



SPIS TREŚCI NUMERU 10 (365)

Aby nie widzieć Słońca... czyli
detektory ultrafioletu

Aneta Drabińska

str. 1

Obroty w zadaniach
geometrycznych

Piotr Grzeszczuk

str. 4

Zadania

str. 6

Mała Delta:

Dyfrakcja na palcu

str. 7

Suma pochodnych

Lev Kourliandtchik

str. 8

Rozkład ładunku elektrycznego
w dwuwymiarowym
przewodniku

Roman Werpachowski

str.10

Uogólniony wzór Eulera dla
wielościannów

Adam Piwocki

str.12

Aktualności

str.13

Klub 44

str.14

Patrz w niebo

str.16

Październik

str.16

Kącik biologiczny

str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki, Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Jan A. Gaj – przewodniczący, Maciej Geller, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Urszula Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel.: 55-44-545.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2005 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2005 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 2005 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

W następnym numerze:

Misja na Saturna

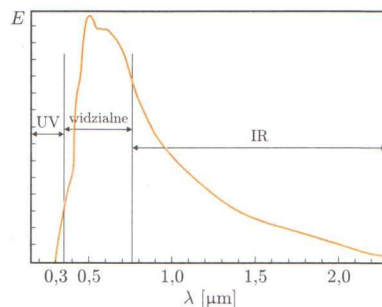
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Aby nie widzieć Słońca... czyli detektory ultrafioletu

Aneta DRABIŃSKA

Słońce to źródło energii dla wszystkich procesów fizycznych, chemicznych i biologicznych zachodzących na Ziemi oraz w jej atmosferze, a jego promieniowanie jest najważniejszym czynnikiem środowiskowym na Ziemi. Wysyła ono w przestrzeń międzyplanetarną promieniowanie elektromagnetyczne w zakresie fal rentgenowskich (X), promieniowania ultrafioletowego (UV), widzialnego (VIS), podczerwonego (IR), aż do fal radiowych. Ze względu na pochłanianie promieniowania przez atmosferę, do powierzchni Ziemi dochodzi tylko część z tego promieniowania obejmująca część ultrafioletu (powyżej 290 nm), promieniowanie widzialne (400 nm–780 nm) i podczerwone (780 nm–1 mm), aż do fal radiowych (30 cm–100 km) (rys. 1).



Rys. 1. Widmo promieniowania słonecznego dochodzącego do powierzchni Ziemi z zaznaczonymi długościami fali odpowiadającymi promieniowaniu ultrafioletowemu, widzialnemu i podczerwonemu.

Promieniowanie ultrafioletowe ze względu na oddziaływanie chemiczne i biologiczne dzieli się na:

- nadfiolet próżniowy (10–200 nm),
- daleki ultrafiolet UV-C (200–280 nm),
- średni ultrafiolet UV-B (280–315 nm),
- bliski ultrafiolet UV-A (315–400 nm).

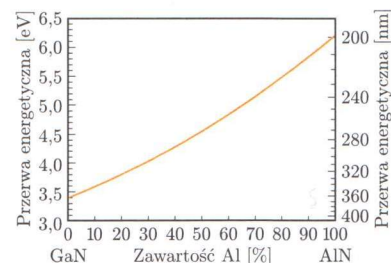
Istnieje dość duże zapotrzebowanie na detektory promieniowania ultrafioletowego, które jednocześnie byłyby nieczułe na promieniowanie widzialne (detektory *visible-blind*), czy w ogóle na promieniowanie słoneczne (detektory *solar-blind*). Wyobraźmy sobie taki detektor wbudowany w zegarek. W czasie wycieczki na plażę byłibyśmy w stanie kontrolować, kiedy promieniowanie UV przekroczy bezpieczny dla nas próg i w odpowiednim czasie moglibyśmy się schronić w cień, unikając nieprzyjemnych (i bardzo niezdrowych) poparzeń. W przypadku takiego detektora konieczna jest detekcja pochodzącego od Słońca promieniowania UV, a nie całkowitego promieniowania słonecznego, gdyż, jak wiadomo, to właśnie promieniowanie UV niszczy naszą skórę, a ze względu na dziurę ozonową jego ilość zmienia się w zależności od zanieczyszczeń i innych czynników. Mało tego – dobrze byłoby, żeby taki detektor reagował tylko na promieniowanie UV-B, a nie na UV-A, gdyż to właśnie UV-B jest szkodliwe dla naszej skóry. Poza tym bardzo wiele obiektów na Ziemi (niekoniecznie naturalnych) wysyła promieniowanie, którego maksimum przypada właśnie w ultrafiolecie. Bardzo ważne zastosowanie detektorów nieczułych na światło słoneczne, a czułych na ultrafiolet, można znaleźć w wojsku. Jedną z podstaw obrony narodowej wielu krajów jest skanowanie nieba w poszukiwaniu nadlatujących pocisków czy innego ataku powietrznego. Tak się składa, że rozkład widmowy promieniowania takiego pocisku czy rakiety rozciąga się na ultrafiolet, jednak ze względu na obecność silnego promieniowania słonecznego bardzo trudno jest „zauważyć” takie obiekty w czasie dnia na tle nieba. A obserwacje nocą są, po pierwsze, nie zawsze wygodne, a po drugie, niewystarczające. Z tego też powodu armie niektórych krajów (polska również) uruchomiły programy naukowe, których celem jest znalezienie i opracowanie metody produkcji dobrych detektorów *solar-blind*.

Skoro wiemy już, do czego mogą się przydać takie detektory, najwyższy czas zastanowić się, w jaki sposób można je skonstruować i jaki materiał będzie miał szanse się sprawdzić w takich zastosowaniach. Dobrym kandydatem wydaje się półprzewodnik – azotek galu z aluminium ($\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$). Jego przerwa energetyczna zmienia się w zależności od zawartości aluminium.

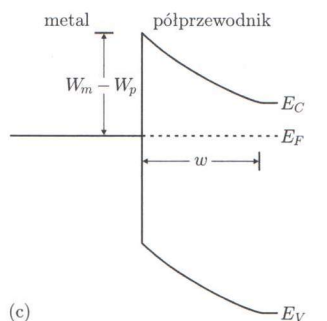
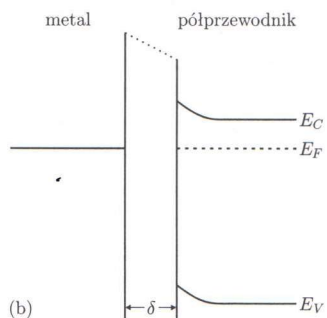
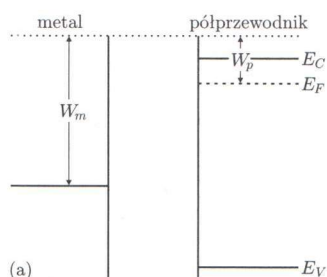


W kryształach pasma energetyczne przedstawiają dostępne stany elektronowe. W temperaturze 0 K niektóre z tych stanów są obsadzone elektronami, a inne są puste. Ostatnie całkowicie wypełnione pasmo energetyczne (*pasmo walencyjne* – E_V) jest oddzielone od pierwszego całkowicie pustego pasma (*pasmo przewodnictwa* – E_C) *przerwą energetyczną*. To właśnie wartość przerwy energetycznej półprzewodnika odpowiada za to, jakiej długości promieniowanie półprzewodnik pochłania.

W przypadku czystego azotku galu (GaN) przerwa energetyczna wynosi 3,4 eV (co odpowiada długości fali około 365 nm), co oznacza, że dla światła o długości fali większej niż 365 nm jest on przezroczysty, natomiast pochłania on w pełni światło o fali krótszej niż 365 nm. Wraz z zastępowaniem coraz większej ilości atomów galu atomami aluminium przerwa energetyczna tego półprzewodnika zwiększa się (to znaczy zmniejsza się długość fali, którą taki materiał pochłania), tak że dla czystego azotku aluminium (AlN) wynosi ona 6,2 eV (około 200 nm). Zachowanie przerwy energetycznej $Al_xGa_{1-x}N$ w zależności od składu ilustruje rysunek 2. Półprzewodnik ten wydaje się więc idealnym kandydatem na detektor ultrafioletu, gdyż jest on przezroczysty dla światła widzialnego (idealny detektor *visible-blind*), natomiast w przypadku odpowiednio wysokiej zawartości aluminium (powyżej 40%) może być on również przezroczysty dla całego spektrum światła słonecznego (detektor *solar-blind*).



Rys. 2. Zależność przerwy energetycznej $Al_xGa_{1-x}N$ w zależności od zawartości Al. Na lewej osi wartość przerwy energetycznej została podana w elektronowoltach, natomiast prawa oś przedstawia odpowiadającą jej długość fali (w nanometrach).



Rys. 3. Powstawanie pola elektrycznego w warstwie zubożonej podczas kontaktu metalu i półprzewodnika o różnych pracach wyjścia.

Jak można zrealizować taki detektor? Jedną z metod jest napylenie półprzezroczystej elektrody metalowej na półprzewodnik. W przypadku kontaktu metalu z półprzewodnikiem poziomy Fermiego tych dwóch materiałów po ustaleniu się stanu równowagi muszą być takie same.

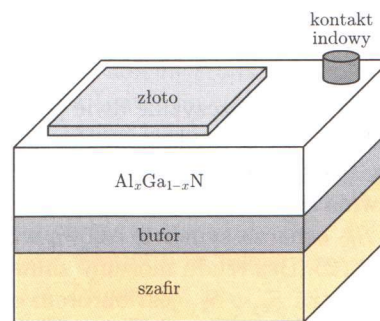
Poziomy Fermiego (E_F) oznacza taką energię, że w temperaturze 0 K wszystkie stany o energii niższej od E_F są obsadzone, a wszystkie stany o energii wyższej od E_F są puste. Oczywiście, w temperaturach wyższych od zera bezwzględnej energia elektronów podlega rozkładowi statystycznemu i mogą one mieć energię wyższą niż energia Fermiego. Tak więc im temperatura wyższa, tym więcej stanów powyżej poziomu Fermiego jest obsadzonych (i jednocześnie tyle samo stanów poniżej poziomu Fermiego jest pustych).

Rysunek 3 przedstawia sposób ustalania się takiej równowagi. W pierwszym momencie (rys. 3a) metal i półprzewodnik nie są w kontakcie. Po połączeniu tych dwóch materiałów nastąpi przepływ ładunku z półprzewodnika do metalu (rys. 3b), tak że w stanie równowagi poziom Fermiego w półprzewodniku obniży się w porównaniu do poziomu Fermiego w metalu o wartość równą różnicy prac wyjścia (W_m i W_p) tych dwóch materiałów (rys. 3c). Jeżeli prace wyjścia będą różne, w pewnej przypowierzchniowej warstwie półprzewodnika (na rysunku 3c oznaczonej przez w) powstanie pole elektryczne. Ze względu na pole elektryczne wszelkie swobodne nośniki, znajdujące się w tej warstwie, zostaną natychmiast rozseparowane (dlatego warstwę tę nazywamy warstwą zubożoną). Po oświetleniu półprzewodnika światłem, które zostanie w nim zaabsorbowane, w warstwie tej wytworzą się pary nośników elektron-dziura, które właśnie dzięki polu elektrycznemu zostaną natychmiast rozseparowane i dadzą przepływ prądu pomiędzy półprzewodnikiem a metalem. Kontakt taki nazywamy kontaktem Schottky'ego. Dobrym metalem, który daje kontakt Schottky'ego dla $Al_xGa_{1-x}N$, jest złoto.

Detektory uzyskuje się przez wyhodowanie metodami epitaksjalnymi cienkich (o grubości od kilkudziesięciu nanometrów do kilku mikronów) warstw $Al_xGa_{1-x}N$ na różnych podłożach.

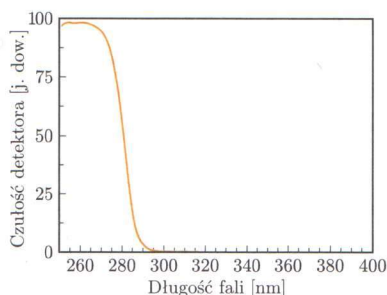
W ostatnich latach zostały opracowane metody hodowania półprzewodników pozwalające na nanoszenie po kolei poszczególnych warstw atomowych danych półprzewodników. Są to tzw. *metody epitaksjalne*. Dzięki nim podczas procesu wzrostu półprzewodników stało się możliwe dokładne sterowanie grubością poszczególnych warstw, a także hodowanie praktycznie dowolnie skomplikowanych struktur.

