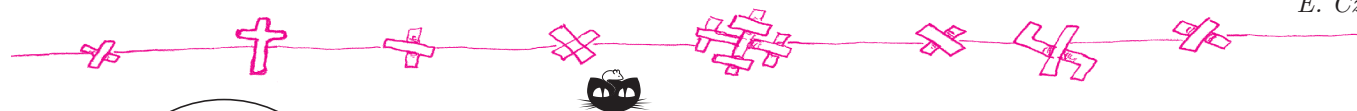
Jednym ze zjawisk przewidzianych przez ogólną teorię względności Einsteina jest ugięcie kierunku rozchodzenia się promieni świetlnych w polu grawitacyjnym masywnego obiektu, np. gwiazdy. Ugięcie to jest wynikiem zakrzywienia czasoprzestrzeni ściśle związanego z występowaniem pola grawitacyjnego: im silniejsze jest pole grawitacyjne w przestrzeni, tym większe jest jej zakrzywienie. A według ogólnej teorii względności promienie świetlne poruszają się po tzw. liniach geodezyjnych, czyli krzywych będących (lokalnie) najkrótszymi drogami.

Ugięcie przez Słońce światła pochodzącego od odległych gwiazd zostało po raz pierwszy zaobserwowane w czasie zaćmienia Słońca w 1919 roku. W przypadku, gdy źródło światła znajduje się dokładnie na linii łączącej masywny obiekt zakrzywiający czasoprzestrzeń z obserwatorem, zamiast punktowego źródła światła zobaczymy świetlną otoczkę wokół tego obiektu. Spodziewamy się zaobserwować taki efekt wokół czarnej dziury, która sama w sobie nie promieniuje światła, a wytwarza silne pole grawitacyjne uginające promienie światła koło niej przechodzące.



Obecnie obserwujemy tzw. **Krzyż Einsteina** (nazwany tak na cześć twórcy teorii względności), gdzie pojedynczy obiekt – źródło światła – jest widziany poczwórnie. Promieniowanie wytwarzane przez odległy kwazar zostaje lekko ugięte przez duże skupienie mas w znajdującej się po drodze galaktyce – obserwujemy dwa obrazy przesunięte względem siebie, oraz następne dwa w innej płaszczyźnie. Obserwowane różnice w jasności obrazów kwazara biorą się z różnicy dróg optycznych pokonywanych przez światło, która powoduje i to, że każda para obrazów odpowiada innemu momentowi.

E. Cz.

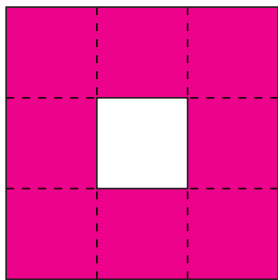


Rozwiązanie zadania M 1001.

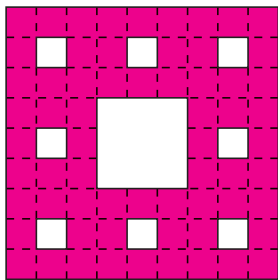
Wykażemy najpierw, że suma pól księżyców Hipokratesa opartych na przyprostokątnych jest równa polu trójkąta ABC. Mamy

$P_1 + P_4 = (Q_2 + P_4) + (Q_1 + P_1) - (Q_1 + Q_2) = \triangle AB - (Q_1 + Q_2) = P_{\triangle ABC}$,
gdyż suma kwadratów średnic AC i BC jest równa kwadratowi średnicy AB. Zauważmy dalej, że księżyce o polach P_2, P_3, P_4 są figurami podobnymi. Są to przecież księżyce Hipokratesa oparte na dłuższej przyprostokątnej w podobnych trójkątach prostokątnych BDC, CDA i BCA. Pole każdego z tych księżyców stanowi więc tę samą część pola trójkąta, na którym jest on oparty. Ponieważ $P_{\triangle BCD} + P_{\triangle CDA} = P_{\triangle BCA}$, więc $P_2 + P_3 = P_4$. Zatem $P_1 + P_2 + P_3 = P_1 + P_4 = P_{\triangle ABC}$.

Dywan Sierpińskiego



Rys. 1



Rys. 2

Wymiar podobieństwa figury (płaskiej) to taka liczba D , że całą tę figurę można podzielić na $N = n^D$ części podobnych do całości w skali $r = \frac{1}{n}$ ($n > 1$).

Wynika stąd, że $D = \frac{\ln N}{\ln n}$. Nietrudno zauważyć, że jeśli podział, o którym mowa wyżej, jest możliwy, to można figurę podzielić także na N^k części o skali podobieństwa r^k , dla każdej liczby naturalnej k . Nie zmienia to jednak wymiaru, gdyż $\frac{k \ln N}{k \ln n} = \frac{\ln N}{\ln n}$. Nie dziw, że mogą się pojawić wymiary, nie będące liczbami całkowitymi (i że nie każda figura ma wymiar podobieństwa!).

Dywan Sierpińskiego jest przykładem figury z niecałkowitym wymiarem podobieństwa. Oto przepis na konstrukcję dywanu. Podzielmy kwadrat jednostkowy na 9 przystających kwadratów (o boku długości $1/3$) i usuńmy środkowy z nich, czyli ten, który jest całkowicie zawarty we wnętrzu dużego kwadratu. To, co zostaje, czyli figurę złożoną z 8 przystających kwadratów, nazwijmy S_1 (rys. 1). Powtórzmy to postępowanie wobec każdego z tych 8 kwadratów. Otrzymamy 8^2 kwadratów o boku $1/3^2$ i tę figurę nazwijmy S_2 (rys. 2). Działając tak dalej, w k -tym kroku otrzymamy figurę S_k , złożoną z 8^k kwadratów o boku $1/3^k$. Dywanem Sierpińskiego nazywa się część wspólna wszystkich zbiorów S_k dla $k \in \mathbb{N}$, czyli to, co zostaje po usunięciu wszystkich wnętrzą coraz mniejszych kwadratów. Jak wynika ze wzoru, jego wymiarem podobieństwa jest liczba $\frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,89279$. Tak więc dywan Sierpińskiego jest fraktalem: jest figurą samopodobną (rozkłada się na części podobne do całości) i ma niecałkowity wymiar podobieństwa. Co równie ciekawe, jest także ciągłym obrazem odcinka $\langle 0, 1 \rangle$, rozcinającym płaszczyznę R^2 na tyle części, że do ich ponumerowania trzeba by było użyć wszystkich liczb naturalnych.

W. B.

Słowo Banacha

Słowa składają się z liter. Te litery nadają im sens lub czynią je bezsensownymi. Sam schemat ustawienia liter na ogół nie wyznacza sensu słowa, ale może niektóre znaczenia wykluczyć. Np. pięcioliterowe słowo zbudowane z trzech liter o schemacie

$$\alpha\beta\gamma\beta\alpha,$$

może być słowem KAJAK lub NAGAN, a nie może być słowem BANAN.

W matematyce istnieją jednak słowa takie, że ich sens jest zawsze taki sam, niezależnie od tego, jakie znaczenie (spośród elementów ustalonego alfabetu) wybierzemy dla liter.

Oto takie **słowo** podane przez Stefana **Banacha**:

$$\alpha^2\beta^2\alpha^{-2}\beta^{-2}\alpha^{-2}\beta^2\alpha^4\beta^{-2}\alpha^{-2}\beta^2\alpha^{-2}\beta^{-2}\alpha^2;$$

jeżeli za α i β podstawimy dowolną izometrię zwykłej płaszczyzny euklidesowej, to słowo to oznaczać będzie identyczność, przekształcenie nieporuszające żadnego punktu.

Kolejno wypisywane symbole izometrii oznaczają ich złożenie, wykładnik -1 oznacza przekształcenie odwrotne, wykładnik 2 oznacza dwukrotne wykonanie przekształcenia itd. Przy tym napisy typu $\gamma^k\gamma^{-k}$ i $\gamma^{-k}\gamma^k$ zawsze znikają.

Izometria to przekształcenie niezmiennącej żadnej odległości. Na płaszczyźnie euklidesowej każda izometria jest przesunięciem, obrotem lub symetrią z poślizgiem (czyli złożeniem symetrii osiowej z przesunięciem równoległym do jej osi; w szczególności symetria osiowa jest symetrią z zerowym poślizgiem).

Ciekawe, że dla przestrzeni trójwymiarowej słowa takiego wymyślić się nie da (podobnie będzie dla zarówno dwu-, jak i więcejwymiarowych przestrzeni eliptycznych i hiperbolicznych).

Po co komu takie słowo? Okazuje się, że w przestrzeniach, gdzie takie słowo nie istnieje, możliwy jest *paradoksalny rozkład*, co oznacza, że gdy mamy dwa zbiory ograniczone i zawierające choćby małą kulkę (dla dwóch wymiarów – kółko), to można jeden z nich podzielić na skończoną liczbę części, z których – bez zmiany ich kształtów ani rozmiarów, czyli izometrycznie – można ułożyć drugi. W szczególności np. można kulę podzielić na pięć części, z których da się ułożyć dwie takie same kule.

Istnienie takiego słowa mówi, że dowolne izometrie są tak wzajemnie powiązane, że podobne figle są niemożliwe. Banach, znajdując to słowo, wykazał, że na płaszczyźnie euklidesowej paradoksalnego rozkładu nie ma. Nie wiedział, że jest to jedyna przyzwoita geometria o tej własności – rzecz została dowiedziona w kilku podejściach i jest wiadoma od 1987 roku.

Ciekawe, że krótsze słowo o tej własności nie istnieje.

M. K.

Nurek Kartezjusza



Rozwiązanie zadania F 579.
Ponieważ natężenie prądu płynącego przez galwanometr wynosi zero, zatem $I_1 = I_2$ oraz $I_3 = I_4$, a także

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1}.$$

Otrzymujemy następujące wyniki:

$$I_1 = I_2 = \frac{\mathcal{E}}{(R_1 + R_2)} \approx 26,7 \text{ mA}$$

oraz

$$I_3 = I_4 = \frac{\mathcal{E}}{(R_3 + R_4)} = 4 \text{ mA}.$$



Rozwiązanie zadania F 580.
Gdy pierścienie Newtona są obserwowane w świetle przechodzącym, warunek na wzmocnienie światła ma postać:

$$2hn = m\lambda,$$

gdzie h jest grubością warstwy cieczy między soczewką a powierzchnią związaną z promieniem pierścienia Newtona r_m następująco:

$$h = \frac{r_m^2}{2R}.$$

Podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy $n = 1,33$.

