



SPIS TREŚCI NUMERU 2 (357)

LIGO – nadzieja na detekcję
 fal grawitacyjnych
Tomasz Kwast

Mała Delta

O polu pewnego trójkąta
Tomasz Żukowski

Czy dyfrakcję światła można
 obserwować na fircance?
Stanisław Bednarek

Bilardy
Henryk Żółtek

Zadania

Aktualności

Klub 44

Patrz w niebo

Luty

Gammalimatias

str. 1

str. 3

str. 4

str. 6

str. 8

str. 9

str.10

str.11

str.16

str.16

str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki, Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Jan A. Gaj – przewodniczący, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.

Skład systemem TeX wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2004 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2004 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 122640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 2004 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68124010531111000004430494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

| | | |
|----------|----------|--------------------------|
| do 5 XII | – na I | kwartał roku następnego, |
| do 5 III | – na II | kwartał roku bieżącego, |
| do 5 VI | – na III | kwartał roku bieżącego, |
| do 5 IX | – na IV | kwartał roku bieżącego. |

Numerzy archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

W następnym numerze:

Pierścień Kaca

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

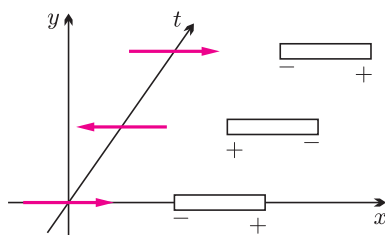
Cena 1 egzemplarza 4 zł

LIGO – nadzieja na detekcję fal grawitacyjnych

Tomasz KWAST

Bardzo szybko po powstaniu ogólnej teorii względności (OTW, 1915) stwierdzono, że równania pola grawitacyjnego dopuszczają istnienie fal tego pola. Wprawdzie bardzo pięknie potwierdziły się inne przewidywania OTW (ugięcie promieni świetlnych w pobliżu Słońca czy ruch peryhelium Merkurego), ale – jak to w fizyce – pojawiła się oczywista konieczność doświadczalnego sprawdzenia również tego, że fale grawitacyjne rzeczywiście istnieją. Co prawda samo istnienie fal grawitacyjnych od dawna nie budzi wątpliwości, zaobserwowano bowiem wspaniałą zgodność OTW z obserwacjami dowodzącymi utraty energii przez podwójnego pulsara PSR 1913+16, co skomentujemy niżej (a co w *Delcie* zostało opisane już dziesięć lat temu: T. Jarzębowski – *Delta* 5/1994). Przypomnijmy, że ten układ dwu gwiazd neutronowych odkryli metodami radioastronomicznymi Russell Hulse i Joseph Taylor w 1974 r., za co później dostali Nagrodę Nobla.

Fale elektromagnetyczne powstają w wyniku drgań ładunków elektrycznych, a ich detekcja polega na zaobserwowaniu drgań ładunków wywołanych w antenie przez przejście fali elektromagnetycznej. W najprostszym przypadku anteną nadawczą może być zwyczajny przewodzący pręt (dipol), jeżeli wymusić w nim okresowe przesuwanie się ładunków (wprawdzie tylko ujemnych, bo one są swobodne, ale to wystarcza) z jednego jego końca w drugi. Wygląda to, jakby na końcach dipola powstawały na przemian ładunki dodatnie i ujemne, a generowane w ten sposób pole elektromagnetyczne nazywa się promieniowaniem dipolowym (rys. 1).

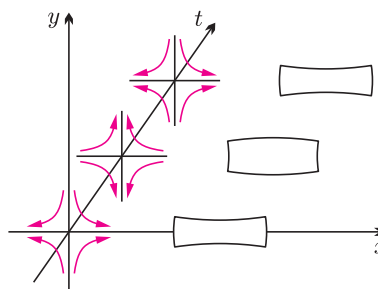


Rys. 1. Rozchodzenie się najprostszego promieniowania dipolowego (elektromagnetycznego) i odpowiadająca mu reakcja anteny.

Detekcja fali elektromagnetycznej polega na odwróceniu ról: tu fala powoduje przesuwanie się ładunków w dipolu i to właśnie należy zarejestrować.

Można domyślać się, zresztą słusznie, że fale grawitacyjne powstają analogicznie wskutek drgań mas i układów mas, a zaobserwować je można by również w zjawisku odwrotnym, czyli stwierdziwszy drgania jakichś „anten grawitacyjnych”, spowodowane przejściem fali. Realizacja takiego eksperymentu okazała się bardzo trudna. Pionierem badań był Joseph Weber z University of Maryland w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Jego antenami były kilkutonowe walce aluminiowe, które podobno od czasu do czasu drgały. Niestety, doświadczenia te, prowadzone przez innych badaczy nawet do dziś, nie dawały jednoznacznych wyników.

Fala grawitacyjna ma jednak inny charakter niż elektromagnetyczna. Przede wszystkim jest to rozchodzące się w przestrzeni, dokładniej – w czasoprzestrzeni, zaburzenie samej jej struktury. Po drugie, o ile ładunki elektryczne są dodatnie i ujemne, to masy są przecież tylko dodatnie. Teoria mówi, że pod wpływem fali grawitacyjnej antena Webera powinna być w jednym kierunku ściskana, a w prostopadłym do niego rozciągana – i tak na zmianę. Wygląda to, jakby blok metalu był okresowo od dwóch biegunów odpychany i do dwóch innych biegunów przyciągany. Dlatego mówimy, że promieniowanie grawitacyjne jest promieniowaniem kwadrupolowym (rys. 2).



Rys. 2. Rozchodzenie się najprostszego promieniowania kwadrupolowego, np. grawitacyjnego i odpowiadająca mu reakcja anteny Webera.

Łatwo zgadnąć, że anteny Webera reagowały (jeśli w ogóle) na fale grawitacyjne o częstości swoich własnych drgań mechanicznych, rezonansowych. Były więc antenami wąskopasmowymi, a przez to zdolnymi zarejestrować zapewne niektóre tylko zjawiska sygnalizowane przez promieniowanie grawitacyjne.

Tu warto przypomnieć, z jakim strumieniem energii można w ogóle mieć do czynienia w przypadku fal grawitacyjnych. We Wszechświecie są dwa najważniejsze typy źródeł tego promieniowania: układ obiegających się dwóch mas oraz wirująca masa niemająca symetrii obrotowej.

Dla pierwszego przypadku teoria przewiduje, że moc emitowana przez takie źródło (dla orbit kołowych) wynosi

$$L = \frac{32}{5} G^4 \left(\frac{M}{ac} \right)^5 x^2,$$

gdzie G oznacza stałą grawitacji, M – masę większą, x – stosunek masy mniejszej do większej, a – promień względnej orbity, c – prędkość światła. Na przykład, układ Słońce-Jowisz emituje energię grawitacyjną z mocą rzędu 50 W, Syriusz A z towarzyszącym mu białym karłem, czyli Syriuszem B, promieniuje w przybliżeniu 100 MW, ale dwie gwiazdy neutronowe o masach słonecznych, obiegające się w tempie trzech obiegów na sekundę, stanowią już źródło o mocy 3×10^{39} W.

W drugim przypadku moc promieniowania grawitacyjnego obiektu w przybliżeniu elipsoidalnego określa wzór

$$L = \frac{8}{5} \frac{G}{c^5} I^2 e^4 \omega^6,$$

gdzie I oznacza moment bezwładności obiektu względem osi obrotu, e – mimośród jego równika, ω – jego prędkość kątową. Moc grawitacyjnego promieniowania pulsara w mgławicy Krab szacowana jest na 2×10^{30} W. Niektóre podane tu liczby wyglądają poważnie, ale wszystkie te źródła są daleko, a skoro strumień energii maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości, na Ziemi mamy do czynienia z energiami doprawdy znikomymi.

Wobec tego można by spróbować rejestrować nie energię niesioną przez fale grawitacyjne, tylko same powodowane przez nie zaburzenia geometrii czasoprzestrzeni. Należy więc umieć zarejestrować drobne zmiany rozmiarów czegokolwiek w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, przy czym zmiany te powinny zachodzić w przeciwnych fazach. Stosowny przyrząd pomiarowy znany jest od ponad stu lat, a jest nim zasłużony interferometr Michelsona. Właściwie jako jego powiększenie powstał w 2000 roku interferometr LIGO – tj. *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*. (Jego zapowiedź jest w *Patrz w niebo – Delta 2/1998*.) Urządzeń takich jest już kilka. Największe dwa znajdują się w Hanford (Washington) i Livingston (Louisiana) w USA. W każdym z nich laserowa wiązka światła dzielona jest na dwa wzajemnie prostopadłe promienie, które biegną czterokilometrowymi tunelami i po odbiciu się od lusterek spotykają się znowu na skrzyżowaniu tuneli. W miejscu spotkania promienie interferują, wygaszając się. Każda zmiana długości jednego tunelu, której towarzyszyłaby przeciwna co do znaku zmiana długości drugiego tunelu, powinna zostać wykryta jako niepełne wygaszenie się interferujących promieni. Dla zwiększenia czułości promienie w tunelach są wielokrotnie odbijane w obie strony (aby droga światła była dłuższa), ale nie zmienia to zasady detekcji. Rzecz jasna, w tunelach panuje próżnia, laser jest maksymalnie chłodzony

(dla uzyskania najlepszej monochromatyczności światła), lustra są supergładkie i jak najdokładniej odizolowane od wszelkich możliwych drgań gruntu. Tak więc stworzenie takiej aparatury, choć zasada jej działania jest opisana w każdym podręczniku fizyki, jest poważnym problemem technologicznym. Zauważmy, że taki detektor praktycznie nie ma żadnych drgań własnych, może więc reagować na fale grawitacyjne o bardzo różnych częstościach, czyli stanowi grawitacyjną antenę szerokopasmową. Mniejsze detektory, ale działające na tej samej zasadzie, buduje się we Włoszech, w Niemczech i w Japonii (ten już działa). Chodzi o to, że pewność zarejestrowania fal grawitacyjnych będzie tym większa, im więcej detektorów zadziała jednocześnie (oczywiście z dokładnością do opóźnienia określonego przez skończony czas przelotu fali z prędkością światła między detektorami).

Bezpośrednie zaobserwowanie promieniowania grawitacyjnego podwójnego pulsara PSR 1913+16 jest nadal niemożliwe. Gwiazdy składowe tego obiektu obiegają się teraz w okresie ponad 7 godzin, zatem emisja promieniowania jest bardzo słaba. Co prawda powoduje ona, że orbity składników zacieśniają się o 3,5 m rocznie, a okres obiegu maleje o 0,1 ms rocznie, tak że za – powiedzmy – ćwierć miliarda lat częstość i amplituda fal grawitacyjnych tego układu wzrosną do wartości wyczuwalnych przez LIGO. Oczywiście nie w tym rzecz, można jednak mieć nadzieję, że obecnie jakiś inny układ podwójny gwiazd neutronowych zbliża się do katastrofy, czyli do złania się dwu gwiazd w jedną. Ocenia się, że takich zjawisk powinno się obserwować średnio jedno na rok. Szybko rotujących gwiazd neutronowych jest w samej naszej Galaktyce pod dostatkiem, problem tylko w tym, czy nie są one zbyt symetryczne osiowo. W dodatku powstaniu każdej takiej gwiazdy w wyniku zapaści jądra supernowej również powinien towarzyszyć „błysk” promieniowania grawitacyjnego – o ile zapaść nastąpiłaby nie całkiem symetrycznie.

Nie ma jeszcze żadnych wyników obserwacji wykonanych przez LIGO, jego praca dopiero się zaczyna, a tymczasem planowane jest już obserwatorium grawitacyjne nowej generacji. ESA i NASA na rok 2010 przewidują uruchomienie kosmicznego detektora fal grawitacyjnych LISA, od *Laser Interferometer Space Antenna*. Ma to być trójka sztucznych satelitów tworzących równoboczny trójkąt o bokach 5 mln km, którego środek biegłby 50 mln km za Ziemią po jej okołosłonecznej orbicie. Podobnie jak w przypadku LIGO, laserowe interferometry mierzyłyby fluktuacje wzajemnych odległości satelitów, co przekładałoby się na informacje o promieniowaniu grawitacyjnym. Według twórców projektu LISA byłyby mniej więcej tak samo czuły jak LIGO, ale na fale o okresie od sekund do godzin, który to zakres jest dla LIGO zupełnie niedostępny. Oby tylko nie zabrakło funduszy.



mała delta

Czy tylko $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną?