Obecnie ze względu na dość dobre dopasowanie jego struktury krystalicznej do struktury krystalicznej azotków i w miarę niską cenę najczęściej jako podłoże do $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ stosuje się szafir. Budowa detektora, który może posłużyć jako detektor *solar-blind* lub *visible-blind* (w zależności od tego, jaka zawartość Al będzie w warstwie $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$), została przedstawiona na rysunku 4.



Rys. 4. Budowa detektora ultrafioletu.

Na podłożu szafirowym zostaje wyhodowany bufor, którego celem jest jak najlepsze dopasowanie struktury krystalicznej pod ostateczną warstwę $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$, tak aby była ona jak najlepszej jakości. Na buforze tym zostaje wyhodowana docelowa warstwa $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ o składzie odpowiednim do wybranego detektora. Następnie na warstwie zostaje napylna cienka półprzezroczysta warstwa złota (o grubości około 10 nm) oraz naniesiony zostaje drugi kontakt. Dzięki temu, jeśli na warstwę złota zostanie skierowane światło, które następnie zostanie pochłonięte w półprzewodniku, pomiędzy tymi dwoma kontaktami zacznie płynąć prąd. Czułość wykonanego w ten sposób detektora o składzie dobranym tak, aby był to detektor *solar-blind*, została przedstawiona na rysunku 5. Można tutaj zobaczyć, że dla światła o długości fali większej od 290 nm detektor jest kompletnie nieczuły, natomiast oświetlenie światłem o długości fali 290 nm lub krótszej powoduje popłynięcie prądu pomiędzy kontaktami i daje sygnał na detektorze.



Rys. 5. Czułość detektora „solar-blind” jako funkcja długości fali.

Jak na razie detektory takie powstają w laboratoriach i są ciągle na etapie badań naukowych, których celem jest optymalizacja detektorów na każdym możliwym etapie – poczynając od samej metody hodowania detektorów (dobieranie różnych metod epitaksjalnych i buforów, tak aby były to warstwy najwyższej jakości), poprzez wybieranie odpowiedniej struktury (okazuje się, że udoskonalenie i rozszerzenie takiej prostej struktury np. do struktury *pin* może prowadzić do większej wydajności detektora), a kończąc na wyborze odpowiednich kontaktów (różnych w zależności od tego, jaka struktura zostanie ostatecznie wybrana).

Struktura typu *pin* oznacza strukturę, w której zostają wyhodowane po kolei następujące warstwy: półprzewodnik typu *p* (w którym nośnikami są dziury), izolator oraz półprzewodnik typu *n* (w którym nośnikami są elektrony).

Jednak wydaje się, że jesteśmy coraz bliżej wprowadzenia tych urządzeń do produkcji masowej i obniżenia ich ceny, co sprawi, że staną się one przydatne nie tylko do zastosowań militarnych czy naukowych, ale również do codziennego użytku. Kto wie, może opisany na początku przykład detektora promieniowania UV-B umieszczonego w zegarku nie jest taki abstrakcyjny i za kilka lat będzie on tak samo popularny, jak teraz czerwone wskaźniki laserowe, które w końcu przeszły taką samą drogę, tylko parę lat wcześniej. . .



Rozwiązanie zadania M 1076.

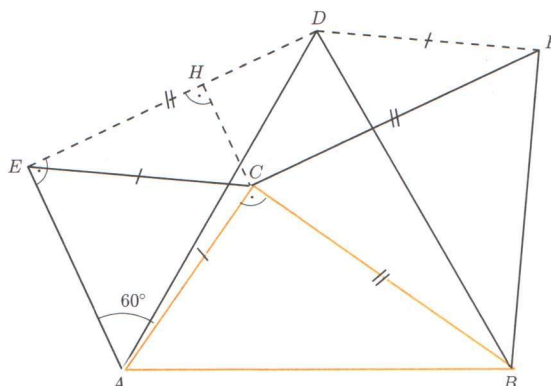
Przy obrocie trójkąta ABC wokół punktu A o kąt 60° , w którym punkt C przechodzi na punkt E , punkt B przechodzi na punkt D (rys.). Zatem $ED = BC = CF$.

Analogicznie dowodzimy, że $DF = EC$. Stąd wniosek, że czworokąt $ECFD$ jest równoległobokiem.

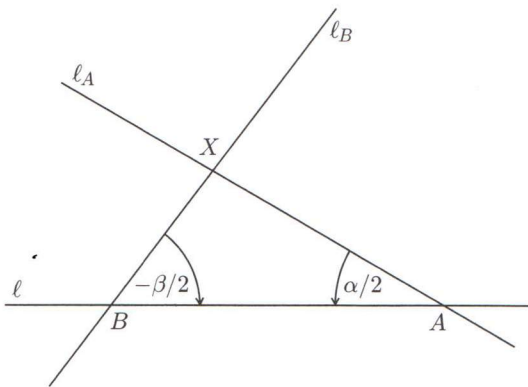
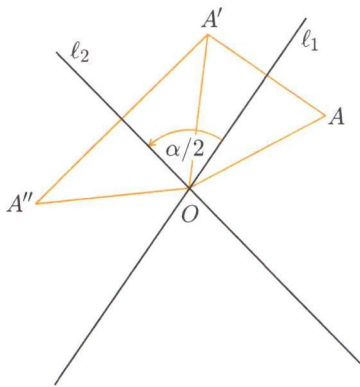
Ponadto $\sphericalangle CED = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Oznaczając przez H rzut prostokątny punktu C na bok ED , otrzymujemy $2HC = EC = AC$.

Stąd $\text{pole}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = HC \cdot ED = \text{pole}(ECFD)$.



Rozważmy na płaszczyźnie dwie proste ℓ_1, ℓ_2 przecinające się w punkcie O . Przypuśćmy, że kąt między tymi prostymi (mierzony od prostej ℓ_1 przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) ma miarę $\alpha/2$. Niech S_{ℓ_i} oznacza symetrię osiową względem prostej ℓ_i ($i = 1, 2$). Bez trudu możemy zauważyć, że złożenie tych symetrii $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ jest obrotem o kąt α wokół punktu O , który oznaczymy przez \mathcal{O}_O^α . Odwrotnie, jeśli mamy dany obrót \mathcal{O}_O^α , to wybierając **dowolną** prostą ℓ_1 przechodzącą przez punkt O , a następnie prowadząc przez O prostą ℓ_2 tworzącą z ℓ_1 kąt o mierze $\alpha/2$, możemy przedstawić \mathcal{O}_O^α w postaci złożenia symetrii osiowych $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$. Tak więc dowolny obrót jest złożeniem dwóch symetrii osiowych o osiach przechodzących przez środek obrotu. Zauważmy przy tym, iż jedna z osi może być wybrana dowolnie.



Rozważmy dwa obroty \mathcal{O}_A^α oraz \mathcal{O}_B^β . Zastanowimy się, jakim przekształceniem jest złożenie $\mathcal{O}_B^\beta \circ \mathcal{O}_A^\alpha$ tych obrotów. W przypadku, gdy $A = B$, odpowiedź jest natychmiastowa. Otrzymujemy obrót $\mathcal{O}_A^{\alpha+\beta}$. Mniej oczywista jest sytuacja, gdy A i B są różnymi punktami.

Poprowadźmy przez punkty A i B prostą ℓ . Następnie narysujmy

- przez punkt A prostą ℓ_A tworzącą z prostą ℓ kąt o mierze $\alpha/2$ (mierzony od prostej ℓ_A),
- przez punkt B prostą ℓ_B tworzącą z prostą ℓ kąt o mierze $-\beta/2$ (mierzony od prostej ℓ_B).

Na mocy powyższych uwag rozważane obroty możemy przedstawić w postaci złożenia symetrii osiowych

$$\mathcal{O}_A^\alpha = S_{\ell} \circ S_{\ell_A}, \quad \mathcal{O}_B^\beta = S_{\ell} \circ S_{\ell_B}.$$

Tak więc,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_B^\beta \circ \mathcal{O}_A^\alpha &= (S_{\ell_B} \circ S_{\ell}) \circ (S_{\ell} \circ S_{\ell_A}) = \\ &= S_{\ell_B} \circ (S_{\ell} \circ S_{\ell}) \circ S_{\ell_A} = S_{\ell_B} \circ S_{\ell_A}, \end{aligned}$$

gdyż $S_{\ell} \circ S_{\ell}$ jest, oczywiście, przekształceniem tożsamościowym. Teraz staje się jasne, że jeśli proste ℓ_A i ℓ_B przecinają się w punkcie X , to

$$\mathcal{O}_B^\beta \circ \mathcal{O}_A^\alpha = \mathcal{O}_X^{\alpha+\beta}.$$

W przypadku, gdy proste ℓ_A, ℓ_B są równoległe (ma to miejsce wtedy, gdy $\alpha + \beta$ jest całkowitą wielokrotnością kąta 360°), złożenie rozważanych obrotów jest przesunięciem (jako złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach równoległych).

Podsumowanie. Jeżeli niezerowe kąty α, β są takie, że $\alpha + \beta$ nie jest całkowitą wielokrotnością 360° oraz $A \neq B$, to $\mathcal{O}_B^\beta \circ \mathcal{O}_A^\alpha$

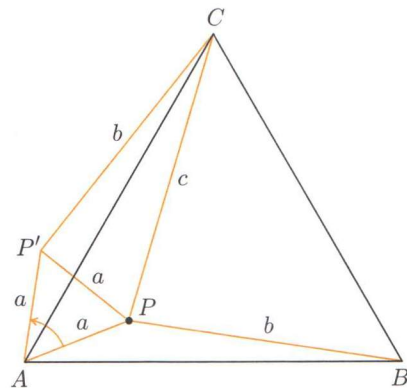
(*) jest obrotem $\mathcal{O}_X^{\alpha+\beta}$, gdzie X jest wierzchołkiem trójkąta XAB , takiego że $\sphericalangle XAB = \alpha/2$ i $\sphericalangle XBA = -\beta/2$;

(**) w szczególności jeśli $\alpha + \beta = 180^\circ$, to $\mathcal{O}_B^\beta \circ \mathcal{O}_A^\alpha$ jest symetrią środkową względem punktu X (wyznaczonego w analogiczny jak wyżej sposób).

Uwaga: $\sphericalangle XYZ$ oznacza kąt między półprostymi YX i YZ mierzony od półprostej YX .

Poniżej przedstawimy kilka zadań, w rozwiązaniach których zastosujemy obroty.

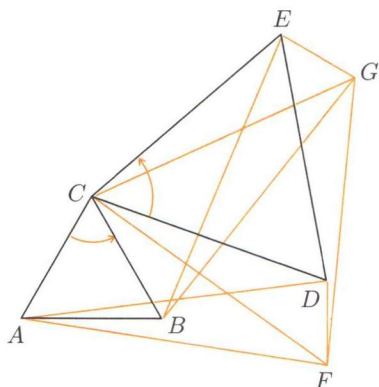
Zadanie 1. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC obrano punkt P , taki że $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$, gdzie $a^2 + b^2 = c^2$. Wyznaczyć długość boku trójkąta ABC .