Nie jest pewne, czy tytułowy przyrząd rzeczywiście skonstruował Kartezjusz. Pierwszy znany opis pochodzi od jego ucznia, Raffaella Maggiottiego. Tę fizyczną zabawkę można bez trudu wykonać własnoręcznie. Najprościej posłużyć się plastikową butelką z zakrętką i pustą fiolką po zapachu do ciast. Butelkę napełniamy wodą do pełna, a fiolkę mniej więcej do połowy. Następnie wrzucamy fiolkę (otworkiem do dołu) do butelki. Jeżeli fiolka pływa minimalnie wynurzona, to butelkę zakręcamy i mamy gotową zabawkę – **nurka Kartezjusza**. Jeżeli tonie (lub jest bardzo wynurzona), to następnym razem nalewamy do niej mniej (lub więcej) wody.

Żeby zobaczyć działanie przyrządu, należy butelkę ścisnąć. Fiolka-nurek powinna wtedy opaść na dno butelki, a po zwolnieniu nacisku powrócić na powierzchnię. Jeżeli nalaliśmy zbyt mało wody do fiolki, to może się okazać, że nie jesteśmy w stanie ścisnąć butelki wystarczająco mocno. Wtedy należy przyrząd poprawić.

Można oczywiście fiolkę „przebrać za prawdziwego nurka” i pokazywać „u cioci na imieninach”. Nie dla wszystkich oczywiste będzie, dlaczego nurek zachowuje się w opisany sposób. Myślę jednak, że nasi stali Czytelnicy nie będą mieli problemu z ewentualnym wytłumaczeniem. W *Delcie* 6/1996 zrobili to Kubus Puchatek z Prosiaczkiem.

Na podobnej zasadzie działają gęstościomierze służące np. do mierzenia stężenia napojów alkoholowych lub stopnia naładowania akumulatorów (obecnie rzadko używane ze względu na rozpowszechnienie akumulatorów bezobsługowych) oraz pewien rodzaj dekoracyjnego termometru. Jest to szklany cylinder, w którym znajduje się kilka nurków z etykietkami odpowiadającymi temperaturom zbliżonym do temperatury pokojowej, a aktualną temperaturę odczytuje się, odnajdując nurka, który „lewituje” między dnem a powierzchnią. Przy odrobinie cierpliwości taki termometr również można zrobić samemu.

P. Z.



Pasy van Allena

Liczniki kosmicznych cząstek naładowanych należą do standardowego wyposażenia sztucznych satelitów badawczych i sond kosmicznych od zarania ery kosmicznej. Wyposażone w nie były pierwsze Sputniki i Explorery w roku 1957 i latach następnych. Wyniki zliczeń tych cząstek były z początku zagadkowe. Wraz ze wzrostem wysokości liczniki sygnalizowały wzrost gęstości cząstek i w pewnym momencie psuły się, a w każdym razie tak to wyglądało. Jednak nie może się psuć w identyczny sposób ileś kolejnych liczników, w dodatku „różnych narodowości”, toteż rychło zinterpretowano to zjawisko jako blokowanie się liczników przy zbyt wielkiej – jak na ich możliwości – gęstości cząstek. Na orbitę polecały nowe liczniki i okazało się, że gęstości cząstek mają maksima i minima. I tak już w 1958 r. za pomocą Explorera 3 grupa amerykańskich badaczy pod kierunkiem Jamesa van Allena stwierdziła, że Ziemię otaczają co najmniej dwa pierścienie, w których uwięzione są przez ziemskie pole magnetyczne cząstki naładowane. Najczęściej są one teraz nazywane **pasami van Allena** (inaczej: pasami radiacyjnymi, pasami promieniowania pierścieniowego).

Pierścienie te to położone w płaszczyźnie równika (w zasadzie – magnetycznego) grube i szerokie torusy o rogalikowatym przekroju. Wewnętrzny pas van Allena rozciąga się w granicach od 1,5 do 2 promieni Ziemi (licząc od jej środka) i zawiera protony o energiach rzędu 100 MeV, elektrony o energiach 1 MeV i inne cięższe cząstki będące wtórnym promieniowaniem kosmicznym, czyli produktami zderzeń cząstek promieniowania kosmicznego z atomami bardzo rzadkiej tam atmosfery. Pas zewnętrzny rozciąga się od 3 do 4 promieni Ziemi i zawiera głównie protony i elektrony o energiach w przybliżeniu o rząd wielkości niższych i pochodzące z wiatru słonecznego. Sam wiatr słoneczny jest łącznikiem między Słońcem i ziemską magnetosferą, przez co struktura magnetosfery i zawartych w niej pasów van Allena zmienia się wraz ze stanem aktywności Słońca. Na ogół unika się wyrzucania sztucznych satelitów (tym bardziej statków załogowych) na orbity, na których obiekty te miałyby długo przebywać w pasach radiacyjnych, gdyż wpływ wysokoenergetycznych cząstek na aparaturę czy na samych ludzi, choć nie do końca poznany – jest z pewnością szkodliwy.

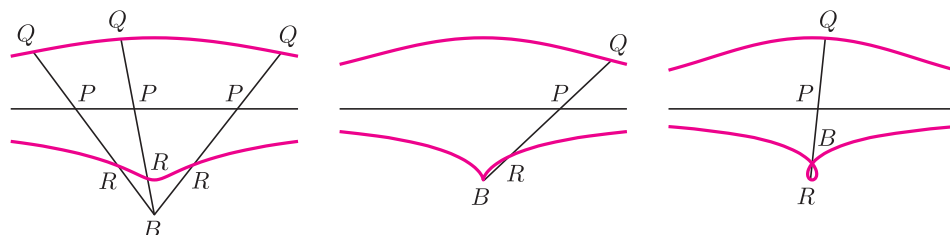
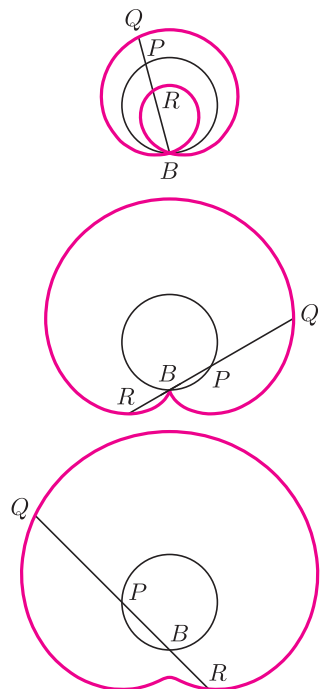
T. K.

Ślimak Pascala

Jeśli, mając na płaszczyźnie jakąś krzywą, ustalimy sobie dodatkowo jeszcze jakiś punkt B (dalej będzie się nazywał biegunem ślimaka) i jakąś liczbę dodatnią ρ (promień ślimaka), to możemy narysować ślimaka danej krzywej (inna nazwa to *konchoida*; gr. *konche*, łac. *concha* – muszla). Polega to na tym, aby każdy punkt P krzywej zastąpić dwoma innymi, Q i R : na prostej łączącej B z P , po obu stronach P odkładamy odcinek o długości ρ . W ten sposób powstają dwie nowe krzywe, które łącznie nazywa się właśnie ślimakiem lub konchoidą.

Ślimak Pascala to taki ślimak okręgu, którego biegun leży na tym okręgu. W zależności od promienia ślimaka może on przybierać różne kształty, pokazane na marginesie.

Co ciekawe, ślimak Pascala nie ma dwóch części, tylko jedną, choć np. ślimak prostej (zwany konchoidą Nikomedesa) jest zawsze w dwóch kawałkach.



Środkowy ślimak Pascala, czyli ten, dla którego ρ jest równe średnicy okręgu, to *kardioida*, którą można uzyskać też jako tor punktu okręgu toczącego się po okręgu o tym samym promieniu.

Dysponując możliwością rysowania ślimaków (sądzę, że bardzo prosty przyrząd do ich rysowania Czytelnik sam obmyśli), można wykonać szereg konstrukcji niewykonalnych cyrklem i linijką, np. trysekcję dowolnego kąta. Jak to zrobić za pomocą ślimaka Pascala, pisaliśmy w *Delcie* 11/1996.

M. K.

Kot Schrödingera

Związek między światem mikroskopowym a makroskopowym jest fundamentalnym zagadnieniem teorii pomiaru kwantowego. W idealnym modelu pomiaru oddziaływanie między pomiarowym urządzeniem makroskopowym („miernik”) a systemem mikroskopowym („atom”) powoduje ich *splątanie* i powstanie stanu kwantowej superpozycji układu „miernik + atom”. Taka superpozycja nie jest jednak nigdy obserwowana. Schrödinger zilustrował ten problem, biorąc kota zamiast „miernika” i rozważając superpozycję dwóch stanów kota: martwy lub żywy (taki obrazek jest wprawdzie tylko pewnego rodzaju metaforą, ale kwantowe superpozycje obejmujące stany pomiarowe są często nazywane po prostu **kotami Schrödingera**).

Wyobraźmy sobie duże zamknięte pudło o nieprzenikliwych ścianach. W środku znajduje się kot i licznik Geigera z pewną ilością promieniotwórczej substancji. Substancja ta może z prawdopodobieństwem $1/2$ ulec rozpadowi lub nie. Jeśli nastąpi rozpad, to wyładowanie w liczniku Geigera uruchomi młotek rozstrząskujący fiolkę z cyjankiem potasu. Z zewnątrz wiemy tylko tyle,

że kot jest martwy lub nie, a więc że znajduje się w superpozycji stanów $|\text{żywy}\rangle$ i $|\text{martwy}\rangle$. Dopiero dokonując pomiaru – czyli otwierając pudło, możemy dokonać redukcji tego stanu i znaleźć kota żywego bądź martwego. Jednak czy naprawdę można stosować procedury kwantowe do tak wielkiego i złożonego układu jak kot? Przecież od pewnego poziomu złożoności muszą przestać obowiązywać prawa mikroskopowe, ustępując makroskopowym – w których nie ma miejsca na stwierdzenia typu „kot znajduje się w liniowej superpozycji stanów $|\text{żywy}\rangle$ i $|\text{martwy}\rangle$ ” – bo jak z punktu widzenia codziennego doświadczenia można mówić o współistnieniu życia i śmierci? Czy istnieje więc jakaś granica stosowalności mechaniki kwantowej? To zagadnienie stanowi istotę tzw. *paradoksu kota Schrödingera*.

Paradoks ten wyjaśnia się w ten sposób, że złożone stany kwantowe nie mogą być opisywane za pomocą *stanów kwantowych*, a raczej tak zwanej *macierzy gęstości*, która uwzględnia klasyczne prawdopodobieństwa i kwantowe amplitudy. I cały problem kota zostaje zredukowany do zagadnienia ze zwykłej, niekwantowej fizyki statystycznej.

E. Cz.



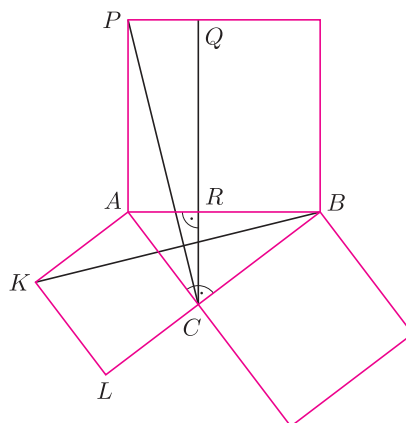
mała delta

Majtki Pitagorasa

Пифагоровы штаны
с каждой стороны равны.