O istnieniu liczb niewymiernych wiedzieli greccy matematycy ponad 2500 lat temu. Euklides udowodnił w „Elementach”, że liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna, choć Pitagorejczycy wiedzieli o tym i wcześniej. I może temu dowodowi Euklidesa zawdzięczamy to, że kiedy trzeba wykazać, że jakaś liczba jest niewymierna, wybiera się w tym celu właśnie $\sqrt{2}$. A tymczasem można elementarnie udowodnić niewymierność wielu innych liczb. Podstawą będzie następujące twierdzenie:

jeśli a i n są dodatnimi liczbami całkowitymi i $\sqrt[n]{a}$ jest liczbą wymierną, to $\sqrt[n]{a}$ jest liczbą całkowitą.



Dowód twierdzenia jest prosty. Załóżmy, że $\sqrt[n]{a}$ jest liczbą wymierną, a więc $\sqrt[n]{a} = \frac{l}{m}$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich l i m ; możemy założyć, że $\frac{l}{m}$ jest ułamkiem nieskracalnym. Wtedy $m^n a = l^n$. Jeśli $m \neq 1$, to istnieje liczba pierwsza p , która dzieli m . Łatwo zauważyć, że wtedy p dzieli także l^n , a więc dzieli także l , co oznacza, że ułamek $\frac{l}{m}$ można skrócić przez $p > 1$ – wbrew założeniu. Ta sprzeczność wykazuje, że musi być prawdziwa równość $m = 1$, a więc $\frac{l}{m}$ jest liczbą całkowitą.

Korzystając z tego twierdzenia, możemy teraz bez trudu wykazać, że

dla każdej liczby pierwszej p i dowolnej liczby naturalnej $n > 1$, liczba $\sqrt[n]{p}$ jest liczbą niewymierną.

Przypuścimy, że jest inaczej. Jeśli jednak $\sqrt[n]{p} = a$ i a jest liczbą wymierną, to musi być – zgodnie z twierdzeniem – liczbą całkowitą. Wtedy $p = a^n$, co przeczy założeniu, że p jest pierwsza (bo $a > 1$). Stąd wniosek, że $\sqrt[n]{p}$ nie jest liczbą wymierną.

Nieco więcej zachodu wymaga wykazanie, że

dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n > 1$ liczba $\sqrt[n]{n}$ jest niewymierna.

Jak wynika z twierdzenia, jeśli $\sqrt[n]{n} = a$ i a jest liczbą wymierną, to a jest liczbą całkowitą i $n = a^n$. Oczywiście gdyby $a = 1$, to $n = 1$ – wbrew założeniu. Zatem $a \geq 2$, a w konsekwencji $a^n \geq 2^n$. Można jednak wykazać (do czego zachęcam tych, którzy znają metodę indukcji matematycznej), że

$2^n > n$ dla każdej liczby naturalnej n ,

a więc także dla $a \geq 2$ mamy $a^n > n$ i równość $n = a^n$ nie jest możliwa. Znowu wnioskujemy, że $\sqrt[n]{n}$ liczbą wymierną nie jest.

Zapraszam Czytelników do samodzielnego wykazania, że

jeśli p i q są różnymi liczbami pierwszymi, to \sqrt{pq} i $\sqrt{p} - \sqrt{q}$ są liczbami niewymiernymi,

podobnie jak $\sqrt{n(n+1)}$ i $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej.



Rozwiązanie zadania F 613. Minimalny rozmiar kątowy, rozróżnialny ludzkim okiem, to $\alpha = h/L \approx 10^{-3}$ (można to sprawdzić samemu, z odległości paru metrów jesteśmy w stanie rozróżnić obiekty rozmiarów milimetrowych). Przyjmując, że długość ogniskowej oka ma 2 cm (rozmiar gałki ocznej!), otrzymujemy $\alpha = h/L \sim x/F$, $x \sim F\alpha \approx 2 \cdot 10^{-5}$ m.



Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL

O polu pewnego trójkąta

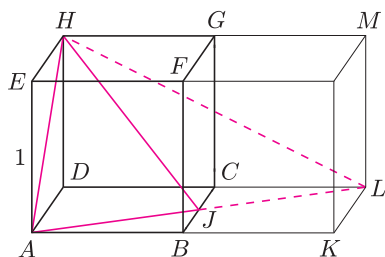
Tomasz ŻUKOWSKI

Czy zadanie polegające na obliczeniu pola danego trójkąta może mieć ciekawe rozwiązanie? Myślę, że większość Czytelników wzruszy ramionami i odpowie – nie. A jednak...

Zadanie. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi 1, J jest środkiem krawędzi BC tego sześcianu. Obliczyć pole trójkąta AJH (rys. 1).

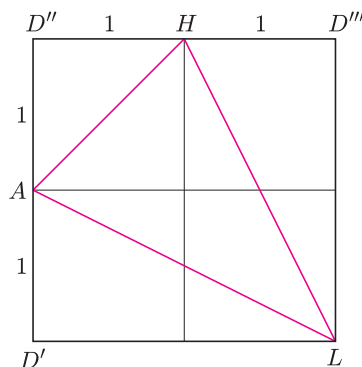
Rozwiązanie 1 (sprytne)

Do danego sześcianu dobudujemy drugi i zauważmy, że HJ jest środkową tego trójkąta, zatem szukane pole jest połową pola trójkąta ALH .



Rys. 1

Obliczenie pola trójkąta równoramiennego ALH nie stanowi już problemu, ale my nie skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa. Sprawdźmy, że rysunek 2 przedstawia siatkę czworokątną $ALHD$. Rzeczywiście, trójkąty ADH , ADL i LDH przystają do odpowiednich trójkątów siatki (cecha przystawiania trójkątów: (bok, kąt, bok)). Zatem trójkąt ALH też przystaje do odpowiedniego trójkąta siatki (bok, bok, bok).



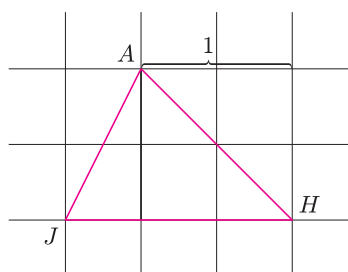
Rys. 2

Pozostało odejmowanie

$$P_{\Delta ALH} = 4 - 1 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

tak więc $P_{\Delta AJH} = \frac{3}{4}$.

A przy okazji, ciekawostka: $ALHD$ jest jedynym, z dokładnością do podobieństwa, czworokątnym o kwadratowej siatce.



Rys. 3

Rozwiązanie 2 (cyrkowe)

Obliczmy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, długości odcinków

$$AJ = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad JH = \frac{3}{2}, \quad HA = \sqrt{2},$$

weźmy papier w kratkę (bok oczka siatki = $\frac{1}{2}$) i spróbujmy narysować trójkąt AJH (rys. 3).

Ze zdziwieniem (lub bez) stwierdzamy, że można to zrobić tak, aby wierzchołki były punktami kratowymi. Bez trudu obliczamy pole.

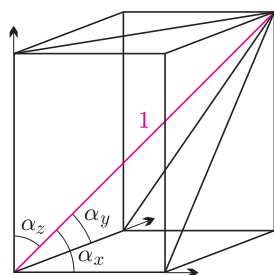
Rozwiązanie 3 (długie, ale ogólne)

Rozpocznijmy od nietypowego sformułowania twierdzenia Pitagorasa:

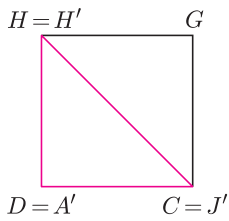
Kwadrat długości odcinka jest równy sumie kwadratów długości rzutów prostokątnych tego odcinka na osie dowolnie wybranego kartezjańskiego układu współrzędnych (na płaszczyźnie lub w przestrzeni).

Czy istnieje analogiczne twierdzenie dotyczące pola figury płaskiej? Okazuje się, że tak.

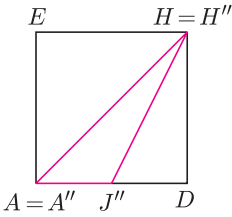
Twierdzenie. Kwadrat pola figury płaskiej położonej w przestrzeni jest równy sumie kwadratów pól rzutów prostokątnych tej figury na płaszczyzny dowolnie wybranego kartezjańskiego układu współrzędnych.



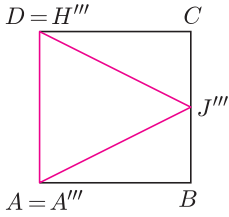
Rys. 4



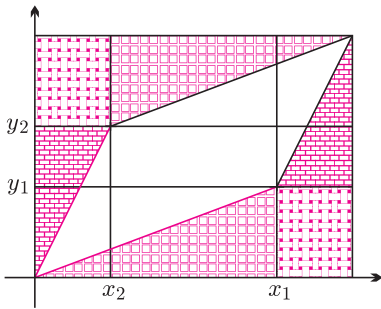
Rys. 5a



Rys. 5b



Rys. 5c



Rys. 6

Dowód. Niech f będzie figurą płaską, a f_x, f_y, f_z rzutami prostokątnymi figury f na płaszczyzny Oyz, Ozx i Oxy odpowiednio. Kąty dwuścienne utworzone przez płaszczyznę figury f i płaszczyzny układu (równe kątom utworzonym przez prostą prostopadłą do płaszczyzny figury f i osie układu) oznaczmy $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$.

Wiemy, że

$$P_{f_x} = P_f \cos \alpha_x, \quad P_{f_y} = P_f \cos \alpha_y, \quad P_{f_z} = P_f \cos \alpha_z$$

oraz (z twierdzenia Pitagorasa, rys. 4)

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1.$$

Po podstawieniu otrzymujemy tezę:

$$P_f^2 = P_{f_x}^2 + P_{f_y}^2 + P_{f_z}^2.$$

Wybermy proste AB, AD, AE jako osie współrzędnych i zastosujmy powyższe twierdzenie do trójkąta AJH . Oto rzuty naszego trójkąta na płaszczyzny układu współrzędnych – rysunki 5a, 5b, 5c.

$$P_{AHJ}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

i jeszcze raz $P_{\Delta AJH} = \frac{3}{4}$.

Rozwiązanie 3 nie wykorzystuje żadnych szczególnych cech danego trójkąta, więc można je uogólnić do odpowiedzi na następujące pytanie: jak obliczyć pole trójkąta położonego w przestrzeni, mając dane współrzędne jego wierzchołków $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3)$?

Przypomnijmy, na początek, rozwiązanie podobnego zadania na płaszczyźnie. Oto równoległobok rozpięty na wektorach $\vec{v} = [x_1, y_1]$ i $\vec{u} = [x_2, y_2]$ (rys. 6). Odejmując od pola dużego prostokąta pola zacieniowane, otrzymujemy:

$$P_{\square} = |(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - x_1 y_1 - x_2 y_2 - 2x_2 y_1| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

Jako oczywisty wniosek otrzymujemy następującą formułę na pole trójkąta o wierzchołkach $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3)$:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

oraz wzór na pole trójkąta o wierzchołkach $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3)$:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} [((y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1))^2 + ((x_2 - x_1)(z_3 - z_1) - (x_3 - x_1)(z_2 - z_1))^2 + ((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Wzór może nieporęczny, ale od czego są komputery?

Rozwiązanie 4

Podstawmy w powyższym wzorze za A, B, C punkty $A = (0, 0, 0), J = (1, \frac{1}{2}, 0), H = (0, 1, 1)$ i już.

Rozwiązanie 5

Jeśli mowa o nieporęcznych wzorach, to nie sposób zapomnieć o wzorze Herona:

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie a, b, c są długościami boków, a p połową obwodu trójkąta.

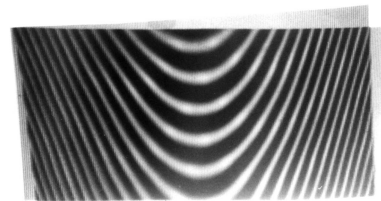
W naszym przypadku: $a = \frac{3}{2}, b = \frac{\sqrt{5}}{2}, c = \sqrt{2}, p = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} \right)$.