Rozwiązanie. Rozważmy obrót $\mathcal{O}_A^{60^\circ}$ oraz punkt $P' = \mathcal{O}_A^{60^\circ}(P)$. Zauważmy, że $\mathcal{O}_A^{60^\circ}(B) = C$. Tak więc $\mathcal{O}_A^{60^\circ}(BP) = CP'$ i w szczególności $CP' = b$. Trójkąt APP' jest równoboczny, więc $PP' = a$. Z założeń wynika, iż $\sphericalangle PP'C = 90^\circ$, czyli $\sphericalangle AP'C = 150^\circ$. Stosując twierdzenie kosinusów do trójkąta ACP' , uzyskujemy

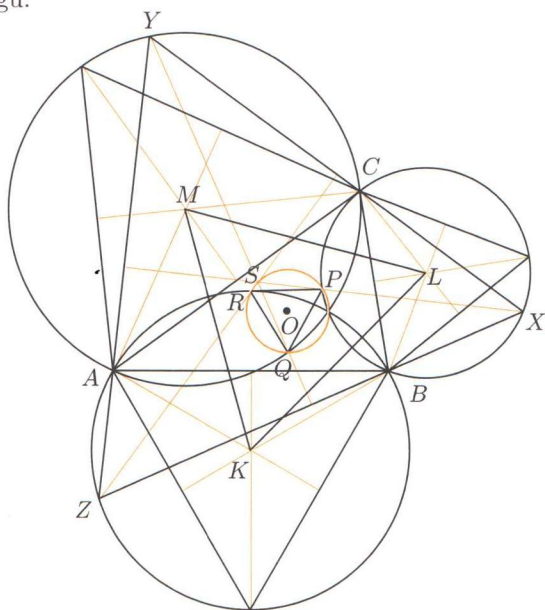
$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 150^\circ = a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}.$$

Zadanie 2. Na płaszczyźnie dane są dwa trójkąty równoboczne ABC i CDE (mające wspólny wierzchołek C) oraz punkty F i G , takie że $AD = AF$, $BE = BG$ i $\sphericalangle DAF = \sphericalangle EBG$ (jako kąty skierowane). Wykazać, że trójkąt CFG jest równoboczny.



Rozwiązanie. Rozważmy obrót $\mathcal{O}_C^{60^\circ}$. Zauważmy, że $\mathcal{O}_C^{60^\circ}(A) = B$, $\mathcal{O}_C^{60^\circ}(D) = E$, czyli $\mathcal{O}_C^{60^\circ}(AD) = BE$. Stąd w szczególności $AD = BE$. Na podstawie założeń ($AD = AF$, $BE = BG$ oraz $\sphericalangle DAF = \sphericalangle EBG$) trójkąty AFD i BGE są przystające. Tak więc $\mathcal{O}_C^{60^\circ}(\triangle AFD) = \triangle BGE$, czyli $\mathcal{O}_C^{60^\circ}(F) = G$. Trójkąt CFG jest zatem równoboczny.

Zadanie 3. [LV Olimpiada Matematyczna, zadanie 4] Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Rozważamy wszystkie takie trójkąty równoboczne XYZ , że punkty A, B, C są punktami wewnętrznymi odcinków YZ, ZX, XY . Dowieść, że środki ciężkości wszystkich rozważanych trójkątów leżą na jednym okręgu.



Rozwiązanie. Rozważmy dowolny trójkąt XYZ spełniający warunki zadania. Niech S będzie jego środkiem ciężkości. Zauważmy, że bok BC jest widziany z punktu X pod kątem 60° , a więc X leży na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym zbudowanym zewnętrznie na boku BC . Analogicznie Y i Z leżą na okręgach opisanych na trójkątach równobocznych zbudowanych odpowiednio na bokach AC i AB .

Oznaczmy przez K, L, M kolejne środki tych okręgów. Z twierdzenia Napoleona (patrz np. *Delta* 6/2004) wynika, że trójkąt KLM jest równoboczny. Niech O oznacza jego środek ciężkości. Proste XS, YS, ZS (jako dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta XYZ) przecinają w połowie krótsze łuki BC, AC, AB narysowanych okręgów. Środki tych łuków oznaczmy kolejno przez P, Q, R . Zauważmy, że

$$\mathcal{O}_O^{120^\circ} = \mathcal{O}_M^{60^\circ} \circ \mathcal{O}_K^{60^\circ} = \mathcal{O}_L^{60^\circ} \circ \mathcal{O}_M^{60^\circ}.$$

Mamy więc

$$\mathcal{O}_O^{120^\circ}(R) = \mathcal{O}_M^{60^\circ}(\mathcal{O}_K^{60^\circ}(R)) = \mathcal{O}_M^{60^\circ}(A) = Q$$

oraz

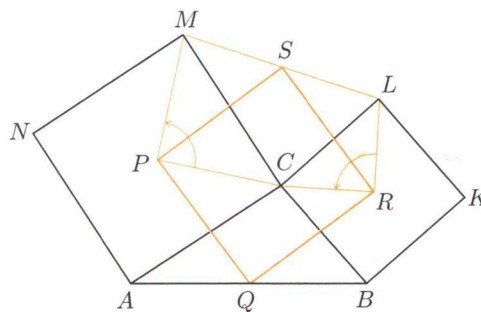
$$\mathcal{O}_O^{120^\circ}(Q) = \mathcal{O}_L^{60^\circ}(\mathcal{O}_M^{60^\circ}(Q)) = \mathcal{O}_L^{60^\circ}(C) = P.$$

Stąd natychmiast wynika, że trójkąt PQR jest równoboczny i jego środkiem ciężkości jest punkt O . Pozostaje wykazać, iż S leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR . W tym celu, ponieważ

$$\sphericalangle XSY = \sphericalangle YSZ = \sphericalangle ZSX = 120^\circ$$

oraz P, Q, R należą odpowiednio do prostych SX, SY, SZ , wystarczy zauważyć, że S nie jest punktem wewnętrznym trójkąta PQR . W przeciwnym razie, boki trójkąta PQR są widziane z punktu S pod kątem 120° , a więc $S = O$. Wtedy punkt O leży na zewnątrz okręgów opisanych na „dobudowanych” na początku trójkątach równobocznych. Oznacza to, że każdy z kątów AOB, BOC, COA ma miarę mniejszą od 120° , co jest niemożliwe.

Zadanie 4. Boki BC i AC trójkąta ABC są jednocześnie bokami kwadratów $BKLC$ i $CMNA$ (leżących na zewnątrz trójkąta ABC). Punkty Q i S są odpowiednio środkami odcinków AB i LM , a P i R środkami kwadratów $CMNA$ i $BKLC$. Wykazać, że czworokąt $PQRS$ jest kwadratem.



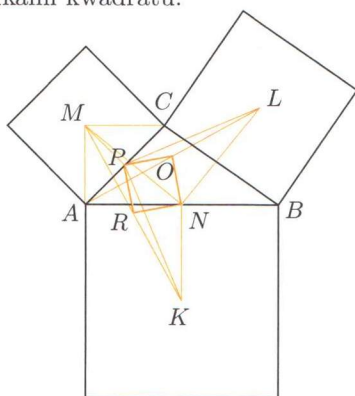
Rozwiązanie. Rozważmy przekształcenie $\mathcal{S} = \mathcal{O}_P^{90^\circ} \circ \mathcal{O}_R^{90^\circ}$ będące złożeniem dwóch obrotów o kąt 90° wokół punktów R i P . Na podstawie (***) \mathcal{S} jest symetrią środkową względem punktu X , takiego że $\sphericalangle XRP = 45^\circ$, $\sphericalangle XPR = -45^\circ$. Z drugiej strony zauważmy, że

$$\mathcal{S}(L) = \mathcal{O}_P^{90^\circ}(\mathcal{O}_R^{90^\circ}(L)) = \mathcal{O}_P^{90^\circ}(C) = M.$$

Tak więc środek X symetrii \mathcal{S} pokrywa się ze środkiem S odcinka LM . W szczególności PRS jest równoramiennym trójkątem prostokątnym. Rozważając analogicznie złożenie obrotów $\mathcal{O}_R^{90^\circ} \circ \mathcal{O}_P^{90^\circ}$, dowiedzimy, że PQR jest również równoramiennym trójkątem prostokątnym. Tak więc czworokąt $PQRS$ jest kwadratem.

Zadanie 5. Punkty K, L, M są środkami kwadratów zbudowanych zewnętrznie na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC . Wykazać, że

- (a) odcinki KM i AL są prostopadłe,
 (b) środki odcinków AB, AL, AC i MK są wierzchołkami kwadratu.



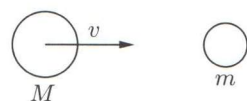
Rozwiązanie. Przez N, O, P i R oznaczmy kolejno środki odcinków AB, AL, AC i KM .

(a) Na podstawie zadania 4 stwierdzamy, że MNL jest prostokątnym trójkątem równoramiennym, przy czym $\sphericalangle LNM = 90^\circ$. Zauważmy, że $\mathcal{O}_N^{90^\circ}(A) = K$ oraz $\mathcal{O}_N^{90^\circ}(L) = M$. Tak więc $\mathcal{O}_N^{90^\circ}(AL) = KM$. W szczególności odcinki AL i KM są prostopadłe.

(b) Z (***) wiemy, że $\mathcal{O}_N^{90^\circ} \circ \mathcal{O}_P^{90^\circ}$ jest symetrią środkową \mathcal{S}_X . Ponieważ $\mathcal{O}_N^{90^\circ} \circ \mathcal{O}_P^{90^\circ}(M) = K$, więc środek X tej symetrii pokrywa się ze środkiem R odcinka KM . Ponadto z (*) wynika również, że PRN jest prostokątnym trójkątem równoramiennym. Z zadania 4 wynika, że $\sphericalangle KPL = 90^\circ$ oraz $PK = PL$. Tak więc $\mathcal{O}_P^{90^\circ} \circ \mathcal{O}_N^{90^\circ}(A) = L$. Stąd $\mathcal{O}_P^{90^\circ} \circ \mathcal{O}_N^{90^\circ}$ jest symetrią środkową względem środka O odcinka AL oraz tak jak poprzednio NOP jest prostokątnym trójkątem równoramiennym. Ostatecznie czworokąt $NOPR$ jest kwadratem.



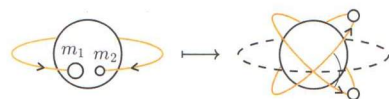
Zadania *Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI*



Rys. 1

F 629. Kula o masie M porusza się w kierunku kuli o masie m , za którą stoi ściana (rys. 1). Jaki musi być stosunek mas kul, aby obie kule zderzyły się dokładnie dwa razy?

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2

F 630. Na orbicie kołowej o promieniu R wokół planety o masie M zderzają się dwa ciała o masach m_1 i m_2 . W wyniku zderzenia powstają dwa ciała o jednakowych masach, poruszające się po orbitach kołowych o tym samym promieniu, lecz nachylonych pod kątem 45° do orbity początkowej (rys. 2). Jaki był stosunek mas ciał m_1 i m_2 i jaka energia wydzielona się podczas zderzenia?

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Waldemar POMPE

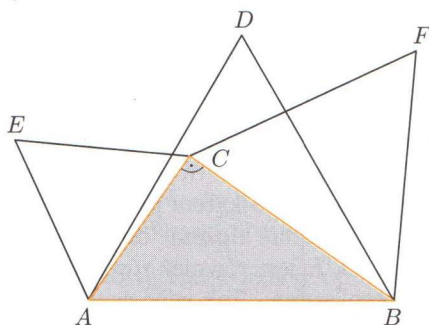
M 1075. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita n , dla której liczba

$$n^2 + n - 1$$

jest podzielna przez 25.

Rozwiązanie na str. 9

M 1076. Na przyprostokątnych AC i BC trójkąta prostokątnego ABC budujemy, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne ACE i BCF . Ponadto na przeciwprostokątnej AB budujemy trójkąt równoboczny ABD przy czym C i D leżą po tej samej stronie prostej AB (rys. 3).

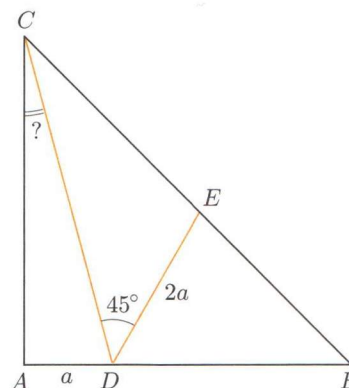


Rys. 3

Wykazać, że pole trójkąta ABC jest równe polu czworokąta $ECFD$.

Rozwiązanie na str. 3

M 1077. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC ($AB = AC$, rys. 4) punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i BC , przy czym $\sphericalangle CDE = 45^\circ$ oraz $DE = 2 \cdot AD$. Wyznaczyć miarę kąta ACD .