Termin **majtki Pitagorasa** został prawdopodobnie wymyślony przez Kisielową, autora najpopularniejszego, wydawanego wiele dziesiątek lat podręcznika matematyki.

Bierze się on z sugestii, iż kolorowa część poniższego rysunku przypomina właśnie tę część garderoby, choć trudno się zgodzić, aby były one z każdej strony jednakowe.



Problemem, jakie mianowicie są w rzeczywistości nogawki majtek Pitagorasa, zajęli się już Starożytni, co mamy pięknie udokumentowane w *Elementach* Euklidesa.

Euklides zauważył, że przedłużenie wysokości (rozporek?) trójkąta prostokątnego, wokół którego uszyte są majtki, dzieli ich górną część na kawałki równoważne odpowiednim, leżącym po tej samej stronie nogawkom.

Wykażemy to dla lewej nogawki (bo dowód dla prawej jest zupełnie analogiczny).

Ponieważ QR jest przedłużeniem wysokości CR i ponieważ $AP \parallel QR$, więc

$$2 \cdot S_{APC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PQ = AP \cdot PQ = S_{APQR}.$$

Z kolei ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny i, wobec tego, punkty B , C i L leżą na jednej prostej i ponieważ $AK \parallel LC$, więc

$$2 \cdot S_{ABK} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AK \cdot KL = AK \cdot KL = S_{AKLC}.$$

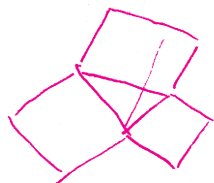
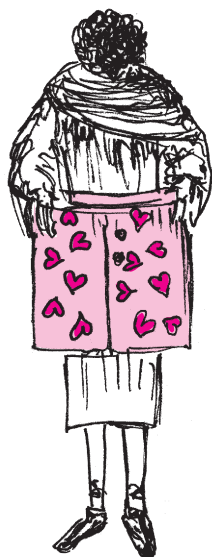
Teraz zauważmy, że trójkąty APC i ABK są przystające. Istotnie, $AP = AB$, bo to boki tego samego kwadratu, podobnie $AC = AK$ i wreszcie

$$\sphericalangle PAC = \sphericalangle BAC + 90^\circ = \sphericalangle BAK.$$

Wobec tego

$$S_{APC} = S_{ABK}, \quad \text{a zatem} \quad S_{APQR} = S_{AKLC}.$$

Oczywiście to twierdzenie o nogawkach jest też dowodem twierdzenia o całych majtkach, czyli twierdzenia Pitagorasa.



Majtki Pitagorasa

Wstęga Möbiusa

Jeżeli pasek papieru skęcimy o 180° i skleimy jego końce, to będziemy dysponowali **wstęgą Möbiusa**.

Jest to bardzo interesujący obiekt. Z każdego jego punktu można zawędrować do każdego innego nie przekraczając jego brzegu. Nie ma w tym nic dziwnego, ale idąc np. wzdłuż linii środkowej sklejonego paska po pewnym czasie znajdziemy się w tym samym miejscu, lecz „do góry nogami”. Taką własność powierzchni nazywa się *jednostronnością*.

Zauważmy, że zawsze towarzyszy jej inna własność – nieorientowalność. Oznacza ona, że małe kółko z zaznaczoną orientacją po przebyciu poprzednio opisanej drogi będzie zorientowane przeciwnie.

Wstęga Möbiusa ma brzeg w jednym kawałku – podobnie jak koło. Jeśli spojrzeć na ten brzeg z punktu widzenia węzłów i splotów (patrz *Delta* 4/2002 i 5/2002), to okaże się, że jest to węzeł trywialny, czyli gdyby usunąć wstęgę i zostawić sam brzeg, byłby to zwyczajny okrąg, tylko trochę zdeformowany.

Ciekawe rzeczy dzieją się ze wstęgą, gdy ją przecinać. Oczywiście przecięcie w poprzek daje zwykły pasek papieru, więc przecinać ją wzdłuż, po liniach równo odległych do brzegu. Okazuje się, że wstęga Möbiusa wie, gdzie ma swoją linię środkową. Przetnijmy ją bowiem wzdłuż tej linii, a potem trochę obok, np. w $\frac{1}{3}$ szerokości od brzegu. Okaże się, że drugie rozcięcie będzie zawsze dwukrotnie dłuższe od pierwszego. I inne też będą jego efekty.

W wyniku pierwszego cięcia otrzymamy jedną powierzchnię, ale z powrotem dwustronną. Jej dwa brzegi będą tworzyły splot dwóch okręgów zaczepionych jeden w drugim. W wyniku drugiego cięcia otrzymamy dwie zaplecione powierzchnie; jedna będzie taką samą wstęgą Möbiusa, jak była rozcinana, druga zaś będzie powierzchnią dwustronną (a więc dwubrzedną, orientowalną), którą można uzyskać z paska papieru podobnie jak wstęgę Möbiusa, tylko po skęceniu paska o 360° . Zauważmy jednak, że nie jest to taka powierzchnia, jak otrzymana przez rozcięcie wstęgi Möbiusa wzdłuż linii środkowej – tamta powstaje z paska skęczonego o 720° .

Skoro już zdecydowaliśmy się skęcać papier o różne wielokrotności kąta 180° , to zobaczymy, co się stanie, gdy skleimy pasek papieru skęczonego o 540° . Sądzę, że każdy z łatwością sprawdzi, że jest to powierzchnia jednostronna, nieorientowalna, o jednym brzegu, ale tym razem tworzącym węzeł zwany trójlistnikiem.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

Igła Buffona

W wydanym w 1777 roku dodatku do swojej 44-tomowej *Historii Naturalnej* książkę Georges Louis Leclerc de Buffon pytał: jakie jest prawdopodobieństwo tego, że igła o długości l , rzucona na wielki arkusz papieru podzielony równoległymi prostymi na pasy o szerokości s większej od l , przetnie jedną z tych prostych? Sam udzielił prawidłowej odpowiedzi: prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2l}{s\pi}$.

Proste są proste, papier jest płaski, więc skąd π ? Wszystkie proste i pasy są takie same, więc położenie igły (zwanej **igłą Buffona**) po upadku można opisać za pomocą tylko dwóch parametrów: odległości d środka igły od najbliższej prostej oraz kąta α , nie większego z dwóch kątów, jakie igła tworzy z prostą prostopadłą do wszystkich prostych oddzielających pasy. Tak więc

$$0 \leq d \leq \frac{s}{2} \quad \text{oraz} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Niech więc zbiór wszystkich par (d, α) spełniających te warunki, a więc prostokąt

$$I = \left\{ (d, \alpha) : 0 \leq d \leq \frac{s}{2}, 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych. Które zdarzenia są sprzyjające?

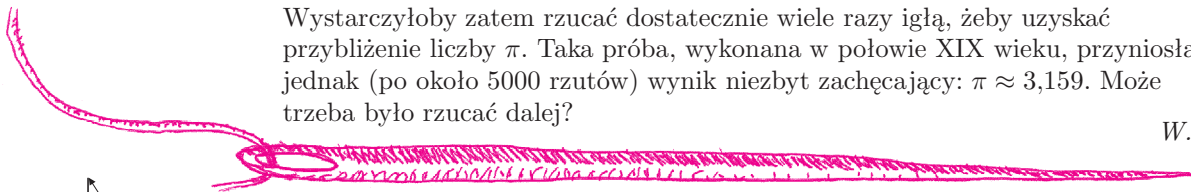
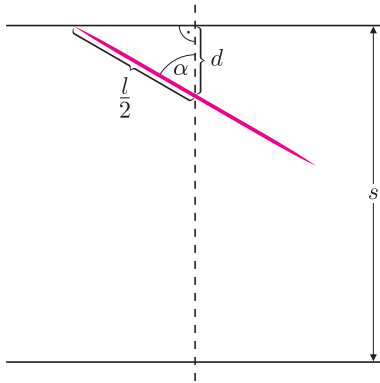
Gdy igła dotyka końcem prostej, odległość d jest równa $\frac{l}{2} \cos \alpha$, zatem igła przetnie prostą, gdy $d < \frac{l}{2} \cos \alpha$. Pozostaje znaleźć stosunek pola, jakie w prostokącie I zajmuje zbiór Z elementarnych zdarzeń sprzyjających, do pola całego prostokąta (to prawdopodobieństwo geometryczne). Pole I to $\frac{s}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$, natomiast pole zbioru Z to pole obszaru pod wykresem funkcji $d = \frac{l}{2} \cos \alpha$, ograniczonego osiami współrzędnych. Po obliczeniu odpowiedniej całki oznaczonej otrzymujemy prawdopodobieństwo zdarzenia Z :

$$P(Z) = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{s}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{s\pi}.$$

To prawdopodobieństwo wygląda szczególnie sympatycznie, gdy $s = 2l$.

Wystarczyłoby zatem rzucać dostatecznie wiele razy igłą, żeby uzyskać przybliżenie liczby π . Taka próba, wykonana w połowie XIX wieku, przyniosła jednak (po około 5000 rzutów) wynik niezbyt zachęcający: $\pi \approx 3,159$. Może trzeba było rzucać dalej?

W. B.



Pierścienie Newtona

Są to prążki interferencyjne powstające w świetle przechodzącym lub odbitym w pobliżu zetknięcia się powierzchni wypukłej (np. soczewki) z płaszczyzną. Niech R oznacza promień krzywizny powierzchni wypukłej soczewki, r – promień danego **pierścienia Newtona**, a d – grubość warstwy powietrza w tym punkcie. Widzimy, że

$$R^2 = r^2 + (R - d)^2$$

i

$$r^2 = R^2 - R^2 + 2Rd - d^2 = 2Rd - d^2.$$

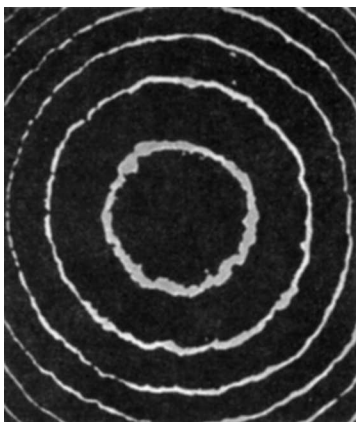
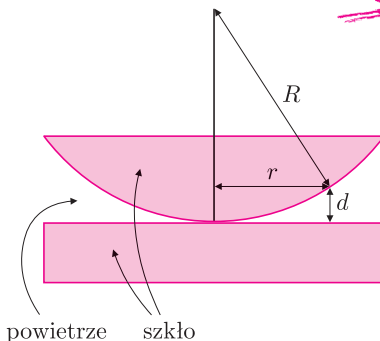
Ale $d \ll R$, zatem $r^2 \approx 2Rd$ i $d \approx r^2/2R$. Stąd wynika, że odległości między zewnętrznymi pierścieniami zmniejszają się. Maksima interferencyjne powstają wtedy, gdy różnica dróg optycznych jest równa $n\lambda$, przy czym λ jest długością fali padającego światła, a n jakąś liczbą naturalną.