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4}\right)} = \dots = \frac{1}{16}\sqrt{9\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$$

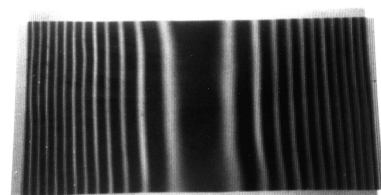
Uff, udało się.

Czy dyfrakcję światła można obserwować na firance?

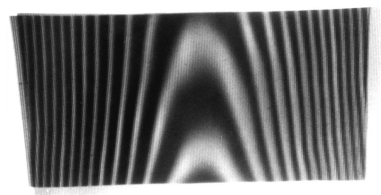
Stanisław
BEDNAREK



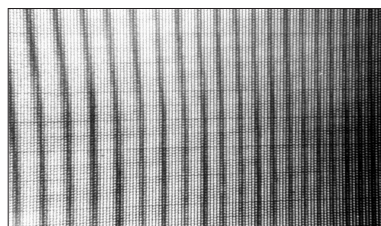
Fot. 1



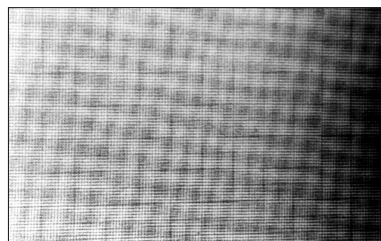
Fot. 2



Fot. 3



Fot. 4



Fot. 5

Zjawisko, które zostanie dalej opisane, niewątpliwie najłatwiej można zaobserwować właśnie na firance. Wystarczy spojrzeć na firankę o drobnych oczkach tworzącą draperie, czyli zachodzące na siebie fałdy, zawieszoną przed oknem, przez które przechodzi światło. Zauważymy wówczas szereg jasnych i ciemnych prążków występujących na przemian. Ich kształty są zwykle łagodne i nieregularne. Zmieniając punkt widzenia stwierdzamy, że kształty tych prążków również ulegają zmianom. Obserwowane zjawisko to mora. Jego nazwa pochodzi od arabskiego słowa muchajjar oznaczającego tkaninę, na powierzchni której można zobaczyć miejsca występowania ciemnych i jasnych prążków. W języku niemieckim tkanina taka nazywa się Mohr. Wziąwszy pod uwagę, że litera h nie jest w tym słowie wymawiana i uwzględniając występującą w języku polskim odmianę wyrazów otrzymuje się właśnie nazwę mora.

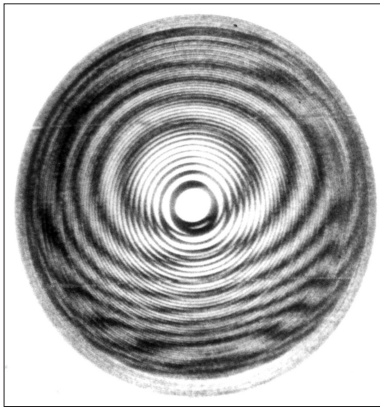
W pierwszej chwili wydawać by się mogło, że mora to wynik dyfrakcji i interferencji światła na nitkach tkaniny, czyli efekt taki jak w przypadku siatki dyfrakcyjnej. Ta hipoteza nie jest jednak prawdziwa. Rozmiary oczek firanki lub grubości nitek tkaniny są zbyt duże w porównaniu z długością fali światła, żeby dyfrakcja i interferencja odgrywały tu znaczącą rolę. Zjawisko mora możemy z powodzeniem obserwować, gdy oczka firanki są wielkości kilku milimetrów, natomiast długość fali światła widzialnego wynosi w przybliżeniu od 0,00038 mm, (światło niebieskie) do 0,00076 mm (światło czerwone). Długości fali światła są więc około 10 000 razy mniejsze od rozmiarów oczek. Jak wiadomo, efekty dyfrakcyjno-interferencyjne są istotne wtedy, gdy przeszkody, na które napotyka fala, mają rozmiary zbliżone do jej długości. Dla porównania podamy, że odległość między sąsiednimi szczelinami typowych siatek dyfrakcyjnych, znajdujących się w szkolnych pracowniach fizycznych, wynosi 0,01–0,05 mm.

Jest jeszcze jeden argument świadczący o tym, że mora powstaje inaczej, niż układ prążków tworzonych przez siatkę dyfrakcyjną. Jeżeli popatrzymy uważnie przez taką siatkę na źródło światła białego, to zauważymy rozszczepienie światła, podobnie jak dla tęczy. Tego efektu nie obserwujemy w przypadku mora.

Żeby wyjaśnić zjawisko mora weźmy pod uwagę dwa szeregi równoległych, nieprzezroczystych prętów o takiej samej grubości. Odległości między prętami jednego szeregu powinny się minimalnie różnić od odległości w drugim szeregu. Po nałożeniu szeregu jeden na drugi, możemy zaobserwować jaki obraz na ekranie utworzy przechodząca przez nie równoległa wiązka światła. Okaze się, że na ekranie powstaną jasne i ciemne obszary w postaci rozmieszczonych na przemian prążków. Szerokość tych prążków i odległość między nimi jest inna niż grubość prętów i ich odległości w obu szeregach. Otrzymany na ekranie układ prążków to właśnie najprostszy przypadek mora.

W przeprowadzonych rozważaniach nie rozpatrywaliśmy dyfrakcji światła padającego na pręty. Nie było takiej potrzeby, ponieważ mora jest efektem, polegającym na sumowaniu się natężeń światła przechodzącego przez nakładające się okresowe figury geometryczne o mało różniących się rozmiarach, kształcie lub położeniu (lub odbitego od nich). Morę można również obserwować, np. na dwóch identycznych kratkach, jeżeli będą one lekko skrócone względem siebie lub zostaną umieszczone na lekko pofalowanych powierzchniach. Sytuacja taka zachodzi właśnie podczas tworzenia się mora na firance. Rozpatrywane wcześniej szeregi nieprzezroczystych prętów można zastąpić płaskimi zwierciadłami w kształcie równoległych pasków. Jeżeli na taki układ rzucimy równoległą wiązkę światła, to promienie odbite również utworzą morę.

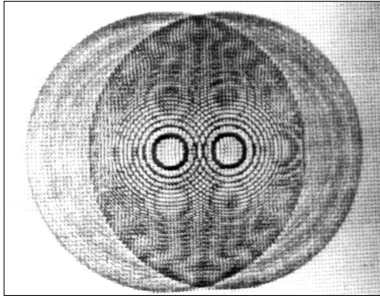
Rozważania zapoczątkowane dla układu prętów moglibyśmy kontynuować, nadając im bardziej ilościowy charakter. Otrzymałobyśmy wzory opisujące zależność między szerokością prążków i ich położeniem. Wydaje się jednak, że bardziej atrakcyjnym zajęciem, przynajmniej dla badaczy-amatorów, będą



Fot. 6

eksperymenty polegające na obserwacji mory wytwarzanej przez różne układy figur. Obserwacje te mogą również dostarczyć wielu wrażeń natury estetycznej, o które trudno byłoby podczas analizy wyprowadzonych wzorów.

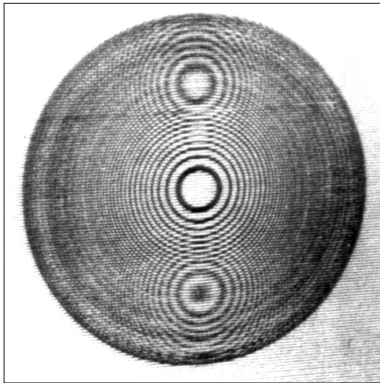
Nasze eksperymenty możemy rozpocząć od sprawdzenia działania opisanego układu równoległych, nieprzezroczystych prętów. W tym celu posłużymy się dwoma kawałkami kalki technicznej lub papieru częściowo przepuszczającego światło. Na pierwszym kawałku kalki rysujemy szereg złożony z 20–30 równoległych, całkowicie zaczernionych pasków o szerokości 5 mm, oddalonych od siebie także o 5 mm. Długość pasków powinna wynosić 3–5 cm. Na drugim kawałku rysujemy podobny szereg pasków, ale o szerokości 4,5 mm. Odległość między paskami pozostawiamy bez zmiany. Oba szeregi pasków nakładamy równolegle jeden na drugi i patrzymy przez nie w kierunku źródła światła. Przesuwamy paski względem siebie, a także skręcamy je o niewielki kąt i badamy wpływ tych zmian na powstającą morę.



Fot. 7

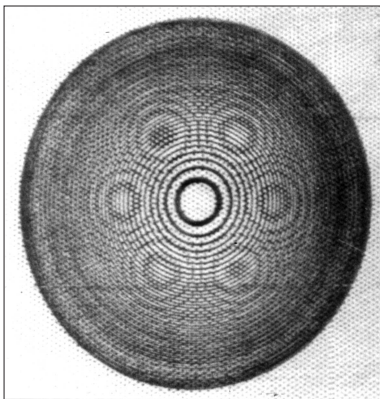
Do badania mory możemy również wykorzystać kawałki firanki, gazy lub innej rzadkiej tkaniny, naciągniętej na wyciętym z tektury okienku o rozmiarach kilku centymetrów, i przypiętej do niego spinaczami biurowymi. Odległość między nitkami tworzącymi oczka siatki łatwo jest w tym przypadku regulować przez zmianę napięcia tkaniny. Do obserwacji mory bardzo dobrze nadają się także kawałki metalowej siatki o rozmiarach oczek od kilku milimetrów do ułamka milimetra. W najprostszych przypadkach możemy posłużyć się siatkami używanymi w gospodarstwie domowym, które nakładamy tak, żeby ich oczka znajdowały się blisko siebie.

Dostęp do rzutnika pisma, tzw. grafoskopu, używanego powszechnie w szkołach, pozwoli nam uzyskać duże obrazy mory na ekranie i przeprowadzić pokazy tego zjawiska dla liczniejszej grupy osób przy użyciu niewielkiej liczby siatek. W tym celu wybieramy dwie siatki, układamy je na szybie grafoskopu i regulujemy ostrość, tak żeby na ekranie pojawiły się jak najwyraźniejsze prążki. Obrazy otrzymane na ekranie, dzięki ich znacznym rozmiarom i dużej jasności, możemy łatwo fotografować używając zwykłego aparatu fotograficznego zamocowanego na statywie. Właśnie w ten sposób wykonano fotografie mory zamieszczone w tym artykule. Mora przedstawiona na fotografii 1 została otrzymana za pomocą kawałków dwóch lekko skręconych względem siebie metalowych siatek o podłużnych oczkach. Siatki takie stosowane są jako maski w kineskopach odbiorników telewizji kolorowej. Zmieniając powoli wzajemne usytuowanie siatek lub wyginając lekko jedną z nich, umożliwiamy obserwację wpływu tych zmian na kształt prążków mory (fot. 1, 2, 3).



Fot. 8

Szerokie możliwości badania mory zapewniają siatki wykonane na kalce technicznej lub przezroczystej folii. Bezpośrednie rysowanie siatek na tych materiałach przy użyciu pisaków lub tuszu kreślarskiego jest pracochłonne i nie zawsze daje dobre rezultaty. Dobrze jest podłożyć papier milimetry lub skorzystać z komputera z zainstalowanym programem graficznym, o ile ktoś ma taką możliwość. Siatki takie mogą być złożone z różnych figur, np. kwadratów, prostokątów, trójkątów równobocznych czy sześciokątów foremnych. Za pomocą takich siatek uzyskane zostały obrazy mory przedstawione na fotografiach 4 i 5. Warto też narysować układ współśrodkowych okręgów o stałej różnicy promieni oraz układ kropek, rozmieszczonych regularnie w wierzchołkach kwadratów lub trójkątów równobocznych, tworzących tzw. raster. Na fotografiach 6, 7, 8 i 9 zamieszczono mory powstające na złożonych rastrach, utworzonych ze współśrodkowych okręgów i kropek.



Fot. 9

Na zakończenie warto dodać, że mora jest nie tylko interesującym zjawiskiem fizycznym, przy wyjaśnianiu którego łatwo popełnić błąd, uważając je za wynik dyfrakcji i interferencji. Duża czułość kształtu prążków mory na zmiany położenia siatek i ich deformacje jest wykorzystywana przez inżynierów do precyzyjnych pomiarów odkształceń różnych części maszyn i elementów budowli. Również w kształtach abstrakcyjnych dzieł niektórych współczesnych artystów można dostrzec inspiracje prążkami mory.