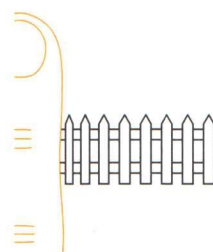
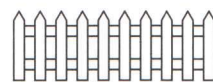
Rys. 4

Rozwiązanie na str. 9

Dyfrakcja na palcu

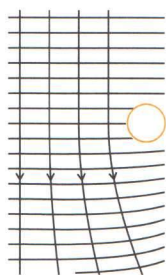
Dyskusja o falowej bądź cząsteczkowej naturze światła to jedna z najważniejszych i najpłodniejszych debat w historii fizyki. Rozpoczęła się pracami Christiana Huygensa i Izaaka Newtona na przełomie XVII i XVIII wieku, i trwała, czasami żywsza, czasami wyciszona, do prac Einsteina i Plancka z początku zeszłego wieku. Za korpuskularną teorią światła, popieraną m. in. przez Newtona, przemawia optyka geometryczna, według której w jednorodnym ośrodku światło rozchodzi się po prostej i doznaje odbicia zgodnie z prostym prawem równości kąta padania i odbicia. Pewne eksperymenty z optyki nie dawały się jednak prosto wyjaśnić tymi zasadami. Jako przykład eksperymentu ukazującego drugą, falową naturę światła, zazwyczaj podaje się doświadczenie Younga z interferencją światła na dwóch szczelinach. Jest ono jednak dość trudne do powtórzenia w domu, gdyż wymaga pewnych, nie zawsze dostępnych, przyrządów.

Żadnych przyrządów nie wymaga natomiast obserwacja zjawiska dyfrakcji. Wystarczy oko, odległy przedmiot i... palec. Stańmy w dużej odległości od płotu lub dowolnego innego przedmiotu pomalowanego w pionowe pasy. Zamykamy teraz jedno oko i trzymanym pionowo około 10 cm od oka palcem przesłaniamy częściowo obraz płotu. Obraz deformuje się (patrz rys. 1).

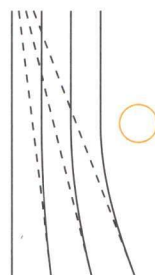


Rys. 1

Przyczyną pozornego skupiania się sztachet płotu jest ugięcie się (dyfrakcja) światła niedaleko przeszkody – palca (rys. 2).



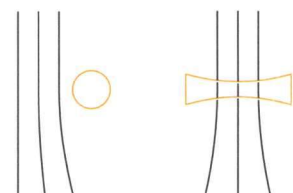
Rys. 2a



Rys. 2b

Zjawisko to łamie zasady optyki geometrycznej (niby dlaczego promień światła miałby się zakrzywiać w jednorodnym powietrzu?), odchylenie jest jednak stosunkowo niewielkie i na ogół zanedbywalne – założę się, że większość Czytelników nigdy nie zwróciła na nie uwagi!

Jeden z moich kolegów nauczył się wykorzystywać ten efekt do obserwacji dalekich obiektów, gdy nie ma przy sobie okularów (ma astygmatyzm). Zauważmy bowiem, że jeśli odpowiednio dobrać położenie palca, może on służyć za rozpraszającą soczewkę korekcyjną (rysunek 3).



Rys. 3

Małą Deltę przygotował Mikołaj KORZYŃSKI

Suma pochodnych

Lev KOURLIANDTCHIK

Na LIV Olimpiadzie Matematycznej w zawodach I stopnia zostało zaproponowane następujące zadanie.

Dla liczb dodatnich a, b, c, d określamy

$$A = a^3 + b^3 + c^3 + d^3,$$

$$B = bcd + cda + abc,$$

$$C = (a + b + c + d)^3.$$

Udowodnić nierówność $C \leq 4A + 24B$.

W artykule tym opowiemy o pewnej metodzie dowodzenia nierówności tego rodzaju. Opiera się ona na twierdzeniu, które jest uogólnieniem następującego oczywistego lematu

Lemat. Niech funkcja f będzie różniczkowalna oraz niech spełnione będą dwa warunki: $f(0) \geq 0$ oraz $f'(x) \geq 0$ dla x nieujemnych. Wtedy $f(x) \geq 0$ dla wszystkich x nieujemnych.

Przez f'_{x_i} oznaczamy dalej pochodną cząstkową funkcji f względem zmiennej x_i . Pochodną taką oblicza się w ten sposób, że tylko x_i traktujemy jako zmienną, natomiast wszystkie pozostałe zmienne traktujemy jako stałe. Np. dla funkcji $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$ mamy

$$f'_{x_2} = x_1^2 \cdot 3x_2^2,$$

gdyż x_1 potraktowaliśmy tu jako stałą. Podobnie dla funkcji $g(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$ mamy

$$g'_x = 2xy^3z^4,$$

bo tym razem y i z traktowaliśmy jako stałe. Pochodna cząstkowa f'_{x_i} mierzy, jak rośnie funkcja f w kierunku x_i . Jeśli w jakimś punkcie A pochodna ta jest dodatnia, to znaczy, że w kierunku x_i od punktu A funkcja f wzrasta. Gdy pochodna ta jest ujemna, w kierunku x_i funkcja f maleje.

Twierdzenie. Niech funkcja f spełnia dla nieujemnych zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n następujące $n + 1$ nierówności

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$f'_{x_1}(x_1, \dots, x_n) + f'_{x_2}(x_1, \dots, x_n) + \dots + f'_{x_n}(x_1, \dots, x_n) \geq 0.$$

Wtedy $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ dla dowolnych nieujemnych liczb x_1, x_2, \dots, x_n .

Dowód. Niech x_1, x_2, \dots, x_n będą liczbami nieujemnymi oraz niech a będzie najmniejszą z nich. Wtedy liczby

$$y_1 = x_1 - a, \quad y_2 = x_2 - a, \dots, y_n = x_n - a$$

też są nieujemne, przy czym przynajmniej jedna spośród nich jest równa zero. Zatem na mocy pierwszej z założonych nierówności $f(y_1, y_2, \dots, y_n) \geq 0$.

Rozważmy teraz określoną dla liczb nieujemnych funkcję jednej zmiennej t

$$g(t) = f(y_1 + t, y_2 + t, \dots, y_n + t).$$

Zachodzą nierówności

$$g(0) = f(y_1, y_2, \dots, y_n) \geq 0,$$

$$g'(t) = f'_{y_1} + f'_{y_2} + \dots + f'_{y_n} \geq 0.$$

Wobec tego z lematu wynika, że dla każdego nieujemnego t wartość $g(t)$ jest nieujemna. Zatem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(y_1 + a, y_2 + a, \dots, y_n + a) = g(a) \geq 0,$$

co dowodzi twierdzenia.

Pokażemy skuteczność tej metody na kilku przykładach.

Przykład 1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$



Rozwiązanie. Rozważmy funkcję

$$f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a.$$

Mamy oczywiście

$$f(0, b, c) \geq 0, \quad f(a, 0, c) \geq 0, \quad f(a, b, 0) \geq 0.$$

Ponadto

$$f'_a + f'_b + f'_c = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Przykład 2. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^3c + b^3a + c^3b \geq abc(a + b + c).$$

Rozwiązanie. Rozważmy funkcję

$$f(a, b, c) = a^3c + b^3a + c^3b - abc(a + b + c) = a^3c + b^3a + c^3b - a^2bc - b^2ca - c^2ab.$$

Po pierwsze jest oczywiste, że

$$f(0, b, c) \geq 0, \quad f(a, 0, c) \geq 0, \quad f(a, b, 0) \geq 0.$$

Po drugie

$$f'_a + f'_b + f'_c = (a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a) + 2(a^2c + b^2a + c^2b - 3abc) \geq 0,$$

bowiem z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq 3\sqrt[3]{a^2c \cdot b^2a \cdot c^2b} = 3abc.$$

Przykład 3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a).$$

Rozwiązanie. Rozważmy funkcję

$$f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a + b) - bc(b + c) - ca(c + a).$$

Ponieważ jest ona symetryczna, tzn.

$$f(a, b, c) = f(a, c, b) = f(b, a, c) = f(b, c, a) = f(c, a, b) = f(c, b, a),$$

więc dla sprawdzenia pierwszego warunku wystarczy dowiedzieć, że $f(a, b, 0) \geq 0$.

Mamy

$$f(a, b, 0) = a^3 + b^3 - ab(a + b) = (a + b)(a - b)^2 \geq 0.$$

I dalej

$$f'_a + f'_b + f'_c = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0,$$

co dowodzi żądanej nierówności.

Zmierzymy się teraz z zadaniem wspomnianym na początku artykułu. W istocie rozwiążemy zadanie nieco trudniejsze.

Przykład 4. Niech A, B, C będą takie, jak w wyjściowym zadaniu z LIV OM. Udowodnić (mocniejszą od oryginalnej) nierówność

$$C \leq 4A + 15B.$$

Rozwiązanie. Przyjmijmy

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 15(bcd + cda + dab + abc) - (a + b + c + d)^3 = \\ &= 3(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 9(bcd + cda + dab + abc) - 3(a^2b + a^2c + a^2d + \\ &\quad + b^2a + b^2c + b^2d + c^2a + c^2b + c^2d + d^2a + d^2b + d^2c). \end{aligned}$$

Wykażemy, że funkcja ta spełnia założenia twierdzenia. Ponieważ jest ona symetryczna, więc dla sprawdzenia pierwszego warunku wystarczy sprawdzić, że zachodzi nierówność $f(a, b, c, 0) \geq 0$. Mamy

$$f(a, b, c, 0) = 3(a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - a^2c - b^2a - b^2c - c^2a - c^2b + 3abc).$$

Dalej mamy

$$f'_a + f'_b + f'_c + f'_d = 6(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \geq 0,$$

co kończy dowód.

Zainteresowanemu Czytelnikowi proponuję samodzielnie udowodnić następujące twierdzenie. Niech α, β będą takimi liczbami dodatnimi, że $\alpha + \beta \geq 16$, $3\alpha + \beta \geq 27$. Wtedy prawdziwa jest nierówność $C \leq \alpha A + \beta B$.



Rozwiązanie zadania M 1075. Przypuśćmy, że dla pewnej liczby całkowitej n liczba $n^2 + n - 1$ jest podzielna przez 25. Wówczas liczba

$$(n^2 + n - 1) - 5 = (n + 3)(n - 2)$$

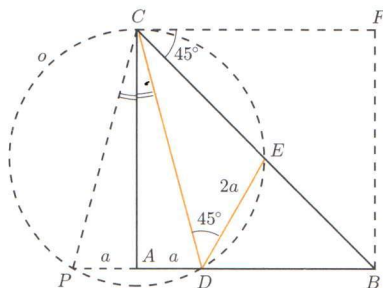
jest podzielna przez 5. Ponieważ liczby $n + 3$ i $n - 2$ różnią się o 5, więc obie muszą być podzielne przez 5, a zatem iloczyn $(n + 3)(n - 2)$ jest liczbą podzielną przez 25. Ale wtedy liczba $n^2 + n - 1$ nie może być podzielna przez 25, gdyż

$$(n^2 + n - 1) - (n + 3)(n - 2) = 5.$$

Sprzeczność.



Rozwiązanie zadania M 1077. Uzupełnijmy trójkąt ABC do kwadratu $ABFC$.



Z równości

$$\sphericalangle FCB = 45^\circ = \sphericalangle CDE$$

wynika, że okrąg o , opisany na trójkącie CDE , jest styczny do prostej CF . Zatem prosta CA przechodzi przez środek okręgu o , a punkt P - symetryczny do punktu D względem prostej AC , leży na okręgu o . Ponadto $PD = DE$. Stąd

$$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \sphericalangle PCD = \frac{1}{2} \sphericalangle DCE.$$

Wiemy również, że

$$\sphericalangle ACD + \sphericalangle DCE = 45^\circ,$$

skąd bezpośrednio obliczamy

$$\sphericalangle ACD = 15^\circ.$$

Rozkład ładunku elektrycznego w dwuwymiarowym przewodniku

Roman WERPACHOWSKI

W przyrodzie rozróżniamy materiały przewodzące, w których ładunek elektryczny może się swobodnie przemieszczać, i izolatory, w których takiej swobody nie ma. W obu typach materiałów może występować niezerowy ładunek elektryczny, wytwarzając pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz próbki. W przewodniku taki ładunek nazywamy ładunkiem swobodnym. Jego nośnikami są elektrony swobodne (niezwiązane z atomami sieci krystalicznej). Oprócz tego źródło pola może znajdować się na zewnątrz próbki (możemy obok położyć drugą albo włożyć naszą próbkę między okładki kondensatora). Nie będę się zajmował takim przypadkiem, ograniczając się do sytuacji, w której jedynym źródłem pola są ładunki swobodne wewnątrz przewodnika.