Tak więc dla światła przechodzącego

- maksima powstają, gdy $r^2 \approx n\lambda R$,
- a minima, gdy $r^2 \approx (n + \frac{1}{2})\lambda R$.

Znając długość światła λ można, mierząc promienie pierścieni, wyznaczyć promień soczewki. I takie właśnie jest ich zastosowanie: obserwacja pierścieni Newtona służy do pomiaru promieni krzywizny soczewek oraz kontroli regularności kształtu powierzchni.

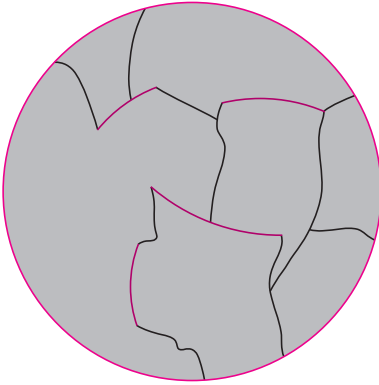
E. Cz.





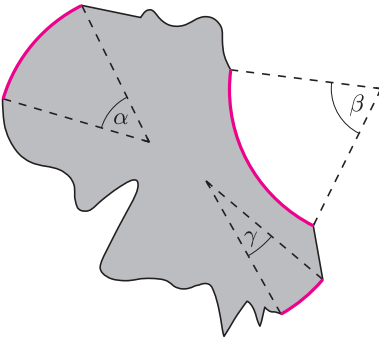
Rozwiązanie zadania M 1000.

Brzeg każdego wyciętego obszaru jest krzywą, której część może mieć kształt łuku okręgu.



Dla każdego obszaru T łączną długość łuku mierzoną w radianach, brana ze znakiem "+", jeśli łuk zwrócony jest wypukłością na zewnątrz T i ze znakiem "-" w przeciwnym przypadku, oznaczmy przez $f(T)$. Na przykład, dla obszaru z rysunku

$$f(T) = \alpha + \gamma - \beta.$$



Zauważmy, że przy podziale kwadratu na obszary możemy założyć, iż każdy łuk zawiera się w brzegu dokładnie dwóch obszarów (w razie potrzeby każdy łuk występujący na brzegu obszaru można podzielić na kilka części). Oczywiście wówczas „wypukłości” każdego łuku się znoszą i

$$\sum_T f(T) = 0,$$

gdzie T są obszarami, na które został pocięty kwadrat.

W przypadku podziału koła kilka obszarów leży na brzegu okręgu. Łuki tego okręgu „wchodzą” w skład $\sum_T f(T)$ tylko ze znakiem "+", a zatem

$$\sum_T f(T) = 2\pi;$$

tym razem T są obszarami, na które zostało pocięte koło.

Nie jest więc możliwe, aby koło i kwadrat składały się z tych samych obszarów.

Paleofosfatometria

Tytułowy termin prawdopodobnie się nie przyjmie, ale kryjące się za nim badania wyjaśniły, przynajmniej w pewnej części, jedną z głównych zagadek paleontologii: dlaczego bardzo długo trzeba było czekać na wytworzenie zbliżonego do współczesnego stężenia tlenu cząsteczkowego O_2 w atmosferze [1].

Jak wiadomo, obecność tego niezbędnego do oddychania gazu zawdzięczamy nieustannej pracy roślin (w tym glonów) i bakterii. Jak dawno pojawiły się cyjanobakterie, pierwsze organizmy produkujące tlen w procesie fotosyntezy, nie zostało jeszcze ostatecznie rozstrzygnięte, ale nastąpiło to nie później niż 2,75 miliardów lat temu, czyli w górnym archaiku. Natomiast istotny wzrost stężenia tlenu w atmosferze nastąpił dopiero 2 miliardy lat później. Uważa się tak, ponieważ dopiero w paleozoiku, czyli 600 milionów lat temu, pojawiły się na Ziemi pierwsze zwierzęta wielokomórkowe. Wcześniej nie było ich, bo widocznie nie miałyby czym oddychać.

O niskim stężeniu tlenu świadczy też m.in. stwierdzenie występowania siarkowodoru w głębokim oceanie w poprzedzającym paleozoik górnym proterozoiku. Gdyby stężenie tlenu w górnych warstwach oceanu (a więc i w atmosferze) było duże, to koncentracja tlenu w dolnych warstwach byłaby wystarczająca do utlenienia siarkowodoru.

Jeszcze wcześniej, ponad 1,8 miliarda lat temu, w oceanach musiały być rozpuszczone węgliki, siarczki i fosforki żelaza oraz tlenek żelazawy, gdyż występowanie warstw wzbogaconych w te związki odkrywa się w skałach osadowych z tego okresu. Świadczy to o nieobecności tlenu cząsteczkowego w głębokim oceanie. W przeciwnym przypadku żelazo uległoby III stopniu utlenienia, a związki żelaza wytrącałyby się zbyt szybko (przy panującym wówczas stopniu zasadowości, ustalonym na podstawie tworzenia się wapieni).

Podsumowując tę sytuację, można stwierdzić, że przez 2 miliardy lat fotosyntetyzujące organizmy nie były w stanie wzbogacić w cząsteczkowy tlen ziemskiej biosfery. W zasadzie istnieją tylko dwa rozwiązania. Albo za mało tlenu było produkowane, albo za dużo wiązane w osadach oceanicznych. Początkowo myślano tylko o drugiej z podanych możliwości. Jednak w 1984 roku Holland zwrócił uwagę na to, że produkcja tlenu może być limitowana przez niedobór pierwiastków koniecznych do funkcjonowania fotosyntetyzujących organizmów. Niedostatek ten ograniczałby namnażanie komórek, a więc i globalną efektywność procesu fotosyntezy.

Idea ta znalazła właśnie ilościowe potwierdzenie. Autorzy pracy [3], analizując zawartość żelaza i fosforu w warstwach osadowych z okresu od 3,2 do 1,9 miliarda lat temu (czyli z archaiku i dolnego proterozoiku), stwierdzili, że we wczesnym oceanie adsorpcja fosforu przez wytrącający się tlenek żelaza była istotnym czynnikiem zmniejszającym koncentrację jonów ortofosfatowych PO_4^{3-} . Stężenie tej postaci fosforu było na poziomie 10–25% obecnej jego wartości, powodując zmniejszenie tempa fotosyntezy o 75–90%.

Niedobór fosforu skończył się jednak w górnym proterozoiku (począwszy od 1,8 miliarda lat temu). Niedostatek fotosyntezy mógłby być wtedy tłumaczony niedoborem innych niż fosfor niezbędnych do życia pierwiastków. Podejrzenia padają np. na azot lub śladowe metale, nie wyłączając żelaza [4].

Jedno jest pewne – problemy z nawożeniem są tak stare jak życie na Ziemi.

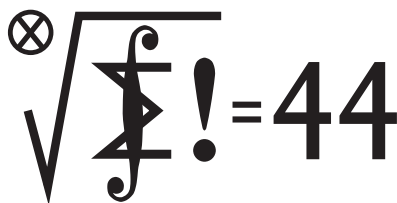
Piotr ZALEWSKI

[1] John M. Hayes, *A lowdown on oxygen*, *Nature* **417** (2002) 127.

[2] H.D. Holland, *The Chemical Evolution of the Atmosphere and Oceans*, Princeton Univ. Press, 1984.

[3] Chrystian J. Bjerrum, Donald E. Canfield, *Ocean productivity before about 1.9 Gyr ago limited by phosphorus adsorption onto iron oxides*, *Nature* **417** (2002) 159.

[4] A.D. Anbar, A.H. Knoll, *Trace metal limitation of primary production 1.85-1.25 Ga.*, American Geophysical Union Fall Meeting, 1999, www.agu.org/meetings/fm99top.html.



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2002

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Zadania z matematyki nr 445, 446

Redaguje Marcin E. KUCZMA

445. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(f(x - y)) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy.$$

446. Liczby całkowite a, b są związane równością $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Dowieść, że różnica $a - b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie **446** zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2002

Przypominamy treść zadań:

441. Rozważamy wielomian $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ o współczynnikach rzeczywistych a, b, c, d oraz trójmian kwadratowy $T(x) = x^2 + px + q$ ze współczynnikami $p = 2 - a + b, q = W(-1)$. Dowieść, że jeżeli trójmian $T(x)$ ma co najmniej jeden pierwiastek nieujemny, to wielomian $W(x)$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

442. Niech J oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie mniejszych niż 1. Czy istnieje funkcja $f: J \rightarrow J$, ciągła, ściśle rosnąca i taka, że wartości funkcji $g(x) = f(x)/x$ wypełniają zbiór wszystkich liczb dodatnich?

441. Niech α będzie nieujemnym pierwiastkiem trójmianu T i niech $\beta = \sqrt{\alpha + 1}$. Wielomiany W i T są związane tożsamością

$$W(x) = T(x^2 - 1) + (x + 1)(ax^2 + c).$$

Podstawiamy w niej $x = \beta$ oraz $x = -\beta$ i otrzymujemy związki

$$W(\pm\beta) = (1 \pm \beta)(a\beta^2 + c),$$

które mnożymy stronami:

$$W(\beta)W(-\beta) = (1 - \beta^2)(a\beta^2 + c)^2 \leq 0.$$

Stąd wynika, że w przedziale $\langle -\beta; \beta \rangle$ znajduje się co najmniej jedno miejsce zerowe wielomianu W .

442. Takie funkcje istnieją. Oto jedna z możliwych konstrukcji: określamy dwa ciągi $(x_n), (y_n)$ wzorami $x_0 = y_0 = 1$ oraz

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (n!+1, (n+1)!) & \text{dla parzystych } n > 0, \\ ((n+1)!, n!+1) & \text{dla nieparzystych } n > 0. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że oba te ciągi są ściśle rosnące. Definiujemy funkcję f przez warunki

- $f(x_n) = y_n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$;
- f jest liniowa w każdym przedziale $\langle x_n; x_{n+1} \rangle$.

Ta funkcja jest ciągła i ściśle rosnąca. Przy tym

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_{2k}}{x_{2k}} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_{2k+1}}{x_{2k+1}} = 0,$$

a więc funkcja $g(x) = f(x)/x$ przyjmuje zarówno wartości dowolnie wielkie, jak i wartości dowolnie bliskie 0. Z ciągłości wynika, że jej wartości wypełniają zbiór wszystkich liczb dodatnich.