Bilardy

Henryk ŻOŁĄDEK

Dla zwykłego śmiertelnika bilard kojarzy się ze spędzaniem wolnego czasu i traceniem pieniędzy. Profesjonaliści potrafią na bilardzie zarabiać pieniądze. Natomiast matematykom bilardy dostarczają rozrywek zgoła innego rodzaju.

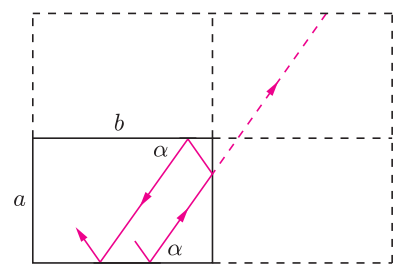
Bilardem będziemy nazywać układ dynamiczny cząstki materialnej poruszającej się ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością (równą 1) po (spójnym) **stole bilardowym** $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, którego brzeg składa się ze skończonej liczby kawałków krzywych klasy C^1 . Przy odbiciu od brzegu $\partial\Omega$ kąt padania równa się kąt odbicia. Przestrzeń możliwych stanów cząstki, nazywana **przestrzenią fazową** i oznaczana przez X , to 3-wymiarowa przestrzeń par (x, θ) , gdzie $x \in \Omega$ jest położeniem cząstki, a kąt $\theta \in [0, 2\pi)$ określa kierunek ruchu.

Chyba najprostszym przykładem bilardu jest bilard w prostokącie (o bokach a i b). Jego prostota wynika po części z tego, że kąt α odbicia w przeciwległych ściankach nie zmienia się wzdłuż trajektorii (rysunek obok). Z tego rysunku widać także, że układ dynamiczny bilardu w prostokącie jest równoważny ruchowi wzdłuż geodezyjnych na torusie o wymiarach $2a$ i $2b$. Jeśli współczynnik nachylenia $\tan \alpha$ jest współmierny z b , tzn. $\frac{\tan \alpha}{b/a} = \frac{m}{n}$ (nieskracalny ułamek), to trajektoria jest okresowa z okresem $q = 2(m+n)$. W przeciwnym przypadku ruch jest prawie okresowy, ale nie okresowy.

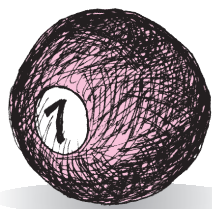
Przestrzeń fazowa X rozbija się na 2-wymiarowe podzbiory niezmiennicze X_α , gdzie każde X_α jest wypełnione rodziną trajektorii okresowych albo jest wypełnione rodziną gęstych obmotek na torusie. W ostatnim przypadku mówimy, że potok bilardu ograniczony do X_α jest **ergodyczny**.

Oczywiście bilard w prostokącie ma nieskończenie wiele trajektorii okresowych; każda taka trajektoria leży w pasie złożonym z trajektorii okresowych o takiej samej geometrii. Dlatego wygodnie jest wprowadzić funkcję $f(N)$, określającą liczbę powyższych pasów trajektorii okresowych o okresie $q \leq N$. W przypadku prostokąta ta liczba zachowuje się jak $\sim cN^2$ przy $N \rightarrow \infty$, gdzie c jest wliczalną stałą.

Przejdźmy do bilardów w wieloboku ogólnego typu (z n bokami i dowolnymi kątami). Tutaj sytuacja nie jest już tak jasna. W szczególności, nie wiadomo, czy dla każdego wieloboku istnieje chociaż jedna trajektoria okresowa. Jeśli już trajektorie okresowe istnieją, to są one dwóch typów: izolowane, gdy okres jest nieparzysty, i nieizolowane (w pasach), gdy okres jest parzysty. Przy tym trajektorie izolowanych jest bardzo mało.



Okresem trajektorii nazywamy liczbę punktów, w których odbija się od brzegu. Trajektorie, które wpadają w wierzchołki prostokąta (lub obszaru Ω), są bardzo rzadkie i ich nie uwzględniamy.



Ważną klasę wieloboków stanowią tzw.

wieloboki wymierne, których kąty wierzchołkowe są współmierne z π . W takim przypadku można uogólnić powyższą konstrukcję: prostokąt \rightarrow torus. Dostaje się pewną płaską zamkniętą powierzchnię i potok geodezyjny na niej, równoważny potokowi bilardu. Tutaj również z każdą trajektorią bilardu (tzn. geodezyjną) można związać niezmiennik analogiczny do kąta α ,

tzw. **kierunek geodezyjnej**. Mamy znowu rozbięcie przestrzeni fazowej X na niezmiennicze podzbiory X_α . Udowodniono, że dla prawie każdego α ograniczenie potoku do X_α jest ergodyczne. Udało się też pokazać oszacowania $c_* N^2 \leq f(N) \leq c^* N^2$ dla liczby pasów złożonych z trajektorii okresowych o parzystym okresie $q \leq N$ (H. Masur). Przypuszcza się, że w granicy $N \rightarrow \infty$ stałe c_* i c^* pokrywają się.

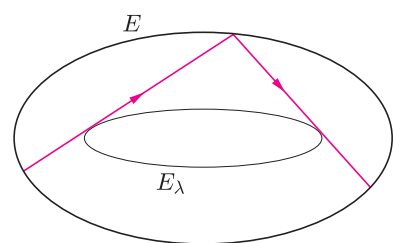
Kolejnym standardowym przykładem jest **bilard w elipsie** E o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tutaj zachodzi następująca własność. Jeśli trajektoria bilardu jest styczna (w pewnym momencie) do elipsy E_λ o równaniu: $\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1$ współogniskowej z E , to będzie ona styczna do E_λ również po następnych odbiciach (rysunek obok). Wobec tego przestrzeń fazową X można rozbić na odpowiednie niezmiennicze podprzestrzenie X_λ . Można powiedzieć nawet więcej: dla ustalonego λ albo wszystkie trajektorie z X_λ są okresowe z tym samym okresem, albo są równoważne (w pewnym sensie) prawie okresowym obmotkom na torusie. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z tzw.

własnością Ponceleta:

jeśli pewien wielokąt jest wpisany w E i opisany na E_λ , to można go poruszać w ciągły sposób, tak aby pozostał wpisany w E i opisany na E_λ .



W istocie, dowód słynnego twierdzenia Ponceleta można sprowadzić do tego twierdzenia.

Jeśli chodzi o istnienie trajektorii okresowych w dowolnym wypukłym bilardzie, to mamy następujące twierdzenie G. D. Birkhoffa.

Dla dowolnych naturalnych liczb względnie pierwszych p i q , takich że $p < q$, istnieją co najmniej dwie trajektorie bilardu o okresie q obiegające brzeg p razy.

Dowód opiera się na obserwacji, że powyższe trajektorie realizują odpowiednio maksimum i minimum obwodu q -boku wpisanego w Ω o zadanej **liczbie obrotu** $\frac{p}{q}$. Gdy $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, to maksymalna orbita odpowiada średnicy Ω , a minimalna – szerokości Ω .

Innym intrygującym problemem jest pytanie o miarę Lebesgue'a zbioru trajektorii okresowych. Przypuszcza się, że nie istnieje sytuacja, gdy trajektorie okresowe o ustalonym okresie q lokalnie tworzą dwuparametrową rodzinę (zapełniają otwarty podzbiór X). Tak nie jest, gdy brzeg wypukłego bilardu jest krzywą analityczną; można to objaśnić efektem rykoszetu (im bliżej brzegu leży trajektoria, tym częściej się odbija). Gdy okres $q = 2$, to łatwo zobaczyć, że takie trajektorie mogą tworzyć rodzinę co najwyżej 1-parametrową (gdy Ω ma stałą szerokość). M. Rychlik udowodnił, że trajektorie okresowe o okresie $q = 3$ tworzą zbiór miary zero; wykorzystywał przy tym pewne dosyć skomplikowane tożsamości trygonometryczne. Dla $q \geq 4$ problem jest otwarty.

Ważną klasę stanowią tzw. **bilardy rozpraszające**, których brzeg składa się z wklęsłych kawałków. Ich badanie zapoczątkował J. G. Sinaj. Motywację stanowiła hipoteza ergodyczna gazu sztywnych kul w prostopadłościennym pudełku, a dwuwymiarowe wklęsłe bilardy stanowią pierwsze (choć nadal odległe) przybliżenie układu fizycznego.

Okazało się, że bilardy rozpraszające dają piękne przykłady chaotycznych układów dynamicznych. Charakteryzują się one tzw. **strukturą hiperboliczną**; oznacza to, że w pewnych kierunkach w przestrzeni fazowej trajektorie rozchodzą się wykładniczo szybko po długim czasie, a w innych kierunkach trajektorie zблиżają się do siebie wykładniczo szybko. Ponadto trajektorie okresowe są gęste w przestrzeni fazowej i odpowiednia liczba $f(N)$ zachowuje się jak e^{hN} przy $N \rightarrow \infty$, gdzie h jest **entropią** układu, oraz bilardy te są ergodyczne.

Własność hiperboliczności nie jest wyłączna dla bilardów rozpraszających. L. Bunimowicz wykazał, że bilard typu stadion (rysunek poniżej) jest hiperboliczny.



M. Wojtkowski objaśnił to zjawisko, posługując się prawami optyki geometrycznej. Otóż kierunki wykładniczego rozchodzenia się trajektorii odpowiadają specjalnym pękom rozchodzących się trajektorii (promieni). Po odbiciu taki pęk może się jeszcze bardziej rozproszyć (na wklęsłym kawałku brzegu) lub może się skurczyć. Chodzi o to, aby kontrolować skupianie się pęków przy odbiciach. Dlatego też stadion nie może być zbyt długi.



Zadania *Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ*

M 1051. Danych jest n liczb ($n \geq 3$) z przedziału $(0, 1]$, takich że przy dowolnym podziale tych liczb na dwie grupy suma liczb w przynajmniej jednej grupie jest nie większa niż 1. Wyznaczyć najmniejszą liczbę M_n , taką że suma wszystkich n liczb jest nie większa niż M_n .

Rozwiązanie na str. 16

M 1052. Niech $w_n(t) = \frac{1}{2^n} [(t + \sqrt{t^2 - 4})^n + (t - \sqrt{t^2 - 4})^n]$. Wykazać, że $w_n(w_m(t)) = w_m(w_n(t))$ dla każdego t .

Rozwiązanie na str. 16

M 1053. Wykazać, że $w_p(p)$ (patrz poprzednie zadanie) jest liczbą całkowitą podzielną przez p dla dowolnej liczby pierwszej p .

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 613. Oszacować odległość między dwoma sąsiednimi punktami światłoczułymi znajdującymi się w ludzkim oku.

Rozwiązanie na str. 3

F 614. Celofanowy balonik dziecięcy został napełniony gorącym powietrzem. Przy jakiej temperaturze tego powietrza balonik będzie się unosił?

Rozwiązanie na str. 14

Płynność nagród (dokończenie)

W 1933 roku Walter Meissner i Robert Ochsenfeld odkrywają kolejną zadziwiającą własność nadprzewodników. Okazuje się, że nie pozwalają one na wnikanie do nich pola magnetycznego. W obecności zewnętrznego pola w nadprzewodniku generowane są prądy, które całkowicie to pole kompensują. Zjawisko to jest nazywane *efektem Meissnera*.

W 1937 roku natomiast John F. Allen i Don Misener oraz niezależnie Piotr Kapica odkrywają następną niesamowitą własność ekstremalnie oziębionej materii. W temperaturze 2,17 K najbardziej rozpowszechniony izotop helu ^4He staje się nadciekły (termin wprowadzony przez Kapicę). Może poruszać się bez oporu, w szczególności penetrować kapilary niedostępne dla żadnego innego płynu. (Własność ta dotyczy tylko helu, gdyż w tak niskich temperaturach jest to jedyna substancja, która pozostaje w stanie ciekłym.)