Jeżeli pole elektryczne wewnątrz przewodnika jest różne od zera, elektrony swobodne poruszają się pod jego wpływem i ich rozkład ulega zmianie. Rozkład ładunku będzie w stanie równowagi (nie będzie zmieniał się w czasie), kiedy pole elektryczne wewnątrz przewodnika zniknie. Elektrony, przemieszczając się, same zmieniają pole elektryczne, i to w taki sposób, żeby całkowite pole zmniejszyło się (w ten sposób układ „przewodnik + ładunki swobodne” minimalizuje swoją energię). Gdyby przewodnik był nieskończenie duży (nie miał brzegów), rozkładem, dla którego zachodziłaby równowaga (rozkładem równowagowym), byłby rozkład jednostajny, ze stałą gęstością ładunku. Istnienie brzegów powoduje, że rozkład ładunku swobodnego w przewodniku skończonym (z brzegami) nie jest jednostajny.

Odpowiedź na pytanie „to jaki jest rozkład równowagowy?” przynosi nam prawo Gaussa: liczba linii pola elektrycznego wychodzących z zamkniętej powierzchni jest wprost proporcjonalna do ładunku zawartego wewnątrz niej. Skoro, w stanie równowagi, wewnątrz przewodnika pole elektryczne musi być równe zeru, nie może tam być żadnych ładunków swobodnych. Gdzie się więc podziały? Cały ładunek znajduje się *na brzegu* przewodnika, gdyż tam jedynie może być niezerowe pole elektryczne.

Wydawać by się mogło, że znamy już odpowiedź na dręczące nas pytanie, i w tym miejscu artykuł powinien się skończyć. Tak jednak nie jest.



Powyższe rozumowanie przeprowadziłem dla przewodnika trójwymiarowego. Co się stanie, jeżeli wyobrazimy sobie przewodnik jako dwuwymiarową płaszczyznę? Do ustalenia się równowagowego rozkładu ładunku w przewodniku dwuwymiarowym potrzeba i wystarcza, żeby *równoległa* do jego powierzchni składowa pola elektrycznego była równa zeru. Składowa prostopadła nie musi być równa zeru, a co za tym idzie, z dowolnego punktu przewodnika może wychodzić niezerowa liczba linii pola. To z kolei oznacza, że w takim punkcie może się znajdować niezerowy ładunek elektryczny! Problem więc istnieje, a do jego rozwiązania, jak pokażę, warto zaprząć komputer.

Posłużę się przybliżeniem: płytkę kwadratową o boku l podzielę na $N \times N$ małych kwadracików, zakładając, że wewnątrz kwadracika gęstość ładunku jest stała. Całkowity ładunek na płytce jest ustalony i równy

$$(1) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_{ij} = Q_{\text{tot}}$$

Symbolem q_{ij} oznaczam ilość ładunku zgromadzonego w elementarnym kwadraciku o indeksach i, j . Jest ona równa

$$q_{ij} = \frac{l^2}{N^2} \rho \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{N}, \left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{N} \right),$$

gdzie $\rho(x, y)$ jest gęstością ładunku w punkcie o współrzędnych (x, y) .

Interesuje nas równowagowy rozkład ładunku elektrycznego $\rho(x, y)$ na powierzchni kwadratowej płytki przewodzącej o boku długości l . Określa go warunek stałości potencjału na płytce; w naszym przybliżeniu oznacza to, że potencjał generowany przez ładunki $q_{i'j'}$ skoncentrowane na środkach kwadracików o indeksach i', j' jest taki sam, kiedy zmierzy się go na środku dowolnego kwadracika o indeksach i, j :

$$(2) \quad V_{ij} = \frac{1}{l} \sum_{i'=0}^N \sum_{j'=1}^N \frac{q_{i'j'}}{\sqrt{(i-i')^2 + (j-j')^2}} = V_0,$$

(korzystam z układu jednostek Gaussa). Jednocześnie musi być spełniony warunek (1).

Analiza wymiarowa wskazuje, że stały potencjał V_0 zależy od całkowitego ładunku Q_{tot} i długości boku płytki l :

$$(3) \quad V_0 = \alpha \frac{Q_{\text{tot}}}{l},$$

gdzie α jest bezwymiarową stałą. Jednym z naszych celów jest znalezienie tej stałej dla różnych wartości N .

Uważny Czytelnik zauważy pewien problem pojawiający się w obliczeniu potencjału V_{ij} . Otóż dla $i' = i$ i $j' = j$ w mianowniku pojawia się zero. Te wyrazy w sumie musimy więc potraktować inaczej.

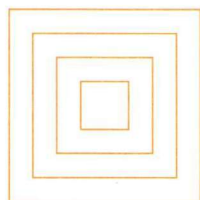
Przypadek $i' = i, j' = j$ odpowiada obliczaniu potencjału generowanego przez rozkład ładunku zawartego w kwadraciku otaczającym interesujący nas punkt. Zgrubne przybliżenie, polegające na zastąpieniu rozkładu ciągłego rozkładem punktowym skoncentrowanym w środkach kwadracików (na tym polega przybliżenie (2)) prowadzi do pojawienia się pod znakiem sumy nieskończonych wyrazów. Potraktujemy te wyrazy oddzielnie, zastępując realny rozkład ciągły rozkładem jednostajnym: obliczając V_{ij} przyjmujemy, że na (i, j) -tym kwadraciku ładunek q_{ij} jest rozłożony jednostajnie, czyli że gęstość ładunku w tym kwadraciku jest równa

$$\frac{N^2 q_{ij}}{l^2}.$$

Następnie, obliczymy wkład do potencjału pochodzący od tego kwadracika w pewien specjalny sposób, otrzymując na końcu wynik:

$$(4) \quad V_{ij} = 3,52494Nq_{ij}/l + \frac{N}{l} \sum_{(i',j') \neq (i,j)} \frac{q_{i'j'}}{\sqrt{(i-i')^2 + (j-j')^2}}.$$

Obliczenie pierwszego członu wzoru (4) wymaga nieco sprytu. Kwadracik (i, j) podzielimy na nieskończenie cienkie „ramki” (patrz rys. 1) o boku równym ich podwójnej odległości od środka kwadracika i najpierw scałkujemy po każdej z nich, a następnie wkłady do potencjału od ramek.



Rys. 1. Podział kwadracika przy całkowaniu.

$$\begin{aligned} \frac{N^2}{l^2} \int_{-l/(2N)}^{l/(2N)} \left(\int_{-l/(2N)}^{l/(2N)} \frac{q_{ij}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} dy' \right) dx' = \\ = \frac{4N^2}{l^2} \int_0^{l/(2N)} \left(\int_{-a}^a \frac{q_{ij}}{\sqrt{s^2 + a^2}} ds \right) da. \end{aligned}$$

Wartość tej całki wynosi w przybliżeniu $3,52494Nq_{ij}/l$. Gdybyśmy wybrali inny sposób obliczenia, moglibyśmy uzyskać po drodze funkcję podcałkową przyjmującą nieskończone wartości. Taki sposób ominięcia problemu

nazywa się *regularyzacją* całki, i jest to chwyt używany przez teoretyków w wielu działach fizyki.

Najprostszym sposobem na znalezienie konkretnego rozwiązania jest przyjęcie, że szukamy rozkładu ładunku generującego stały rozkład potencjału o zadanej wartości V_0 . Zsumowanie wszystkich q_{ij} da nam wartość całkowitego ładunku Q_{tot} , co – razem ze znajomością l – pozwoli obliczyć stałą α ze wzoru (3). Obliczenie rozkładu o zadanym całkowitym ładunku Q_{tot} sprowadzi się wówczas do przeskalowania jakiegokolwiek rozwiązania z zadanym V_0 według wzoru

$$(5) \quad \rho_{Q_{\text{tot}}} = \frac{\alpha Q_{\text{tot}}}{lV_0} \rho_{V_0}.$$

Warunek (4) jest równoważny układowi równań liniowych na q_{ij} :

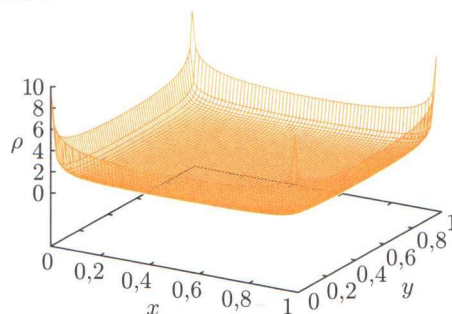
$$(6) \quad \forall_{i,j=1,\dots,N} \sum_{i'=1}^N \sum_{j'=1}^N f_{i-i',j-j'} q_{ij} = V_0,$$

gdzie f_{00} jest równe $3,52494N/l$, a

$$f_{ij} = f_{ji} = \frac{N}{l\sqrt{i^2 + j^2}}.$$

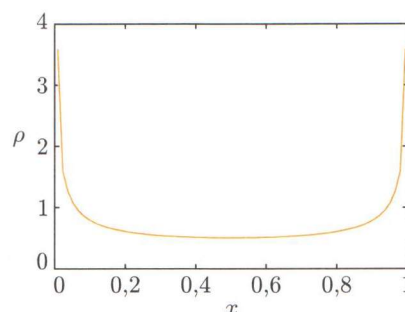
Rozwiązanie takiego układu jest już bardzo proste i wymaga użycia odpowiedniej procedury numerycznej. Warto zauważyć, że jeśli zapiszemy układ równań (6) w postaci macierzowej $A \cdot X = B$, to macierz A współczynników równania będzie symetryczna.

Rysunek 2 pokazuje rozkład ładunku $Q_{\text{tot}} = 1$ na płycie kwadratowej o długości boku $l = 1$ podzielonej na 70×70 kwadracików.



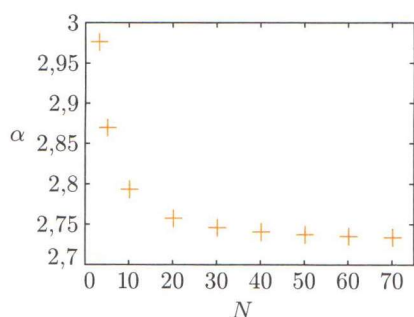
Rys. 2. Rozkład ładunku na płycie 70×70 .

Widać, że ładunek jest rozłożony na całej powierzchni płyty. Jeszcze lepiej widać to na rysunku 3 pokazującym przekrój gęstości ładunku przez środek płyty (równoległy do jej boku).



Rys. 3. Przekrój gęstości ładunku przez środek płyty 70×70 .

Z kolei rysunek 4 pokazuje zależność współczynnika α od N (pierwiastka kwadratowego z liczby kwadracików, na które podzielono płytę).



Rys. 4. Wartości współczynnika α dla różnych N .

Analiza metodą najmniejszych kwadratów pokazuje, że zależność ta jest postaci $\alpha = A + B/N$, gdzie $A \approx 2,72 \pm 0,001$, $B \approx 0,76 \pm 0,007$.

Gęstość ładunku w narożnym kwadracie zależy od parametru N jak $A + B\sqrt{N}$. Analiza metodą najmniejszych kwadratów daje nam wartości $A \approx -1,9 \pm 0,2$, $B \approx 1,36 \pm 0,04$.

Podobnie jest z gęstością ładunku pośrodku krawędzi płyty, tutaj również zależność ma charakter $A + B\sqrt{N}$,

dla $A \approx 0,11 \pm 0,01$, $B \approx 0,413 \pm 0,001$. Prosty rachunek pokazuje, że dla $N \rightarrow \infty$ cały ładunek znajduje się *we wnętrzu* płyty przewodzącej (czyli nie na brzegach). Istotnie, zsumowanie gęstości ładunku znajdującego się na skrajnych kwadracikach daje ładunek

$$(7) \quad q_{\text{brzegowy}} \approx 4N \frac{l^2}{N^2} (A + B\sqrt{N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Inna sytuacja zachodzi na środku płyty, gdzie zależność gęstości ładunku od N ma charakter $A + B/N$.