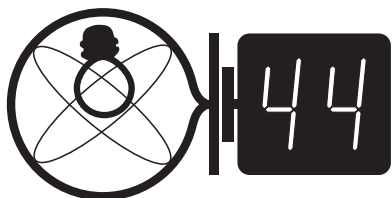
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **433** ($WT = 2,53$) i **434** ($WT = 1,14$)
z numeru 1/2002

Jacek Klisowski – Lublin 41,57
Tomasz Rawlik – Braunschweig 37,40



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **330** ($WT = 1,72$) i **331** ($WT = 2,80$)
z numeru 1/2002

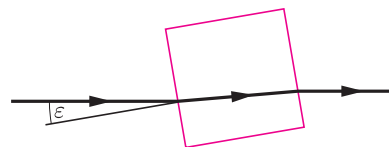
Tomasz Wietecha – Tarnów 43,48
Andrzej Nowogrodzki – Chocianów 42,62
Aleksander Surma – Myszków 40,79
Marek Wójcicki – Szczecin 37,65



Zadania z fizyki nr 342, 343

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2002



Rys. 1

342. Czy można tak ustawić dwie radiowe anteny nadawcze i dobrać przesunięcie fazy między sygnałami emitowanymi przez nie, aby natężenie promieniowania wynosiło 0 w kierunkach północnym i wschodnim (i tylko w tych dwóch kierunkach), a było maksymalne w kierunkach południowym i zachodnim? Każda z anten osobno wysyła falę harmoniczną o danej długości λ jednakowo we wszystkich kierunkach poziomych (np. anteny są pionowymi masztami), a natężenie ich promieniowania jest jednakowe.

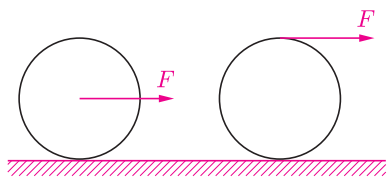
343. a) Na sześcian o boku $a = 5$ cm wykonany ze szkła o współczynniku załamania $n = 1,5$ pada pod niewielkim kątem ε promień światła (rys. 1). Podać wzór na wartość przesunięcia równoległego tego promienia.

b) W jednej z metod szybkiego filmowania zamiast migawki stosowany jest obracający się sześcian, umieszczony między obiektywem a taśmą filmową. Taśma porusza się wtedy ruchem jednostajnym, a jednostajny obrót sześcianu powoduje, że każdy kolejny obraz jest względem niej nieruchomy. Jeśli sześcian opisany w punkcie a) wykonuje $f = 200$ obrotów na sekundę, to z jaką prędkością powinna przesuwać się taśma?

c) Jakie zalety może mieć zastosowanie takiego urządzenia zamiast tradycyjnego mechanizmu chwytakowego, w którym film porusza się ruchem skokowym?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2002

338. Na dwa jednorodne i jednakowe walce spoczywające na poziomym stole działają poziome siły, przy czym w jednym z tych przypadków siła jest przyłożona do osi walca, a w drugim – do górnej krawędzi (rys. 2). Jeśli współczynnik tarcia o stół ma dla obu walców



Rys. 2

338. W przypadku siły zaczepionej w osi walca równanie ruchu postępowego ma postać $ma = F - T$, gdzie T jest siłą tarcia statycznego, skierowaną przeciwnie do F . Ruchem obrotowym wokół środka walca rządzi natomiast równanie $Tr = I\varepsilon$, gdzie I jest momentem bezwładności, a ε – przyspieszeniem kątowym. Po podstawieniu wartości $I = mr^2/2$ oraz związku $\varepsilon = a/r$ znajdujemy $F = 3T$, $a = 2T/m$. W drugim rozpatrywanym przypadku siła tarcia ma zwrot zgodny z F (przyjęcie niezmiennego zwrotu doprowadzi do wyniku $T < 0$), a równania przybierają postać

$$ma = F + T \quad (F - T)r = I\varepsilon.$$

Okazuje się, że maksymalna siła F , która nie doprowadzi do poślizgu walca, jest równa poprzedniej ($F = 3T$), ale przyspieszenie jest dwukrotnie większe ($a = 4T/m$).

339. Rozważmy promień padający na półkulę w miejscu wyznaczonym przez wartość kąta α (rys. 3). Kąt β możemy wyznaczyć ze wzoru

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \sin \alpha}{h + r(1 - \cos \alpha)},$$

gdzie r jest promieniem półkuli, a h – wysokością

Przypominamy treść zadań:

jednakową wartość, to na który walec możemy podziać większą siłą, nie wprawiając go przy tym w poślizg? Który walec będzie się wtedy toczył z większym przyspieszeniem?

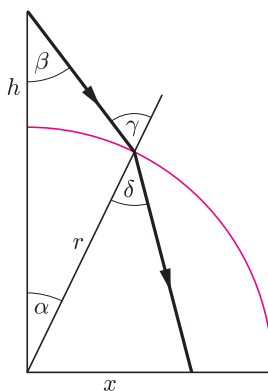
339. Półkula o promieniu 10 cm wykonana ze szkła o współczynniku załamania 1,5 leży na stole płaską stroną do dołu. Nad wierzchołkiem półkuli na wysokości 3 cm znajduje się punktowe źródło światła. Ile wynosi promień oświetlonego koła na powierzchni stołu pod półkulą?

źródła światła nad jej wierzchołkiem. Z kolei kąt γ jest równy sumie kątów α i β , kąt δ wyznaczmy zaś z prawa Snella ($\sin \gamma = n \sin \delta$). Odległość punktu trafienia promienia w stół od środka półkuli jest dana wyrażeniem

$$x = r \sin \alpha + r \cos \alpha \operatorname{tg}(\delta - \alpha) = r \sin \delta / \cos(\delta - \alpha).$$

Maksymalną wartość x jako funkcji kąta α można wyznaczyć prawdopodobnie tylko numerycznie.

Dla podanych wartości h , r i n otrzymujemy $x_{\max} = 6,69$ cm (dla $\alpha = 0,599$ rad). Ciekawe, że maksymalna wartość x nie odpowiada tu maksymalnej wartości α , tzn. takiej, dla której promień pada na półkulę stycznie ($\gamma = 90^\circ$).



Rys. 3

Patrz w niebo

Powierzchnia Księżyca, ułana niezliczonymi kraterami, jest niezbitym dowodem, że w przeszłości na naszego satelitę spadały ogromne nieraz bryły kosmicznej materii, wybijające w nim dziury o średnicy przekraczającej 200 km. To na Ziemię nie spadały? Otóż spadały, tak samo często, tylko że Ziemia – jako obiekt masywniejszy – utrzymała swoją atmosferę, co pociągnęło za sobą utrzymanie hydrosfery – czyli po prostu powierzchniowych wód. Te dwie „sfery” wybitnie przyczyniają się do zacierania śladów dawnych kataklizmów, a nazywa się to erozją atmosferyczną i wodną. Na Księżycu nie doszło do zatarcia śladów z powodu braku atmosfery, tak samo na Merkury, natomiast na Ziemi takich kraterów właściwie nie ma, erozja wszystko zatarła. Doskonale zachowany jest – bo młody – meteorytowy krater w Arizonie, ale ma on zaledwie 1200 m średnicy, znany kilka ledwo widocznych pierścieniowych łańcuchów wzgórz lub dziwnie okrągłych jezior, i to wszystko.

Za to wspaniały dowód gigantycznego kataklizmu widać – jak na dłoni – na Merkury. Znajduje się tam tzw. Równina Upału (*Caloris Basin*), czyli ogromna kotlina, bynajmniej nie tak równa, jak mogłoby wynikać z nazwy, otoczona podwójnym kolistym wałem górskim o średnicy 1400 km. Jest ona efektem spadku wielkiego meteorytu

prawdopodobnie 3,8 mld lat temu. Fala sejsmiczna obiegła cały glob planety zogniskowała się w punkcie antypodycznym tworząc tam niezwykle chaotyczną grupę gór. Potężniejszy, choć nie tak wyraźnie widoczny basen uderzeniowy, zlokalizowano na odwrotnej stronie Księżyca w 1994 r. w wyniku topograficznych obserwacji wykonanych przez sondę Clementine. Basen ten, nazwany Aitken, o średnicy 2300 km, był wówczas uważany za największy tego rodzaju obiekt w Układzie Słonecznym. Ale jeszcze większy basen uderzeniowy wykryto niedawno na Marsie, a właściwie zbadano go ponownie. Bo obiekt ten obserwowany był z Ziemi już od dawna i jest znany jako basen Hellas. Przez kilka ubiegłych lat sonda Mars Global Surveyor prowadziła m.in. systematyczne pomiary wysokości obiektów na powierzchni Marsa. Okazało się, że względem poziomu uznanego za zerowy (taki marsyjski umowny „poziom morza”) Hellas jest zagłębieniem o średnicy około 2300 km. Otaczają go jednak góry, których ukształtowanie sugeruje, że cała „dziura” ma rozmiary niemal 4000 km. Byłby to więc największy krater uderzeniowy w Układzie Słonecznym, w dużym stopniu zerodowany, przez co słabo widoczny. Mars byłby więc posiadaczem dwóch rekordów: największy krater uderzeniowy i najwyższa góra (wygasły wulkan Olympus Mons).

Tomasz KWAST



Wrzesień



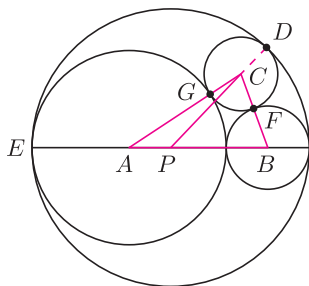
Rozwiązanie zadania M 1002.

Mamy

$$PC + CG = PD \text{ oraz } PA + AG = PE,$$

skąd

$$\text{obwód}(APC) = PD + PE = \\ = \text{średnica dużego okręgu}.$$



Aby dowiedzieć, że

$$\text{obwód}(APC) = \text{obwód}(PBC),$$

wystarczy wykazać, że

$$AG + AP = BF + BP.$$

Ale obie strony to promień dużego okręgu.

Łabędź, okazały gwiazdozbiór letniego nieba, we wrześniowe wieczory znajduje się blisko zenitu. Bardzo bogata jest na jego obszarze Droga Mleczna. Zgodnie z oczekiwaniami jest tam również wielka ilość materii międzygwiazdowej, której, oczywiście, bezpośrednio nie widać, a widać tylko obszary pozornie pozbawione gwiazd. To skutek przesłaniania przez nią bardziej odległych obszarów naszej Galaktyki. Drogę Mleczną w Łabędziu rozcina wzdłuż tzw. Ciemna Szczelina, czyli warstwa ciemnych mgławic rozciągająca się w odległości od około 1 kpc w głąb Galaktyk w Łabędziu praktycznie nie ma. Za to widać liczne otwarte gromady gwiazd i jasne mgławice. Mgławice dobrze widać wprawdzie dopiero na zdjęciach, niemniej jednak np. Amerykę Północną można zobaczyć już przez lornetkę. Mgławicę tę oświetla Deneb, najjaśniejsza gwiazda Łabędzia, a nazwę zawdzięcza ona, oczywiście, podobieństwu do zarysów kontynentu amerykańskiego, czego – niestety – przez lornetkę nie zobaczymy. Jednak obszar Łabędzia wart jest nawet tego, by dla samego relaksu pogapić się przez lornetkę na zgromadzone tam miliony gwiazd.