Zjawisko to wyjaśnił najwybitniejszy uczeń Kapicy – Lew Landau, za co otrzymał Nagrodę Nobla z Fizyki w 1962 roku (Kapica też dostał tę nagrodę, ale dopiero w 1978 roku; niestety Allena i Misenera wtedy nie tylko pominięto, ale nawet nie wspomniano ich prac. . .). Landau jako pierwszy zrozumiał, że własności nadciekłego helu nie da się wyjaśnić, rozpatrując ruch pojedynczych atomów. W jego rozumowaniu punktem wyjścia jest stan podstawowy w temperaturze zera bezwzględego, którym jest kondensat Bosego-Einsteina. W miarę wzrostu temperatury energia przejawia się w postaci kwazicząstek (termin wprowadzony przez Landaua) – fononów, czyli kwantów fal dźwiękowych. Ponieważ długość fali fononów jest znacznie większa od odległości międzyatomowych (liczonych jako pierwiastek trzeciego stopnia z objętości podzielonej przez liczbę atomów w tej objętości), to ruch atomów nie wzbudza kolejnych fononów, a więc przebiega bez tarcia.

Landau nie poprzestał jednak na udowodnieniu, że nadciekłość helu jest przykładem kondensacji Bosego-Einsteina. Był w końcu jednym z najbardziej wszechstronnych fizyków. Wraz z Vitaly’im Ginzburgiem napisał na początku lat pięćdziesiątych XX wieku serię prac, za które ten ostatni został właśnie uhonorowany Nagrodą Nobla. Prace te dotyczyły (wtedy) nadal niewyjaśnionego zjawiska nadprzewodnictwa. Punktem wyjścia była opracowana przez Landaua w 1937 roku teoria przemian fazowych II rodzaju. Przykładem takiej przemiany jest spontaniczne namagnesowanie ferromagnetyka poniżej temperatury Curie. W teoretycznym opisie takiej przemiany wprowadzany jest *parametr uporządkowania*, który opisuje np. stopień namagnesowania ferromagnetyka. W przypadku nadprzewodników Landauowi i Ginzburgowi zależało na podaniu ich opisu przy obecności zewnętrznego pola magnetycznego. Wiadomo było, że nadprzewodnictwo załamuje się, jeżeli wykazujący efekt Meissnera nadprzewodnik (nadprzewodnik I rodzaju) umieści się w zbyt silnym polu magnetycznym. Teoria Ginzburga-Landaua (GL) opisywała zachowanie nadprzewodników całkiem dobrze, ale nie była doceniona przez naukę zachodnią. Nie tylko dlatego, że była teorią

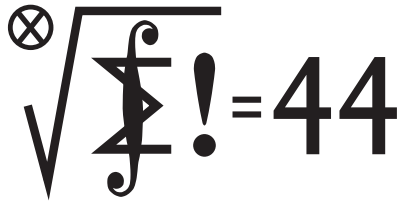
efektywną – nie wyjaśniała, jaki jest mikroskopowy mechanizm zjawiska nadprzewodnictwa – ale głównie z powodu ograniczonych kontaktów naukowych w tym okresie zimnej wojny. Powszechnie akceptowaną teorię nadprzewodnictwa, tzw. teorię BCS, stworzyli pod koniec lat pięćdziesiątych XX wieku panowie John Bardeen, Leon Cooper i Robert Schrieffer, a w 1972 roku otrzymali za nią Nagrodę Nobla z Fizyki. W teorii BCS nadprzewodnictwo tłumaczone jest jako kondensacja Bosego-Einsteina *par Coopera*, czyli par elektronów związanych wymianą fononów. Z tego uproszczonego opisu wynika, że jest to naprawdę skomplikowane zjawisko. Nic dziwnego, że trzeba było czekać aż pół wieku na jego wyjaśnienie.

Teoria BCS nie kończy jednak problemów z tłumaczeniem nadprzewodnictwa. Już Ginzburg i Landau dowiedli hipotetycznego istnienia nadprzewodników, do których pole magnetyczne może wnikać, tylko że wtedy takich materiałów jeszcze nie znano. Obecnie nazywamy je nadprzewodnikami II rodzaju. W 1952 roku Nikołaj Zawarickij (pisownia fonetyczna polska), pracujący w instytucie prowadzonym przez Kapicę, zaczął sprawdzać przewidywania teorii GL dla nadprzewodników w silnym polu magnetycznym. Okazało się, że teoria nie opisuje poprawnie obserwowanych prawidłowości (później okazało się, że również w ramach teorii BCS nie można ich wyjaśnić). Problem ten Zawarickij przedstawił swojemu koledze Aleksiejowi Abrikosowowi (tegorocznemu – 2003 – nobliście), który uporał się z nim modyfikując teorię GL. Kluczem do zrozumienia okazało się przyjęcie, że w nadprzewodnikach II rodzaju pole magnetyczne może istnieć wewnątrz wirów w *przestrzeni parametrów uporządkowania*. Całkowite załamanie się nadprzewodnictwa w takim nadprzewodniku zachodzi wtedy, gdy wiry te zaczynają się nakładać.

Ostatnim tegorocznym laureatem jest Anthony Leggett. Jemu zawdzięczamy wytłumaczenie nadciekłości izotopu helu ^3He . Atomy tej lekkiej odmiany helu są fermionami. Ich kondensacja Bosego-Einsteina, podobnie jak w przypadku nadprzewodnictwa, musi być poprzedzona tworzeniem par. Główną zasługą Leggetta było opisanie niezwykle bogatej struktury przestrzeni parametrów uporządkowania ^3He . Makroskopowym przejawem tej struktury jest powstawanie obserwowalnych wirów nadciekłej fazy.

Jak widać z tego telegraficznego skrótu, badanie własności materii w ekstremalnie niskich temperaturach było bardzo często doceniane przez Komitet Noblowski. Choć wymieniałem najwyżej połowę nagród przyznanych w tej dziedzinie, to i tak wielu pozostało nienagrodzonych. Od momentu powstania mechaniki kwantowej wiadomo, że tego typu badania są swoistym poligonem tej teorii. Alfred Nobel też powinien być zadowolony, bo nadciekłość, czy to w odniesieniu do „normalnego płynu”, jakim jest hel, czy w odniesieniu do gazu elektronowego znalazła wiele praktycznych zastosowań. Kilka z nich przypominamy na tylnej okładce.

Piotr ZALEWSKI



Termin nadsyłania rozwiązań:

30 IV 2004

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **463** ($WT = 2,39$) i **464** ($WT = 1,35$)
z numeru 6/2003

| | |
|----------------------|-------------|
| Michał Adamaszek | - 2 - 44,76 |
| Paweł Najman | - 41,07 |
| Marian Łupieżowicz | - 37,40 |
| Paweł Kubit | - 2 - 37,34 |
| Piotr Kumor | - 7 - 36,84 |
| Michał Józwiowski | - 36,70 |
| Zbigniew Sewartowski | - 36,07 |
| Nikodem Szpak | - 33,42 |
| Marcin Kasperski | - 2 - 33,10 |
| Krzysztof Jasek | - 32,63 |
| Światosław Gal | - 30,94 |
| Andrzej Daniluk | - 1 - 30,82 |
| Witold Bednarek | - 2 - 28,86 |
| Bartłomiej Dyda | - 3 - 28,47 |
| Janusz Olszewski | - 6 - 26,96 |
| Paweł Walter | - 26,78 |
| Marek Prauza | - 3 - 26,07 |
| Lech Duraj | - 25,00 |
| Jerzy Cisło | - 2 - 24,93 |
| Leszek Grzanka | - 23,62 |
| Jerzy Witkowski | - 3 - 22,63 |
| Jan Czardybon | - 21,83 |
| Tomasz Rawlik | - 5 - 20,05 |
| Maciej Mostowski | - 1 - 20,04 |

Legenda (przykładowo): stan konta 7-36,84 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 36,84 punktów.

Listę otwiera **Michał Adamaszek**, który przekracza próg 44 po raz trzeci i zostaje dwudziestym piątym Weteranem Klubu 44 M.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2001, 2002 lub 2003.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 475, 476

Redaguje Marcin E. KUCZMA

475. Dane są liczby rzeczywiste a_1, a_2, \dots, a_n , nie wszystkie równe zeru. Wykazać, że równanie $\sqrt{1 + a_1x} + \sqrt{1 + a_2x} + \dots + \sqrt{1 + a_nx} = n$ (z niewiadomą x) ma nie więcej niż dwa pierwiastki rzeczywiste.

476. Niech A_1, A_2, A_3, \dots będzie nieskończonym ciągiem zbiorów czteroelementowych, z których żadne dwa nie są rozłączne. Udowodnić, że można znaleźć takie trzy elementy a, b, c , aby każdy ze zbiorów A_i zawierał co najmniej jeden z tych trzech elementów.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2003

Przypominamy treść zadań:

467. Czy istnieje wielomian $P(x, y)$ dwóch zmiennych rzeczywistych, o współczynnikach rzeczywistych, którego zbiór wartości pokrywa się ze zbiorem wszystkich liczb dodatnich?

468. W niemalejącym ciągu a_1, a_2, a_3, \dots o wyrazach naturalnych każda liczba naturalna k występuje dokładnie k razy. Podać wzór jawny, przedstawiający n -ty wyraz a_n jako funkcję zmiennej n , wyrażającą się przez działania arytmetyczne, potęgi/pierwiastki oraz symbol $\lfloor x \rfloor$.

467. Istnieją takie wielomiany. Przykład: $P(x, y) = x^2 + (1 - xy)^2$. Ten wielomian przyjmuje tylko wartości dodatnie (bo liczby x oraz $1 - xy$ nie mogą być jednocześnie zerami). Z tożsamości $P(x, 1/x) = x^2$ wynika zaś, że każda liczba dodatnia należy do zbioru wartości.

468. Wyraz o wartości k występuje po raz ostatni na miejscu o numerze $1 + 2 + \dots + k$, czyli $\frac{1}{2}k(k + 1)$. Stąd wniosek, że warunki

$$(1) \quad a_n = k$$

oraz

$$(2) \quad \frac{1}{2}(k - 1)k < n \leq \frac{1}{2}k(k + 1)$$

są równoważne. Dla liczb naturalnych k, n warunek (2) jest równoważny warunkowi

$$\frac{1}{2}(k - 1)k < n - \frac{1}{8} < \frac{1}{2}k(k + 1),$$

który przekształcamy algebraicznie do kolejnych równoważnych postaci:

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < 2n < k^2 + k + \frac{1}{4},$$

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < k + \frac{1}{2},$$

$$(3) \quad k = \lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2n} \rfloor.$$

Równoważność (1) \iff (3) daje żądany wzór: $a_n = \lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2n} \rfloor$.

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Galecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (5), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (7), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (6), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (6), T. Józefczyk, J. Witkowski, W. Bednorz, B. Dyda, M. Peczarski, M. Adamaszek (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie): „dwukrotni”: Z. Bartold, W. Bednarek, J. Cisło, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, P. Kubit, D. Kurpiel, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;
„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Daniluk, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlega, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikula, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zajac, Z. Zaus, K. Zawislowski, P. Żmijewski.

Dwa lata temu, w omówieniu zamykającym dwudziesty sezon ligowy, świętowaliśmy jubileusz; przyjęło się bowiem uważać liczby zakończone zerami za bardziej odświętne od innych. Ale – skoro nasza liga ma w nagłówku *Klub 44*, to może lepszą rację bytu powinna mieć u nas arytmetyka, w której „dobre przystawanie” do 44 dodaje liczbie splendoru? Podzielność przez 2 i 11 zamiast 2 i 5? Zakończony właśnie sezon o numerze 22 jest znakomitą okazją do kolejnego jubileuszu. Jeszcze drugie tyle i będziemy obchodzić czterdzieste czwarte imienino-urodziny...

Przez te lata przewinęło się przez ligę sześć i pół setki uczestników. Mało komu starczyło cierpliwości, aby tej rozrywce pozostać wiernym dłużej niż kilka lat. Wszelako jeden z zawodników zadziwił wytrwałością: pan **Witold Bednarek**, który rozpoczął udział już w pierwszym miesiącu życia ligi i do dziś dnia (choć z paruletnimi przerwami) aktywnie uczestniczy, przysyłając eleganckie rozwiązania oraz liczne ciekawe propozycje zadań. Serdeczne gratulacje!

Jeszcze jedno nazwisko koniecznie trzeba tu wymienić: pan **Jerzy Janowicz**, uczestnicząc w lidze prawie nieprzerwanie przez jej pierwszych dwanaście lat, zdołał przekroczyć magiczny próg 44 punktów osiem razy, jako jedyny z zawodników. Serdeczne gratulacje!

Ten rekord czeka na wyrównanie, może i pobicie. To zachęta dla innych uczestników, wśród których widzimy dwóch mających na koncie siedem okrążeń oraz dwóch z sześcioma – wciąż aktywnych w udziale.