Parametry A i B mają wartości $A \approx 0,4836 \pm 0,0002$, $B \approx 0,319 \pm 0,006$, a współczynnik korelacji jest równy $R = 0,999$. Tu z kolei, kiedy wybierzemy sobie mały obszar na środku płyty o *stałym* polu powierzchni S i zsumujemy ładunek znajdujący się na nim, to otrzymamy

$$(8) \quad q_{\text{środek}} = S (A + B/N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} SA \neq 0.$$

Powyższe wyniki są bodaj najważniejsze, ponieważ uzmysławiają nam największą różnicę między przewodnikiem dwuwymiarowym a trójwymiarowym: w tym ostatnim *cały* ładunek gromadzi się na brzegu

$$(q_{\text{brzegowy}} \rightarrow Q_{\text{tot}}, \quad q_{\text{środek}} \rightarrow 0),$$

odwrotnie niż w przypadku dwuwymiarowym.

Autor dziękuje swojej żonie Agnieszce za cenne uwagi krytyczne.

Uogólniony wzór Eulera dla wielościanów Adam PIWOCKI

W XVIII wieku Leonard Euler stwierdził, że

w każdym wielościanie wypukłym ścian i wierzchołków jest razem dokładnie tyle, ile jest krawędzi plus dwa.

Jeżeli oznaczymy wierzchołki, krawędzie i ściany odpowiednio przez N_0 , N_1 i N_2 , to twierdzenie Eulera mówi, że:

$$N_0 + N_2 = N_1 + 2 \quad \text{lub} \quad N_0 - N_1 + N_2 = 2.$$

(Lewą stronę drugiej równości nazywa się *charakterystyką Eulera-Poincarégo*, jest ona ważnym niezmiennikiem topologicznym.)

Równanie Eulera ma swoją wersję dla wielokątów, mianowicie

każdy wielokąt wypukły ma tyle wierzchołków, co krawędzi,

czyli

$$N_0 = N_1 \quad \text{lub} \quad N_0 - N_1 = 0.$$

Gdzie jest dwójka? Poszukajmy jej w jeszcze niższym wymiarze:

każdy odcinek na prostej ma dwa wierzchołki końcowe,

tzn. $N_0 = 2$. Tu prawa strona znowu wygląda jak w pierwotnym równaniu Eulera, więc może jest błąd we wzorze dla wielokątów? Nie. Dla „wielościanu” w przestrzeni czterowymiarowej

wierzchołków i ścian jest tyle, co krawędzi i komórek trójwymiarowych,

czyli

$$N_0 + N_2 = N_1 + N_3 \quad \text{lub} \quad N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0.$$

Widać to na przykładzie 4-sympleksu (patrz *Delta* 8/2004), który składa się z pięciu czworościanów sklejonych ścianami, więc ma 5 komórek trójwymiarowych, 10 ścian, 10 krawędzi i 5 wierzchołków. Jednak odpowiedź na pytanie

dlaczego na przemian pojawia się zero i dwójka?

podał Schläfli, uogólniając jeszcze bardziej wzór Eulera. Jeśli przez N_k oznaczymy liczbę komórek k -wymiarowych w n -wymiarowym wielościanie ($k < n$), to mamy:

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \dots + (-1)^{n-1} N_{n-1} = 1 - (-1)^n$$

Teraz ten wzór zagmatwamy jeszcze bardziej.

Zauważmy, że wielościan, którego największe „ściany” są $(n-1)$ -wymiarowe, ma n -wymiarowe wnętrza podzielone na N_n części (ograniczając się do wielościanów mniej lub bardziej regularnych, dostajemy $N_n = 1$). Oznaczmy przez N_{-1} liczbę części, na które wielościan dzieli swoje „zewnątrze”, czyli dopełnienie (w przypadku takich wielościanów $N_{-1} = 1$). Wówczas wzór Schläfliego ma postać:

$$N_0 - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^{n-1} N_{n-1} + (-1)^n N_n = N_{-1}.$$

Nobel dla Polaka?

W tym miesiącu, jak co roku, przyznana zostanie Nagroda Nobla z Fizyki. Może tym razem dostanie ją Polak? Na pewno zasługuje na nią Bogdan Paczyński. Najlepszym dowodem renomy, jaką cieszy się on wśród astronomów, było powierzenie mu reprezentowania poglądu o kosmologiczności rozbłysków gamma (GRB – Gamma Rays Bursts) w debacie, która w 1995 roku odbyła się dla upamiętnienia 75. rocznicy słynnej debaty Harlowa Shapley'a i Herberta D. Curtisa. W 1920 roku Shapley uważał mgławice za lokalne obłoki gazu, natomiast Curtis twierdził, że są one skupiskami gwiazd znajdującymi się poza skupiskiem, w którym sami jesteśmy. Trzy ćwierci wieku później oponent Paczyńskiego, Donald Q. Lamb, utrzymywał, że GRB są zjawiskami lokalnymi. Dziś wiemy, że w obu debatach rację mieli zwolennicy wielkich odległości (choć, podobnie jak nie wszystkie mgławice okazały się galaktykami, tak istnieje klasa GRB, które nadal mogą zachodzić w bezpośrednim otoczeniu naszej Galaktyki).

Samo uznanie nie wystarczy jednak do otrzymania Nagrody Nobla. Dość regularnie przyznawana jest ona ludziom, którzy wywarli decydujący wpływ na rozwój jakiejś dziedziny badań w roku, w którym dziedzina ta odniosła spektakularny sukces. Dziedzina, w której wkład Paczyńskiego był przełomowy, jest mikrosoczewkowanie grawitacyjne.

Przypomnijmy, że promienie świetlne są zakrzywane przez grawitację. Według ogólnej teorii względności pole grawitacyjne deformuje czasoprzestrzeń w taki sposób, że fotonom „opłaca się” poruszać po liniach, które w euklidesowym układzie odniesienia są zakrzywione. Wyobraźmy sobie, że w dużej odległości znajduje się bardzo duża, skupiona masa, np. gromada galaktyk. Jeżeli dokładnie za nią, ale dużo dalej, znajduje się jakaś galaktyka, to zobaczymy ją w postaci pierścienia otaczającego gromadę. Takie soczewki grawitacyjne przeważnie nie są idealnie regularne, więc zamiast jednego pierścienia Einsteina zazwyczaj obserwujemy łuki, takie jak na zdjęciu na pierwszej stronie okładki. Efekt ten nazywany jest soczewkowaniem grawitacyjnym. Natomiast z mikrosoczewkowaniem mamy do czynienia wtedy, gdy soczewką jest mały obiekt, niekoniecznie świecący, a deformowany jest obraz jakiejś gwiazdy. W takim przypadku nie dysponujemy instrumentami o zdolności rozdzielczej pozwalającej zaobserwować deformację obrazu. Możemy zarejestrować tylko jego wzmocnienie, w miarę jak soczewka i oglądana gwiazda przesuwały się względem siebie.

Jest tylko jeden problem, który dzięki pomysłom Paczyńskiego i ludzi, których udało mu się przekonać do współpracy, został przezwyciężony. Żeby zaobserwować jakikolwiek przypadek mikrosoczewkowania, trzeba monitorować miliony gwiazd. W momencie publikacji pracy [1], cytowanej przez wszystkich zajmujących się mikrosoczewkowaniem, perspektywa rozwoju technik obserwacyjnych w stopniu wystarczającym do skutecznego poprowadzenia takiego eksperymentu wydawała się bardzo odległa. A jednak prawie natychmiast zawiązało się kilka grup, które postanowiły zmierzyć się z tym wyzwaniem. Główną motywacją naukową był zamiar oszacowania masy Galaktyki zawartej w niedoszłych gwiazdach – brązowych karłach za małych na zainicjowanie syntezy jądrowej. Jednym z wiodących zespołów jest od początku OGLE,

skupiający przede wszystkim naukowców z Uniwersytetu Warszawskiego, i w którym sam Paczyński bierze udział.

Zanim kartka się skończy, przejdźmy do „spektakularnego sukcesu”. Jest nim pierwszy przekonujący przypadek wykrycia planety w soczewkującym układzie. Przebieg tego mikrosoczewkowania został zarejestrowany przez konkurującą zespół OGLE i MOA, które w tym przypadku połączyły swoje siły [2]. Możliwość odkrywania w ten sposób planet przewidział Paczyński wraz ze swoim ówczesnym studentem Shadonem Mao [3]. Jest to metoda o tyle interesująca, że w przyszłości może pozwolić na odkrywanie planet takich jak Ziemia. W tym przypadku trzeba mieć jednak dużo szczęścia albo monitorować bardzo dokładnie jeszcze większą liczbę gwiazd.

Dopasowana do pomiarów krzywa blasku zarejestrowanego przypadku jest pokazana na pierwszej stronie okładki. Różni się ona od zwykłej krzywej mikrosoczewkowania obecnością dwóch ostrych maksimów. Żeby zrozumieć, skąd one się biorą i dlaczego są takie wyraźne, należy wyobrazić sobie to, czego nie można zobaczyć. W układzie spoczywającej soczewki mikrosoczewkowana gwiazda porusza się ruchem jednostajnym po prostej przechodzącej w pewnej odległości od soczewkującej gwiazdy. Przypadek jest wyraźny, jeżeli minimalna odległość kątowna jest mniejsza od promienia pierścienia Einsteina soczewkującej gwiazdy. W każdej chwili do obserwatora docierają dwa obrazy gwiazdy. Im dokładniejsza jest koniunkcja, tym bardziej obrazy te zmieniają się z tarcz na coraz większe rogaliki. Środki tych obrazów leżą na prostej łączącej środki gwiazd. Jeden wędruje wewnątrz pierścienia Einsteina i znajduje się po przeciwnej stronie niż soczewkowana gwiazda. Drugi wędruje po tej samej prostej co gwiazda, cały czas znajduje się w większej niż gwiazda odległości od środka pierścienia, a w czasie gdy gwiazda przecina pierścień – przeslizguje się na zewnątrz niego. Jeżeli którykolwiek z tych obrazów trafi w miejsce, w którym znajduje się planeta, to małe „pierzścione” Einsteina planety modyfikuje ten obraz w analogiczny sposób. Dodatkowe maksima krzywej blasku odpowiadają przejściu środka obrazu przez okrąg pierścienia. (Tym, którzy chcą potwierdzić siłę własnej wyobraźni, polecam animacje [4].)

Na opisanie pozostałego wkładu Paczyńskiego we współczesną astronomię brakuje już miejsca. Od lat jest skutecznym promotorem podejścia alternatywnego do używania wielkich teleskopów: fotografowania nieba mniejszymi lub wręcz bardzo małymi teleskopikami, za to całego i jak najczęściej.

Rok 2005 został ogłoszony rokiem fizyki dla upamiętnienia stulecia słynnych trzech publikacji, tzw. trojaczek Einsteina. Mikrosoczewkowanie grawitacyjne jest jednym z najbardziej spektakularnych potwierdzeń teorii względności. Jak nie w tym, to w przyszłym roku Paczyński Nobla dostać powinien.

Piotr ZALEWSKI

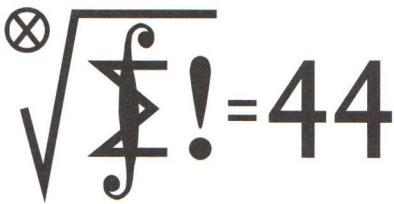
[1] B. Paczyński, Ap.J. **301**(1986)503

[2] OGLE i MOA, I.A. Bond i inni, Ap.J.Lett. **606**(2004)155

[3] S. Mao i B. Paczyński, Ap.J. **374**(1991)37

[4] B. Scott Gaudi, <http://cfa-www.harvard.edu/~sgaudi/movies.html>

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 XII 2004

UWAGA!

**ZMIANA ADRESU
DO KORESPONDENCJI!**

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
475 ($WT = 1,28$) i **476** ($WT = 2,88$)
z numeru 2/2004

Jerzy Cisło	– Wrocław	45,14
Józef Siwy	– Łaziska Górne	43,54
Witold Bednarek	– Łódź	40,04
Zbigniew		
Sewartowski	– Wieliczka	39,73
Marian		
Łupieżowicz	– Zebrzydowice	39,64
Michał Kieza	– Warszawa	38,49
Michał		
Jóźwikowski	– Błonie	38,07
Janusz Olszewski	– Suwałki	37,90
Andrzej Daniluk	– Kraków	34,80

Mamy kolejnego Weterana. Pan Jerzy Cisło zalicza „44” po raz trzeci i zostaje dwudziestym siódmym Weteranem Klubu 44 M.