Na początku miesiąca można wieczorami próbować szukać Merkurego, gdyż 1 IX znajdzie się on w największej kątowej odległości od Słońca. Wenus widać wieczorami w Pannie, a 26 IX osiągnie największą jasność. Mars jest w Lwie, a więc jeszcze bardzo blisko Słońca, można jednak próbować go zobaczyć nad ranem – im bliżej końca miesiąca, tym większa szansa. Jowisz jest w Raku i wschodzi w drugiej połowie nocy, a Saturn na granicy Byka i Bliźniąt, a więc wschodzi koło północy. Nów Księżyca wypada 7 IX, a pełnia 21 IX. Żadnych efektownych zakryć we wrześniu nie ma. 23 IX Słońce wejdzie w znak Wagi, będzie to więc równonoc jesienna i początek astronomicznej jesieni.

T.K.

O RÓWNYCH SUMACH DZIEWIĄTYCH POTĘG

Poniżej dwie równości zawierające 10 dziewiątych potęg:

$$(9.5.5) \quad 192^9 + 101^9 + 91^9 + 30^9 + 26^9 = \\ = 180^9 + 175^9 + 116^9 + 17^9 + 12^9,$$

$$(9.4.6) \quad 90^9 + 64^9 + 35^9 + 35^9 = \\ = 86^9 + 80^9 + 62^9 + 43^9 + 27^9 + 16^9.$$

Na uwagę zasługuje też równość

$$(9.6.6) \quad 323^n + 289^n + 269^n + 173^n + 91^n + 7^n = \\ = 313^n + 311^n + 247^n + 193^n + 59^n + 29^n$$

spełniona dla $n = 1, 3, 5, 7, 9$.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (31')

Wyjaśnienie oszustwa (31): Sprawa jest dosyć subtelna, nie sposób w **jednej linijce** wyczerpująco zdemaskować błąd w przedstawionym poprzednio rozumowaniu.

Z grubsza rzecz biorąc, w definicji obiektu A nie można używać obiektu B , który nie jest dobrze zdefiniowany, dopóki nie określimy, czym jest A . W czasie, kiedy usiłujemy sprecyzować reguły definiowania liczb w jednej linijce, nie jest jeszcze określone, które liczby naturalne dają się w jednej linijce zdefiniować. To będzie wiadomo **nie wcześniej, niż w momencie zakończenia procesu doprecyzowania tych reguł**. Nie możemy więc używać określenia „liczba naturalna, której nie można zdefiniować w jednej linijce” jako legalnego określenia definiującego liczby, w trakcie ustalania tych reguł. Jedyne, co byłoby dopuszczalne, to ustalenie pewnego zbioru reguł definiujących liczby (nazwijmy go A), a następnie używanie określenia „liczbę można zdefiniować przy użyciu reguł ze zbioru A ” przy tworzeniu nowego, nadrzędnego zbioru reguł B .

Aby lepiej to zrozumieć, przyjrzyjmy się sytuacjom pokrewnym.

Zbiór wszystkich zbiorów, czyli antynomia Russella

Naiwne przekonanie, że zbiorem jest cokolwiek, co w zrozumiałym sposób możemy zdefiniować słowami, prowadzi w naturalny sposób do zbioru wszystkich zbiorów, który oznaczymy przez X . Skoro X jest zbiorem, to musi być swoim elementem, czyli $X \in X$. Drobny niepokój może budzić fakt, że aby rozumieć, czym jest dany zbiór, trzeba znać **najpierw** jego elementy, podczas gdy element X zbioru X nie będzie znany, zanim cały zbiór nie zostanie utworzony.

Na pierwszy rzut oka nie prowadzi to do jawnej sprzeczności, jeśli jednak wyróżnimy w X zbiór Z zbiorów, które nie są swoimi elementami, $Z = \{A \in X; A \notin A\}$, to staniemy przed pytaniem: czy $Z \in Z$? Dla dowolnego zbioru A mamy $A \in Z \iff A \notin A$, co dla $A = Z$ daje $Z \in Z \iff Z \notin Z$ i sprzeczność gotowa.

Zbiór wszystkich zbiorów nie istnieje.

Książeczka ze zdaniami

Książeczka ma 100 stron, na których kolejno napisane są zdania:

W tej książce wszystkie zdania są fałszywe.
W tej książce jest dokładnie jedno zdanie prawdziwe.
W tej książce są dokładnie dwa zdania prawdziwe.
W tej książce są dokładnie trzy zdania prawdziwe.

...

W tej książce jest dokładnie 99 zdań prawdziwych.

Z radosną beztroską zabieramy się za powyższą łamigłóvkę. Popatrzymy, zdania się wykluczają, więc zdań prawdziwych może być 0 lub 1. Jeśli jest ich 0, to pierwsze zdanie jest prawdziwe, więc to odrzucamy. Zatem musi być jedno zdanie prawdziwe. . . świetnie, wszystko się zgadza – jest jedno zdanie prawdziwe, to na stronie drugiej, pozostałe są fałszywe.

A co by było, gdyby książeczka wyglądała jak niżej?

W tej książce wszystkie zdania są fałszywe.
W tej książce są dokładnie dwa zdania prawdziwe.
W tej książce są dokładnie trzy zdania prawdziwe.
W tej książce są dokładnie cztery zdania prawdziwe.

...

W tej książce jest dokładnie 100 zdań prawdziwych.

Znowu, zdania się wykluczają, więc liczba zdań prawdziwych jest równa 0 lub 1. Podobnie jak poprzednio, nie może być równa 0, bo wówczas zdanie na pierwszej stronie byłoby prawdziwe. Aha, znowu jest równa 1. W tej książeczce jest dokładnie jedno zdanie prawdziwe! A przepraszam, które?

Zdanie, które powątpiewa w swoją prawdziwość

Czy prawdziwe jest następujące zdanie?

To zdanie jest fałszywe.

A to?

To zdanie jest prawdziwe.

Jeśli umówimy się oznaczać wartość logiczną zdania liczbą 0 (fałsz) lub 1 (prawda), to wartość logiczna x pierwszego zdania spełnia równanie $x = 1 - x$, co nie ma rozwiązań w zbiorze $\{0, 1\}$.

Natomiast wartość logiczna y drugiego zdania spełnia warunek $y = y$, który nie daje podstaw do jej wyznaczenia.

Widzimy, że takie pętle w definicji powodują, że usiłowanie określenia wartości logicznej zdania prowadzi do równania lub układu równań, które mogą nie mieć rozwiązań lub mieć ich wiele. Żaden problem, jeśli równanie, np. liczbowe, nie ma rozwiązań, gorzej – gdy brak rozwiązań (czyli sprzeczność) pojawia się w logice – na poziomie języka, którym chcemy się posługiwać. Równanie $z = z + 1$ nie ma rozwiązań rzeczywistych, w porządku, jesteśmy do takich sytuacji przyzwyczajeni. Ale czy wyobrażacie sobie matematykę (analizę, geometrię, trygonometrię), w której liczba π byłaby zdefiniowana równaniem $\pi = \pi + 1$? Możemy mieć równania niemające rozwiązań, ale nie możemy budować matematyki, która w swoim języku używa tych nieistniejących rozwiązań. Na zakończenie dwa zdania, z których każde jest zaprzeczeniem drugiego, a oba są prawdziwe!

Liczba wyrazów w tym zdaniu jest równa osiem.

Liczba wyrazów w tym zdaniu nie jest równa osiem.

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl



Dodatek Olimpijski

Zadania I stopnia Olimpiady Astronomicznej, Matematycznej i Fizycznej 2002/2003

XLVI OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 2002/2003

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA (pierwsza seria)

1. Dwie gwiazdy mają takie same temperatury efektywne i jednakowe okresy obrotu, a promień jednej z nich jest dwa razy większy od promienia drugiej.

Jaki jest stosunek mocy promieniowania tych gwiazd, a jaka jest różnica długości fal odpowiadających maksymalnym natężeniom promieniowania w ich widmach i różnica ich absolutnych wielkości gwiazdowych? Co można powiedzieć o szerokości linii w ich widmach?

2. Orbita satelity jest okręgiem leżącym w płaszczyźnie równika Ziemi. W przypadku obserwatora znajdującego się na równiku ziemskim przedyskutuj ruch takiego satelity na tle gwiazd oraz ruch względem horyzontu – w zależności od promienia jego orbity.

3. Księżyc Saturna Tytan, jako jedyny w Układzie Planetarnym ma gęstą atmosferę o ciśnieniu przy powierzchni około $1,5 \cdot 10^5$ Pa (150% ciśnienia atmosfery ziemskiej). Znając parametry tego księżycy (promień 2575 km, masa $1,35 \cdot 10^{23}$ kg) porównaj własności jego atmosfery z atmosferą Ziemi. W szczególności oblicz jej masę całkowitą oraz masę słupa o podstawie 1 m^2 i porównaj z analogicznymi wartościami dla atmosfery ziemskiej (promień Ziemi 6400 km, masa $6 \cdot 10^{24}$ kg).

W obliczeniach przyjmij, że przyspieszenie grawitacyjne na różnych wysokościach atmosfery jest stałe, takie samo jak przy powierzchni.

4. Krótko opisz perspektywy badań Marsa.

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. W przypadku zastosowania metody fotograficznej należy dołączyć negatywy.

Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 18 listopada 2002 r.

ZADANIA OBSERWACYJNE

1. Dowolną metodą wyznacz kątową średnicę pierścieni Saturna.
2. Podczas dobrych warunków obserwacyjnych spróbuj określić w wielkościach gwiazdowych rzeczywisty, maksymalny zasięg oraz zdolność rozdzielczą dostępnego Ci instrumentu obserwacyjnego.
3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji prowadzonych w ostatnich dwóch latach.

INFORMACJE REGULAMINOWE

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych i innych typów szkół dających możliwość uzyskania świadectwa dojrzałości.
2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne. Rozwiązywanie zadań zawodów II stopnia i III stopnia odbywa się w warunkach kontrolowanej samodzielności.
3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, do **14 października 2002 r.**, rozwiązania 3 zadań, dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.
4. Uczniowie, którzy przysłał rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do końca października bieżącego roku tematy drugiej serii zadań.
5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, do **18 listopada b.r.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.
6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu, do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).
7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem:
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY ASTRONOMICZNEJ, Planetarium Śląskie, 41-500 Chorzów, skr. poczt. 10, w terminach podanych w p. 3 i 5. Decyduje data stempla pocztowego.