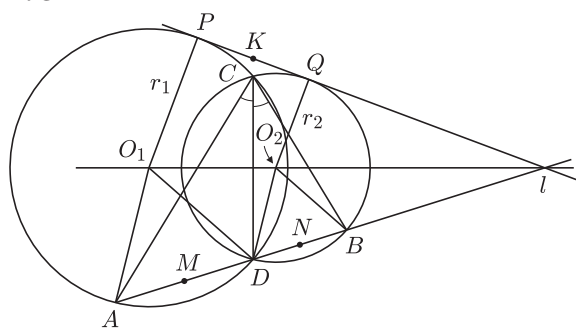
W naszej lidze punkty gromadzi się wytrwale i nieśpiesznie; takie jest jej założenie. Jeśli jednak ktoś pragnie uczestniczyć intensywnie, to czemu nie? Okazuje się, że jest wykonalne uzbieranie 44 punktów w ciągu jednego roku, za bezbłędne rozwiązania wszystkich zadań z jedenastu kolejnych numerów; mowa tu o okresie po roku 1984, bo wcześniej, gdy w numerze były trzy zadania z matematyki, konta rosły szybciej. Ale od początku roku 1985 niezbędne minimum czasowe jest wyznaczone właśnie przez rozwiązania z 11 numerów.

Ta sztuka udała się trzem uczestnikom; oto ich nazwiska (w kolejności chronologicznej): **Piotr Jędrzejewicz**, **Henryk Kasprzak** oraz dwukrotnie **Przemysław Gadziński**. I jeszcze nazwiska tych, którym to zajęło o jeden miesiąc więcej: **M. Gałecki**, ponownie **P. Jędrzejewicz**, **M. Mazur**, ponownie **H. Kasprzak**, **J. Witkowski**, **M. Peczarski**, **J. Cisło**. Serdeczne gratulacje!

Dość na dzisiaj wspomnienia rekordów. Liczymy na udział w *Lidze* nowych Czytelników; zapraszamy do zabawy.

Przechodzimy do omówienia wybranych zadań; przedstawiamy rozwiązania ciekawsze od „firmowych” oraz odnotowujemy te zadania, które zostały poprawnie rozwiązane przez nielicznych uczestników.

Zadanie 447. $[\triangle ABC; CD - \text{dwusieczna}; \text{prosta } \ell \text{ styczna do okręgów } (ACD), (BCD) \text{ w punktach } P, Q; K, M, N - \text{środkami odcinków } PQ, AD, BD \Rightarrow \ell - \text{styczna do okręgu } (KMN)]$ (współczynnik trudności $WT=2,87$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR=5$). Wszystkie otrzymane rozwiązania były odmienne od firmowego. **J. Cisło, J. Olszewski** i **T. Rawlik** zgrabnie operują pojęciem jednokładności: oznaczając przez O_1, r_1 oraz O_2, r_2 odpowiednio środki i promienie okręgów (ACD) , (BCD) wnosimy z równości $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD|$, że trójkąt AO_1D jest podobny do DO_2B w skali r_1/r_2 ; stąd nietrudny wniosek, że pierwszy z tych trójkątów jest obrazem drugiego w jednokładności, która przeprowadza okrąg (QDB) na (PAD) (przypadek, gdy $r_1 = r_2$, wymaga oddzielnego rozpatrzenia). Jednokładność o tym samym środku i skali $(r_1 + r_2)/2r_2$ przeprowadzi okrąg (QDB) na (KMN) ; pierwszy z nich jest styczny do ℓ , więc drugi też. Pozostałe dwa dobre rozwiązania (**T. Wietecha, P. Najman**) bardziej rachunkowe, z użyciem trygonometrii.



Zadanie 449. $[x, y, z \in \mathbb{R}; y = x^2 - 2, z = y^2 - 2, x = z^2 - 2 \Rightarrow x + y + z = ?]$ ($WT=1,58$; $LPR=16$).

Skoro przed chwilą padło słowo *trygonometria*, warto nadmienić, że i w tym zadaniu może ona być użyteczna. Łatwo zauważyć, że liczby x, y, z muszą leżeć w przedziale $(-2; 2)$, przyjmijmy więc $x = 2 \cos \alpha$, $\alpha \in (0; \pi)$; wówczas $y = 2 \cos 2\alpha$, $z = 2 \cos 4\alpha$, $x = 2 \cos 8\alpha$. Rozwiązując równanie $\cos 8\alpha = \cos \alpha$ stwierdzamy, że α należy do sumy zbiorów

$$A = \left\{ \frac{2}{7}k\pi : k = 1, 2, 3 \right\},$$

$$B = \left\{ \frac{2}{9}k\pi : k = 1, 2, 4 \right\},$$

$$C = \left\{ \frac{2}{3}\pi \right\},$$

$$D = \{0\}.$$

Wartość sumy $x + y + z$ wynosi (odpowiednio) $-1, 0, -3, 6$. Taką metodą rozwiązyli to zadanie **K. Kulewski, P. Kumor, P. Kubit, M. Adamaszek**.

Zadanie 450. [Dane $n, m \in \mathbb{N}; n, m > 1; Z(k)$ – to zdanie:

$$\exists x_1, \dots, x_k, y \in \mathbb{N} : x_i < x_{i+1}, \sum x_i^n = y^n;$$

$Z(k)$ zachodzi dla $k = m, \dots, 2m-2 \Rightarrow Z(k)$ zachodzi dla wszystkich $k \geq m$] ($WT=3,00$; $LPR=6$). Poprawne rozwiązania (**M. Adamaszek, J. Cisło, P. Kumor, J. Olszewski, T. Wietecha, T. Rawlik**) identyczne, jak firmowe (które zaproponował autor zadania, **W. Bednarek**).

Zadanie 452. [Dane $a, b, c > 0$; koło o średnicy d mieści się w prostopadłości $a \times b \times c$; $\max d = ?$] (WT=3,48; LPR=2). To zadanie okazało się najtrudniejsze – w omawianym sezonie, a także od paru lat. Wyższy współczynnik trudności miało – jako ostatnie – zadanie 363 z numeru 6/1998 (WT=3,51; LPR=7). Poprawne rozwiązania przedstawili **P. Kumor** oraz (z drobną luką) **J. Cisko**. Nie różnią się one w sposób istotny od rozwiązania firmowego ani od rozwiązania podanego przez autora zadania, którym był **Adam Woryna**.

Zadanie 454. [Znaleźć stałą C o własności:

$\forall n \in \mathbb{N} \forall a_1, \dots, a_n > 0$:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + \dots + a_n} \leq C \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right);$$

im mniejsza stała C , tym wyższa ocena] (WT=2,50; LPR=8). Ilekroć uczestnicy *Ligi* udzielają nam lekcji, jak powinno wyglądać fachowe rozwiązanie zadania, czy wręcz jego sformułowanie, jest to dla nas moment niemałej radości. Tak było i tym razem. Więc po kolei: zadanie zaproponował **Paweł Kubit**, ze stałą $C = 4$, nie podając (wówczas) dowodu. Redaktor *Ligi* poczuł się dumny, że potrafi tę nierówność udowodnić ze stałą $C = e$ (rozwiązanie firmowe). Uzyskiwane w tym dowodzie nierówności nie mogą jednocześnie zbliżyć się do równości, więc nie jest to stała optymalna; stąd takie nieco zagadkowe sformułowanie treści zadania; a w tle – domniemanie redaktora, że znalezienie optymalnej stałej może być trudne, że może wręcz nie wyraża się ona elementarnie...?

Wkrótce zaczęły nadchodzić listy z rozwiązaniami i dowiedzieliśmy się, jak to jest: nierówność zachodzi ze stałą $C = 2$, która jest optymalna. Tę właśnie stałą znaleźli *wszyscy* rozwiązujący (wśród nich także autor zadania), w większości podając też dowód optymalności; oto rozumowanie przedstawione w kilku pracach:

W nierówności Cauchy'ego–Schwarza

$$\left(\sum x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum x_i^2 \right) \left(\sum y_i^2 \right)$$

(sumowanie po $i = 1, \dots, k$) podstawiamy

$$x_i = \sqrt{a_i}, \quad y_i = \frac{i}{\sqrt{a_i}},$$

otrzymując

$$b_k := \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{i=1}^k \frac{i^2}{a_i};$$

sumowanie po $k = 1, \dots, n$ daje nierówność

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{a_i},$$

gdzie

$$c_i = 4i^2 \sum_{k=i}^n \frac{1}{k(k+1)^2} < 4i^2 \sum_{k=i}^n \left(\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2(k+1)^2} \right) < 2,$$

i mamy tezę zadania dla $C = 2$. Uzasadnienie optymalności nietrudno uzyskać rozważając ciąg $a_i = i$.

Zadanie 456. [Czy istnieją liczby niewymierne $\alpha, \beta > 1$ takie, że $\forall m, n \in \mathbb{N}: \lfloor \alpha^m \rfloor \neq \lfloor \beta^n \rfloor$?] (WT=2,97; LPR=7). **W. Bednarek, J. Cisko, A. Daniluk, P. Kubit, P. Kumor, J. Olszewski** znajdują przykłady w postaci wymiernych kombinacji liczb $1, \sqrt{3}, \sqrt{6}$. **Bartłomiej Dyda** podaje ciekawe uogólnienie: dla każdej liczby niewymiernej $\alpha \geq 3$ istnieje liczba β o wymaganej własności. Wystarczy w tym celu rozważyć zbiór

$$A = \bigcup_{m>n>1} I_{mn},$$

gdzie

$$I_{mn} = \langle (\alpha^m - 1)^{1/n}; (\alpha^m + 1)^{1/n} \rangle.$$

Miarę (długość) przedziału I_{mn} można oszacować korzystając z twierdzenia o wartości średniej oraz z warunków $\alpha \geq 3, n \geq 2$:

$$\mu(I_{mn}) < \frac{2}{n}(\alpha^m - 1)^{\frac{1}{n}-1} < \frac{2}{n} \left(\frac{1}{2} \alpha^m \right)^{\frac{1}{n}-1} < 2\alpha^{-\frac{m}{2}},$$

czyli

$$\mu(I_{mn}) < 2\gamma^m,$$

gdzie

$$\gamma = \alpha^{-1/2} \leq \frac{1}{3}\sqrt{3};$$

stąd oszacowanie miary zbioru A :

$$\mu(A) < 2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \gamma^m = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma^{n+1}}{1-\gamma} = \frac{2\gamma^3}{(1-\gamma)^2} < 4.$$

Przedział $J = (\alpha + 1; \alpha^2 - 1)$ ma długość

$$\alpha^2 - \alpha - 2 \geq 4,$$

więc można znaleźć liczbę niewymierną $\beta \in J \setminus A$; gdyby dla pewnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodziła równość $\lfloor \alpha^m \rfloor = \lfloor \beta^n \rfloor$, wówczas mielibyśmy

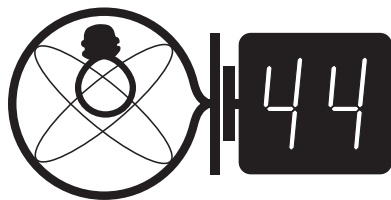
$m > n > 1$ (bo $\beta \in J$) oraz $\alpha^m - 1 < \beta^n < \alpha^m + 1$, czyli $\beta \in I_{mn} \subset A$; sprzeczność.

Zadanie 460. [$x_1, \dots, x_n \in \langle 0; \pi/4 \rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{(\operatorname{tg} x_1) \dots (\operatorname{tg} x_n)} \leq \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \dots + \sin^2 x_n}{\cos^2 x_1 + \dots + \cos^2 x_n}}]$$

(WT=1,86; LPR=14). To chyba najbardziej spektakularna wpadka od początku istnienia *Ligi*! Zadanie pochodzi z dosyć starych remanentów – zaproponował je **Lesław Skrzypek** z dziesięć lat temu. Nie byłoby w tym nic złego, gdyby nie taki drobiazg, że zostało ono już wykorzystane w *Lidze*, jako zadanie 292 w numerze 12/1994; redaktor *Ligi* zaniedbał wówczas jedynie zanotować ten fakt – a teraz się ucieszył, że ma w zanadru taką ładną nierówność, i zadanie „poszło” po raz drugi! Zwrócił na to uwagę jeden z czytelników. Ciekawe, ilu uczestników spośród tych, którzy rozwiązali to zadanie i wtedy, i teraz, miało świadomość powtórnego wykonywania roboty? ...