483. Rozważana zmienna losowa

X = liczba wykonanych rzutów

przyjmuje wartość $n+2$ (dla $n \geq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy w ostatnim rzucie była reszka, w przedostatnim orzeł, a wcześniej zaszło zdarzenie

A_n : wykonano n rzutów i orły występowały tylko w blokach długości parzystej.

Zatem $P(X = n+2) = \frac{1}{4}p_n$, gdzie $p_n = P(A_n)$.

Zdarzenie A_n jest sumą następujących dwóch rozłącznych zdarzeń:

zaszło zdarzenie A_{n-1} , potem była reszka;

zaszło zdarzenie A_{n-2} , potem były dwa orły.

Stąd wynika zależność rekurencyjna

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}$$

z oczywistymi warunkami początkowymi

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \frac{1}{2}.$$

Stosując zwykły algorytm rozwiązywania równań rekurencyjnych (lub zauważając, że $(2^n p_n)$ jest ciągiem Fibonacciego), znajdujemy wzór jawny

$$p_n = \frac{2(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{\sqrt{5}}; \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej X jest równa

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot \frac{1}{4}p_n = \frac{1}{4} \sum_{m=2}^{\infty} m p_{m-2} = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{2\sqrt{5}},$$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgrupowaniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 487, 488

Redaguje Marcin E. KUCZMA

487. Wyznaczyć wszystkie funkcje f , określone na zbiorze wszystkich liczb nieujemnych, o wartościach w tym samym zbiorze, mające ciągłą pochodną f' i spełniające nierówność $f'(x) \geq (f(x))^2$ dla $x \geq 0$.

488. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele układów 23 kolejnych liczb naturalnych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 488 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2004

Przypominamy treść zadań:

483. Wykonujemy ciąg rzutów symetryczną monetą. Kończymy rzucanie, gdy po serii złożonej z nieparzystej liczby orłów pojawi się reszka. Obliczyć wartość oczekiwaną wykonanej liczby rzutów.

484. Dane są liczby naturalne m, n , przy czym $m \geq n$, oraz liczby rzeczywiste x_1, x_2, \dots, x_m spełniające warunki

$$1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_m \geq 0 \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq n.$$

Udowodnić nierówność $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

gdzie

$$f(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m x^{m-1} = \frac{d}{dx} \sum_{m=2}^{\infty} x^m = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{1-x} \right) = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$$

dla $x \in (-1; 1)$. Podstawiając $x = \alpha$, $x = \beta$ otrzymujemy z poprzedniej równości wynik: $E(X) = 6$.

484. Oznaczmy

$$s_k = \sum_{i=1}^k x_i, \quad t_k = \sum_{i=1}^k x_i^2.$$

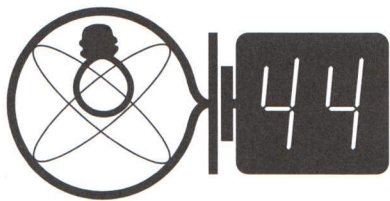
Mamy dowieść, że $s_n \geq t_m$. Przekształcamy różnicę $t_m - t_{n-1}$:

$$t_m - t_{n-1} = \sum_{i=n}^m x_i^2 \leq \sum_{i=n}^m x_n x_i = x_n (s_m - s_{n-1}) \leq x_n (n - s_{n-1});$$

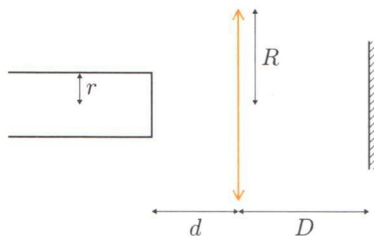
skorzystaliśmy z założenia, że $s_m \leq n$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} s_n - t_m &\geq s_n - t_{n-1} - x_n (n - s_{n-1}) = \\ &= (s_{n-1} + x_n) - t_{n-1} - x_n (n - s_{n-1}) = \\ &= (x_n + 1)s_{n-1} - (n-1)x_n - t_{n-1} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} ((x_n + 1)x_i - x_n - x_i^2) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n)(1 - x_i) \geq 0. \end{aligned}$$

Zatem dowiedziona nierówność $s_n \geq t_m$ istotnie zachodzi.



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2004



Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
374 (WT = 1,57) i 375 (WT = 1,82)
z numeru 3/2004

Tomasz Rudny	- Warszawa	31,47
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	28,36
Jacek Piotrowski	- Rzeszów	22,20
Tomasz Wietecha	- Tarnów	19,44
Jerzy Witkowski	- Radlin	13,12
Piotr Kumor	- Olsztyn	11,01

Zadania z fizyki nr 384, 385

Redaguje Jerzy B. BROJAN

384. Na podstawie następujących danych:

- promień orbity Księżyca wokół Ziemi $R_k = 380\,000$ km,
 - promień Ziemi $r = 6\,400$ km,
 - przyspieszenie ziemskie g i długość roku (powszechnie znane...),
- oraz wiedząc, że pływy wywołane przez Księżyc są około dwóch razy wyższe od wywołanych przez Słońce, ocenić przybliżoną wartość stosunku masy Księżyca do masy Ziemi.

385. Powierzchnia bardzo długiego walca o promieniu $r = 1$ cm wysyła światło. W odległości $d = 10$ cm od końca walca znajduje się przesłona z kołowym otworem o promieniu $R = 3$ cm, przy czym oś walca przechodzi przez środek otworu prostopadle do przesłony (rys.). Jaka powinna być ogniskowa f soczewki wypełniającej otwór, aby jasny krąg na ekranie odległym o $D = 15$ cm od przesłony był jak najmniejszy?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2004

Przypominamy treść zadań:

380. Dwie kulki upuszczono w odstępie czasu t z tej samej wysokości h . Kulki poruszają się wzdłuż prostej pionowej i zderzają się doskonale sprężyście, a dolna odbija się doskonale sprężyście od podłoża. Jeśli masa dolnej kulki wynosi 1, górnej – 0,7, a ich promienie są znacznie mniejsze od h , to jak wybrać t , aby górna kulka wzniosła się jak najwyżej

- po pierwszym zderzeniu z dolną kulką?
- po drugim zderzeniu z dolną kulką?
- po trzecim zderzeniu z dolną kulką?

Jaką maksymalną wysokość może osiągnąć górna kulka po dowolnej liczbie zderzeń? Odpowiedzi mogą opierać się na eksperymentach komputerowych (dotyczy to zwłaszcza ostatnich dwóch pytań).

381. Okres połowicznego rozpadu izotopu potasu ^{40}K wynosi $1,26 \cdot 10^9$ lat, przy czym z prawdopodobieństwem 11% następuje wychwyty elektronu i przemiana w ^{40}Ar . Zakładając, że w okresie powstawania Ziemi temperatura była tak wysoka, że helowce „wyparowały” (ucieły w przestrzeń kosmiczną) i wiedząc, że obecnie stosunek liczby atomów ^{40}Ar na Ziemi do liczby atomów ^{40}K wynosi 0,9, ocenić wiek Ziemi.

380. a) Zderzenie nastąpi po odbiciu dolnej kulki od podłoża. Oznaczmy wysokość miejsca zderzenia przez h' , a masy kulek przez m (górna) i M (dolna). Tuż przed zderzeniem górna kulka porusza się z prędkością

$$u = \sqrt{2g(h - h')}$$

w dół, a dolna – z tą samą (co do wartości bezwzględnej) prędkością u do góry. Stosując do zderzenia zasady zachowania pędu i energii wyznaczamy prędkość górnej kulki po zderzeniu – jest ona skierowana w górę i równa

$$v = \frac{3M - m}{M + m},$$

a stąd maksymalne wzniesienie tej kulki wynosi

$$h_m = h' + \left(\frac{3M - m}{M + m}\right)^2 (h - h').$$

Dla $m < M$ maksymalna wartość h_m jest osiągana wtedy, gdy zderzenie kulek nastąpi jak najniżej ($h' = 0$). Oznacza to, że t powinno być jak najmniejsze. Przy podanych wartościach liczbowych M i m wyliczamy

$$h_{\max} = 1,830 h.$$

b) Po sprawdzeniu wszystkich możliwości okazuje się, że najkorzystniej jest wybrać t nieznacznie mniejsze od

$$2\sqrt{2h/g},$$

tak że pierwsze zderzenie nastąpi tuż po puszczeniu górnej kulki, a drugie – tuż po odbiciu dolnej kulki od podłoża. Wtedy drugie zderzenie będzie identyczne z opisany w punkcie a), a maksymalna wysokość wzniesienia górnej kulki będzie równa wartości poprzednio wyliczonej.

c) Analiza numeryczna wskazuje, że najkorzystniejszy jest wybór

$$t = 0,047435\sqrt{h/g}.$$

Wtedy po pierwszym zderzeniu kulek następuje dwukrotne odbicie dolnej od podłoża, po czym drugie zderzenie następuje tuż przed spadkiem dolnej kulki, na bardzo małej wysokości. W ciągu bardzo krótkiego czasu nastąpi odbicie dolnej kulki i trzecie zderzenie, po którym górna kulka wzniesie się na wysokość $2,353 h$.

Dla dowolnej liczby zderzeń eksperymenty komputerowe wykazują, że energia górnej kulki może osiągnąć wartość dowolnie bliską górnej granicy, odpowiadającej stanowi spoczynku dolnej kulki. Maksymalna wysokość górnej wyniesie wtedy

$$\frac{M + m}{m} h = 2,429 h.$$

(Jeśli Czytelnicy pragną się o tym przekonać, proponujemy wybrać $t = 0,2\sqrt{h/g}$ i zobaczyć, co się stanie po około 40 i po około 230 odbiciach i zderzeniach).

381. Jeśli początkową liczbę atomów ^{40}K oznaczymy przez N_0 , czas połowicznego rozpadu przez $T_{1/2}$, a wiek Ziemi przez T , to obecnie pozostało $N_0 \cdot 2^{-T/T_{1/2}}$ atomów ^{40}K . Liczba powstałych jąder ^{40}Ar wynosi

$$0,11N_0(1 - 2^{-T/T_{1/2}}),$$

a rozwiązując równanie

$$0,11 \cdot (1 - 2^{-T/T_{1/2}}) = 0,9 \cdot 2^{-T/T_{1/2}},$$

znajdujemy

$$T = 3,2 T_{1/2} \approx 4 \text{ mld lat.}$$



Rozwiązanie zadania F 629.

Niech $\alpha = \frac{m}{M}$. Z zasady zachowania energii i pędu po każdym zderzeniu prędkości kulek zmieniają się według wzorów

$$U' = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} U + \frac{2\alpha}{1 + \alpha} u$$

oraz

$$u' = \frac{2}{1 + \alpha} U + \frac{\alpha - 1}{1 + \alpha} u,$$

a po odbiciu się od ścianki $u'' = -u'$. Niech $V > 0$ oznacza początkową prędkość kulki M . Początkowa prędkość kulki m to 0. Aby nastąpiły dokładnie dwa dobiecia, konieczne jest, aby:

- po pierwszym odbiciu od ściany kulka m doścignęła M , a więc

$$\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} V > -\frac{2}{1 + \alpha} V,$$

czyli $\alpha < 3$,

- po drugim zderzeniu albo kulka m porusza się dalej w lewo ($\alpha > 1$), albo porusza się w prawo, ale po drugim odbiciu od ściany nie dościga kulki M :

$$\frac{\alpha^2 - 6\alpha + 1}{(1 + \alpha)^2} V < \frac{2\alpha - 2}{(1 + \alpha)^2} V,$$

czyli $0,29 < \alpha < 7,71$.

Po zsumowaniu warunków dostajemy $0,29 < \alpha < 3$.

Patrz w niebo

Na początku XX wieku astronomowie wiedzieli już, że linie widmowe ogromnej większości mgławic są „nie na swoich miejscach”, lecz są z reguły bardziej czerwone, niż odpowiadające tym samym pierwiastkom linie oglądane w laboratorium. W latach 1920. Edwin Hubble stwierdził, że – po pierwsze – te mgławice to galaktyki, i – po drugie – im odleglejsza jest galaktyka, tym bardziej ku czerwieni ma przesunięte widmo. Jedyną przyczyną tego przesunięcia mogła być prędkość galaktyki, pozostało więc uznać, że wszystkie galaktyki rozbiegają się z prędkością wprost proporcjonalną do odległości.