8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych, należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.
9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A-4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: rok i miejsce urodzenia, pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi).
10. O uprawnieniach laureatów i finalistów decydują senaty wyższych uczelni.

ZALECANA LITERATURA:

- obowiązujące w szkołach średnich podręczniki do przedmiotów ścisłych;
- H. Chrupała, M.T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych; Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach);
- H. Chrupała, J. Kreiner, M. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami*;
- J.M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką*;
- D. H. Levy, *NIEBO – Poradnik użytkownika*;
- J. Mietelski, *Astronomia w geografii*;
- E. Rybka, *Astronomia ogólna*;
- *Słownik szkolny – Astronomia* – praca zbiorowa;
- atlas nieba;
- obrotowa mapa nieba;
- czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Świat Nauki*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie*.

I SERIA

1. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y spełniających równanie $(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1$.

2. Dana jest liczba rzeczywista $a_1 > 1$. Definiujemy ciąg (a_n) wzorem $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ dla $n \geq 1$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1 - 1}$.

3. Trzy różne punkty A, B, C leżą na okręgu o . Proste styczne do okręgu o w punktach A i B przecinają się

w punkcie P . Prosta styczna do okręgu o w punkcie C przecina prostą AB w punkcie Q . Udowodnić, że $PQ^2 = PB^2 + QC^2$.

4. Rozpatrujemy zbiór wszystkich k -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, m\}$. Z każdego takiego ciągu wybieramy wyraz najmniejszy i sumujemy wybrane wyrazy. Udowodnić, że otrzymana suma jest równa

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + m^k.$$

II SERIA

5. Liczba naturalna n_1 zapisana jest w układzie dziesiętnym za pomocą 333 cyfr, z których żadna nie jest zerem. Dla $i = 1, 2, 3, \dots, 332$ liczba n_{i+1} powstaje z liczby n_i przez przeniesienie cyfry jedności na początek. Dowieść, że albo wszystkie liczby $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{333}$ są podzielne przez 333, albo żadna z nich.

6. Punkty A, B, C, D leżą w tej właśnie kolejności na okręgu o . Punkt M jest środkiem tego łuku AB okręgu o , który nie zawiera punktów C i D ; punkt N jest środkiem tego łuku CD okręgu o , który nie zawiera punktów A i B . Dowieść, że

$$\frac{AN^2 - BN^2}{AB} = \frac{DM^2 - CM^2}{CD}.$$

7. U cioci Reni spotkało się (łącznie z ciocią) $n \geq 4$ osób. Każdy z obecnych podarował co najmniej jednej z pozostałych osób co najmniej jeden prezent. Okazało się, że każdy podarował trzykrotnie więcej prezentów niż sam otrzymał, z jednym wyjątkiem: ciocia Renia podarowała zaledwie $\frac{1}{6}$ liczby prezentów, które dostała. Wyznaczyć, w zależności od n , najmniejszą możliwą liczbę prezentów, które mogła otrzymać ciocia Renia.

8. W czworoboku $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami krawędzi AB i CD . Punkt P leży na odcinku MN , przy czym $MP = CN$ oraz $NP = AM$. Punkt O jest środkiem sfery opisanej na czworoboku $ABCD$. Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to $OP \perp MN$.

III SERIA

9. Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych, mające następującą własność: jeśli $x + y$ jest liczbą wymierną, to $W(x) + W(y)$ jest liczbą wymierną.

10. Mamy talię 52 kart. Tasowaniem będziemy nazywać wykonanie następujących czynności: dowolny podział talii na część górną i dolną, a następnie dowolne zmieszanie kart z zachowaniem porządku w obrębie każdej części. Mówiąc formalnie, tasowaniem jest dowolne przemieszanie kart, w którym i -ta karta od wierzchu przechodzi na pozycję p_i , przy czym istnieje takie $m \in \{1, 2, 3, \dots, 51\}$, że $p_i < p_{i+1}$ dla $i < m$ oraz dla $i > m$.

Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od ustalonego początkowego uporządkowania kart, można uzyskać każde inne uporządkowanie wykonując pięć tasowań.

11. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P i Q , różne od wierzchołków czworokąta, leżą odpowiednio na bokach BC i CD , przy czym $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ$. Udowodnić, że trójkąty ABP i ADQ mają równe pola wtedy i tylko wtedy, gdy ich ortocentra leżą na prostej prostopadłej do AC .

Uwaga: Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia wysokości.

12. Dla liczb dodatnich a, b, c, d określamy $A = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$, $B = bcd + cda + dab + abc$. Udowodnić nierówność $(a + b + c + d)^3 \leq 4A + 24B$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 października 2002 r. – I seria

12 listopada 2002 r. – II seria

10 grudnia 2002 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.mimuw.edu.pl/OM



ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Dla województwa pomorskiego:

KOOM – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa śląskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

Dla województwa małopolskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

KOOM – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 223, 20-031 Lublin.

Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

KOOM – Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa wielkopolskiego:

KOOM – Instytut Geologii Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Maków Polnych 16, 61-606 Poznań.

Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

KOOM, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

KOOM – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

KOOM – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY FIZYCZNEJ

KOOF w Białymstoku, ul. Lipowa 41, 15-224 Białystok (woj. podlaskie, powiaty: kętrzyński, mławowski, piski, giżycki, olecko-gołdapski, ełcki).

KOOF w Częstochowie, Al. Armii Krajowej 13/15, 42-201 Częstochowa (woj. opolskie, woj. świętokrzyskie, powiaty: częstochowski, kłobucki, lubliniecki, myszkowski).

KOOF w Gdańsku, ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk-Wrzeszcz (woj. pomorskie, woj. warmińsko-mazurskie z wyłączeniem powiatów: kętrzyńskiego, mławowskiego, piskiego, giżyckiego, olecko-gołdapskiego, ełckiego).

KOOF w Gliwicach, ul. Bolesława Krzywoustego 2, 44-100 Gliwice (woj. katowickie z wyłączeniem powiatów: częstochowskiego, kłobuckiego, lublinieckiego, myszkowskiego).

KOOF w Krakowie, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków (woj. małopolskie).

KOOF w Lublinie, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin (woj. lubelskie).

KOOF w Łodzi, ul. Pomorska 149, 90-236 Łódź (woj. łódzkie).

KOOF w Poznaniu, ul. Umultowska 85, 60-780 Poznań (woj. wielkopolskie).

KOOF w Rzeszowie, ul. Reytana 16A, 35-310 Rzeszów (woj. podkarpackie).

KOOF w Szczecinie, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin (woj. zachodnio-pomorskie, woj. lubuskie).

KOOF w Toruniu, ul. Grudziądzka 5, 87-100 Toruń (woj. kujawsko-pomorskie).

KOOF w Warszawie, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa (woj. mazowieckie).

KOOF we Wrocławiu, pl. M. Borna 9, 50-205 Wrocław (woj. wrocławskie).

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach: część I – do **25 października br.**, część II – do **20 listopada br.** O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II. Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć w broszurze i na afiszu rozesłanych do szkół średnich oraz na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl>.

CZĘŚĆ I (termin wysyłania rozwiązań – 25 października 2002 r.)

Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki.

Podaj lub wybierz i krótko uzasadnij prawidłową odpowiedź (za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty).

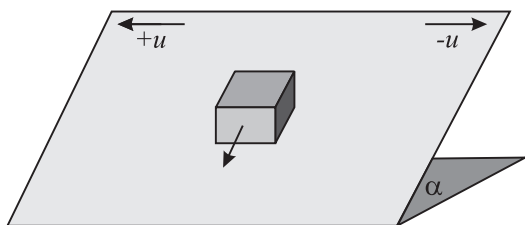
1. Dwa jednakowe węże ogrodowe umieszczono poziomo jeden nad drugim. Z węży tryska woda w taki sposób, że obydwa strumienie spadają dokładnie w to samo miejsce – rysunek 1.



Rys. 1

Czy masa wody zawartej w górnym strumieniu (woda, która już wypłynęła z węża, ale jeszcze nie spadła na ziemię) jest większa niż masa wody zawartej w dolnym strumieniu, czy też jest odwrotnie? Opór powietrza zanedbujemy.

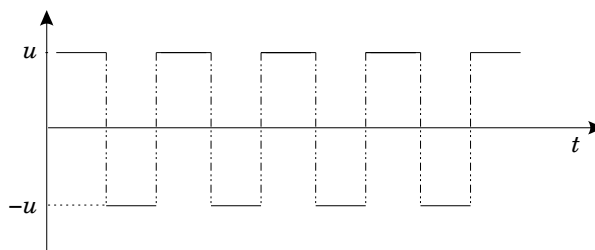
2. Na równi pochyłej nachylonej pod kątem α do poziomu spoczywa klocek. Współczynnik tarcia statycznego i kinetycznego między klockiem a równią wynosi $\mu > \tan \alpha$. W pewnej chwili równia zaczyna drżeć powodując zsuwanie się klocka, który osiąga pewną stałą, graniczną prędkość – rysunek 2.



Rys. 2

Przyjmijmy, że drżenie polega na bardzo szybkich zmianach poprzecznej prędkości równi z $+u$ na $-u$

i *vice versa* – rysunek 3.



Rys. 3

Ile wynosi graniczna prędkość zsuwania się klocka?

3. Na cienką płytkę płasko-równoległą pada prostopadle wiązka promieniowania laserowego. Natężenie światła w wiązce zmniejsza się wraz z odległością od jej środka w sposób ciągły. Płytkę wykonana jest z materiału o współczynniku załamania n zależnym od natężenia padającego światła I :

$$(1) \quad n = n_0 + \alpha I.$$

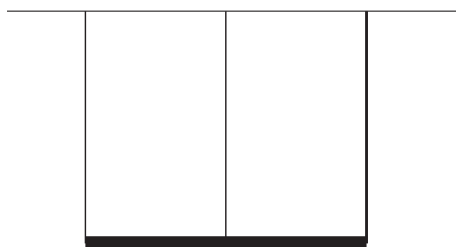
W jaki sposób należy dobrać współczynniki n_0 oraz α , aby wiązka przechodząca przez płytkę była skupiana? Przyjmij, że $\alpha I \ll n_0$.

4. Z samolotu lecącego na wysokości 3000 m wyskoczyło jednocześnie dwóch skoczków – bliźniaków z identycznymi spadochronami. Pierwszy z nich otworzył spadochron natychmiast po opuszczeniu samolotu, natomiast drugi otworzył swój identyczny spadochron dopiero na wysokości 1500 m. Ilość ciepła wydzielonego do atmosfery była:

- dwukrotnie większa w przypadku pierwszego skoczka;
- $\sqrt{2}$ razy większa w przypadku pierwszego skoczka;
- taka sama dla obu skoczków;
- $\sqrt{2}$ razy mniejsza w przypadku pierwszego skoczka;
- dwukrotnie mniejsza w przypadku pierwszego skoczka.