Tym zabawnym akcentem kończymy owówienie dwudziestego drugiego jubileuszowego sezonu *Ligi*.



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2004



Rozwiązanie zadania F 614.

Siła wyporu, działająca na balonik, wynosi

$$F_w = pV\mu g/RT_0,$$

gdzie T_0 – temperatura otaczającego powietrza. Masa nagrzanego do temperatury T powietrza to $m = pV\mu/RT$. Zatem jeśli M to masa celofanowej powłoki, to warunek unoszenia się balonika jest następujący:

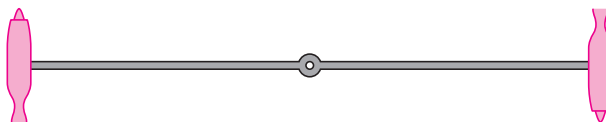
$$F_w \geq (M + m)g$$

i stąd

$$T \geq \frac{T_0}{1 - MRT_0/pV\mu}$$

Dla $M \approx 5$ g, promienia balonika $2r \approx 35$ cm, $T_0 \approx 300$ K i $p \approx 10^5$ Pa otrzymujemy, że temperatura krytyczna wynosi $T_{kr} \approx 500$ K $\approx 200^\circ$ C.

372. Wirnik pewnego silnika jest napędzany silnikami odrzutowymi umieszczonymi na końcach prętów promieniowych („szprych”), wzdłuż których biegą przewody doprowadzające paliwo poprzez oś wirnika.



Ktoś twierdzi, że moc zespołu (odprowadzana w osi, tzn. wirnik obraca jakieś urządzenie) jest proporcjonalna do prędkości kątowej wirnika ω , gdyż obliczamy ją mnożąc siłę odrzutu (zależną tylko od tempa zużycia paliwa i prędkości wylotu gazów, ale nie od ω) przez prędkość silników. Zatem dla dowolnie dużych ω otrzymalibyśmy dowolnie dużą moc, co wobec ustalonego tempa zużycia paliwa wydaje się sprzeczne z zasadą zachowania energii. Wskazać błąd w tym rozumowaniu i obliczyć maksymalną moc zespołu. Dane: długość szprych $r = 5$ m, tempo zużycia paliwa przez silniki $\psi = 0,5$ kg/s, stosunek masy wyrzucanych gazów do masy paliwa $k = 5$ (pozostała masa to pobierane powietrze), prędkość wylotowa gazów względem silnika $v = 1600$ m/s. Przy jakiej prędkości kątowej wirnika ω osiągnięta jest maksymalna moc?

373. Po przejściu przez pewien filtr światło białe uzyskuje barwę zieloną. Gdy jednak przepuścić światło białe kolejno przez dużą liczbę takich filtrów, przechodzące światło okazuje się czerwone (jego natężenie jest wtedy bardzo małe). Jak to możliwe?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2003

Przypominamy treść zadań:

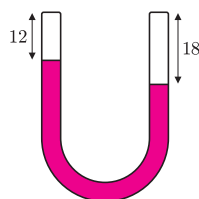
364. Jednorodny sześcian wisi na nici, dotykając ściany (rys. 2). Nić tworzy ze ścianą kąt α . Jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia statycznego sześcianu o ścianę, aby było to możliwe?

365. Rurka o kształcie litery U o obu końcach zatopionych zawiera rtęć oraz dwie objętości gazu (rys. 1). W pozycji pionowej (gdzie gaz był na górze), długości słupów gazu wynosiły 12 cm i 18 cm. Gdy rurkę odwrócono o 180° bez zmiany temperatury, długość pierwszego słupa gazu spadła do 6 cm, przy czym słup rtęci nie uległ przemieszczeniu.

a) Ile wyniosą długości słupów gazu, jeśli rurkę położymy poziomo, a temperatura pozostanie niezmienną?

b) Ile wyniosą długości słupów gazu, jeśli rurka pozostanie w pozycji wyjściowej, a temperatura wzrośnie z początkowej wartości 20° C do 80° C?

Rys. 1



364. Oznaczmy siłę napięcia nici przez N , siłę tarcia przez T , a siłę reakcji ściany (tzn. jej składową poziomą) przez R . Warunek równowagi poziomych składowych sił ma postać

$$R = N \sin \alpha.$$

Aby sformułować warunek równowagi ze względu na obroty, trzeba wskazać punkt przyłożenia siły R . W ogólności jest ona rozłożona wzdłuż całej powierzchni styku ze ścianą, ale na granicy równowagi („tuż przed” ześlizgnięciem się sześcianu) będzie ona przyłożona na górnym brzegu tej powierzchni. Rozpatrując momenty sił względem środka górnej powierzchni sześcianu znajdujemy drugi warunek równowagi

$$T = N \cos \alpha.$$

Zatem minimalna wartość współczynnika tarcia jest równa $\text{ctg } \alpha$.

365. a) Oznaczmy dane długości słupów gazu przez

$$L_1 = 12 \text{ cm}, \quad L_2 = 18 \text{ cm}, \quad L'_1 = 6 \text{ cm}.$$

Łączna długość słupa rtęci (a więc i gazu) pozostaje niezmienną, zatem po odwróceniu rurki długość drugiego słupa gazu wzrośnie do $L'_2 = 24$ cm. Zgodnie z równaniem gazu doskonałego

$$p_1 L_1 S = p'_1 L'_1 S = n_1 RT,$$

$$p_2 L_2 S = p'_2 L'_2 S = n_2 RT,$$

gdzie S – powierzchnia przekroju rurki, a n_1 i n_2 są odpowiednimi liczbami moli gazu. Zatem

$$p_1/p'_1 = L'_1/L_1 = 1/2,$$

$$p_2/p'_2 = L'_2/L_2 = 4/3.$$

Różnica ciśnień gazu jest równa ciśnieniu słupa rtęci, czyli

$$p_2 - p_1 = \rho g(L_2 - L_1) = 6 \text{ cm Hg},$$

$$p'_1 - p'_2 = \rho g(L'_2 - L'_1) = 18 \text{ cm Hg}.$$

Rozwiązaniem układu czterech powyższych równań jest

$$p_1 = 18 \text{ cm Hg}, \quad p_2 = 24 \text{ cm Hg},$$

$$p'_1 = 36 \text{ cm Hg}, \quad p'_2 = 18 \text{ cm Hg}.$$

Dalej znajdujemy stosunek liczb moli

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1 L_1}{p_2 L_2} = \frac{1}{2}.$$

W poziomym położeniu rurki ciśnienia obu objętości gazu są jednakowe, a stąd stosunek długości L'_1 i L''_2 jest równy stosunkowi liczb moli. Obliczamy

$$L'_1 = 10 \text{ cm}, \quad L''_2 = 20 \text{ cm}.$$

b) Oznaczmy zmienioną temperaturę przez T , a długości słupów gazu przez L_1 i L_2 . Warunkiem równowagi jest

$$\frac{n_2 R T}{L_2 S} - \frac{n_1 R T}{L_1 S} = (L_2 - L_1) \rho g.$$

Po podstawieniu n_1 i n_2 z poprzednich równań otrzymujemy

$$\frac{T}{T} \left(\frac{423 \text{ cm}^2}{L_2} - \frac{216 \text{ cm}^2}{L_1} \right) = L_2 - L_1.$$

Ponadto, oczywiście,

$$L_1 + L_2 = 30 \text{ cm},$$

co daje równanie trzeciego stopnia. Rozwiązując je numerycznie dochodzimy do wyniku

$$L_1 = 11,77 \text{ cm}, \quad L_2 = 18,23 \text{ cm}.$$

Rozszerzona czołówka

ligi zadaniowej **Klub 44F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

356 ($WT = 2,00$), **357** ($WT = 1,00$),

358 ($WT = 1,00$), **359** ($WT = 1,45$),

360 ($WT = 1,00$) i **361** ($WT = 1,30$)

z numerów 4/2003, 5/2003 i 6/2003.

| | | | |
|----------------------|--------------|---|-------|
| Tomasz Rudny | Warszawa | - | 29,50 |
| Marian Łupieżowiec | Zebrzydowice | - | 20,09 |
| Michał Józwickowski | Błonie | - | 14,77 |
| Jacek Piotrowski | Rzeszów | - | 12,45 |
| Leszek Grzanka | Chechło | - | 12,38 |
| Piotr Kumor | Olsztyn | - | 9,44 |
| Przemysław Gadziński | Środa Śląska | - | 8,61 |
| Tomasz Wietecha | Tarnów | - | 8,06 |
| Kazimierz Gryszko | Gliwice | - | 7,93 |
| Andrzej Idzik | Bolesławiec | - | 7,91 |

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2001–2003 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 7 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani **Klubu 44 F**

(w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (5), T. Wietecha (5), J. Łazuka, M. Wójcicki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie **Klubu 44F**

(alfabetycznie):

„dwukrotni”:

J. Lipkowski, A. Nowogrodzki, P. Perkowski;

„jedenkrotni”:

A. Borowski, P. Gadziński, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach.

W kilku ostatnich seriach zadań liczba uczestników ligi fizycznej niebezpiecznie się zmniejszyła, co grozi załamaniem się naszej zabawy. Gorąco zapraszam wszystkich Czytelników – zarówno początkujących, jak i starych wyjadaczy – do spróbowania swoich sił, a także do przysyłania oryginalnych zadań własnego pomysłu. Nasza lista czołówki ligowej czeka na Wasze nazwiska!

Przedstawmy omówienie wybranych zadań z ostatniego rocznika *Delty*.

Zadanie 347. [Jak rozlać herbatę do dwóch kubków, żeby ją najlepiej ochłodzić?] (współczynnik trudności $WT=3,16$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR=1$).

Pan T. Wietecha dokonał znacznie głębszej analizy problemu, niż zostało to zrobione w rozwiązaniu firmowym – m.in. wziął pod uwagę zależność tempa odpływu ciepła od ilości cieczy w kubku. Skąpe ramy naszego czasopisma nie pozwalają na prezentację otrzymanych wyników (imponujących profesjonalną metodyką!) i możemy tylko z ulgą odnotować zgodność z odpowiedzią podaną w *Delcie*: rzeczywiście lepiej jest przelać do zimnego kubka więcej niż połowę cieczy.

Zadanie 351. [Dany jest wygląd „zajęczka” powstałego przy przejściu światła słonecznego przez szczelinę, obliczyć odległość ekranu od szczeliny.] ($WT=3,37$, $LPR=2$). Wartości liczbowe w rozwiązaniu firmowym zawierają pomyłkę – stosunek wymiarów „zajęczka” jest równy raczej 1,9, a nie 1,4, stąd i szukana odległość wynosi ponad 7 m, a nie 16 (jak podano). Prawidłowe rozwiązania przysłali tylko A. Idzik i T. Wietecha, więc wartość współczynnika trudności zadania okazała się wysoka. Nieco to zaskakuje, gdyż „na oko” nie wydaje się ono trudniejsze od drugiego zadania z pary, które miało aż 7 dobrych rozwiązań.

Zadanie 352. [Pręt zawieszony jednym końcem na osi w ruchomym klocek, jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia, aby po odchyleniu pręta do poziomu klocek nie ruszył z miejsca?] ($WT=2,35$, $LPR=3$). W końcówce rozwiązania firmowego dał o sobie znać kolejny chochlik – autor pomylił się co do maksimum funkcji. Prawidłowy wynik: $\mu = 9/\sqrt{40} = 1,423$, dziękuję kilku Czytelnikom za zwrócenie mi uwagi.

Zadanie 355. [„Transmutacja” azotu w tlen w otwartym naczyniu] ($WT=2,00$, $LPR=4$). Mroczną tragedię na motywach tego zadania, godną specjalnej premii literackiej, przysłał A. Idzik. Pozostałe dobre rozwiązania – D. Lisiakiewicz, A. Nowogrodzki i T. Wietecha (który znalazł je w podręczniku Sz. Szczeniowskiego).