W latach 1970. wyraźnie okazało się, że ten współczynnik proporcjonalności, zwany stałą Hubble'a, jest nieco różny w różnych obszarach nieba. Nie było w tym nic niezwykłego, bo można było spodziewać się, że wielkie gromady galaktyk mogą lokalnie modyfikować średnią ekspansję Wszechświata. Tak np. najbliższa wielka gromada, czyli gromada w Pannie (Virgo, leżąca w odległości 17 Mpc), hamuje rozbieganie się dalszych galaktyk o około 20%. Wreszcie stwierdzono, że w Centaurze znajduje się jeszcze masywniejsza gromada oddziałująca na ruch również naszej Galaktyki. Nazwano ją Wielkim Atraktorem. Oczywiście określenie jego masy i odległości nie było łatwe. Ocena masy nie zgadzała się z liczbą widocznych w tym obszarze galaktyk, a pomiary odległości zazwyczaj są obciążone sporym błędem. Nic w tym dziwnego, gdyż badany obszar nieba leży blisko Drogi Mlecznej, a zatem jest silnie przesłaniany przez skupioną tam materię międzygwiazdową. Udało się jednak zastosować metodę fluktuacji jasności powierzchniowej galaktyk, o której wspomnieliśmy w Delcie sierpniowej. Dzięki niej można było precyzyjnie wyznaczyć odległość Wielkiego Atraktora. Jego centrum znajduje się w odległości 43 Mpc, a jego współrzędne to rektascensja $11^h 36^m$ i deklinacja -46° . O ile te wyznaczenia są poprawne, to są ważnym argumentem za coraz silniej ugruntowanym poglądem, że tajemnicza ciemna materia Wszechświata zawsze towarzyszy materii widocznej, a jest jej w przybliżeniu dziesięć razy więcej niż tej ostatniej.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania F 630.

Prędkość ciała na orbicie kołowej wynosi (z II zasady dynamiki)

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Przed zderzeniem całkowity moment pędu wynosił

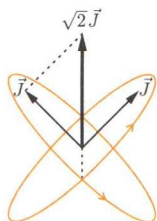
$$J = m_1 v R - m_2 v R = (m_1 - m_2) \sqrt{GM R},$$

a po zderzeniu (rys.):

$$J = \sqrt{2} \frac{m_1 + m_2}{2} \sqrt{GM R}$$

i stąd po porównaniu

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}.$$



Wydzielona w zderzeniu energia to 0, gdyż całość masy ciał biorących udział w zderzeniu pozostała na orbicie kołowej o tym samym promieniu, ma więc tę samą energię kinetyczną i potencjalną.



Październik

Nieźbyt wysoko nad południowym horyzontem przesuwają się wieczorami Wodnik, rozległy choć mało wyraźny gwiazdozbiór zodiakalny. Jego najjaśniejsza gwiazda, beta – o jasności około 3 mag, wschodząc w poświacie wschodzącego Słońca (nazywa się to wschód heliakalny) sygnalizowała starożytnym rolnikom nadejście pory deszczowej. W analogicznej sytuacji Syriusz sygnalizował Egipcjanom zbliżanie się wylewu Nilu. W Wodniku znajdują się radianty dwóch rojów meteorów, czyli punkty, z których pozornie wybiegają meteory. W rzeczywistości ciała meteorowe należące do jednego roju poruszają się praktycznie po torach równoległych, a radiant dla nich jest tym, czym dla szyn kolejowych punkt ich „złączenia” się na horyzoncie. Z okolicy delty Wodnika wybiega rój lipcowy (delta-Akwarydy), a z okolicy ety rój majowy (eta-Akwarydy).

Wenus jest w Lwie i widać ją przed wschodem Słońca. Mars i Jowisz są w Pannie, gdzie jest też Słońce, zatem planet tych nie widać. Saturn jest w Bliźniętach i wieczorem wschodzi. 14 X wypada nów Księżycy i przy tym częściowe zaćmienie Słońca, ale widoczne we wschodniej Azji, na Pacyfiku i na Alasce. 28 X wypada pełnia Księżycy i jego całkowite zaćmienie. Maksymalna faza zaćmienia wystąpi około godz. 4 czasu środkowoeuropejskiego. Zakryć jasnych gwiazd w październiku nie będzie.

O śmieciach

„Zapadła grobowa cisza”. Tak Barbara McClintock wspominała reakcję publiczności, gdy w 1951 roku po raz pierwszy publicznie przedstawiła rewolucyjne odkrycie „skaczących genów”. Wówczas mało kto śmiało wierzyć, że kawałki chromosomów mogą sobie ot tak, przemieszczać się z miejsca na miejsce.

Połowa naszego DNA składa się z różnego rodzaju „elementów ruchomych”, a u niektórych roślin stanowią one 90% ich DNA. Są to sekwencje, które potrafią poruszać się w obrębie genomu: wycinać lub kopiować się i wstawiać w inny obszar DNA. Przez wiele lat uważano, że to tylko genomowe śmieci, których jedyną funkcją jest powielanie się. Dziś wiadomo, że pełnią ważną rolę w ewolucji, wpływając na sekwencje kodujące białek i regulujące działanie genów.

Transpozony L1 (od „transpozycji” – zmiany położenia w genomie; termin wymyślony przez McClintock) są najbardziej aktywnymi sekwencjami ruchomymi genomu człowieka. Stanowią około 6% naszego genomu, a spośród pół miliona kopii około 50 wciąż jest aktywnych (tzn. wykrywa się ich „ruchy” w DNA współczesnych ludzi). Są tzw. retrotranspozonami, ponieważ mechanizm ich powielania jest nieco podobny do retrowirusowego i obejmuje etapy: przepisania (transkrypcji) transpozonowego DNA na RNA, przepisania RNA na DNA (czyli odwrotną transkrypcję) i wstawienie tego DNA w nowe miejsce (powielają się na zasadzie „kopiuj i wklej”). L1 są samowystarczalne, kodują bowiem białka, które umożliwiają transpozycję.

Transpozony Ac/Ds, które odkryła McClintock badając kukurydzę, są transpozonami DNA, i przemieszczają się według mechanizmu „wytnij i wklej” (specjalne białka, kodowane przez transpozon, wycinają go z pierwotnej lokalizacji i wklejają w inne miejsce). Podobne do nich sekwencje występują także w genomie współczesnych ludzi; nie są aktywne i jest ich dużo mniej niż retrotranspozonów.

McClintock udało się dostrzec taką transpozycję dzięki obserwacji preparatów mikroskopowych chromosomów kukurydzy. Wybarwiała je w sposób umożliwiający dokładne rozróżnienie poszczególnych odcinków chromosomów. Wycięcie transpozonu powodowało, po pierwsze, zaburzenie kształtu chromosomu, a po drugie, zmianę wzoru jego barwienia. Brakujący fragment pojawiał się za to gdzieś indziej na chromosomie, znów powodując jego odkształcenie i zmianę barwienia.

Dziś transpozony wykrywa się techniką PCR i dzięki znajomości sekwencji genomów. Zajście transpozycji w przypadku „wytnij i wklej” potwierdza się porównując sekwencje rodziców i dzieci (jeśli transpozycja zaszła

w komórkach płciowych rodziców) lub różnych tkanek (jeśli zaszła w komórkach somatycznych organizmu); transpozony DNA zwykle przesuwają się o niewielką odległość od poprzedniej pozycji. Transpozycja „kopiuj i wklej” jest trudniejsza do wykrycia, o ile nie dysponujemy całymi genomami do porównania. Chyba, że zaszła w obrębie jakiegoś genu.

Transpozony Ac/Ds obserwowane przez McClintock poruszały się po chromosomie 9, który zawiera wiele genów kodujących białka biorące udział w wytwarzaniu barwników liści i kolb kukurydzy. Wstawienie jakiegokolwiek sekwencji w obrębie genu prawie zawsze powoduje jego uszkodzenie, co w tym przypadku powodowało odmienne ubarwienie roślin. McClintock do swoich badań wybierała te o charakterystycznych plamach na liściach czy różnokolorowych ziarnach w kolbie.

Dziś znanych jest 35 przypadków ludzkich chorób, wywołanych transpozycją różnego rodzaju sekwencji ruchomych. Transpozycje powodują m.in. niektóre przypadki hemofilii, dystrofii mięśniowej czy raka jelita grubego. Ale nie wszystkie skutki aktywności transpozonów są szkodliwe.

Znane są przypadki, gdy wstawienie transpozonu w obrębie genu spowodowało powstanie nowego, funkcjonalnego białka. Czasem fragmenty transpozonów stają się częściami normalnych genów albo sekwencji regulujących ich działanie. Najbardziej niezwykłym przykładem pomocy ze strony transpozonów są geny przeciwciał. Za ogromne zróżnicowanie tych białek produkowanych przez organizm człowieka (potrafimy wytworzyć przeciwciała przeciwko praktycznie dowolnemu antygenowi) odpowiadają enzymy, które kodowane są przez geny funkcjonalnie i strukturalnie przypominające transpozony DNA.

Obecność tak wielu podobnych sekwencji w genomie bardzo sprzyja rekombinacji – wymianie podobnych fragmentów chromosomów podczas podziału komórki. Rekombinacja jest ważnym źródłem zróżnicowania organizmów, które jest niezbędne do działania doboru naturalnego.

Na zakończenie wypada jeszcze wspomnieć o *Alu*, transpozonie, który odniósł największy ewolucyjny sukces spośród wszystkich sekwencji ruchomych. Jest to tym bardziej niezwykle, że ten 300-nukleotydowy fragment DNA niczego nie koduje i pojawił się w ewolucji bardzo późno – mają go tylko ssaki. Mimo tego stanowi w sile 1100000 kopii blisko 10% naszego genomu! *Alu* jest „pasożytem pasożytów” – powiela się wykorzystując retrotranspozony L1. Ogromna większość znanych przypadków pozytywnego i negatywnego wpływu transpozonów na genom dotyczy właśnie *Alu*. To głównie dzięki nim zaczęto myśleć o transpozonach nie jak o „samolubnych śmieciach”, ale jak o „magazynie części zamiennych”, które organizmy mogą wykorzystywać na wiele sposobów w procesie ewolucji.

Anna LORENC, Jarek BRYK

Galaktyka AM 0644-741



<http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap040426.html>

© NASA/ESA

Ten ogromny pierścień, o średnicy niemal 50 kpc, zbudowany jest z młodych, masywnych i bardzo jasnych gwiazd. Powstanie pierścienia tłumaczy się kolizją galaktyk. Mianowicie przez dysk galaktyki AM 0644-741 przeleciała inna mała galaktyka (znajdująca się obecnie poza ramką zdjęcia), która spowodowała zniszczenie struktury wielkiej galaktyki oraz powstanie w niej - rozchodzącej się jak kręgi na wodzie po upadku kamienia - fali ogromnego zaburzenia ośrodka międzygwiazdowego. Zaburzenie to w końcu stało się „falą gwiazdotwórczą”. Galaktyka znajduje się w odległości 100 Mpc w gwiazdozbiorze Ryby Latającej. Zdjęcie wykonano za pomocą Teleskopu Hubble’a.

Czerwony Prostokąt



<http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap040513.html>

© NASA/ESA

Mgławica ta od dawna znana była jako silne źródło podczerwieni, jednak dopiero niedawno Teleskop Hubble’a ujawnił jej osobliwy wygląd. Centrum mgławicy stanowi ciasny układ podwójny gwiazd, gdzie przynajmniej z jednej z nich wypływa dość chłodna materia zawierająca duże ilości ziaren lodowych i cząsteczek węglowodorów. Kształt litery X tłumaczony jest tym, że gwiazdy otacza gęsty pierścień pyłowy, ograniczający wypływ do stożka, którego oś jest akurat prostopadła do kierunku widzenia. „Szczelne” międzyramionami litery X dowodzą, że wypływ materii jest wysoce niejednostajny. Mgławica znajduje się w gwiazdozbiorze Jednorożca w odległości 700 pc. Zdjęcie przedstawia obszar o rozmiarach rzędu jednej dziesiątej parseka.