5. Jakie powietrze ma większą gęstość w warunkach normalnych: suche czy wilgotne?

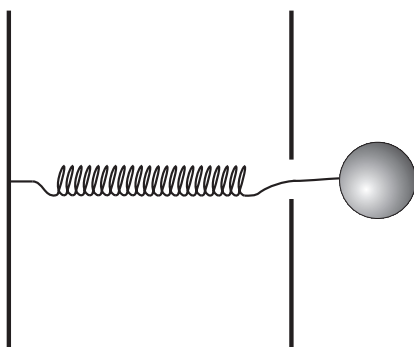
6. Jednorodny, sztywny pręt o ciężarze $P = 10 \text{ N}$ wisi na trzech drutach wykonanych z jednakowego materiału i o jednakowej długości swobodnej – rysunek 4.



Rys. 4

Lewy i środkowy drut mają tę samą średnicę, a prawy dwukrotnie większą. Punkty zawieszenia drutów leżą na jednej prostej poziomej i są równoodległe. Oblicz siłę napinającą każdy drut.

7. Do sprężyny przechodzącej przez otwór w przegrodzie (rysunek 5) przyczepiono kulę, przy czym w położeniu równowagi sprężyna jest już napięta.



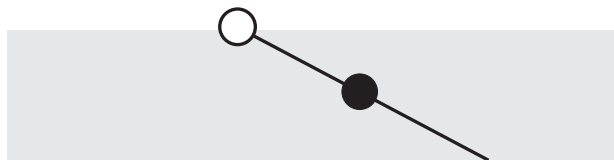
Rys. 5

Odciągamy kulę w prawo, puszcamy i mierzymy okres drgań. Czy po zwiększeniu początkowego wychylenia okres ten wzrośnie, zmaleje, czy też pozostanie niezmienny? Załóż, że odbicia kuli od przegrody są doskonale sprężyste.

8. Na stole znajduje się kwadratowa ramka o boku $a = 10 \text{ cm}$ wykonana z drutu miedzianego o gęstości

$d = 8,9 \text{ g/cm}^3$ i oporze właściwym $\rho = 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$. Jaka powinna być indukcja jednorodnego pola magnetycznego, aby przy włączeniu tego pola co najmniej trzy boki ramki uniosły się ponad powierzchnię stołu. Załóż, że indukcja pola rośnie jednostajnie w czasie $T = 10^{-3} \text{ s}$ od zera do tej poszukiwanej wartości oraz że jest prostopadła do jednego z boków ramki i skierowana pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do normalnej do powierzchni stołu. Pomiń samoindukcję.

9. Dwie kulki o jednakowych promieniach przymocowano do długiego pręta i zanurzono w wodzie tak, że jeden koniec pręta był oparty o dno (rysunek 6).



Rys. 6

Masa kulki znajdującej się na końcu pręta oraz masa pręta są zanedbywalnie małe w porównaniu z masą kulki nanizanej na pręt i zamocowanej na środku. Okazało się, że stosunek objętości zanurzonej części kulki górnej do jej całkowitej objętości wynosił a . Dla jakich wartości a układ przeniesiony na głęboką wodę nie zatonie?

10. Po torach kolejowych pędzi pociąg z prędkością v . W pewnej chwili maszynista uruchomił hamulec i po krótkiej chwili pociąg się zatrzymał. Energia kinetyczna ruchu została zamieniona na rozgrzanie torów, kół, itp. Zdarzenie to obserwował kierowca samochodu jadącego wzdłuż torów z prędkością v . W jego układzie odniesienia pociąg początkowo spoczywał, a od chwili uruchomienia hamulców zaczął się coraz szybciej poruszać do tyłu. Ponieważ kierowca był fizykiem, zastanowiło go skąd wzięła się energia tego ruchu. Nie dość, że pojawiła się energia kinetyczna, to jeszcze rozgrzały się tory. Co jest źródłem tej energii?

11. Podczas jazdy samochodem można zauważyć, że przydrożne drzewa *pozornie* się obracają. Co jest przyczyną tego obrotu? Od czego zależy i ile wynosi jego prędkość kątowna?

12. Oszacuj przeciążenie jakiego doznaje konik polny podczas odbijania się do skoku.

13. Poruszająca się kulka zderza się centralnie z drugą, spoczywającą. Czy w zderzeniu niesprężystym w porównaniu ze zderzeniem sprężystym strata energii kinetycznej poruszającej się kulki jest:

- a) zawsze większa;
- b) większa gdy masy kulek są zbliżone;
- c) mniejsza gdy masy kulek są zbliżone;
- d) zawsze mniejsza.

14. Płaski kondensator próżniowy naładowano ładunkiem Q i odłączono od źródła napięcia. Następnie w pobliżu środka jednej z okładek kondensatora umieszczono naładowaną cząstkę, która rozpędziła się osiągając prędkość v tuż przy drugiej okładce. Jeśli po naładowaniu rozsunięlibyśmy

okładki na dwukrotnie większą odległość, to końcowa prędkość cząstki:

- a) wzrosłaby dwukrotnie;
- b) wzrosłaby $\sqrt{2}$ razy;
- c) pozostałaby niezmienną;
- d) zmniejszyłaby się $\sqrt{2}$ razy;
- e) zmniejszyłaby się dwukrotnie.

15. Okres drgań wahadła matematycznego po umieszczeniu w satelicie okrążającym Ziemię na wysokości równej dwóm promieniom ziemskim:

- a) wzrośnie trzykrotnie w porównaniu z okresem wahań na Ziemi;
- b) wzrośnie $\sqrt{3}$ razy;
- c) zmaleje trzykrotnie;
- d) zmaleje sześciokrotnie;
- e) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna. Przyjmij, że satelita nie wiruje.

CZĘŚĆ II (termin wysyłania rozwiązań – 20 listopada 2002 r.)

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy, a także nazwę i adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

ZADANIA TEORETYCZNE

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

T1. Zaproponowano pewien uproszczony model utrzymania równowagi podczas jazdy rowerem. Przyjęto, że rowerzysta jest sztywno związany z ramą roweru (nie balansuje ciałem), a rower jest tak zbudowany, że oś kierownicy jest prostopadła do prostej łączącej środki kół roweru odległe od siebie o $d = 1$ m.

W czasie jazdy z prędkością $v = 5$ m/s rower wraz z rowerzystą odchylił się od pionu o kąt $\varphi = 2^\circ$. Gdyby nie równoczesny skręt kierownicy o pewien kąt α rowerzysta by upadł. W którą stronę i o jaki kąt rowerzysta skręcił kierownicą?

Stosując zaproponowany model oszacuj prędkość, poniżej której jazda na rowerze staje się trudna. Przedstaw i uzasadnij przyjęte kryterium fizyczne.

T2. Pani Dyrektor Okulla ma trudności z czytaniem drobnego druku. W związku z tym nosi okulary dla dalekowidzów. Pewnego dnia, gdy okulary zsunęły się jej na koniec nosa, ze zdumieniem zauważyła, że literki wydają się większe niż zwykle. Wyjaśnij to zjawisko i znajdź położenie okularów, w którym rozmiary kątowe liter będą maksymalne przy ustalonej odległości między głową pani Okulli i kartką papieru. Przyjmij, że po zsunięciu się okularów pani dyrektor nadal widzi druk ostro.

T3. Dwa różnoimienne ładunki elektryczne q_1 i $-q_2$ umieszczono w odległości d od siebie. Rozważmy linię pola elektrycznego wychodzącą z ładunku q_1 pod kątem α do prostej łączącej ładunki. Pod jakim kątem linia ta wejdzie do ładunku $-q_2$?

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych.
Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.

D1. Masz do dyspozycji:

- drut miedziany o znanej średnicy,
- odważniki,
- szalkę umożliwiającą obciążenie drutu odważnikami, szczypczyki do przenoszenia odważników,
- deskę z dwoma gwoździami wbitymi w pobliżu jej końców,
- elementy umożliwiające podparcie (lub zamocowanie) deski,
- linijkę, taśmę mierniczą,
- papier milimetrowy, taśmę klejącą, nożyczki.

Wyznacz moduł Younga miedzi.

Uwagi:

- Do doświadczenia należy użyć drutu o średnicy 0,1–0,3 mm.
- Deska powinna mieć długość w granicach 0,5–1 m.
- Jako odważników możesz użyć dowolnych przedmiotów o znanej masie, np. monet, spinaczy biurowych itp. Możesz je zważyć używając wagi dostępnej w szkole. W razie potrzeby możesz też zważyć szalkę.

D2. Ciało o masie m poruszające się, niezbyt szybko, ruchem przyspieszonym w nieograniczonym ośrodku ciekłym, zachowuje się tak, jak ciało o masie:

$$M = m + m_d,$$

gdzie $m_d > 0$ nosi nazwę masy dołączonej.

Masz do dyspozycji:

- duży i głęboki pojemnik z wodą (np. wannę),
- mocne nici,
- kulkę stalową o znanej masie i średnicy, wyposażoną w zaczep umożliwiający jej zawieszenie na nitce,
- statyw,
- stoper.

Wyznacz stosunek m_d/m_w dla kuli w wodzie (m_w oznacza masę wody wypartej przez kulę). Przyjmij, że gęstość wody wynosi 1 g/cm^3 . Jeśli uznasz to za konieczne możesz użyć linijki.

D3. Masz do dyspozycji:

- dwie identyczne diody świecące,
- żaróweczkę z oprawką,
- źródło prądu o napięciu regulowanym w zakresie 0–5 V, umożliwiające zasilanie diod oraz żaróweczki,
- opornik o znanej oporności (np. 100Ω),
- woltomierz o dużej oporności wewnętrznej (np. multimetr cyfrowy),
- przewody elektryczne z końcówkami, uchwyty, podstawki itp. elementy umożliwiające odpowiednie zamocowanie żaróweczki i diod,
- linijkę lub taśmę mierniczą,
- papier milimetrowy.

Podłączając jedną z diod bezpośrednio do woltomierza zauważysz, że po zbliżeniu jej do świecącej żaróweczki, na diodzie pojawi się napięcie. Podobny efekt zaobserwujesz jeśli użyjesz jako źródła światła drugiej diody.

Wyznacz zależność natężenia światła emitowanego przez diodę od natężenia płynącego przez nią prądu. Pomiary natężenia światła emitowanego przez diodę wykonaj dla możliwie szerokiego zakresu natężeń prądów płynących przez diodę, nie przekraczając jednak wartości maksymalnej natężenia prądu podanej przez producenta. Wynik przedstaw na wykresie. Natężenie światła I wyraż w jednostkach względnych przyjmując $I_0 = 1$ dla maksymalnej wartości prądu płynącego przez diodę.

Wskazówka! Można przyjąć, że w odległości R od żarówki, znacznie większej od jej rozmiarów, natężenie emitowanego przez nią światła jest proporcjonalne do $1/R^2$.