Zadania 360. [Maksymalna prędkość łodzi] ($WT=1,00$, $LPR=1$) i **361** [Odchylenie promienia światła przebiegającego obok Słońca.] ($WT=1,30$, $LPR=1$). Oba zadania stały się znów polem do popisu dla p. T. Wietechy, który w zadaniu 360 uwzględnił subtelności wynikające z liczby Reynoldsa, a w zadaniu 361 wyprowadził ścisły wynik, obowiązujący dla dowolnie dużych odchyżeń. To ostatnie budzi pewne wątpliwości, gdyż taka ścisłość dla konkretnego przypadku Słońca jest niepotrzebna, a powoduje znaczne utrudnienie problemu. Tak czy inaczej szkoda, że p. Wietecha był jedynym, który wziął się z tymi problemami za bary!



Rozwiązanie zadania M 1051.

Założmy, że suma wszystkich n liczb jest większa niż 3. Istnieje taki podział tych liczb, że suma liczb w jednej z grup jest z przedziału $(1, 2]$. W takim razie, suma liczb w drugiej grupie musi być większa niż 1, co jest sprzeczne z założeniem zadania. Zatem $M_n \leq 3$. Konfiguracje dowolnie bliskie liczbie 3 otrzymujemy dla trzech liczb bliskich 1 i pozostałych bliskich 0:
 $(1 - c, 1 - c, 1 - c, \frac{c}{n-3}, \frac{c}{n-3}, \dots, \frac{c}{n-3})$,
 gdzie $c \approx 0$.



Rozwiązanie zadania M 1052.

Rozważmy równanie kwadratowe

$$x^2 - tx + 1 = 0.$$

Jego pierwiastkami są

$$\alpha = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4}}{2},$$

więc $w_n(t) = \alpha^n + \beta^n$. Wobec tego $w_m(w_n(t))$ jest równe sumie m -tych potęg pierwiastków równania

$$x^2 - (\alpha^n + \beta^n)x + 1 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są, jak łatwo sprawdzić (odnotujmy, że $\alpha\beta = 1$), α^n i β^n . Zatem

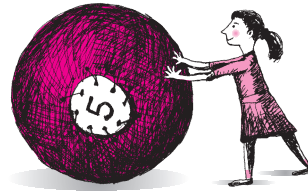
$$\begin{aligned} w_m(w_n(t)) &= (\alpha^n)^m + (\beta^n)^m = \\ &= w_{mn}(t) = w_n(w_m(t)). \end{aligned}$$

Patrz w niebo

Pogląd, że w centrum większości galaktyk znajduje się supermasywna czarna dziura, jest już dobrze ugruntowany. W kilkudziesięciu przypadkach udało się za pomocą Teleskopu Hubble'a wyznaczyć dość dokładnie masy tych czarnych dziur. Mianowicie ruch gwiazd obiegających czarną dziurę podlega tym samym prawom Keplera, co ruch planet wokół Słońca i z pomiaru prędkości gwiazd w pobliżu centrum galaktyki oraz ich odległości od centrum masę ciała centralnego wyznacza się bez trudu. W zasadzie pomiary takie są wykonalne z powierzchni Ziemi, jednak Teleskopem Hubble'a spoza atmosfery można dostrzec gwiazdy położone bardzo blisko centrum danej galaktyki, przez co wyniki obserwacji są nieporównanie dokładniejsze. Znane obecnie masy galaktycznych czarnych dziur zawierają się w granicach od miliona do 2,5 miliarda mas Słońca.

Właśnie dzięki dokładności obserwacji wykryto kilka lat temu dwa ważne fakty. Po pierwsze – czarne dziury występują tylko w galaktykach mających centralne zgęszczenie (*bulge*), a po drugie – masa czarnej dziury ze zdumiewającą dokładnością stanowi 0,2% masy centralnego zgęszczenia, przy czym zupełnie nie jest ważne, czy i jakie galaktyka ma ramiona spiralne, czyli jak rozbudowany jest dysk galaktyki. Wydaje się, że zależność między masą czarnej dziury i masą centralnego zgęszczenia jest spełniona również bez względu na czas i sposób powstania zgęszczenia. Mogło bowiem ono powstać bardzo dawno, gdy cała galaktyka się formowała, ale mogło też powstać w galaktyce już istniejącej, wskutek spadku jej własnego gazu na centrum, co prawdopodobnie zachodzi w galaktykach przegrodzonych. Związek czarnych dziur z centralnymi zgęszczeniami i brak takiego związku z dyskami galaktyk podkreśla, że powstawanie tych dwóch struktur przebiegało bardzo różnymi drogami, co powinno znaleźć odbicie w pracach teoretycznych.

Tomasz KWAST



Luty

Mamy środek zimy, a więc na wieczornym niebie najwspanialej prezentuje się Orion. Przez zenit przechodzi Droga Mleczna z niezliczonymi gromadami otwartymi. Są to zgrupowania gwiazd zdecydowanie wyróżniające się z tła, ale w których gwiazdy nie zlewają się w jedną plamę. W pobliżu Oriona, poza Drogą Mleczną, widzimy zgrupowanie gwiazd, które na oko trudno uznać za gromadę, raczej ma się wrażenie, że jest tam po prostu trochę więcej gwiazd. A jednak jest to gromada, Hiady. Stanowi ją niemal setka gwiazd rozrzuconych na obszarze o średnicy 20° w przybliżeniu wokół Aldebarana (który sam do gromady nie należy), najjaśniejszej gwiazdy Byka. Hiady leżą w odległości 41 pc, czyli dostatecznie blisko, by odległość dało się wyznaczyć za pomocą paralaksy

rocznej, i zarazem dostatecznie daleko, by można było na niej testować fotometryczne metody wyznaczania odległości znacznie większych. Dlatego do dziś wielu obserwatorów wyznacza odległości gwiazd Hiad na rozmaite sposoby, a gwiazdy Hiad stały się niemal wzorcami odległości.

Wenus jest w Rybach i zachodzi wkrótce po zachodzie Słońca. Mars jest w Baranie i zachodzi dopiero koło północy. Saturn jest w Byku i widać go niemal do rana, a Jowisz w Lwie, przez co widać go przez całą noc. 26 II Księżyc zakryje Marsa, ale zjawisko to będzie widoczne tylko na południowym Pacyfiku. Pełnia Księżyca wypada 6 II, a now 20 II.

T. K.



Rozwiązanie zadania M 1053.

Niech t będzie liczbą całkowitą i niech α, β będą pierwiastkami równania $x^2 - tx + 1 = 0$. Mamy

$$t^n - w_n(t) = (\alpha + \beta)^n - \alpha^n - \beta^n = \binom{n}{1} \alpha^{n-1} \beta + \binom{n}{2} \alpha^{n-2} \beta^2 + \dots$$

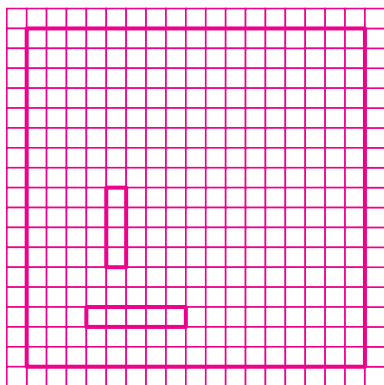
$$\dots + \binom{n}{n-1} \alpha \beta^{n-1} = \binom{n}{1} (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) + \binom{n}{2} (\alpha^{n-4} + \beta^{n-4}) + \dots = \binom{n}{1} w_{n-2}(t) + \binom{n}{2} w_{n-4}(t) + \dots$$

Zatem, na mocy indukcji, jeśli t jest liczbą całkowitą, to $w_n(t)$ też. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to łatwo zauważyć, że $2^n w_n(t)$ jest podzielne przez t . Zatem, jeśli $p > 2$, to $p | 2^p w_p(p)$, skąd $p | w_p(p)$. Dla $p = 2$ tezę sprawdzamy bezpośrednio.

**KOLOROWANKI –
 NUMEROWANKI (9)**

Kontynuując rozważania sprzed miesiąca, przyjrzyjmy się następującemu zadaniu.

Zadanie 1. Kwadrat o boku długości 19 dzielimy na kwadraty jednostkowe. Wewnątrz kwadratu



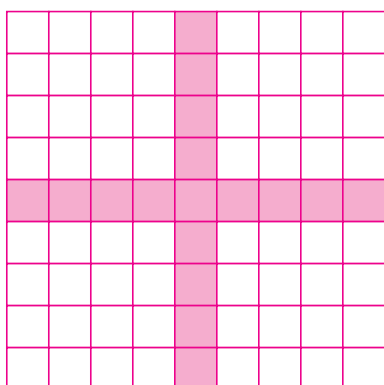
Rys. 1

Zadanie 2. Wewnątrz kwadratu o boku 17 umieszczamy kwadrat o boku 15 w sposób analogiczny jak na rysunku 1. Dowieść, że mniejszego kwadratu nie można pokryć rozłącznymi prostokątami o wymiarach 9×1 i 10×1 , zawartymi w większym kwadracie.

Zanim zajmiemy się rozwiązaniem zadania 2, przyjrzyjmy się nieco prostszemu zadaniu.

Zadanie 3. Dowieść, że kwadratu o boku 9 nie można podzielić na prostokąty o wymiarach 5×1 i 6×1 .

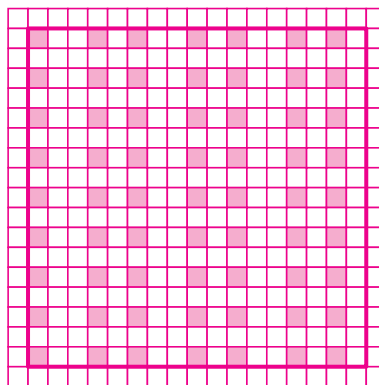
Rozwiązanie. Pokolorujmy pola kwadratu jak na rysunku 3. Wówczas każdy prostokąt pokrywa co najmniej jedno zamalowane pole. Jednak prostokąt pokrywający środkowe pole pokrywa co najmniej 5 zamalowanych pól. Ponieważ zamalowanych pól jest 17, zatem wewnątrz kwadratu można umieścić co najwyżej 13 rozłącznych prostokątów



Rys. 3

umieszczamy kwadrat o boku 17 jak na rysunku 1. Dowieść, że mniejszego kwadratu nie można pokryć rozłącznymi prostokątami poziomymi o wymiarach 5×1 i pionowymi o wymiarach 4×1 , zawartymi w większym kwadracie.

Rozwiązanie. Pokolorujmy pola kwadratu jak na rysunku 2. Wówczas każdy prostokąt poziomy o wymiarach 5×1 i każdy prostokąt pionowy o wymiarach 4×1 pokrywa parzystą liczbę pól zamalowanych (a mianowicie dwa lub zero). Ponieważ zamalowanych pól jest 63, więc przy dowolnym rozmieszczeniu prostokątów co najmniej jedno zamalowane pole pozostanie niepokryte. Ponieważ wszystkie zamalowane pola leżą w mniejszym kwadracie, teza zadania jest udowodniona.

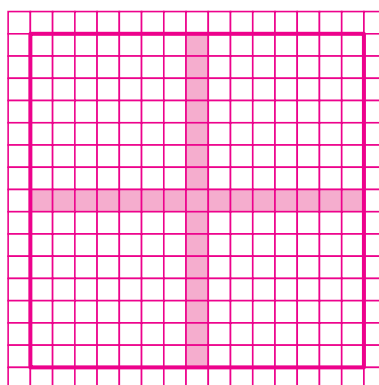


Rys. 2

o dopuszczalnych wymiarach. Prostokąty te pokryją nie więcej niż $13 \cdot 6 = 78$ pól, nie pokrywają więc w całości kwadratu o 81 polach.

Mądrzejsi o powyższe rozwiązanie przystępujemy do rozwiązania zadania poprzedniego.

Rozwiązanie zadania 2. Pokolorujmy pola kwadratu jak na rysunku 4. Wówczas każdy prostokąt mający co najmniej jedno pole wspólne z mniejszym kwadratem i zawarty w większym, pokrywa co najmniej jedno zamalowane pole. Prostokąt pokrywający środkowe pole pokrywa co najmniej 8 zamalowanych pól. Ponieważ zamalowanych pól jest 29, zatem wewnątrz większego kwadratu można umieścić co najwyżej 22 rozłączne prostokąty o dopuszczalnych wymiarach i mające pola wspólne z mniejszym kwadratem. Prostokąty te pokryją nie więcej niż $22 \cdot 10 = 220$ pól, nie pokrywają więc w całości kwadratu o 225 polach.



Rys. 4

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl