



SPIS TREŚCI NUMERU 6 (397)

Jak się rozmnażają punkty okresowe?

Elżbieta Krepska

Obserwatorium HESS

Rafał Moderski

Rachunek to za mało

Marek Kordos

Aktualności

O pewnych równościach sum algebraicznych

Aleksander Górski



Zadania

§ Jak daleko jest od koła do kwadratu?

Marek Kordos

Ciągi Somosa

Lev Kurlyandchik

Klub 44

Patrz w niebo

Czerwiec

Ω Kontra d'Alemberta na twierdzenie Dooba

Rafał Sztencel

	„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.
	Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichoński, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk.
str. 1	Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i rysunki: Emilia Bojańczyk. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.
str. 4	Adres do korespondencji: Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.
str. 7	Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
str. 8	Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.
str. 9	WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS 01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46) internet: www.amos.waw.pl , e-mail: biuro@amos.waw.pl
str.10	Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące. Cena jednego numeru w 2007 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.
str.12	W prenumeracie zagranicznej (też przez okres co najmniej trzech miesięcy) cena numeru w 2007 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.
str.14	Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.
str.16	Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584
str.17	WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl Cena prenumeraty w 2007 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5 każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

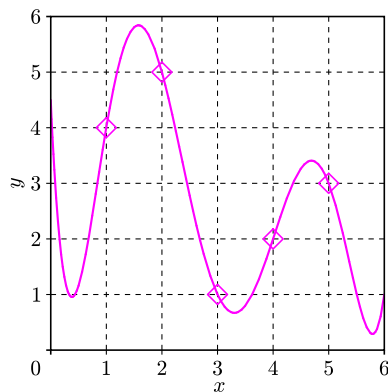
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Brachistochrona



Rys. 1. Wielomian $W: [0, 6] \rightarrow [0, 6]$, dla którego punkt 1 jest punktem okresowym o orbicie $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ długości 5. Punkty orbity oznaczono rombami.

Będziemy zajmować się funkcjami $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$, których wykres można narysować bez odrywania ołówka od kartki, tzn. funkcjami ciągłymi. Są to, na przykład, wielomiany, doskonale znane każdemu uczniowi liceum.

Zauważmy, iż jeśli weźmiemy pewien punkt p z dziedziny f , to dobrze określony jest inny punkt $f(f(p))$ – dwukrotna iteracja funkcji f w punkcie p , którą oznaczamy przez $f^2(p)$. Jeśli „przypadkiem” trafimy z powrotem do p , tj. $f(f(p)) = p$, to znaleźliśmy *punkt okresowy* p o okresie 2. Analogicznie mówimy o f^n , n -krotnym złożeniu f , a także o punktach okresowych o okresie n . Jeśli p jest punktem o okresie n , to zbiór (różnych) punktów $\{p, f(p), f^2(p), \dots, f^{n-1}(p)\}$ nazywamy *orbitą* dla p .

Zacznijmy od prostego zadania: wskazać przykład funkcji ciągłej, która ma punkt okresowy o okresie 5. Takich funkcji jest oczywiście ogromnie dużo. Przypuśćmy, że poszukujemy orbity $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Narysujmy więc odpowiednie punkty $(1, 4)$, $(4, 2)$, $(2, 5)$, $(5, 3)$ i $(3, 1)$ i połączmy je bez odrywania ołówka. Voilà. Wynik może wyglądać tak, jak wykres W na rysunku 1.

Zauważmy, że funkcja W ma punkt o okresie 1, tzw. punkt stały. Znajduje się on na przecięciu wykresu wielomianu W i funkcji $y(x) = x$, w okolicach $p \approx 2,55$. Jeśli dobrze się przyjrzeć, to zauważymy również punkt o okresie 2 ($p \approx 2,22$). A czy istnieje punkt okresowy o okresie 3? A 99 albo 2007? Zadanie wygląda na nielatywne.

Zadajmy jeszcze ambitniejsze pytanie: czy można znaleźć taką funkcję, która ma punkt okresowy o okresie 5, ale *nie* ma punktu o okresie 2? Zauważmy, że na pewno punkt o okresie 1 jest nieunikniony. Jak by nie rysować, gdzieś przetniemy $y(x) = x$, gdyż wykres nie może mieć żadnych „dziur”. Można wykazać, że również punkt o okresie 2 musi się pojawić. A czy można znaleźć funkcję, która ma punkt okresowy o okresie 7, ale nie ma punktu o okresie 5? Tym razem odpowiedź jest pozytywna, taka funkcja istnieje, ale jej zgadnięcie nie jest bynajmniej takie proste! (Przykład można znaleźć w książce Roberta Devaney’a *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*.)

Będziemy rozważać następujące ogólniejsze zagadnienie. Niech $k, l \in \mathbb{N}$. Czy jeśli wiemy, że funkcja ciągła ma punkt okresowy o okresie k , to czy wiemy coś o punktach okresowych o okresie l ? Tak, i to zdumiewa!

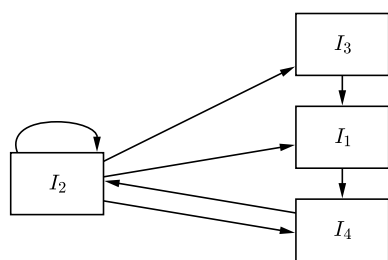
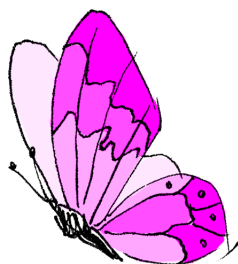
W roku 1975 w USA Tien-Yien Li i James Yorke opublikowali pracę pod kultowym już tytułem *Okres trzy wywołuje chaos*. Uproszczona wersja zawartego w niej twierdzenia brzmi następująco.

Twierdzenie 1. Niech $f: J \rightarrow J$, gdzie J jest przedziałem domkniętym. Przypuśćmy, że f ma punkt okresowy o okresie 3 i orbitę $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ dla $a < b < c$ lub $a > b > c$. Wówczas dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje w J punkt okresowy o okresie k .

Zatem z istnienia jednego punktu 3-okresowego dostajemy od razu nieskończenie wiele innych, całe multum punktów, o dowolnych okresach. Na przykład, jeśli znajdziemy taki punkt dla naszego W , to będziemy wiedzieć, że ma punkty o okresach i 100, i 2007, i dowolnych innych. Ale skąd one się, u licha, biorą – te miliony punktów? Zrozumiemy to za pomocą A-grafu.

Definicja 2. Powiemy, że przedział I nakrywa J przy funkcji f , gdy $f(I) \supseteq J$. Niech x będzie punktem okresowym o okresie $n > 1$ i orbicie $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uporządkowanej $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Oznaczmy przedziały $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ dla $k = 1, \dots, n - 1$. Graf o wierzchołkach I_1, I_2, \dots, I_{n-1} nazywamy *A-grafem*. Krawędź $I_j \rightarrow I_k$ występuje w A-grafie, gdy przedział I_j nakrywa I_k .

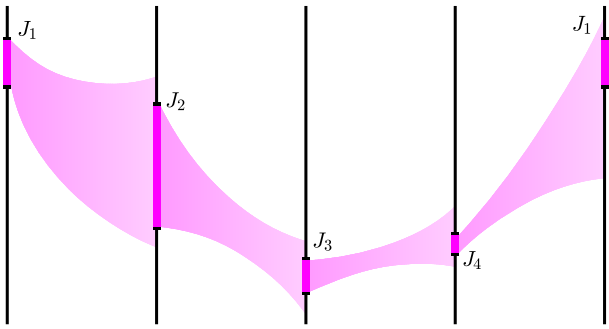
Zobaczmy, jak zbudować A-graf dla W i $p = 1$ (patrz rys. 1). Orbita p jest długości $n = 5$. Zatem A-graf ma 4 wierzchołki $I_k = [k, k + 1]$, $k = 1, \dots, 4$. Przedział I_1 nakrywa I_4 , bowiem $W(I_1) = [4, 5.8] \supseteq [4, 5] = I_4$, a zatem w grafie wystąpi krawędź skierowana $I_1 \rightarrow I_4$. Przedział I_2 nakrywa m.in. sam siebie, więc w grafie wystąpi również pętla $I_2 \rightarrow I_2$. Cały A-graf przedstawiony jest na rysunku 2.



Rys. 2. A-graf odpowiadający punktowi 1 dla funkcji W z rysunku 1.

*studentka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Odpowiemy wreszcie na pytanie zawarte w tytule artykułu: punkty okresowe o okresie k można generować za pomocą *cykli* długości k w A-grafie. Postaramy się zaagitować, dlaczego tak jest.



Rys. 3. Cykl w A-grafie to ciąg nakładających się przedziałów.

Pomyślmy o cyklu $J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow \dots \rightarrow J_k \rightarrow J_1$. Nakrywanie się kolejnych przedziałów jest jak zalewanie „ciągłymi” falami wody (patrz rys. 3). Można uwierzyć, że pewien, być może mały, przedział kropel $K \subseteq J_1$ wpadnie kolejno do J_2 , następnie do J_3 , pod koniec do J_k i stanie się z powrotem J_1 . Zatem $f^k(K)$ nakryje przedział K – zostanie rozciągnięty i nałożony na siebie. Przypomnijmy następującą własność funkcji ciągłej: musi ona przyjmować wszystkie wartości pośrednie między wartościami na końcach przedziału (jest to własność Darboux). Eureka! Gdy przedział K rozciągniemy i nałożymy na siebie za pomocą f^k , to przekształcenie

f^k musi mieć punkt stały wewnątrz K . Ten punkt stały f^k jest jednocześnie poszukiwanym punktem okresowym o okresie k dla f .

Wiemy zatem, że punkty okresowe można wyprodukować z jednego takiego punktu, znajdując cykle w jego A-grafie. Zastosujemy tę technikę, żeby dowieść twierdzenia 1.

Dowód twierdzenia Li–Yorke’a. Załóżmy, że zachodzi przypadek $a < b < c$. W przypadku $a > b > c$ rozumowalibyśmy analogicznie. Niech $K = [a, b]$ i $L = [b, c]$. Spójrzmy na wykres funkcji f . Są na nim punkty (a, b) , (b, c) oraz (c, a) . Przedział K nakrywa L , a przedział L nakrywa zarówno K , jak i sam siebie (rys. 4). Zatem A-graf powinien mieć przynajmniej następujący kształt:

$$K \supseteq L \cup K.$$

Tworzymy cykl długości k :

$$\underbrace{L, L, L, \dots, L}_{k-1}, K,$$

który generuje punkt okresowy o okresie k .

Chwytny tytuł i rozpoczynający się „boom na chaos” sprawiły, że praca Li i Yorke’a zyskała duży rozgłos. Dopiero wówczas odkryto wcześniejsze prace ukraińskiego matematyka Aleksandra Szarkowskiego (ur. 1936 r.), które zawierały znacznie mocniejsze twierdzenia. Lecz Szarkowski opublikował swoje wyniki w roku 1964 w mało znanym czasopiśmie ukraińskim, i po ukraińsku, dlatego też nie zostały one dostrzeżone w środowisku matematycznym.

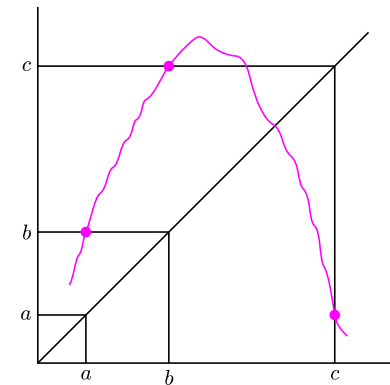
Szarkowski zdefiniował pewien specyficzny porządek, oznaczany \triangleleft , na liczbach naturalnych \mathbb{N} , w którym najmniejszą liczbą jest 3, a największą 1:

$$\begin{array}{cccccc} 3 & \triangleleft & 5 & \triangleleft & 7 & \triangleleft & 9 & \triangleleft & \dots \\ 3 \cdot 2 & \triangleleft & 5 \cdot 2 & \triangleleft & 7 \cdot 2 & \triangleleft & 9 \cdot 2 & \triangleleft & \dots \\ 3 \cdot 2^2 & \triangleleft & 5 \cdot 2^2 & \triangleleft & 7 \cdot 2^2 & \triangleleft & 9 \cdot 2^2 & \triangleleft & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \triangleleft & 2^3 & \triangleleft & 2^2 & \triangleleft & 2^1 & \triangleleft & 1 \end{array}$$

Twierdzenie Szarkowskiego opisuje występowanie punktów okresowych za pomocą tego porządku.

Twierdzenie 3. Niech $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Jeśli f ma punkt okresowy o okresie k oraz $k \triangleleft l$, to f ma punkt okresowy o okresie l .

Oryginalny dowód podany przez Szarkowskiego był zawiły i wielokrotnie go później upraszczano. Dowód można przeprowadzić za pomocą pojęcia A-grafu: szuka się szczególnej orbity nieparzystej długości, tzw. orbity Stefana, która rozmnoży punkty okresowe w sposób analogiczny, jak w dowodzie twierdzenia Li–Yorke’a. (Ten nietrudny dowód twierdzenia Szarkowskiego znajduje się w *Lecture Notes in Mathematics*, tom 1513, str. 5–23, Springer 1992.) Zauważmy również, że twierdzenie Li–Yorke’a jest trywialnym wnioskiem z twierdzenia Szarkowskiego, mówiącym, że 3 stoi na samym początku porządku.



Rys. 4. Funkcja z twierdzenia Li–Yorke’a.



Rozwiązanie zadania M 1171.

Zauważmy najpierw, że z pewnego punktu wychodzą co najmniej 4 odcinki; w przeciwnym razie wszystkich odcinków byłoby co najwyżej $\frac{3-1}{2} = 1$, a jest ich 10. Oznaczmy więc dane punkty przez A, B, C, D, E, F oraz przyjmijmy, że punkt A jest połączony z punktami B, C, D, E .

Z punktu F wychodzi co najwyżej pięć odcinków, a zatem skoro wszystkich odcinków jest 10, to pewne dwa punkty spośród B, C, D, E muszą być połączone. Punkty te wraz z punktem A dają żądany trójkąt.

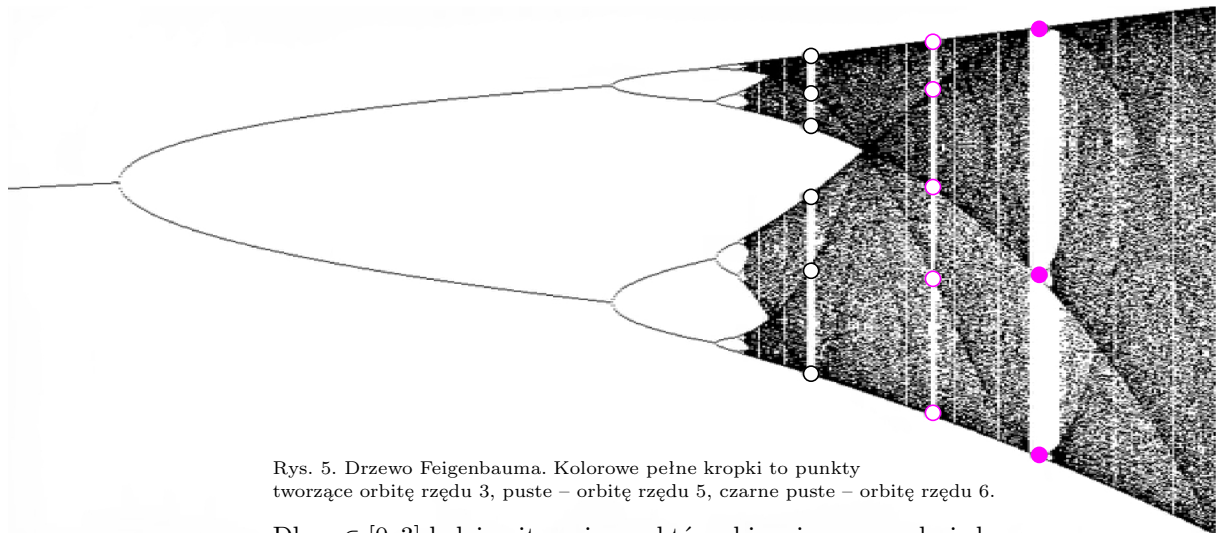
Można się zastanawiać, jak mocne jest twierdzenie Szarkowskiego, tzn. czy występują, być może, jeszcze inne zależności między liczbami punktów okresowych? Okazuje się, że twierdzenie jest najlepsze możliwe: dla każdego n można podać przykład funkcji, która ma punkt okresowy o okresie n , a więc ma też punkty o okresach m „większych” od n ($n < m$), ale nie ma żadnego punktu o okresie m „mniejszym” od n ($m < n$).



Inne ciekawe pytanie to: czy twierdzenie zachodzi w przypadku dwu- i więcej-wymiarowym? Tu odpowiedź jest negatywna. Kontrprzykładem jest obrót na płaszczyźnie o 120° wokół ustalonego punktu. Ma on jeden punkt stały, a wszystkie pozostałe punkty są okresowe o okresie 3.

Jeszcze bardziej fascynującym zdaje się być fakt, że porządek Szarkowskiego pojawia się w innych miejscach w matematyce i chciałoby się nazwać go uniwersalnym, w takim sensie, jak uniwersalne są liczby π lub e . Drzewo Feigenbauma to temat na cały wykład, jednak spróbujmy pokrótce powiedzieć, jak ono powstaje i gdzie w nim widać porządek Szarkowskiego.

Rozpatrzmy rodzinę przekształceń logistycznych $f_r(x) = rx(1-x)$ dla $x \in [0, 1]$, indeksowaną współczynnikiem „zgniecenia” paraboli $r \in [0, 4]$. Wybieramy punkt dziedziny x_0 i wielokrotnie aplikujemy f_r , otrzymując ciąg punktów $x_n = f_r^n(x_0)$, czyli trajektorię punktu x_0 . Pytamy, co robi „typowa” trajektoria w nieskończoności, w zależności od r ? Naturalnie zatrudniamy komputer do zobrazowania tej zależności: dla ustalonego r zaznaczamy na wykresie punkty typowej trajektorii. Wynik jest przedstawiony na rysunku 5.



Rys. 5. Drzewo Feigenbauma. Kolorowe pełne kropki to punkty tworzące orbitę rzędu 3, puste – orbitę rzędu 5, czarne puste – orbitę rzędu 6.

Dla $r \in [0, 3]$ kolejne iteracje punktów zbiegają zawsze do jednego punktu stałego. Dla $r = 3$ następuje podwojenie okresu (to pierwsze rozgałęzienie drzewa), teraz typowa orbita w nieskończoności będzie miała okres 2. Dalej następują kolejne podwojenia okresów, aż do pewnego momentu, gdzie na wykresie robi się bardzo czarno. Dzieją się rzeczy dziwne, chaotyczne.

Przyjrzyjmy się teraz niezakropkowanym fragmentom diagramu, tzw. okienkom, patrząc od prawej do lewej. Największe z okienek przecięte jest w trzech miejscach, więc mamy do czynienia z punktem okresowym o okresie 3. Dalej na lewo widać znacznie węższe okienko przecięte w pięciu miejscach. Jeśli wziąć obraz dużej rozdzielczości, zauważymy okienka odpowiadające okresom nieparzystym: 3, 5, 7, 9, ... Zobaczymy również przeskok i dalsze okienka przecięte w $3 \cdot 2, 5 \cdot 2, \dots$ miejscach. Odpowiadają one kolejnym partiom porządku Szarkowskiego. Ostatnią partię, potęgi dwójki, widzimy naturalnie przy zjawisku podwajania okresu $1, 2, 2^2, \dots$. W tym coś głębszego musi tkwić!

Bardzo ciekawe jest, że dostaliśmy trudne i silne wyniki, nawet uniwersalne, używając prostych pojęć i nie stosując żadnych matematycznych fajerwerków. Podstawowym powodem, dla którego twierdzenie Szarkowskiego zachodzi, jest własność Darboux. Dzięki niej punkty rozmnażają się elegancko, wskakując na cykle.

3



Rozwiązanie zadania M 1172.

Każda liczba zakończona w systemie dziesiętnym cyframi „10” jest parzysta, lecz niepodzielna przez 4. Wobec tego, gdy rozpatrywany iloczyn kończy się cyframi „10”, dokładnie jeden z czynników $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+d)$, $(d+a)$ rozpatrywanej liczby jest parzysty, pozostałe trzy są nieparzyste. Jednak wtedy liczba

$$(a+b) + (b+c) + (c+d) + (d+a) = 2(a+b+c+d)$$

byłaby liczbą nieparzystą. Uzyskaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że nie istnieją liczby a, b, c, d spełniające podane w treści zadania warunki.

Życie na Ziemi zawdzięcza swoje istnienie obecności atmosfery. Stanowi ona nie tylko mieszaninę gazów niezbędną w procesach oddychania czy fotosyntezy, ale też świetnie chroni wszelkie organizmy przed wpływem niekorzystnych czynników pochodzących z przestrzeni kosmicznej. Jednym z takich czynników jest promieniowanie kosmiczne. W ciągu sekundy każdy metr kwadratowy zewnętrznych warstw atmosfery jest bombardowany przez ponad tysiąc cząstek tego promieniowania. Promieniowanie kosmiczne w 99,8% składa się z cząstek naładowanych, głównie protonów, ale występują w nim także cząstki alfa, a nawet niewielkie ilości elektronów czy jonów żelaza. Ich energie dochodzą do 10^{20} eV – to ponad sto milionów razy więcej, niż będzie w stanie wytworzyć budowany obecnie w CERN potężny akcelerator LHC. Najwyraźniej natura jest w stanie przyspieszać cząstki znacznie efektywniej, niż może tego dokonać człowiek. Niestety, pochodzenie promieniowania kosmicznego pozostaje nierozwiązaną zagadką. Cząstki mające ładunek elektryczny, przemieszczając się w przestrzeni międzygwiazdowej i międzygalaktycznej, ulegają znacznym odchyleniom ze względu na obecność pola magnetycznego. Uniemożliwia to zlokalizowanie obszarów, z których pochodzą cząstki, a tym samym poznanie mechanizmów odpowiedzialnych za ich przyspieszanie. Wydaje się, że promieniowanie kosmiczne ma dwie składowe: jedną pochodzącą z naszej Galaktyki oraz drugą – pozagalaktyczną. Poszukiwanie źródeł promieniowania kosmicznego stanowi obecnie jeden z głównych kierunków badań astrofizyki wysokich energii.

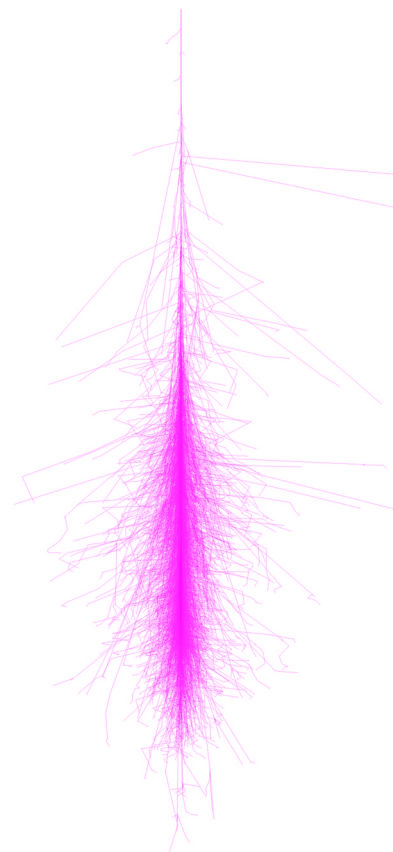
Przypuszcza się, że procesom przyspieszania cząstek powinna również towarzyszyć emisja promieniowania elektromagnetycznego o bardzo wysokiej energii. Promieniowanie elektromagnetyczne nie ulega odchyleniu w polu magnetycznym, może więc bezpośrednio wskazywać źródło promieniowania kosmicznego. Niestety, próby obserwacji tak wysokoenergetycznego promieniowania napotykają ogromne trudności. Ziemska atmosfera jest praktycznie nieprzezroczysta dla fotonów o energiach powyżej 1 eV. Ucnieni próbują obejść tę niedogodność, umieszczając detektory na pokładach satelitów. Ta metoda doskonale sprawdza się w przypadku obserwacji fotonów promieniowania rentgenowskiego, a nawet gamma do energii około 30 GeV. Zwykle stosuje się wtedy detektor wypełniony materiałem, w którym foton gamma wytwarza parę składającą się z elektronu i pozytonu. Pomiar energii tej pary oraz jej ruchu umożliwia określenie energii fotonu i kierunku, z którego przybył. Niestety, w zakresie bardzo wysokich energii, powyżej 100 GeV, dociera do Ziemi jedynie jeden foton na 1500 m^2 na godzinę. Zaobserwowanie takiego fotonu wymagałoby wyniesienia na orbitę ogromnych detektorów, co nie jest możliwe przy zastosowaniu współczesnych technologii.

Pęki atmosferyczne

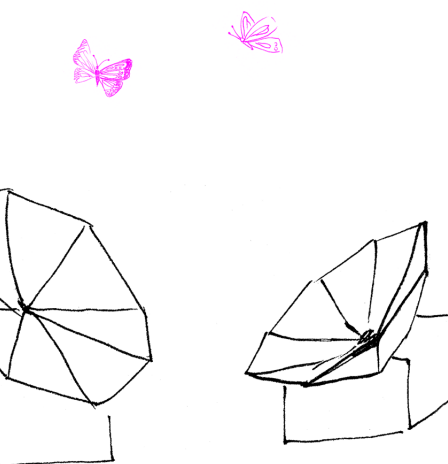
Okazuje się, że w przypadku promieniowania o bardzo małej długości fali możemy do badania jego własności wykorzystać mechanizm ochronny atmosfery. Otóż foton o bardzo wysokiej energii, docierając do górnych warstw atmosfery, oddziałuje ze znajdującymi się tam cząstkami, kreując parę elektron-pozyton. Składniki tej pary emitują promieniowanie hamowania, które również kreuje pary elektron-pozytonowe. Proces ten postępuje lawinowo i nosi nazwę kaskady elektromagnetycznej. Jeden foton o energii 1 TeV jest w stanie wytworzyć nawet sto tysięcy par e^+e^- . Maksimum ich produkcji przypada na wysokości około 10 km nad powierzchnią Ziemi i zanika zupełnie kilka kilometrów niżej. W wyniku działania kaskady niemal cała energia pierwotnego fotonu zostaje rozproszona w górnych warstwach atmosfery. Rozwijająca się kaskada nosi nazwę pęku atmosferycznego (rys. 1). Jego kształt i rozmiary zależą od energii pierwotnego fotonu.

Promieniowanie Czerenkowa

Elektrony i pozytony w pęku atmosferycznym mają bardzo wysokie energie. Ich prędkość jest większa niż prędkość światła w atmosferze.



Rys. 1. Symulacja pęku atmosferycznego powstałego w wyniku uderzenia w górne warstwy atmosfery fotonu o energii 100 GeV. Każda linia odpowiada torowi ruchu elektronu bądź pozytonu wykreowanego w kaskadzie elektromagnetycznej.



* Centrum Astronomiczne Mikołaja Kopernika, Warszawa



Rozwiązanie zadania F 694.

Natężenie prądu wewnątrz kondensatora wynosi

$$E = (\mathcal{E} - IR)/d,$$

gdzie natężenie prądu I jest równe ładunkowi, przeniesionemu przez elektrony padające na okładki, w jednostce czasu. Na okładki pada ta część wiązki elektronów, która jest ograniczona elektronami padającymi na przeciwne końce okładki.

Niech y będzie odległością w pionie takiego elektronu od okładki, a t czasem spadania. Zatem

$$y = \frac{at^2}{2} = \frac{eEt^2}{2mv_0^2}.$$

Liczba elektronów padających w jednostce czasu na okładkę kondensatora wynosi

$$I = eynv_0.$$

Zatem

$$I = eynv_0 = \frac{e^2xnv_0^2}{2mv_0d}(\mathcal{E} - IR)$$

i stąd

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + 2mv_0d/(e^2xnv_0^2)}.$$

Jeśli cała wiązka elektronów spadnie na okładkę, tzn. $y = d$, wtedy

$$I = envdv_0.$$

Poruszające się tak cząstki emitują promieniowanie Czerenkowa. Stanowi ono odpowiednik fali uderzeniowej przy przekraczaniu prędkościach naddźwiękowych. Promieniowanie Czerenkowa jest emitowane pod kątem ϕ do kierunku ruchu cząstki, określonym przez $\cos \phi = c/(vn)$, gdzie c to prędkość światła, v – prędkość cząstki, a n – współczynnik załamania światła w atmosferze. Ponieważ większość elektronów i pozytonów w pęku porusza się prawie równolegle, emitowane przez nie promieniowanie tworzy stożek o rozwartości około 1° i podstawie o promieniu około 120 m. Promieniowanie Czerenkowa z pęku atmosferycznego jest bardzo słabe. Na skutek pochłaniania do powierzchni Ziemi dociera jedynie około stu fotonów na metr kwadratowy. Całość błysku trwa zaledwie kilka nanosekund.

Jeśli w obrębie podstawy stożka promieniowania Czerenkowa umieścimy dostatecznie czuły teleskop, możemy zarejestrować te fotony (okładka). Efektywna powierzchnia zbierająca takiego urządzenia wynosi tyle, ile podstawa stożka, czyli prawie $50\,000\text{ m}^2$, co stanowi znaczącą różnicę w porównaniu z detektorami satelitarnymi, których powierzchnie efektywne rzadko przekraczają 1 m^2 . Na podstawie obserwacji promieniowania Czerenkowa możemy odtworzyć obraz pęku, a co za tym idzie – określić energię i kierunek przyjsia pierwotnego fotonu gamma.

Niestety, wpadające do atmosfery protony i inne cząstki promieniowania kosmicznego również powodują powstawanie pęków atmosferycznych. Ich liczba jest znacznie większa niż liczba pęków pochodzących od fotonów gamma, a więc stanowią one główne źródło zakłóceń podczas obserwacji. Pęki protonowe mają jednak o wiele bardziej skomplikowaną strukturę od pęków fotonowych. Składają się z wielu gałęzi, a emitowane przez nie promieniowanie Czerenkowa nie tworzy jednolitego stożka, lecz rozdziela się na wiele małych stożków o różnych kierunkach. Innym źródłem zakłóceń są miony, które praktycznie nie oddziałują w atmosferze, emitują jednak promieniowanie Czerenkowa, ale w bardzo wąskim obszarze.

Trudności związane z występowaniem zakłóceń spowodowanych pękami atmosferycznymi innymi niż fotonowe można częściowo przezwyciężyć, jeśli do obserwacji pęku zastosuje się więcej niż jeden teleskop. Technika taka nosi nazwę stereoskopii. Pozwala ona na lepszą rekonstrukcję kształtu pęku i oddzielenie pęków protonowych i mionowych od fotonowych. Jej zastosowanie polepsza również znacznie zdolność rozdzielczą całego urządzenia.

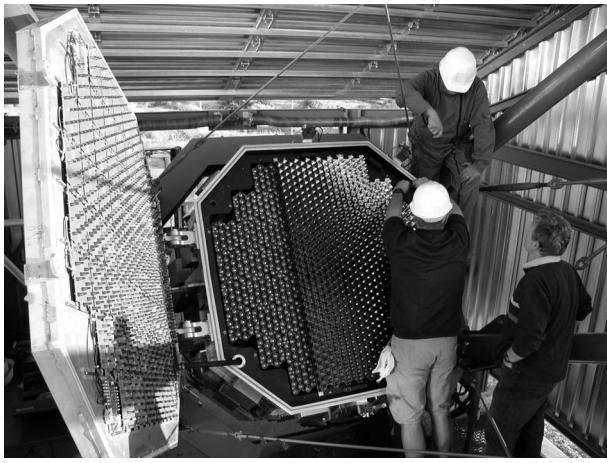
Obserwatorium HESS

Jednym z najlepszych obserwatoriów wykorzystujących opisaną powyżej technikę jest zespół czterech teleskopów o nazwie High Energy Stereoscopic System (HESS), tj. Wysokoenergetyczny System Stereoskopowy (rys. 2).

Nazwa obserwatorium ma również uhonorować osobę Viktora Hessa, który w roku 1912 po raz pierwszy wysunął hipotezę istnienia promieniowania kosmicznego, opierając się na obserwacjach rozładowywania się elektroskopu w czasie lotu balonem na dużej wysokości. Za swoje odkrycie otrzymał Nagrodę Nobla w roku 1936. Obserwatorium HESS znajduje się w Namibii i jest kierowane przez międzynarodowy zespół uczonych, w skład którego wchodzi również naukowcy z Polski. Każdy z teleskopów systemu składa się ze sferycznego zwierciadła o powierzchni 107 m^2 , złożonego z 382 okrągłych lusterek. Do rejestracji promieniowania Czerenkowa służy detektor składający się z 960 fotopowielaczy (rys. 3) wyposażony w bardzo szybką elektronikę. Próbkowanie sygnału zachodzi w odstępach 1 ns. Dzięki dużej powierzchni zwierciadeł urządzenie ma prawie dwudziestokrotnie lepszą czułość niż urządzenia poprzedniej generacji.



Rys. 2. Dwa z czterech teleskopów systemu HESS. Widoczne są wielosegmentowe lustra oraz znajdujące się w ognisku zwierciadeł detektory. Gdy teleskop nie prowadzi obserwacji, detektory chowane są do małych schronów widocznych w dole zdjęcia. Stojące w pobliżu teleskopów maszty to instalacja odgromowa.



Rys. 3. Detektor jednego z teleskopów systemu HESS. Widoczne są tuby fotopowielaczy.

Użycie czterech teleskopów pozwala na zastosowanie stereoskopii, a zatem uzyskanie dobrej zdolności rozdzielczej, która w tym przypadku wynosi około $3'$. Nie jest to wielkość oszałamiająca, jeśli porównać ją np. ze zdolnością rozdzielczą kosmicznego teleskopu Hubble'a, która jest ponad 50 tys. razy lepsza, ale w zakresie wysokich energii jest to i tak osiągnięcie bardzo znaczące. Dla porównania kątowna zdolność rozdzielcza ludzkiego oka wynosi około $1'$ i pozwala zauważyć reflektory samochodu jako dwa oddzielne punkty z odległości ponad 5 km. Obserwatorium HESS działa w pełnej konfiguracji od 2004 roku i przy jego użyciu dokonano już wielu znaczących odkryć i obserwacji.

RX J1713.7-3946

Równoległe z pracami obserwatorów nie ustają wysiłki teoretyków próbujących wyjaśnić pochodzenie promieniowania kosmicznego. Jednymi z najbardziej obiecujących kandydatów na galaktyczne źródła tego promieniowania są wybuchy supernowych. Okazuje się, że zsumowana energia wszystkich wybuchów supernowych wystarczy do wyjaśnienia obserwowanego strumienia galaktycznej składowej promieniowania kosmicznego. Dodatkowo, materia wyrzucona podczas wybuchu z gwiazdy, zderzając się z ośrodkiem międzygwiazdowym, powoduje powstanie fali uderzeniowej, w której cząstki mogą być przyspieszane do bardzo wysokich energii. Nie dziwi więc fakt, że jednym z pierwszych obiektów, jakie poddano badaniom przy użyciu zespołu teleskopów HESS, były właśnie pozostałości po wybuchach masywnych gwiazd. Najciekawszym obiektem tej klasy okazał się RX J1713.7-3946 – młoda pozostałość po wybuchu supernowej obserwowanej w roku 393. Obiekt ten znajduje się w odległości około 1 kpc w gwiazdozbiórze Skorpiona, w sąsiedztwie dużego obłoku molekularnego, co stwarza bardzo dogodne warunki do przyspieszania cząstek. Obserwacje przeprowadzone przez obserwatorium HESS okazały się niebywałym sukcesem. Nie tylko bez trudu wykryto obiekt w zakresie energii powyżej 300 GeV, ale jego promieniowanie okazało się na tyle silne, że w połączeniu ze świetną czułością i zdolnością rozdzielczą teleskopów udało się stworzyć mapę obiektu w promieniach gamma. Jest to pierwszy taki obraz w tym zakresie energii (okładka). Pokazuje wyraźnie silnie niejednorodną strukturę pozostałości po wybuchu supernowej i miejsca oddziaływania wyrzuconej materii z obłokiem molekularnym. Promieniowanie gamma w tych miejscach jest najsilniejsze, co wydaje się potwierdzać hipotezę fali uderzeniowej jako obszaru przyspieszania cząstek. Niestety, teoretyczna interpretacja obserwacji nie daje jednoznacznego rozstrzygnięcia, czy źródłem promieniowania gamma są relatywistyczne protony, czy może jedynie elektrony oddziałujące z promieniowaniem w odwrotnym procesie Comptona. Dokładne badania widma wydają się skłaniać ku pierwszej hipotezie. Jeśli okaże się prawdziwa, po raz pierwszy uzyskamy bezpośredni obraz źródła promieniowania kosmicznego.



Rozwiązanie zadania F 693.

Elektrony zbliżają się do pręta symetrycznie względem punktu A , zatem natężenie prądu $I_A = 0$. Wraz z odległością od punktu A liniowo rośnie natężenie prądu i w odległości l wynosi

$$I_l = \frac{l}{2L},$$

gdzie $L = AB$.

Z prawa Ohma mamy, że

$$U_{AB} = I_{sr} R/2,$$

a

$$I_{sr} = (I_A + I_B)/2 = I/4.$$

Zatem $U_{AB} = IR/8$.

Obserwatorium HESS pracuje pełną parą. Oprócz pozostałości po wybuchach supernowych obserwuje również pulsary, pleriony, mikrokwazary, a także aktywne jądra galaktyk.

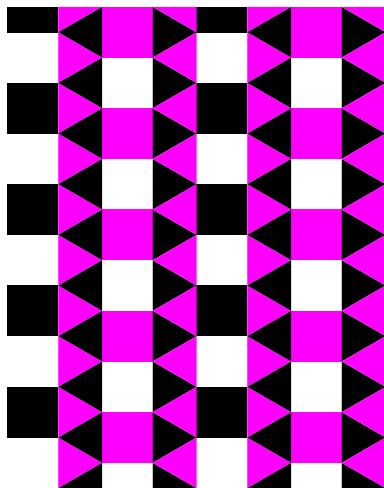
Pleriony to mgławice powstałe w wyniku oddziaływania wiatru pulsara z otaczającym go ośrodkiem międzygwiazdowym.

Mikrokwazary to układy podwójne gwiazd, w których jeden ze składników stanowi gwiazda neutronowa bądź czarna dziura, charakteryzujące się obecnością dżetów radiowych.

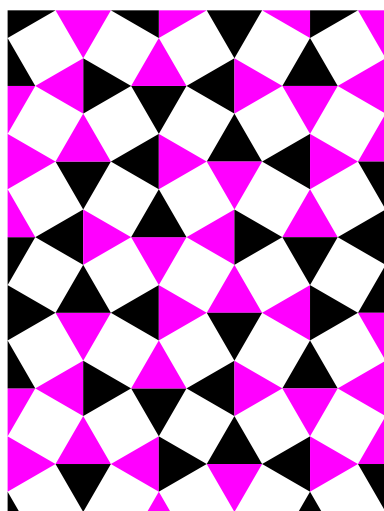
Oprócz znanych obiektów odkrywa również dotąd nieznanne źródła promieniowania gamma. Jeśli kiedyś uda się definitywnie rozwiązać zagadkę promieniowania kosmicznego, niewątpliwie obserwatorium HESS w znacznym stopniu się do tego przyczyni.

Rachunek to za mało

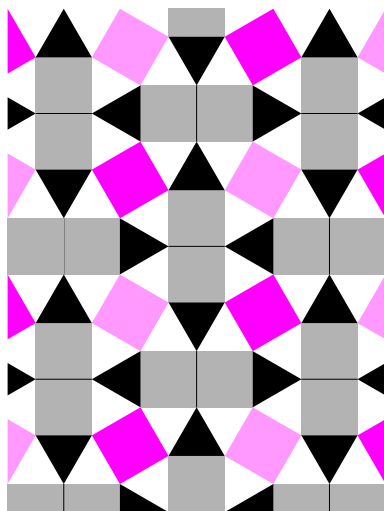
W każdym wierzchołku narysowanych niżej parkietów spotykają się trzy trójkąty i dwa kwadraty, są to więc parkiety jednorodne:



parkiet (3,3,3,4,4) – regularny,



parkiet (3,4,3,4,3) – regularny,



parkiet nieregularny, choć widać w nim wyraźny rytm. Czy można z wielokątów foremnych zbudować parkiet, w którym nie ma żadnego rytmu?

Parkiet to szczelne pokrycie płaszczyzny niezachodzącymi na siebie wielokątami. Tu będzie mowa tylko o parkietach, które składają się z wielokątów foremnych stykających się całymi bokami. Taki parkiet nazywamy jednorodnym, gdy w każdym wierzchołku spotykają się te same wielokąty i w tej samej liczbie (np. trzy trójkąty i dwa kwadraty). Parkiet jednorodny nazywamy regularnym, gdy (cykliczny) porządek tych wielokątów jest stale taki sam (np. stale (3,3,3,4,4) albo stale (3,4,3,4,3)). Powstaje pytanie, jaka jest liczba możliwych parkietów regularnych.

Kąt k -kąta foremnego to $\frac{k-2}{k} \cdot 180^\circ$. Gdy w wierzchołku stykają się trzy wielokąty, mające odpowiednio k_1, k_2, k_3 boki, to musi być spełniony warunek

$$\frac{k_1-2}{k_1} \cdot 180^\circ + \frac{k_2-2}{k_2} \cdot 180^\circ + \frac{k_3-2}{k_3} \cdot 180^\circ = 360^\circ,$$

$$\text{zatem } \frac{1}{2} - \frac{1}{k_1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{k_2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{k_3} = 1, \quad \text{czyli } \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{2}.$$

Sprawny Czytelnik bez trudu uogólni ten wynik na przypadek, gdy w wierzchołku styka się m wielokątów – będzie to

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_m} = \frac{m}{2} - 1.$$

To są równania na k_i , przy czym interesują nas tylko rozwiązania w liczbach całkowitych większych od 2. Od razu widać, że przesadziliśmy z tym uogólnianiem: lewa strona każdego z tych równań nie przekracza $\frac{m}{3}$, a więc rozwiązania mogą być tylko dla m spełniających warunek

$$\frac{m}{3} \geq \frac{m}{2} - 1, \quad \text{czyli } m \leq 6.$$

Z nieskończonej liczby równań zostały więc tylko cztery: dla m równego 3, 4, 5 lub 6. Zaczniemy je rozwiązywać. Na początek weźmy $m = 3$ oraz dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $k_1 \leq k_2 \leq k_3$. Rozpocznijmy od przypadku, gdy $k_1 = 3$. Wtedy będziemy mieli

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{6} \Rightarrow k_3 = \frac{6k_2}{k_2-6} \Rightarrow (k_2-6)|6k_2.$$

Ostatni warunek bierze się stąd, że k_3 musi być liczbą całkowitą. Sprawny Czytelnik bez trudu stwierdzi, że odpowiednie wartości k_2 to 7, 8, 9, 10 i 12, bo dla większych wartości, spełniających ostatni warunek (jakie to liczby?), będzie $k_2 > k_3$. Stąd mamy pięć kandydatur na regularny parkiet: (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15) i (3,12,12). Kandydatur, bo Dociekliwy Czytelnik, kolega Sprawnego, stwierdzi – próbując te parkietaże narysować – że istnieje tylko jeden z nich: ten ostatni.

Kolejny przypadek, $k_1 = 4$ daje

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{4} \Rightarrow k_3 = \frac{4k_2}{k_2-4} \Rightarrow (k_2-4)|4k_2,$$

skąd otrzymamy trzy rozwiązania (4,5,20), (4,6,12) i (4,8,8) – tu jest lepiej: tylko pierwszemu rozwiązaniu nie odpowiada parkiet. Dla $k_1 = 5$ i $k_1 = 6$ otrzymamy odpowiednio

$$k_3 = \frac{10k_2}{3k_2-10} \Rightarrow (3k_2-10)|10k_2 \quad \text{oraz} \quad k_3 = \frac{3k_2}{k_2-3} \Rightarrow (k_2-3)|3k_2,$$

co daje rozwiązanie (5,5,10), któremu nie odpowiada parkiet, i (6,6,6) z oczywistym parkietem.

Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla $m = 4, 5, 6$, znów uzyskując więcej rozwiązań, niż będzie odpowiadających im parkietów regularnych: dla $m = 4$ istnieją trzy parkiety (zapiszę je zgodnie z porządkiem wielokątów przy wierzchołku): (4,4,4,4), (3,6,3,6), (3,4,6,4); dla $m = 5$ trzy: (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4) i odpowiadający temu samemu rozwiązaniu (3,4,3,4,3); dla $m = 6$ tylko jedno: (3,3,3,3,3,3), zresztą rozwiązanie też jest tylko jedno.

Czy to znaczy, że nie można rachunkiem uzyskać tego samego, co rysunkiem?

M. K.

REKORD ŚWIATA PRZEDSTAWIA JEGO AUTOR

24-wyrazowy postęp arytmetyczny liczb pierwszych

W kwietniu 2004 roku Ben Green i Terence Tao udowodnili, że istnieją dowolnie długie postępy arytmetyczne złożone z liczb pierwszych. W owym czasie najdłuższy znany postęp arytmetyczny liczb pierwszych miał 22 wyrazy (rekord ten został ustanowiony w roku 1993).

Dowód twierdzenia Greena-Tao jest niekonstruktywny, tzn. w żaden sposób nie pomaga w znalezieniu konkretnych przykładów.

W lipcu 2004 roku Markus Frind, Paul Jobling i Paul Underwood znaleźli postęp arytmetyczny liczb pierwszych mający 23 wyrazy.

Mając do dyspozycji 75 komputerów (w tym 30 komputerów 64-bitowych, około 10-krotnie szybciej wykonujących mój program niż komputery 32-bitowe) w pracowniach studenckich Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Wrocławskiego, 11 stycznia 2007 r. rozpocząłem poszukiwanie 24-wyrazowego postępu arytmetycznego liczb pierwszych. Z moich oszacowań

wynikało, że szansa znalezienia takiego ciągu po kilku miesiącach poszukiwań jest na tyle duża, że warto spróbować.

Jakież było moje zaskoczenie, gdy już po tygodniu (18 stycznia) pojawił się upragniony przykład:

$$a_n = 468395662504823 + 205619 \cdot 23\# \cdot n$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots, 23$, gdzie

$$23\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = 223092870.$$

Największy wyraz postępu $a_{23} = 1523454717745013$ ma 16 cyfr.

Jak dotąd, jest to jedyny znany 24-wyrazowy postęp arytmetyczny złożony z liczb pierwszych.

Zainteresowanych śledzeniem rezultatów związanych z postęпами arytmetycznymi liczb pierwszych odsyłam na stronę <http://hjem.get2net.dk/jka/math/aprecords.htm>

Jarosław WRÓBLEWSKI

Próbkowanie grawitacji

W kwietniu 2004 roku rakieta amerykańskiej agencji kosmicznej NASA wyniosła na orbitę biegunową o wysokości około 650 km satelitę „Gravity Probe B”. Celem jego misji była doświadczalna weryfikacja ogólnej teorii względności (OTW), obecnie najlepszej znanej teorii grawitacji, oraz przetestowanie jej wobec kilku konkurencyjnych teorii grawitacji. Satelita GR-B miał za zadanie sprawdzić dwa przewidywania OTW: tzw. efekt geodezyjny i efekt Lense-Thirringa.

Obydwa badane efekty nie występują w teorii grawitacji Newtona. Bez wchodzenia w matematyczne szczegóły można powiedzieć, że oba polegają na zmianie kierunku wirowania żyroskopu podczas swobodnego obiegania Ziemi po orbicie.

Z podstawowego kursu fizyki wiemy, że żyroskop to urządzenie, które zachowuje równoległą oś obrotu pomimo prób jej zmiany. Wydaje się więc, że kiedy satelita obiega Ziemię, swobodnie wirujące żyroskopy powinny pokazywać stale ten sam kierunek. Okazuje się jednak, że przy każdym obiegu ich oś obrotu będzie ulegać niewielkim zmianom.

Efekt geodezyjny jest silniejszy i występuje dla każdego ciężkiego ciała. Oś wirowania żyroskopu orbitującego wokół tego ciała doznaje powolnego skrócenia w płaszczyźnie jego orbity. Jest to związane z zakrzywieniem geometrii wokół tego ciała.

Efekt Lense-Thirringa jest subtelniejszy i dużo słabszy. Spowodowany jest ruchem obrotowym Ziemi: według OTW pole grawitacyjne jakiegoś ciała zależy nie tylko od masy, ale i od ciśnienia oraz przepływów materii

wewnątrz tego ciała. W związku z tym obracająca się Ziemia, w której materia wiruje jako całość, wytwarza nieco inne pole grawitacyjne, niż wytwarzałyby Ziemia spoczywająca. Ta niewielka różnica powoduje m.in. skrócenie osi obrotu żyroskopu w kierunku obrotu Ziemi. Z uwagi na analogię z działaniem pola magnetycznego, wytwarzanego przez poruszające się ładunki, zjawisko nazywa się też efektem grawimagnetycznym.

Zauważmy, że dla satelity na orbicie biegunowej kierunki skróceń pochodzących od obu efektów są prostopadłe, w związku z tym łatwo je rozróżnić. Oba są niezwykle słabe: efekt geodezyjny to 6,6 sekund na rok, efekt grawimagnetyczny to 0,041 sekundy na rok. Aby uzyskać pożądaną wysoką dokładność pomiaru, cztery żyroskopy na pokładzie GR-B izolowane były dokładnie od wpływów otoczenia, utrzymywane były w temperaturze około 2 K, a oś ich obrotu była odczytywana poprzez badanie pola magnetycznego wytwarzanego przez ich nadprzewodzącą powłokę. Satelita wyposażony jest też w teleskop nakierowany stale na gwiazdę IM Pegasi w celu dostarczenia układu odniesienia.

Etap zbierania danych zakończył się w lutym 2006 roku. Na kwietniowym zjeździe Amerykańskiego Towarzystwa Fizycznego ogłoszono pierwsze, jeszcze niepełne wyniki. Zaobserwowano efekt geodezyjny zgodny z przewidywaniami z dokładnością 1%, zaś efekt Lense-Thirringa jest na razie mniejszy od wartości błędu systematycznego. To powinno jednak zmienić się wraz z dokładniejszą analizą danych. Pełne wyniki obiecane za około 8 miesięcy.

Mikołaj KORZYŃSKI

O pewnych równościach sum algebraicznych

Łatwo sprawdzić, że iloczyn dwóch sum dwóch sześciątów można na dwa sposoby wyrazić jako sumę czterech sześciątów, bowiem

$$(a^3 + b^3)(c^3 + d^3) = (ac)^3 + (ad)^3 + (bc)^3 + (bd)^3 =$$

$$= (ac + bd - ad)^3 + (ac + bd - bc)^3 + (ad + bc - ac)^3 +$$

$$+ (ad + bc - bd)^3.$$

Analogiczna zależność zachodzi dla pierwszej potęgi.

A oto przykłady:

$$9(r^3 + s^3) = 2^3 r^3 + 2^3 s^3 + r^3 + s^3 =$$

$$= (2r - s)^3 + 2(r + s)^3 + (2s - r)^3, \text{ por. [1];}$$

$$(r^3 + s^3)^2 = (r^2)^3 + 2r^3 s^3 + (s^2)^3 =$$

$$= (2rs - r^2)^3 + 2(r^2 - rs + s^2)^3 + (2rs - s^2)^3;$$

$$7(r^3 + s^3) = (2^3 - 1^3)(r^3 + s^3) = 2^3 r^3 + 2^3 s^3 - r^3 - s^3 =$$

$$= (2r - 3s)^3 + (3r - s)^3 + (3s - r)^3;$$

$$a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) =$$

$$= (a^2 + ab - b^2)^3 + (a^2 - ab - b^2)^3 - a^6 + b^6$$

skąd $2(a^6 - b^6) = (a^2 + ab - b^2)^3 + (a^2 - ab - b^2)^3$,
por. [2];

$$7 \cdot 91 = (2^3 - 1^3)(4^3 + 3^3) = 8^3 + 6^3 - 4^3 - 3^3 =$$

$$= -1^3 + 9^3 - 6^3 + 5^3.$$

Z tych przykładów widzimy, że przedstawiony na wstępie wzór jest uogólnieniem pewnych wzorów występujących w literaturze. Zmieniając w nim znaki, uzyskujemy

$$(a^n - b^n)(c^n - d^n) = a^n c^n - a^n d^n - b^n c^n + b^n d^n =$$

$$= (ac + bd + ad)^n + (ac + bd + bc)^n - (ad + bc + ac)^n -$$

$$- (ad + bc + bd)^n, \text{ słuszny dla } n = 1, 2, 3.$$

Wzór ten, napisany w postaci

$$(ac)^n + (bd)^n + (ad + bc + ac)^n + (ad + bc + bd)^n =$$

$$= (ad)^n + (bc)^n + (ac + bd + ad)^n + (ac + bd + bc)^n$$

pokazuje, że układ równań

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n = y_1^n + y_2^n + y_3^n + y_4^n \text{ dla } n = 1, 2, 3$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Aleksander GÓRSKI

Literatura:

[1] A. Mąkowski, *Sur quelques problèmes concernant les sommes de quatre cubes*, Acta Arithmetica V.2 (1959) pp. 121-123.

[2] A. Mąkowski, *A cubic identity and its consequences*, Demonstratio Mathematica XVI (1983), pp. 537-539.



Zadania Redaguje Waldemar POMPE

Poniższe zadania pochodzą z 2 etapu II Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.

1171. W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów, narysowano 10 odcinków. Wykazać, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.
Rozwiązanie na str. 2

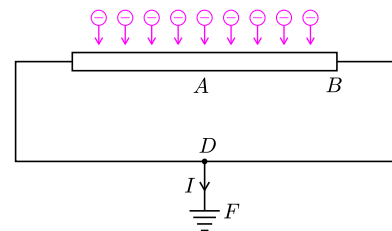
1172. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d , że liczba $(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)$ jest w systemie dziesiętnym zakończona cyframi „10”.
Rozwiązanie na str. 3

1173. Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$ (rys.), w którym $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = 20^\circ$. Wykazać, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości każdej z krawędzi AS, BS i CS .
Rozwiązanie na str. 16

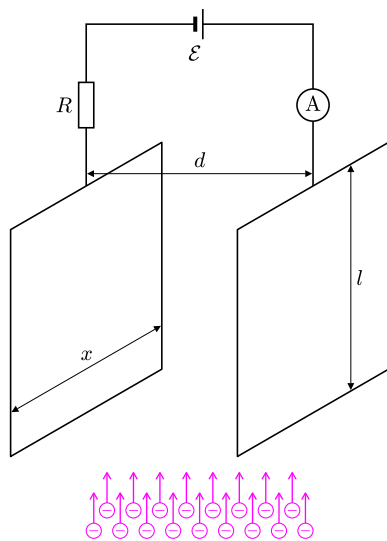
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 693. Jednorodny strumień elektronów pada na jednorodny pręt o oporze R uziemiony na obu końcach. Znaleźć różnicę potencjałów między środkiem pręta A a jego końcem B (rys. 1). Natężenie prądu w przewodzie uziemiającym DF wynosi I .
Rozwiązanie na str. 6

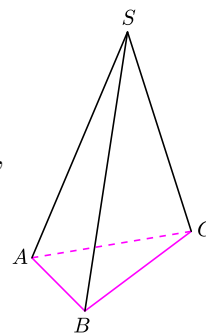
F 694. Jednorodna wiązka elektronów z prędkością v_0 wpada między okładki kondensatora płaskiego tak, że wypełnia ona całą przestrzeń między okładkami (rys. 2). Kondensator podłączony jest za pośrednictwem opornika R do źródła siły elektromotorycznej \mathcal{E} . Znaleźć natężenie prądu płynącego przez ten opornik. Strumień elektronów w jednostce objętości równy jest n_V .
Rozwiązanie na str. 5

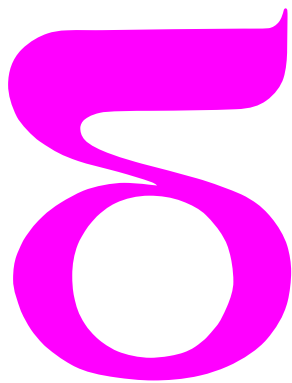


Rys. 1



Rys. 2

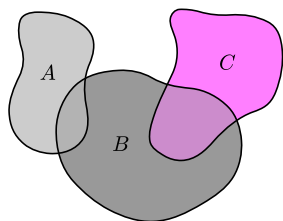




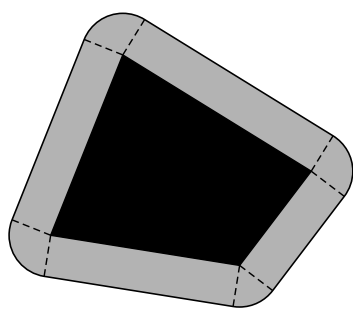
mała delta

Jak daleko jest od koła do kwadratu?

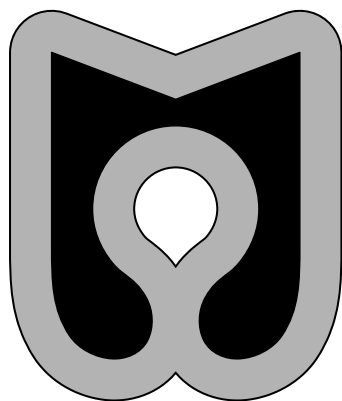
Chodzi nam tutaj nie o odległości punktów tych figur, lecz o zmierzenie w jakiś sposób, jak bardzo te figury się różnią. W tym celu najpierw spróbujemy określić odległość między konkretnymi figurami. Nasuwającym się sposobem jest stwierdzenie, że odległość dwóch figur to najmniejsza z odległości punktu jednej figury od punktu drugiej. Taki sposób mierzenia ma jednak mało cech, jakie wiążemy ze zwykłą odległością. W szczególności nie jest prawdą, że tak mierzona odległość daje wynik 0 tylko wtedy, gdy figury pokrywają się. Nie jest też spełniona tzw. nierówność trójkąta, czyli że suma odległości A od B i B od C nie może być mniejsza od odległości A od C – każdy łatwo poda taki przykład – dla leniwych: rysunek 1.



Rys. 1



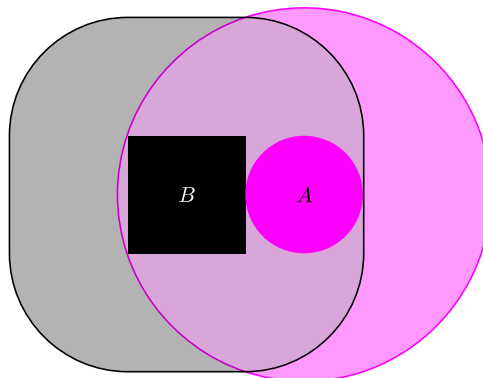
Rys. 2



Rys. 3

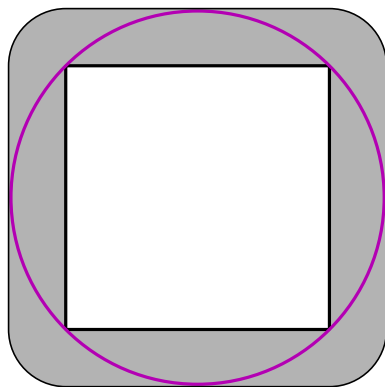
W jednym ze sposobów wprowadzenia porządnego pojęcia odległości figur posługujemy się pojęciem *otoczki*. Otoczka o szerokości a jakiejś figury to zbiór wszystkich punktów, które są odległe od jakiegoś punktu tej figury nie więcej niż o a . Na rysunku 2 mamy narysowaną otoczkę czworokąta – punkty, o które otoczka jest większa od tego czworokąta, są zacieniowane: jest to suma czterech prostokątów i czterech fragmentów koła, które składają się na jedno koło (oczywiście o promieniu a). Zresztą dla dowolnego n -kąta wypukłego jego otoczka, poza punktami tego wielokąta, zawiera n prostokątów i n fragmentów koła składających się na jedno całe koło. Dla wielokątów niewypukłych i innych figur dodatkowe punkty otoczki trzeba opisywać już w bardziej skomplikowany sposób, choć narysować je łatwo (rys. 3).

Za pomocą otoczki odległość figur określa się bardzo prosto. Najpierw znajdujemy najmniejszą szerokość otoczki figury A , która zawiera figurę B – oznaczmy ją r_A . Potem znajdujemy najmniejszą szerokość otoczki figury B , która zawiera figurę A – oznaczmy ją r_B . Odległość figur A i B to większa z tych liczb. Jeżeli średnica koła A i bok kwadratu B na rysunku 4 są równe 2, to – jak łatwo obliczyć – r_A jest równe $\sqrt{10} - 1$ (dlaczego?), podczas gdy r_B to 2. Odległość A i B jest zatem równa $\sqrt{10} - 1$.

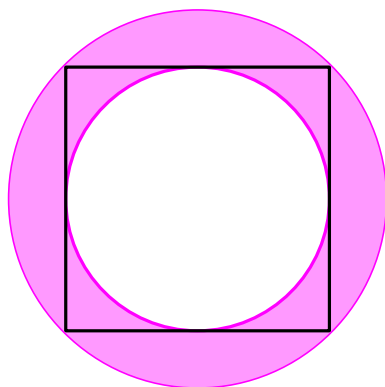


Rys. 4

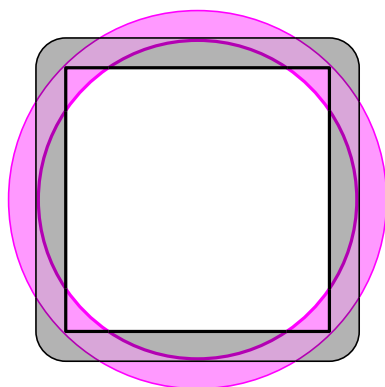
Wypada powiedzieć (na marginesie, by nie przerażać Czytelnika), że ten sposób mierzenia odległości między figurami (dodajmy: ograniczonymi i domkniętymi) nazywa się *metryką Hausdorffa*.



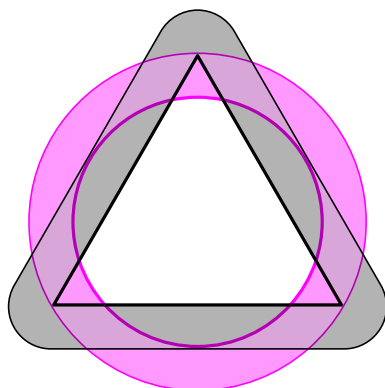
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Ten sposób mierzenia odległości figur spełnia warunki wymagane na to, by być pełnoprawną odległością. Odległość jest w sposób oczywisty równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy mierzymy odległość figury od niej samej. Symetria też wynika z definicji. Trochę trudniej jest sprawdzić, że spełniona jest nierówność trójkąta, ale Cierpliwy Czytelnik we współpracy z Sumiennym z pewnością sobie z tym poradzi.

Pamiętajmy jednak, że ten sposób mierzenia odległości jest dla nas tylko środkiem do celu, jakim ma być nie określenie, jak daleko jest konkretne koło A od konkretnego kwadratu B , lecz jak „w ogóle” koło jest odległe od kwadratu.

Co to znaczy „w ogóle”? Co chcielibyśmy przez to rozumieć? Wydaje się, że warto poszukać jakiejś miary, jak dalece koło nie jest kwadratem. Spróbujmy zatem zobaczyć, jak dalece koło może się do kwadratu zbliżyć (w sensie zaproponowanej odległości). Możemy przy tym koło dowolnie przemieszczać, powiększać i zmniejszać, starając się, by odległość między nim a kwadratem uczynić najmniejszą.

Koło opisane na kwadracie o boku $2p$ jest odległe od niego o $p(\sqrt{2} - 1)$ (tyle równa się r_B , natomiast $r_A = 0$ – rys. 5). Koło wpisane w ten kwadrat jest od niego odległe też o $p(\sqrt{2} - 1)$ (tyle wynosi r_A , natomiast tym razem $r_B = 0$ – rys. 6), ale każdy wpadnie na pomysł, że można tę odległość zmniejszyć, powodując, by – mówiąc potocznie – kwadrat wystawał z koła tyle samo, co koło z kwadratu (rys. 7). Promień r takiego okręgu spełnia warunek $p\sqrt{2} - r = r - p$, zatem $r = p\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Wobec tego

$$r_A = p\sqrt{2} - p\frac{\sqrt{2}+1}{2}, \quad r_B = p\frac{\sqrt{2}+1}{2} - p, \quad \text{czyli} \quad r_A = r_B = p\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Uzyskaliśmy wynik dwukrotnie mniejszy niż poprzednio i chyba nie trzeba specjalnie przekonywać, że to jest wynik najlepszy (czyli najmniejszy). Odpowiedź na tytułowe pytanie brzmi zatem: *odległość koła od kwadratu jest równa $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ boku kwadratu.*

Ale idźmy dalej. W podobny sposób stwierdzimy (rys. 8), że *odległość koła od trójkąta równobocznego jest równa $\frac{\sqrt{3}}{12}$ boku trójkąta,*

Może nawet przyjdzie nam do głowy, żeby to porównać – w tym celu należy to w obu przypadkach przeliczyć na promień okręgu. Otrzymamy wtedy (proszę samemu spróbować), że *odległość koła od kwadratu jest równa $3 - 2\sqrt{2}$ promienia koła, a od trójkąta równobocznego równa $\frac{1}{3}$ promienia koła,* zatem, zgodnie z intuicją, kwadrat jest bliżej koła niż trójkąt równoboczny.

Gdy jednak spróbujemy obliczać odległość kwadratu od trójkąta równobocznego, zobaczymy, że sprawa, która już wydawała się łatwa, taka jednak nie jest. Bo zapewne optymalne wzajemne położenie kwadratu i trójkąta równobocznego to takie, w którym ich środki się pokrywają, ale jak trójkąt powinien być obrócony? Ten konkretny problem zapewne uda się Czytelnikom rozwiązać.

A co z innymi figurami? Gdy będą trudności, zrażać się nie należy. Bowiem prawda jest taka, że rozstrzygnięcie, jak badać opisaną tu odległość dowolnych dwu figur, jest jeszcze – jak wszyscy sądzą – daleko przed nami, a istniejące przybliżone algorytmy pozostawiają wiele do życzenia.

Małą Deltę opracował Marek KORDOS

Ciągi Somosa

Lev KURLYANDCHIK*

W tym artykule zajmiemy się ciągami, które rozważał Michael Somos, badając pewne krzywe eliptyczne.

Przykład 1. Niech będzie dany ciąg (a_n) określony wzorami: $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ oraz

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2}a_{n+1} + 1}{a_n} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Udowodnić, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie. Udowodnimy najpierw, że $\gamma_n = \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}}$ jest liczbą naturalną dla każdej liczby naturalnej n .

Po pierwsze mamy $a_4 = 2$, $\gamma_1 = \frac{a_1 + a_3}{a_2} = 2$ oraz

$\gamma_2 = \frac{a_2 + a_4}{a_3} = 3$. Dla $n \geq 3$ zachodzi

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_n + \frac{a_{n+1}a_{n+1} + 1}{a_{n-1}}}{a_{n+1}} = \\ &= \frac{a_n a_{n-1} + a_{n+1} + 1}{a_{n-1} a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} a_{n-2} + a_n a_{n+1}}{a_{n+1} a_{n-1}} = \\ &= \frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}} = \gamma_{n-2}. \end{aligned}$$

Dlatego $\gamma_{2k} = \gamma_2 = 3$, $\gamma_{2k+1} = \gamma_1 = 2$. Zatem

$$\frac{a_{2k+2} + a_{2k}}{a_{2k+1}} = 3, \quad \frac{a_{2k+3} + a_{2k+1}}{a_{2k+2}} = 2,$$

czyli $a_{2k+2} = 3a_{2k+1} - a_{2k}$ i $a_{2k+3} = 2a_{2k+2} - a_{2k+1}$, co kończy dowód dla ciągu a_n .

Przykład 2. Niech (a_n) będzie ciągiem spełniającym warunki: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ oraz

$$a_{n+4} = \frac{a_{n+3}a_{n+1} + a_n^2}{a_n} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Udowodnić, że każdy wyraz ciągu (a_n) jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie. Obliczamy: $a_5 = 2$, $a_6 = 3$, $a_7 = 7$ i $a_8 = 23$. Mamy

$$\text{NWD}(a_m, a_{m-1}) = \text{NWD}(a_m, a_{m-2}) = 1$$

dla $3 \leq m \leq 8$.

Założmy, że $n \geq 8$ i wszystkie liczby a_1, a_2, \dots, a_n są całkowite oraz dla $3 \leq m \leq n$ zachodzą równości:

$$\text{NWD}(a_m, a_{m-1}) = \text{NWD}(a_m, a_{m-2}) = 1.$$

Udowodnimy, że liczba a_{n+1} jest również całkowita oraz zachodzą równości:

$$\text{NWD}(a_{n+1}, a_n) = \text{NWD}(a_{n+1}, a_{n-1}) = 1.$$

Z równości

$$a_{n-3}a_{n-7} = a_{n-4}a_{n-6} + a_{n-5}^2$$

wynika, że

$$(1) \quad a_{n-4}a_{n-6} + a_{n-5}^2 \equiv 0 \pmod{a_{n-3}},$$

a z równości

$$a_{n-2}a_{n-6} = a_{n-3}a_{n-5} + a_{n-4}^2,$$

że

$$(2) \quad a_{n-2}a_{n-6} \equiv a_{n-4}^2 \pmod{a_{n-3}}.$$

* Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Następnie z równości $a_{n-1}a_{n-5} = a_{n-2}a_{n-4} + a_{n-3}^2$ otrzymujemy

$$(3) \quad a_{n-1}a_{n-5} \equiv a_{n-2}a_{n-4} \pmod{a_{n-3}}.$$

Wreszcie z równości $a_n a_{n-4} = a_{n-1} a_{n-3} + a_{n-2}^2$ mamy

$$(4) \quad a_n a_{n-4} \equiv a_{n-2}^2 \pmod{a_{n-3}}.$$

Korzystając teraz z równości (1)–(4), otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_{n-5}^2 a_{n-4} (a_n a_{n-2} + a_{n-1}^2) &= \\ &= a_{n-5}^2 a_{n-2} (a_n a_{n-4}) + (a_{n-1} a_{n-5})^2 a_{n-4} \equiv \\ &\equiv a_{n-5}^2 a_{n-2} a_{n-2}^2 + (a_{n-2} a_{n-4})^2 a_{n-4} = \\ &= a_{n-5}^2 a_{n-2}^3 + a_{n-2}^2 a_{n-4} a_{n-4}^2 \equiv \\ &\equiv a_{n-5}^2 a_{n-2}^3 + a_{n-2}^2 a_{n-4} (a_{n-2} a_{n-6}) = \\ &= a_{n-2}^3 (a_{n-5}^2 + a_{n-4} a_{n-6}) \equiv \\ &\equiv a_{n-2}^3 \cdot 0 \equiv 0 \pmod{a_{n-3}} \end{aligned}$$

Tak więc liczba $a_{n-5}^2 a_{n-4} (a_n a_{n-2} + a_{n-1}^2)$ jest podzielna przez a_{n-3} . Ponieważ

$$\text{NWD}(a_{n-3}, a_{n-4}) = \text{NWD}(a_{n-3}, a_{n-5}) = 1,$$

więc liczba $a_n a_{n-2} + a_{n-1}^2$ jest podzielna przez a_{n-3} , a wobec tego liczba

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-2} + a_{n-1}^2}{a_{n-3}}$$

jest całkowita.

Pozostaje do wykazania, że

$$\text{NWD}(a_{n+1}, a_n) = \text{NWD}(a_{n+1}, a_{n-1}) = 1.$$

Założmy, że $\text{NWD}(a_{n+1}, a_n) > 1$.

Niech p będzie taką liczbą pierwszą, że $p|a_{n+1}$ oraz $p|a_n$. Z równości

$$a_{n+1}a_{n-3} = a_n a_{n-2} + a_{n-1}^2$$

wynika, że $p|a_{n-1}$. Przeczy to jednak warunkowi

$$\text{NWD}(a_n, a_{n-1}) = 1.$$

Przypuśćmy teraz, że $\text{NWD}(a_{n+1}, a_{n-1}) > 1$. Niech p będzie taką liczbą pierwszą, że $p|a_{n+1}$ oraz $p|a_{n-1}$. Z równości

$$a_{n+1}a_{n-3} = a_n a_{n-2} + a_{n-1}^2$$

wynika, że albo $p|a_n$, albo $p|a_{n-2}$. Przeczy to jednak warunkowi

$$\text{NWD}(a_n, a_{n-1}) = \text{NWD}(a_{n-1}, a_{n-2}) = 1.$$

Teza wynika zatem z indukcji.

Przykład 3. Ciąg (a_n) jest określony wzorami:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1 \text{ oraz}$$

$$a_{n+5} = \frac{a_{n+4}a_{n+1} + a_{n+2}a_{n+3}}{a_n} \quad (n \geq 1).$$

Udowodnić, że każdy wyraz ciągu (a_n) jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie. Obliczamy: $a_6 = 2$, $a_7 = 3$, $a_8 = 5$, $a_9 = 11$ i $a_{10} = 37$. Zauważmy, że dla $4 \leq n \leq 10$ zachodzą równości:

$$\begin{aligned} \text{NWD}(a_n, a_{n-1}) &= \text{NWD}(a_n, a_{n-2}) = \\ &= \text{NWD}(a_n, a_{n-3}) = 1. \end{aligned}$$

Za pomocą indukcji udowodnimy, że:

- 1) każdy wyraz ciągu (a_n) jest liczbą naturalną;
- 2) dla każdej liczby naturalnej $m \geq 4$ zachodzą równości:

$$\begin{aligned} \text{NWD}(a_m, a_{m-1}) &= \text{NWD}(a_m, a_{m-2}) = \\ &= \text{NWD}(a_m, a_{m-3}) = 1. \end{aligned}$$

Niech $n \geq 10$ oraz niech wszystkie liczby a_1, a_2, \dots, a_n będą całkowite i spełniają warunek 2). Udowodnimy, że liczba a_{n+1} jest również całkowita oraz spełnia warunek 2).

Z równości $a_n a_{n-5} = a_{n-1} a_{n-4} + a_{n-2} a_{n-3}$ wynika, że

$$(5) \quad a_n a_{n-5} \equiv a_{n-2} a_{n-3} \pmod{a_{n-4}}.$$

Z równości $a_{n-1} a_{n-6} = a_{n-2} a_{n-5} + a_{n-3} a_{n-4}$ wynika, że

$$(6) \quad a_{n-1} a_{n-6} \equiv a_{n-2} a_{n-5} \pmod{a_{n-4}}.$$

Z równości $a_{n-2} a_{n-7} = a_{n-3} a_{n-6} + a_{n-4} a_{n-5}$ otrzymujemy

$$(7) \quad a_{n-2} a_{n-7} \equiv a_{n-3} a_{n-6} \pmod{a_{n-4}}.$$

Następnie z równości $a_{n-3} a_{n-8} = a_{n-4} a_{n-7} + a_{n-5} a_{n-6}$ otrzymujemy

$$(8) \quad a_{n-3} a_{n-8} \equiv a_{n-5} a_{n-6} \pmod{a_{n-4}}.$$

Wreszcie z równości $a_{n-4} a_{n-9} = a_{n-5} a_{n-8} + a_{n-6} a_{n-7}$ mamy

$$(9) \quad a_{n-5} a_{n-8} + a_{n-6} a_{n-7} \equiv 0 \pmod{a_{n-4}}.$$

Korzystając teraz z równości (5)–(9), otrzymujemy następujące równości modulo a_{n-4} :

$$\begin{aligned} a_{n-5} a_{n-6} a_{n-7} (a_n a_{n-3} + a_{n-1} a_{n-2}) &= \\ &= (a_n a_{n-5}) a_{n-6} a_{n-7} a_{n-3} + \\ &\quad + a_{n-5} a_{n-7} a_{n-2} (a_{n-1} a_{n-6}) \equiv \\ &\equiv a_{n-2} a_{n-3} a_{n-6} a_{n-7} a_{n-3} + \\ &\quad + a_{n-5} a_{n-7} a_{n-2} a_{n-2} a_{n-5} = \\ &= a_{n-2} (a_{n-6} a_{n-7} a_{n-3}^2 + a_{n-5}^2 (a_{n-2} a_{n-7})) \equiv \\ &\equiv a_{n-2} (a_{n-6} a_{n-7} a_{n-3}^2 + a_{n-5}^2 a_{n-3} a_{n-6}) = \\ &= a_{n-2} (a_{n-6} a_{n-7} a_{n-3}^2 + (a_{n-5} a_{n-6}) a_{n-5} a_{n-3}) \equiv \\ &\equiv a_{n-2} (a_{n-6} a_{n-7} a_{n-3}^2 + a_{n-3} a_{n-8} a_{n-5} a_{n-3}) = \\ &= a_{n-2} a_{n-3}^2 (a_{n-6} a_{n-7} + a_{n-5} a_{n-8}) \equiv \\ &\equiv a_{n-2} a_{n-3}^2 \cdot 0 \equiv 0 \pmod{a_{n-4}}. \end{aligned}$$

Zatem liczba naturalna

$a_{n-5} a_{n-6} a_{n-7} (a_n a_{n-3} + a_{n-1} a_{n-2})$ jest podzielna przez liczbę naturalną a_{n-4} .

Ale ponieważ

$$\begin{aligned} \text{NWD}(a_{n-4}, a_{n-5}) &= \text{NWD}(a_{n-4}, a_{n-6}) = \\ &= \text{NWD}(a_{n-4}, a_{n-7}) = 1, \end{aligned}$$

więc a_{n-4} dzieli liczbę

$$a_n a_{n-3} + a_{n-1} a_{n-2},$$

a zatem

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-3} + a_{n-1} a_{n-2}}{a_{n-4}}$$

jest liczbą naturalną.

Z równości rekurencyjnej

$$a_{n-4} a_{n+1} = a_n a_{n-3} + a_{n-1} a_{n-2}$$

wynika, że warunek 2) zachodzi dla liczby $n + 1$.

Teza wynika zatem z indukcji.

Po tych przykładach rozpatrzmy ciąg (a_n) określony wzorami: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 1$ oraz

$$a_{n+6} = \frac{a_{n+5} a_{n+1} + a_{n+4} a_{n+2} + a_{n+3}^2}{a_n} \quad (n \geq 1).$$

Dalsze początkowe wyrazy tego ciągu to 3, 5, 9, 23, 75, 421, 1103, 5047, 41783, 281527, 2534423, ... Dean Hickerson udowodnił, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

Rozważmy kolejny ciąg:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 1 \text{ oraz}$$

$$a_{n+7} = \frac{a_{n+6} a_{n+1} + a_{n+5} a_{n+2} + a_{n+4} a_{n+3}}{a_n} \quad (n \geq 1).$$

Dalsze początkowe wyrazy to: 3, 5, 9, 17, 41, 137, 769, 1925, 7203, 34081, 227321, ... Raphael Robinson wykazał, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

Idziemy dalej. Następnym ciągiem to:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 1 \text{ oraz}$$

$$a_{n+8} = \frac{a_{n+7} a_{n+1} + a_{n+6} a_{n+2} + a_{n+5} a_{n+3} + a_{n+4}^2}{a_n} \quad (n \geq 1).$$

Dalsze początkowe wyrazy to: 4, 7, 13, 25, 61, 187, 775, 5827, 14815, $\frac{420514}{7}$, czyli osiemnasty wyraz tego ciągu nie jest liczbą całkowitą!

Wreszcie rozpatrzmy ciąg:

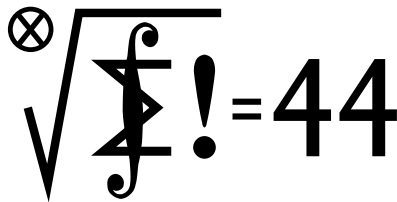
$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 1 \text{ oraz}$$

$$a_{n+9} = \frac{a_{n+8} a_{n+1} + a_{n+7} a_{n+2} + a_{n+6} a_{n+3} + a_{n+5} a_{n+4}}{a_n} \quad (n \geq 1);$$

jego dalsze początkowe wyrazy to: 4, 7, 13, 25, 49, 115, 355, 1483, 11137, 27937, $\frac{755098}{7}$. Tym razem dwudziesty wyraz nie jest liczbą całkowitą.

Bibliografia:

- [1] D. Gale, *The strange and surprising saga of the Somos sequences*, Math. Intelligencer 13 (1991), 40–42.
- [2] J.L. Malouf, *An integer sequence from a rational recursion*, Discrete Mathematics 110 (1992), 257–261.
- [3] M. Somos, *Problem 1470*, Crux Mathematicorum, 13 (1989), 208.



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VIII 2007

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
527 ($WT = 2,06$) i **528** ($WT = 1,00$)
z numeru 10/2006

Piotr Kumor	- Olsztyn	45,89
Krzysztof Dorobisz	- Kraków	43,42
Michał Jastrzębski	- Warszawa	43,27
Łukasz Garczarek	- Opole	43,00
Andrzej Józwiak	- Warszawa	42,67
Tomasz Wietecha	- Tarnów	39,00
Andrzej Daniluk	- Warszawa	37,86
Krzysztof Kamiński	- Pabianice	36,52
Dariusz Kurpiel	- Posada	
	Zarszyn	35,82

Piotr Kumor idzie jak burza. Punktów liczbę magiczną czterdzieści-i-cztery zgromadził na swym koncie już po raz dziesiąty!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 543, 544

Redaguje Marcin E. KUCZMA

543. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunki

$$f(x+1) - f(x) = f(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

544. Jak wiadomo (od czasów Eulera), równanie $x^3 + y^3 = z^3$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z . A czy równanie

$$x^{3/2} + y^{3/2} = z^{3/2}$$

ma rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z ?

Zadanie 544 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2007

Przypominamy treść zadań:

535. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze postaci $p = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, gdzie a, b są liczbami naturalnymi.

536. Znaleźć wszystkie wielomiany W (o współczynnikach rzeczywistych) spełniające równanie $W(x) + W(4x) + W(6x) + W(7x) = W(2x) + W(3x) + W(5x) + W(8x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

535. Przyjmijmy, że liczby a, b, p spełniają podane warunki i wprowadźmy oznaczenie $a - b = d$ (więc $d \in \mathbb{N}$). Wówczas $4p^2 = b^2 d / (2b + d)$, czyli

$$db^2 - 8p^2 b - 4dp^2 = 0.$$

Liczba naturalna b jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $dx^2 - 8p^2 x - 4dp^2$, więc jego wyróżnik $\Delta = 16p^2(4p^2 + d^2)$ musi być kwadratem liczby całkowitej. Zatem

$$4p^2 + d^2 = q^2$$

dla pewnej liczby naturalnej q .

W takim razie $4p^2 = (q + d)(q - d)$; czynniki w nawiasach są jednakowej parzystości, muszą być oba parzyste. Przyjmując $q + d = 2u, q - d = 2v$, mamy

$$uv = p^2, \quad u > v \geq 1;$$

a skoro p jest liczbą pierwszą, to $u = p^2, v = 1$, czyli

$$q = u + v = p^2 + 1, \quad d = u - v = p^2 - 1.$$

Wspomniany trójmian kwadratowy ma pierwiastki różnych znaków, więc liczba b jest jego większym pierwiastkiem:

$$b = \frac{8p^2 + \sqrt{\Delta}}{2d} = \frac{4p^2 + 2pq}{d} = \frac{4p^2 + 2p(p^2 + 1)}{p^2 - 1} = 2p + \frac{4p}{p - 1}.$$

To pokazuje, że liczba 4 dzieli się przez $p - 1$, a zatem p jest jedną z liczb 2, 3, 5.

Dla każdej z tych wartości p napisane wyżej wzory wyznaczają wartości b, q, d, a . Dostajemy następujące trójki

(p, a, b) : (2, 15, 12), (3, 20, 12), (5, 39, 15), które istotnie spełniają wymagane warunki.

536. Niech W będzie wielomianem nie równym tożsamościowo zeru,

$$W(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \quad (n \geq 0; \quad a_n \neq 0).$$

Lewa strona zadanego równania jest wielomianem, w którym współczynnik przy x^n jest równy

$$(1^n + 4^n + 6^n + 7^n)a_n;$$

po prawej stronie analogiczny współczynnik wynosi

$$(2^n + 3^n + 5^n + 8^n)a_n.$$

Jeśli równanie jest tożsamościowo spełnione, to

$$1^n + 4^n + 6^n + 7^n = 2^n + 3^n + 5^n + 8^n.$$

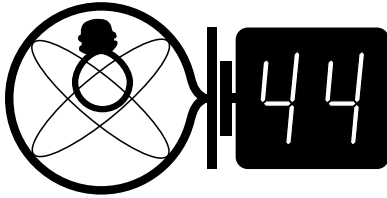
Ta równość zachodzi dla $n = 0, 1, 2$; nie zachodzi dla $n = 3$ (bo $624 \neq 672$) ani dla żadnego większego n , bowiem jej lewa strona ma dla $n \geq 4$ wartość mniejszą niż sam składnik 8^n po prawej stronie.

Rozważane równanie nie jest więc spełnione przez żaden wielomian stopnia większego od 2, jest zaś spełnione przez jednomiany

$$W_0(x) = 1, \quad W_1(x) = x, \quad W_2(x) = x^2.$$

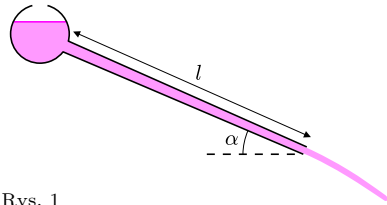
Jest też spełnione przez każdą kombinację liniową tych jednomianów. Zatem ogólnym rozwiązaniem równania jest zbiór wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej 2.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

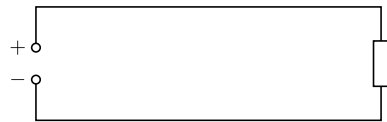


Termin nadsyłania rozwiązań:

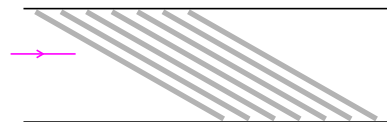
31 VIII 2007



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

440. Jaś mieszka w wysokim budynku i zabawia się, oblewając przechodniów wodą z okna. Używa w tym celu konewki (schemat – zob. rys. 1), a żeby sięgnąć strumieniem wody bliżej lub dalej, zmienia jej kąt pochylenia α . Jaki kąt da mu największy zasięg strumienia? Jak daleko powinien stać przechodzień, aby czuć się bezpiecznie? Długość konewki l i wysokość spadku h są dane (oczywiście $l \ll h$). Opór powietrza należy pominąć.

441. Dwa równoległe długie przewodniki prostoliniowe o promieniu $r = 1$ mm są odległe o $d = 10$ cm. Z jednej strony do ich końców przyłożono pewne napięcie, a z drugiej połączono je opornikiem R (rys. 2). Opór samych przewodników można pominąć. Jaka powinna być wartość R , aby siła elektrostatycznego przyciągania ładunków na jednym i drugim przewodniku równoważyła się z siłą magnetycznego odpychania przewodników, wynikającą z przepływu prądu? Względna przenikalność elektryczna i magnetyczna ośrodka wynosi 1.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2007

Przypominamy treść zadań:

432. Prosty polaryzator (rys. 3) jest zestawem równoległych płytek szklanych ustawionych pod kątem Brewstera i umieszczonych w pudełku pomalowanym od środka na czarno. Gdy skierujemy na nie wiązkę światła niespolaryzowanego, wychodzące światło staje się spolaryzowane, w stopniu zależnym od liczby płytek. Z ilu płytek powinien składać się przyrząd, aby zawierało ono nie więcej niż 10% „niewłaściwej” składowej? Pudełko jest szerokie, tak że trzeba uwzględnić dowolną liczbę odbić światła od różnych powierzchni płytek. Przyjmij $n = 1,5$, pominij pochłanianie światła w szkło i efekty interferencji.

Wskazówka: gdy promień pada na powierzchnię szkła pod kątem Brewstera (lub wybiega pod kątem Brewstera) i jest spolaryzowany w płaszczyźnie prostopadłej, współczynnik odbicia R wynosi

$$R = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2$$

433. W jednym z artykułów ze *Świata Nauki* w zeszłym roku można było przeczytać, że powyżej pewnej energii progowej (tzw. granica GZK) proton może rozproszyć się na niskoenergetycznym fotonie promieniowania reliktyowego wypełniającego przestrzeń międzygwiazdową, w wyniku czego powstaje mezon π^0 . Obliczyć wartość granicy GZK. Dana jest energia fotonu $E_f = 10^{-3}$ eV, masa protonu $m_p = 938$ MeV/c², masa mezonu $m_\pi = 135$ MeV/c².

432. Przyjmijmy, że promień padający jest spolaryzowany w płaszczyźnie prostopadłej, a jego natężenie jest równe 1. Oznaczmy współczynnik przejścia $T = 1 - R$. Wiązka przechodząca przez jedną płytkę składa się z promienia przechodzącego bez odbicia, którego natężenie wynosi T^2 , promienia dwukrotnie odbitego wewnątrz o natężeniu $T^2 R^2$, promienia czterokrotnie odbitego wewnątrz o natężeniu $T^2 R^4$ itd. – łącznie natężenie wiązki przechodzącej jest równe

$$T_1 = T^2 + T^2 R^2 + T^2 R^4 \dots = \frac{T}{2 - T}$$

W podobny sposób można wyprowadzić wzór rekurencyjny na współczynnik przejścia dla k płytek

$$T_{k+1} = \frac{T_k T_1}{T_k + T_1 - T_k T_1}$$

Postawiony w zadaniu warunek ma postać

$$T_k < 0,1(1 + T_k),$$

czyli

$$T_k < 0,111.$$

Obliczenia wykazują, że przy podanej wartości współczynnika załamania minimalną liczbą płytek jest $k = 24$. W praktyce wystarczy znacznie mniejsza liczba, gdyż założenie o uwzględnieniu dowolnej liczby odbić nie odpowiada rzeczywistości, a właśnie wielokrotne odbicia

przyczyniają się do zwiększenia natężenia niewłaściwej składowej w wiązce wybiegającej z przyrządu.

433. Oznaczmy całkowitą energię protonu przez E . Jego pęd wyraża się wzorem

$$p_p = \sqrt{E^2/c^2 - m_p^2 c^2}$$

Najniższą wartość E niezbędną do wytworzenia mezonu otrzymamy zakładając, że pędy protonu i fotonu są skierowane przeciwnie, czyli całkowity pęd jest równy

$$p = p_p - E_f/c.$$

Całkowita energia w układzie środka masy wynosi

$$E_c = \sqrt{(E + E_f)^2 - p^2 c^2}$$

Tę energię należy przyrównać do sumy energii spoczynkowych protonu i mezonu. W wyniku przekształceń otrzymujemy warunek

$$2p_p c E_f + 2E E_f = 2m_p m_\pi c^4 + m_\pi^2 c^4$$

Jeśli zauważymy, że

$$E \gg m_p c^2,$$

to możemy oszczędzić sobie rozwiązywania równania kwadratowego i przybliżyć po lewej $p_p c \approx E$, czyli

$$E = (2m_p + m_\pi) \frac{m_\pi c^4}{4E_f} = 6,8 \cdot 10^{19} \text{ eV}.$$



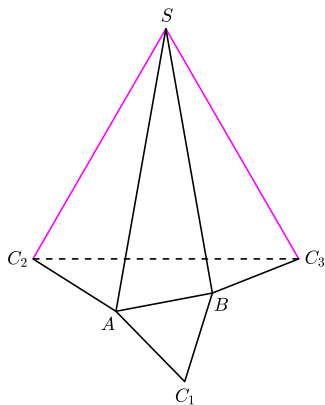
Patrz w niebo

Gwiazdy Wofła-Rayeta (WR) to bardzo gorące i bardzo masywne gwiazdy znajdujące się w stadium poprzedzającym ich wybuch jako supernowych. Promieniowanie takiej gwiazdy jest tak potężne, że rozdmuchuje zewnętrzne warstwy jej atmosfery, przez co gwiazda z reguły otoczona jest mgławicą powstałą z własnej materii (patrz *Delta* 5/2007). Układ podwójny WR 140 w Łabędziu składa się z dwu bardzo gorących gwiazd: składnik typu O obiega masywniejszą i jeszcze gorętszą gwiazdę WR. W takim układzie można by spodziewać się „wszystkiego” tylko nie pyłu. Jest tam po prostu za gorąco, tymczasem kilka lat temu właśnie zaobserwowano w tym układzie ciągłą produkcję pyłu.

Mechanizm tego dość niezwykłego zjawiska może być następujący. Co 8 lat gwiazdy osiągają minimum wzajemnej odległości (tyle wynosi okres obiegu), wynoszące 2,5 j.a. Wiatry gwiazdowe zderzają się wtedy, tworząc falę uderzeniową, która tak dalece zgęszcza gaz, że staje się w nim możliwe powstawanie ziaren pyłu. Badacze tego układu podwójnego śledzili go przez kilka lat za pomocą 10-metrowego teleskopu Kecka na Hawajach, zastosowawszy niecodzienną technikę. Mianowicie, na lustro teleskopu założono przesłonę z 36 niewielkimi otworami, przez co stało się ono 36-elementowym interferometrem. Pomiar sygnałów od tych 36 miniteleskopów pozwolił na uzyskanie w bliskiej podczerwieni zdolności rozdzielczej rzędu 20 milisekund łuku. Jest to wprawdzie teoretycznie możliwe dla 10-metrowego lustra, ale gdyby teleskop znajdował się poza atmosferą! W efekcie uzyskano jakby kilka klatek filmu ukazującego, że układ podwójny wyrzuca spiralne smugi pyłu podobne do strug wody wylatujących z wirującego zraszacza trawników. Teoretycy doszli również do wniosku, że około 20% wytworzonego przez gwiazdy pyłu ma szansę przetrwać pobyt w sąsiedztwie gorących gwiazd i zasilić ośrodek międzygwiazdowy. Analiza promieniowania podczerwonego smug pyłu pozwoliła też na ocenę rozmiarów ziaren pyłu – okazało się, że są one w przybliżeniu 100 razy większe, niż spodziewano się na podstawie współczesnej wiedzy o pyłe międzygwiazdowym. Nie wiadomo na razie, dlaczego tak jest. Obecnie układ WR 140 w Łabędziu nie jest już jedynym znanym układem dwu gorących gwiazd WR+O tak się zachowującym.

Tomasz KWAST

Rozwiązanie zadania M 1173.
Rozetnijmy powierzchnię ostrosłupa wzdłuż krawędzi AC , BC , SC , po czym rozłóżmy ją na płaszczyźnie.



W ten sposób uzyskujemy siatkę ostrosłupa $ABCS$, składającą się z trójkątów ABS , ABC_1 , ASC_2 , BSC_3 . Ponieważ $SC_2 = SC_3$ oraz

$$\begin{aligned} \sphericalangle C_2SC_3 &= \\ &= \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC + \sphericalangle CSA = \\ &= 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ, \end{aligned}$$

więc trójkąt C_2C_3S jest równoboczny. Stąd

$$\begin{aligned} CA + AB + BC = C_2A + AB + BC_3 &\geq \\ &\geq C_2C_3 = SC_2 = CS. \end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości krawędzi AS i BS , co kończy rozwiązanie zadania.

Czerwiec

Mamy teraz okres najkrótszych nocy, a właściwie tzw. noc astronomiczna w czerwcu w ogóle w Polsce nie zapada. Podczas nocy astronomicznej Słońce powinno znajdować się formalnie ponad 18° pod horyzontem. Liczba ta wzięła się prawdopodobnie z praktyki, mianowicie gdy Słońce zapadnie głębiej pod horyzont, to i tak ciemniej już nie będzie. Podczas przesilenia letniego noc astronomiczną może mieć obserwator, którego szerokość geograficzna nie przekracza $48^\circ 5'$. Tymczasem południowy skraj Polski, np. Tatry, leży na szerokości $49^\circ 10'$. Tak więc w czerwcowe wieczory niebo mamy nie tak ciemne, jak mogłoby być, bo po pierwsze – jest dopiero wieczór, a po drugie – nawet o północy nie ma w Polsce nocy astronomicznej. W kierunku południowym i wysoko widzimy jedną z najjaśniejszych gwiazd całego nieba, Arktura, alfę Wolarza. Ten pomarańczowy olbrzym o zerowej wielkości gwiazdowej jest gwiazdą stosunkowo bliską (11 pc), nic więc dziwnego, że to u niego Halley zauważył (przez porównanie położenia z danymi starożytnymi) ruch własny.

Merkury 2 VI znajdzie się najdalej od Słońca i można próbować go znaleźć po zachodzie. Wenus jest w Raku i widać ją wieczorem, a 9 VI znajdzie się ona najdalej kątowno od Słońca. Mars jest w Rybach, wschodzi więc przed wschodem Słońca. Jowisz jest w Wężowniku i widać go przez całą noc; 5 VI znajdzie się w opozycji. Saturn jest we Lwie, widać go na zachodnim niebie i koło północy zachodzi. Pełnia Księżycy jest w czerwcu dwa razy: 1 VI i 30 VI, a nów 15 VI. Księżyc zakryje: Antaresa 1 VI, co zobaczą mieszkańcy południowej części Ameryki Południowej i części Antarktydy; Wenus 18 VI, co w zasadzie powinni zobaczyć m.in. Europejczycy, ale będzie to w dzień (około godz. 17); Saturna 19 VI, a to zakrycie będzie widać w Azji i na wschodzie Europy; Regulusa 20 VI, co zobaczą mieszkańcy Syberii i Północnej Ameryki; i ponownie Antaresa 28 VI, co zobaczą mieszkańcy Oceanii. Przesilenie letnie będzie 21 VI – zaczną się lato i długie dni zaczną się skracać. Przewidywalnych rojów meteorów nie będzie.

T. K.

Miesiąc temu opowiadaliśmy o martyngałach: są to takie ciągi zmiennych losowych (X_n) , że:

$$E(X_{n+1}|X_n, \dots, X_0) = X_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Jeśli X_n jest łączną wygraną w pewnej grze do chwili n , to powyższa równość mówi, że średnia wygrana w chwili $n+1$, gdy znamy historię gry do chwili n , wynosi X_n . Średni przyrost wygranej jest zatem zerowy, a grę nazwiemy sprawiedliwą. W literaturze martyngały nazywa się zresztą czasami „ciągami absolutnie fair”.

Dla hazardzisty martyngał oznacza sposób ustalania stawek, który miałby zwiększać szanse wygranej. Martyngał klasyczny wymaga podwojenia stawki po każdej przegranej. Jest wiele martyngałów, nierzadko o fantastycznych nazwach: wielki, amerykański, holenderski, *piquemouche*, *paroli*, kontra d'Alemberta. Zaczynamy się domyślać, że skoro jest ich tak wiele, to żaden nie jest skuteczny. I rzeczywiście, nawet kontra d'Alemberta nie pomoże przeciwko podstawowemu twierdzeniu teorii – twierdzeniu Dooba.

Powody są dwa: po pierwsze, gra w kasynie nie jest oczywiście sprawiedliwa, bowiem wygrane tworzą *nadmartyngał*, czyli

$$E(X_{n+1}|X_n, \dots, X_0) \leq X_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Z punktu widzenia kasyna mamy do czynienia z *podmartyngałem*.

Po drugie, ze wspomnianego twierdzenia wynika, że nawet w grze sprawiedliwej żadna taktyka, polegająca na wycofaniu się z gry w chytrze wybranym momencie, ani żaden sposób ustalania stawek nie zmienia faktu, że średnia wygrana w każdej turze jest zerowa.

Dlaczego każda realistyczna metoda obstawiania zamienia martyngał na martyngał? Stawka w $(n+1)$ -szej turze może zależeć jedynie od historii gry do chwili n (wykluczamy przewidywanie przyszłości), jest więc postaci $f(X_0, \dots, X_n)$. Jeśli tyle postawimy, to wygramy

$$f(X_0, \dots, X_n) \cdot (X_{n+1} - X_n).$$

Gdyby Czytelnik miał wątpliwości co do tego wzoru, niech sobie przypomni Jasia, grającego z Małgosią w orła i reszkę. Jeśli Jaś postawił a zł na orła, musi dostać zwrot stawki plus a zł, gdy wypadnie orzeł. Obliczamy średnią wygraną w $(n+1)$ -szej turze:

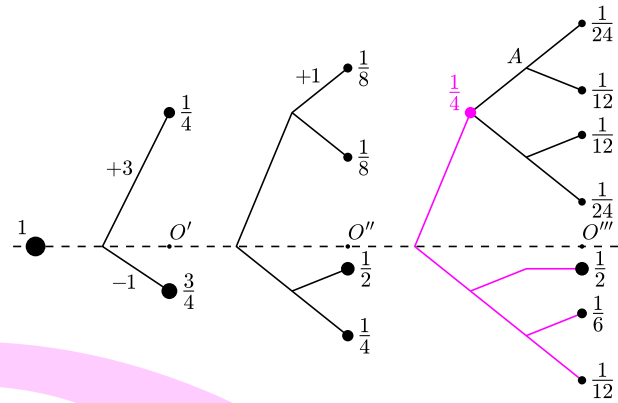
$$E(f(X_0, \dots, X_n) \cdot (X_{n+1} - X_n) | X_0, \dots, X_n) = f(X_0, \dots, X_n) \cdot E(X_{n+1} - X_n | X_0, \dots, X_n) = 0.$$

Skorzystaliśmy ze znanej własności warunkowej wartości oczekiwanej. Wymaga ona założenia, że zmienna losowa $f(X_0, \dots, X_n)$ jest ograniczona – wówczas $E|f(X_0, \dots, X_n) \cdot (X_{n+1} - X_n)| < \infty$, z czego wynika, że warunkowa wartość oczekiwana ma sens. Założenie to można osłabiać, ale i w tej postaci nie jest zbyt ograniczające, bo wyklucza jedynie nieskończony kapitał gracza.

Można sobie poradzić i bez jawnego używania warunkowej wartości oczekiwanej. Jeśli zdecydowaliśmy już, że stawiamy a zł, to wygramy $a \cdot (X_{n+1} - X_n)$ zł, zatem średnio – zero.

Zbadamy teraz, czym charakteryzują się dopuszczalne sposoby wyboru chwili wycofania się z gry, zwane momentami stopu lub momentami Markowa. Rysunek przedstawia schemat zmodyfikowanej gry w orła i reszkę z poprzedniego odcinka.

Jak widać, $P(X_0 = 0) = 1$; $P(X_1 = 3) = \frac{1}{4}$, $P(X_1 = -1) = \frac{3}{4}$, więc $EX_1 = 0$; $P(X_2 = 4|X_1 = 3) = P(X_2 = 2|X_1 = 3) = \frac{1}{2}$, zatem $E(X_2|X_1 = 3) = 3$, etc.



Zmienne losowe X_0, X_1, X_2, X_3 tworzą martyngał. Można to wyrazić inaczej: jeśli prawdopodobieństwa wyobrazimy sobie jako masy, to na wszystkich czterech rysunkach drzewka są zrównoważone w tym sensie, że wysokość środka masy gałęzi wyrastającej z węzła jest równa wysokości tegoż węzła. W szczególności, środki masy wszystkich drzewek (punkty O', O'', O''') są na tej samej wysokości, co korzeń.

Na drzewku po prawej zaznaczono kolorem możliwe historie gry, odpowiadające taktyce „wycofać się, gdy wygrana osiągnie 3 zł”, opisaną przez zmienną losową

$$\tau = \inf\{n: X_n = 3 \vee n = 3\}.$$

Jest to taktyka dopuszczalna. Z rysunku odczytujemy, że $P(X_\tau = 3) = \frac{1}{4}$, $P(X_\tau = -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $P(X_\tau = -\frac{3}{2}) = \frac{1}{6}$; $P(X_\tau = -3) = \frac{1}{12}$. Jak można było przewidzieć, $EX_\tau = EX_0 = 0$. Tak będzie dla każdej dopuszczalnej taktyki: przerwanie gry w momencie stopu τ jest równoważne obcięciu niektórych gałęzi i przemieszczeniem mas do węzła, z którego wyrastały. Taka operacja nie zmienia wysokości środka masy.

Czytelnik zechce się zastanowić, jak przedstawić na rysunku jawnie niedopuszczalną taktykę: „wycofać się, gdy wygrana osiągnie maksimum”. Na przykład w punkcie A nie możemy na podstawie wartości X_0, X_1 i X_2 podjąć decyzji, czy kończymy grę, chyba że wróżka powie nam, jaką wartość przyjmie X_3 .

Udowodniliśmy – co prawda w prostym przypadku

Twierdzonekko. *Jeśli (X_n) jest martyngałem, a τ ograniczonym momentem stopu, to $EX_\tau = EX_0$.*

Oto równoważne sformułowanie, które Czytelnicy mający pewne obycie z warunkową wartością oczekiwaną mogą spróbować udowodnić techniką drzewek:

Twierdzenie Dooba. *Jeśli (X_n) jest martyngałem, a $\tau_1 \leq \tau_2$ są ograniczonymi momentami stopu, to $E(X_{\tau_2}|X_{\tau_1}) = X_{\tau_1}$.*

Stąd interesujący wniosek: jeśli deterministyczne chwile $1, 2, \dots, n$ zastąpimy przez ograniczone momenty stopu $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n$, to ciąg $X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n}$ będzie nadal martyngałem!

Cóż więc wynika z twierdzenia Dooba dla gracza stosującego wyrafinowaną metodę stopowania τ ? Nie da się zmienić faktu, że $EX_\tau = 0$. Ale jeśli chcemy wygrać 1 zł, a możemy zaangażować 1000 zł, to mamy dużą szansę sukcesu (i to niezależną od metody!), bowiem

$$0 = EX_\tau = 1 \cdot P(X_\tau = 1) - 1000 \cdot P(X_\tau = -1000),$$

i $P(X_\tau = 1) + P(X_\tau = -1000) = 1$, więc $P(X_\tau = 1) = \frac{1000}{1001}$.



Dodatek Olimpijski

Zadania II stopnia oraz finału Olimpiady Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej

LVI OLIMPIADA FIZYCZNA 2006/2007

Komitet Główny Olimpiady Fizycznej: <http://www.kgof.edu.pl>

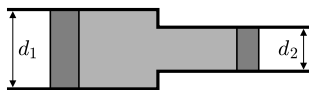
ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Pewien fotograf posiada aparat fotograficzny z obiektywem o ogniskowej f zmiennej w zakresie od f_{min} do f_{max} . Średnica otworu przysłony obiektywu jest równa d . Fotograf pragnie wykonać portret koleżanki w taki sposób, by jej twarz była „ostra” na zdjęciu i zajmowała połowę jego wysokości, a znajdujący się w odległości l za nią budynek był jak najbardziej rozmyty. Przy jakiej wartości ogniskowej fotograf powinien wykonać to zdjęcie? Rozważ następujące przypadki:

- a) średnica otworu przysłony d nie zależy od f ;
- b) d zmienia się wraz ze zmianą f tak, że d/f jest stałe.

Uwaga: Rozmycie obrazu punktu B przy ostrości ustawionej na punkt A jest określone przez wielkość (średnicę) plamki, jaką na matrycy (lub kliszy) aparatu utworzy światło wychodzące z punktu B . Przyjmij, że dla danego f obiektyw jest cienką, idealną (brak aberracji i dyfrakcji) soczewką o średnicy d oraz że odległość koleżanki od obiektywu jest znacznie większa od ogniskowej.

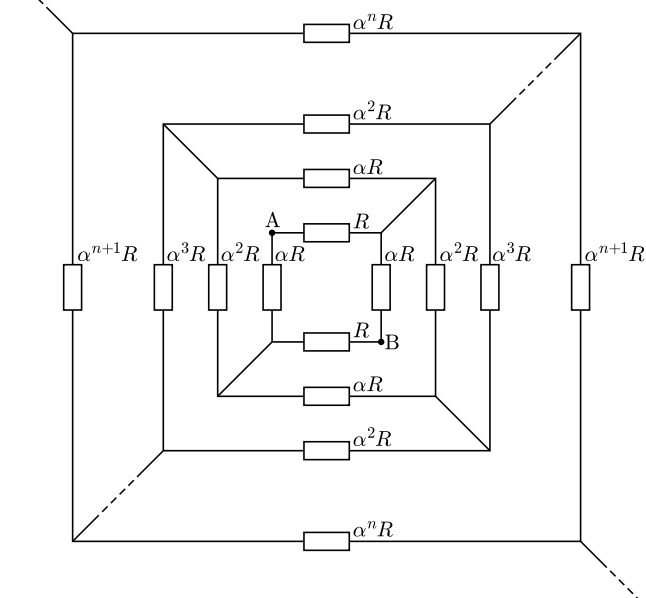
2. Rura o masie M składa się z odcinków o średnicach d_1 i d_2 , w których mogą poruszać się bez tarcia dwa tłoki (patrz rys.). Prawy tłok ma masę m_2 . Rura może swobodnie poruszać się w poziomie.



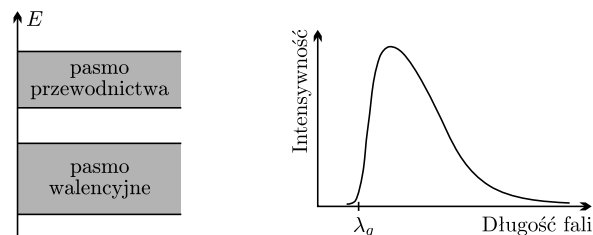
W chwili początkowej ciśnienie powietrza pomiędzy tłokami było równe ciśnieniu zewnętrznemu, rura i prawy tłok były nieruchome, a lewy tłok miał prędkość v_{1p} w prawo. Powietrze z obszaru pomiędzy tłokami nie wydostaje się na zewnątrz, a jego masa jest zaniedbywalna w porównaniu z masami tłoków i rury. Przemiana tego powietrza jest odwracalna i adiabatyczna. Przyjmij, że siła, z jaką powietrze działa na element powierzchni tłoka lub rury, nie

zależy od prędkości tego elementu. Stwierdzono, że lewy tłok zatrzymał się w chwili, gdy ciśnienie powietrza pomiędzy tłokami powróciło do wartości początkowej. Wyznacz masę m_1 lewego tłoka. Podaj wartość liczbową m_1 dla $m_2 = 1$ kg, $M = 3$ kg, $d_1 = 0,2$ m, $d_2 = 0,1$ m. Zakładamy, że wszystkie parametry są tak dobrane, iż do momentu zatrzymania lewy tłok nie uderzy w zwężenie, a prawy nie wypadnie z rury.

3. Znajdź opór zastępczy między punktami A i B nieskończonej sieci oporów przedstawionej na rysunku ($\alpha > 0$). Dla jakiej wartości α ten opór zastępczy jest równy R ?



Zadanie doświadczalne. Energia elektronów w półprzewodniku może przybierać wartości pasmo należące do dwóch przedziałów: dolnego (tzw. pasmo walencyjne) i przewodnictwa górnego (pasmo przewodnictwa), natomiast wykluczone są energie leżące w przerwie między tymi pasmami. Odkładając energię na osi pasmo pionowej, otrzymujemy schemat przedstawiony na rysunku. Jeśli elektron przeskoczy z pasma przewodnictwa do pasma walencyjnego, to utraconą energię może emitować w postaci kwantu promieniowania. Na tej zasadzie działa dioda elektroluminescencyjna (LED). Wymaga ona zasilania takim napięciem, aby przepływający przez diodę elektron uzyskał energię równą co najmniej szerokości przerwy wzbronionej. Największa energia kwantu wysłanego przez diodę (krótkofalowa granica widma emitowanego światła, zob. przedstawione poniżej przykładowe widmo dla pewnej diody) odpowiada przetworzeniu w kwant światła całej energii pobranej przez jeden elektron ze źródła zasilania.



Podany powyżej opis jest skrajnie uproszczony. Dioda składa się z dwóch stykających się warstw półprzewodnika: jednej (typu n), w której elektrony zajmują wszystkie stany w obrębie pasma walencyjnego, a ponadto występuje pewna liczba elektronów w paśmie przewodnictwa oraz drugiej (typu p), w której nie ma elektronów w paśmie przewodnictwa, a także nie wszystkie stany należące do pasma walencyjnego pozostają zajęte. Emitowanie światła przez diodę wymaga przyłożenia ujemnego bieguna napięcia zasilającego diodę do warstwy n , a dodatniego do warstwy p .

Światło jest emitowane z obszaru złącza (zetknięcia dwóch warstw).

Mając do dyspozycji:

- trzy różnokolorowe diody elektroluminescencyjne,
- płytę CD,
- linijkę,
- zasilacz prądu stałego o regulowanym napięciu,
- woltomierz,
- opornik o rezystancji 460Ω ,
- przewody, zaciski itp. elementy umożliwiające zestawienie obwodu elektrycznego,
- statyw,
- papierową taśmę klejącą,
- papier milimetrowy.

A) Wyznacz długość fali światła odpowiadającą krótkofalowej granicy widma emitowanego przez poszczególne diody. Przyjmij, że dane na płycie CD zapisywane są na spiralnej ścieżce, a odległość między kolejnymi „nawinięciami” spirali wynosi $1,55 \pm 0,05 \mu\text{m}$. Pomiary wykonaj dla kilku wartości natężenia prądu płynącego przez diody, w zakresie od 3 mA do 10 mA .

B) Wyznacz stałą Plancka. Przyjmij, że prędkość światła wynosi $2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, natomiast ładunek elektronu $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Możesz też przyjąć, że w przypadku będących do Twojej dyspozycji diod, przy wartościach prądu powyżej 3 mA , napięcie na złączu $p-n$ nie zmienia się. Wzrost napięcia na końcówkach diody przy prądzie wzrastającym powyżej 3 mA wynika z niezerowego (stałego) oporu doprowadzeń do obszaru złącza.

Uwaga! Diodę można łatwo uszkodzić przepuszczając przez nią prąd o natężeniu przekraczającym 10 mA . Dla bezpieczeństwa, diodę należy podłączyć do źródła napięcia szeregowo z opornikiem. Dioda będzie świecić pod warunkiem, że jej dłuższą nóżkę podłączy się do bieguna dodatniego, a krótszą do bieguna ujemnego źródła prądu.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Piłka uderza w poziomą podłogę pod kątem α z prędkością v_0 . Współczynnik tarcia piłki o podłogę jest równy μ . W jakiej odległości od miejsca pierwszego uderzenia piłka ponownie uderzy w podłogę?

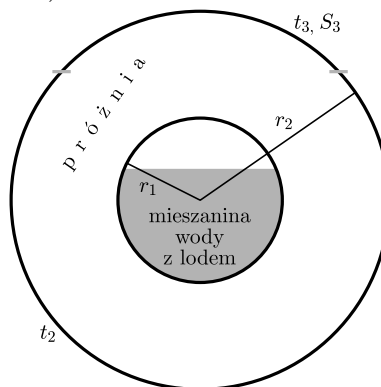
Podaj wartości liczbowe dla $\alpha = 45^\circ$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$ w dwóch przypadkach: $\mu = 0,1$ i $\mu = 0,8$.

Piłka nie obraca się przed zderzeniem. Czas zderzenia jest bardzo krótki, a w trakcie zderzenia ugięcie piłki jest zanedbywalnie małe w porównaniu z jej promieniem. Piłka jest idealnie sprężysta, tzn. w przypadku, gdy nie obracając się uderza pionowo w podłogę, zderzenie jest idealnie sprężyste. Grubość powłoki piłki jest bardzo mała w porównaniu z promieniem. Powłoka nie ulega odkształceniu stycznemu. Masa powietrza w piłce jest zanedbywalnie mała w porównaniu z masą jej powłoki. Pomiń opory aerodynamiczne.

Przyspieszenie ziemskie $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$, a moment bezwładności sfery o promieniu R i masie m względem osi przechodzącej przez jej środek $I = (2/3)mR^2$.

2. Kuliste naczynie składa się ze współśrodkowych, cienkich, metalowych sfer o promieniach r_2 i r_1 (gdzie $r_2 > r_1$) między którymi jest próżnia (patrz rys.). Zewnętrzna sfera jest podzielona płaszczyzną na dwie części, z których mniejsza ma powierzchnię S_3 . W wewnętrznej sferze umieszczono mieszaninę wody o masie m_W i lodu o masie m_L . Większa

część zewnętrznej powłoki naczynia ma stałą temperaturę t_2 , a mniejsza – stałą temperaturę t_3 (t_2 i t_3 są temperaturami w skali Celsjusza).



Po jakim czasie lód ulegnie całkowitemu roztopieniu?

Podaj wynik liczbowy dla $r_1 = 0,04 \text{ m}$, $r_2 = 0,08 \text{ m}$, $S_3 = 0,03 \text{ m}^2$, $m_W = 0,1 \text{ kg}$, $m_L = 0,1 \text{ kg}$, $t_2 = 20^\circ\text{C}$, $t_3 = 10^\circ\text{C}$.

Powierzchnie sfer są doskonale czarne. Pojemność cieplną naczynia można zaniedbać. Przyjmij, że lód jest stale w stanie równowagi termodynamicznej z wodą. Ciśnienie wewnątrz wewnętrznej sfery jest stale równe ciśnieniu normalnemu.

Ciepło topnienia lodu wynosi $q = 334 \text{ kJ/kg}$, stała Stefana-Boltzmann $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$, ciepło właściwe wody $c_W = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, ciepło właściwe lodu $c_L = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, temperatura topnienia lodu w warunkach normalnych $T_0 = 273,15 \text{ K}$.

3. Cienki, jednorodny pierścień o masie m i promieniu r spoczywa na poziomym blacie stołu. Pierścień jest zrobiony z jednego zwoju drutu, którego opór na jednostkę długości wynosi λ . Pod blatem znajduje się współosiowy z pierścieniem solenoid.

Zależność od czasu t natężenia prądu płynącego w solenoidzie jest dana wzorem

$$I_s = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ I_0 \frac{t}{T} & \text{dla } 0 \leq t < T, \\ I_0 & \text{dla } t \geq T, \end{cases}$$

(gwarantuje to odpowiedni układ elektroniczny, do którego solenoid jest podłączony).

a) Znajdź największą wartość I_0 ($= I_{0m}$), dla której pierścień jeszcze nie podskoczy ponad blat.

b) Zakładając, że $I_0 \gg I_{0m}$ (patrz punkt a)), wyznacz wysokość, na jaką podskoczy pierścień.

W rozwiązaniu uwzględnij następujące informacje:

(i) gdy pierścień jest umieszczony (współosiowo z solenoidem) na niewielkiej wysokości z nad blatem, a prąd płynący w solenoidzie ma natężenie I_s , to z bardzo dobrym przybliżeniem strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez pierścień jest dany wzorem $\Phi = (a - bz) I_s$, gdzie a , b są dodatnimi stałymi;

(ii) w każdym punkcie pole magnetyczne pochodzące od pierścienia można pominąć w porównaniu z polem pochodzącym od solenoidu;

(iii) można pominąć wpływ ruchu pierścienia na natężenie płynącego w nim prądu;

(iv) parametr T jest na tyle mały, że droga przebyta przez pierścień do chwili $t = T$ jest pomijalnie mała;

(v) blat jest niemagnetyczny i nieprzewodzący, a solenoid jest nieruchomy;

(vi) efekty związane z promieniowaniem oraz opór aerodynamiczny powietrza można pominąć.

Podaj wartości liczbowe szukanych wielkości dla $m = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, $r = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $\lambda = 0,9 \cdot 10^{-2} \Omega/\text{m}$, $a = 10^{-3} \text{ T} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-1}$, $b = 10^{-2} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}$, $T = 10^{-3} \text{ s}$, $I_0 = 10 \text{ A}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ (przyspieszenie ziemskie).

Laureaci LVI Olimpiady Fizycznej

1. Tomasz Smoleński, VI LO im. Jana Kochanowskiego, Radom, nauczyciel: mgr Marek Golka
2. Robert Obryk, V LO im. Augusta Witkowskiego, Kraków, n.: dr Ryszard Zapała
3. Paweł Duch, I LO im. Jędrzeja Śniadeckiego, Dzierżoniów, n.: mgr Elżbieta Jach
4. Adrian Panasiuk, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa, n.: dr Elżbieta Zawistowska
5. Jakub Sikorowski, III LO, Gdańsk, n.: mgr Anna Kwela
6. Marcin Bieda, LO Sióstr Prezentek im. Jana Pawła II, Rzeszów, n.: mgr Katarzyna Szydełko
7. Paweł Tomasik, II LO im. Stefana Żeromskiego, Tomaszów Mazowiecki, n.: mgr Jolanta Jaros
8. Bartłomiej Kamiński, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa, n.: dr Elżbieta Zawistowska
9. Paweł Magryta, I LO im. Stefana Czarnieckiego, Chełm, n.: mgr Anna Legwant

Zadanie doświadczalne „Praca wyjścia wolframu”.

Masz do dyspozycji:

- żarówkę samochodową 12 V z dwoma włóknami wolframowymi o mocy nominalnej 5 W oraz 20 W, odizolowanymi od siebie elektrycznie,
- woltomierz cyfrowy o oporze wewnętrznym 10 MΩ, niezależnym od zakresu napięcia stałego,
- miernik uniwersalny, który może być używany jako woltomierz i amperomierz prądu stałego,
- zasilacz prądu stałego o napięciu regulowanym w zakresie $0 \div 12 \text{ V}$,
- baterię 9 V,
- przewody elektryczne, krokodylki, folię aluminiową i inne elementy umożliwiające wykonanie odpowiednich połączeń elektrycznych,
- papier milimetrowy.

1) Wyznacz zależność temperatury włókna żarówki o mocy nominalnej 5 W od przyłożonego do niego napięcia w zakresie $0 \div 12 \text{ V}$. Uzyskaną zależność przedstaw na wykresie.

Przyjmij, że zależność oporu włókna od temperatury można opisać wzorem:

$$(1) \quad R_w(T) = R_0(1 + \alpha_R(T - T_0)),$$

gdzie T – bezwzględna temperatura włókna, natomiast R_0 – opór włókna w temperaturze pokojowej T_0 . Przyjmij $\alpha_R = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, $T_0 = 295 \text{ K}$.

2) Wyznacz pracę wyjścia W dla wolframu.

Przyjmij, że dla temperatur niższych niż 2000 K, liczbę n elektronów emitowanych w jednostce czasu w wyniku zjawiska termoemisji przez włókno wolframowe można opisać wzorem:

$$(2) \quad n = n_0 e^{-\frac{W}{kT}},$$

gdzie W – praca wyjścia, T – temperatura bezwzględna włókna, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ (stała Boltzmann), n_0 – pewna stała, $e = 2,718 \dots$ – podstawa logarytmu naturalnego.

Uwaga:

- a) W celu uniknięcia efektów elektrostatycznych mogących zakłócić pomiary, szklaną bańkę żarówki należy owinać folią aluminiową. Folia powinna być połączona elektrycznie z końcówką jednego z włókien.
- b) Miernik uniwersalny, który może być używany jako woltomierz i amperomierz prądu stałego ma obudowę o kolorze czarnym.

10. Karol Daszkiewicz, III LO im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia, n.: mgr Ewa Skrzypczak
11. Michał Gawroński, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa, n.: mgr Stanisław Lipiński
12. Piotr Zych, I LO im. Mikołaja Kopernika, Krosno, n.: mgr Grzegorz Depczyński
13. Piotr Godlewski, VI LO im. Jana Kochanowskiego, Radom, n.: mgr Marek Golka
14. Joanna Bogdanowicz, XIII LO, Szczecin, n.: mgr Krzysztof Łyszczek
15. Paweł Sznajder, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa, n.: mgr Robert Stasiak
16. Łukasz Marszałek, I LO im. Mikołaja Kopernika, Krosno, n.: mgr Grzegorz Depczyński
17. Wiktor Pilewski, IV LO im. Tadeusza Kościuszki, Toruń, n.: dr Maciej Wiśniewski

LVIII OLIMPIADA MATEMATYCZNA 2006/2007

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA (23, 24 lutego 2007)

1. Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.

2. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $BC = CD$, $DE = EA$, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90^\circ$. Udowodnić, że z odcinków o długościach AC , CE , EB można zbudować trójkąt. Wyznaczyć miary jego kątów, znając miarę α kąta ACE i miarę β kąta BEC .

3. Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n . Każda płytka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: Wybieramy płytke P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P . Następnie odwracamy płytke P na drugą stronę.

Dla każdego $n \geq 2$ rozstrzygnąć, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

4. Udowodnić, że jeżeli a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz $ad = b^2 + bc + c^2$, to liczba $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest złożona.

5. Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB \neq CD$, jest wpisany w okrąg. Czworokąty $AKDL$ i $CMBN$ są rombami o bokach długości a . Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

6. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4$. Wykazać, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leq 2(a+b+c+d) - 4.$$

ZAWODY III STOPNIA (18, 19 kwietnia 2007 r.)

1. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, odcinek CD jest wysokością, punkt E leży na boku AB , a punkt M jest środkiem odcinka CE . Prosta prostopadła do prostej OM i przechodząca przez punkt M przecina proste AC, BC odpowiednio w punktach K, L . Dowieść, że $\frac{LM}{MK} = \frac{AD}{DB}$.

2. Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *białą*, jeżeli jest równa 1 lub jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Pozostałe liczby całkowite dodatnie nazwiemy *czarnymi*.

Zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia, że suma jej białych dzielników jest równa sumie jej czarnych dzielników.

3. Płaszczyznę podzielono prostymi poziomymi i pionowymi na kwadraty jednostkowe. W każdy kwadrat należy wpisać liczbę całkowitą dodatnią tak, by każda liczba całkowita dodatnia wystąpiła na płaszczyźnie dokładnie raz. Rozstrzygnąć, czy można to uczynić w taki sposób, aby

każda napisana liczba była dzielnikiem sumy liczb wpisanych w cztery kwadraty sąsiednie.

4. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Wyznaczyć liczbę możliwych wartości iloczynu $k \cdot m$, gdzie k, m są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności $n^2 \leq k \leq m \leq (n+1)^2$.

5. W czworoscianie $ABCD$ spełnione są zależności
 $\sphericalangle BAC + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD$,
 $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC$.

Udowodnić, że środek sfery opisanej na tym czworoscianie leży na prostej przechodzącej przez środki krawędzi AB i CD .

6. Ciąg a_0, a_1, a_2, \dots jest określony przez warunki: $a_0 = -1$ oraz

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{a_1}{n} + \frac{a_0}{n+1} = 0 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Wykazać, że $a_n > 0$ dla $n \geq 1$.

Informacje o przebiegu LVIII Olimpiady Matematycznej

1. W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1259 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 567 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 123 uczniów.

2. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 20 kwietnia br. postanowił przyznać 20 osobom tytuł laureata i nagrody pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 punktów możliwych):

Nagrody stopnia pierwszego

1 miejsce: Przemysław MAZUR (36 pkt.), uczeń klasy drugiej II LO im. Króla Jana III Sobieskiego w Krakowie.

Nagrody stopnia drugiego

Miejsca 2–4

Piotr DOBEL (30 pkt.), uczeń klasy trzeciej Zespołu Szkół Ogólnokształcących w Przemyśle.

Tomasz KULCZYŃSKI (30 pkt.), uczeń klasy trzeciej VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy.

Wojciech ZAREMBA (30 pkt.), uczeń klasy trzeciej I LO im. Adama Mickiewicza w Kluczborku.

Nagrody stopnia trzeciego

5 miejsce: Tomasz KOBOS (26 pkt.), uczeń klasy trzeciej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Miejsca 6–13

Joanna BOGDANOWICZ (24 pkt.), uczennica klasy drugiej XIII LO w Szczecinie.

Przemysław CHOJECKI (24 pkt.), uczeń klasy trzeciej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Marcin DUBLAŃSKI (24 pkt.), uczeń klasy trzeciej I LO im. Edwarda Dembowskiego w Zielonej Górze.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl

Maciej GAWRON (24 pkt.), uczeń klasy trzeciej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Jakub KONIECZNY (24 pkt.), uczeń klasy drugiej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Maciej MACHULEC (24 pkt.), uczeń klasy trzeciej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Jakub OĆWIEJA (24 pkt.), uczeń klasy pierwszej V LO w Bielsku-Białej.

Karol STRZAŁKOWSKI (24 pkt.), uczeń klasy trzeciej LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach.

Miejsca 14–18

Mikołaj BIŃKOWSKI (23 pkt.), uczeń klasy pierwszej II LO im. Króla Jana III Sobieskiego w Krakowie.

Karol DASZKIEWICZ (23 pkt.), uczeń klasy trzeciej III LO im. Marynarki Wojennej w Gdyni.

Łukasz MAZUREK (23 pkt.), uczeń klasy drugiej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Maciej WAWRO (23 pkt.), uczeń klasy trzeciej I LO im. Mikołaja Kopernika w Jarosławiu.

Karol ŻEBROWSKI (23 pkt.), uczeń klasy drugiej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Miejsca 19–20

Jakub OSEJKOWSKI (22 pkt.), uczeń klasy trzeciej III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu.

Michał SOSNOWSKI (22 pkt.), uczeń klasy pierwszej XIII LO w Szczecinie.

3. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na tym samym posiedzeniu postanowił wyróżnić 23 zawodników:

Miejsca 21–23

Małgorzata Bładoszewska (20 pkt.), uczennica klasy trzeciej XIII LO w Szczecinie.

Michał Jastrzębski (20 pkt.), uczeń klasy trzeciej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Joachim Jelisiejew (20 pkt.), uczeń klasy drugiej I LO im. Adama Mickiewicza w Białymstoku.

Miejsca 24–37

Marcin Andrychowicz (18 pkt.), uczeń klasy drugiej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Radosław Burny (18 pkt.), uczeń klasy drugiej LO im. Marszałka Stanisława Małachowskiego w Płocku.

Mikołaj Dądela (18 pkt.), uczeń klasy trzeciej II LO im. Profesora K. Morawskiego w Przemyślu.

Michał Dereziński (18 pkt.), uczeń klasy trzeciej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Patryk Drobiński (18 pkt.), uczeń klasy pierwszej VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy.

Jakub Kallas (18 pkt.), uczeń klasy trzeciej III LO im. Marynarki Wojennej w Gdyni.

Karol Konaszyński (18 pkt.), uczeń klasy pierwszej XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu.

Szymon Majewski (18 pkt.), uczeń klasy drugiej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Krzysztof Opalski (18 pkt.), uczeń klasy trzeciej LXVII LO im. Jana Nowaka-Jeziorańskiego w Warszawie.

Damian Orlef (18 pkt.), uczeń klasy drugiej Gimnazjum nr 3 w Zabrze.

Sebastian Ruszkowski (18 pkt.), uczeń klasy piątej Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu.

Wojciech Śmietanka (18 pkt.), uczeń klasy trzeciej III LO im. Marynarki Wojennej w Gdyni.

Radosław Wądołowski (18 pkt.), uczeń klasy drugiej II LO im. Marii Konopnickiej w Opolu.

Maciej Weksej (18 pkt.), uczeń klasy trzeciej XIII LO w Szczecinie.

Miejsca 38–42

Krzysztof Danielowski (17 pkt.), uczeń klasy trzeciej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Dariusz Grała (17 pkt.), uczeń klasy trzeciej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Jacek Jendrej (17 pkt.), uczeń klasy drugiej III LO im. Unii Lubelskiej w Lublinie.

Marcin Kościelnicki (17 pkt.), uczeń klasy drugiej I LO im. Juliusza Słowackiego w Chorzowie.

Błażej Osiński (17 pkt.), uczeń klasy trzeciej ZSO nr 6, VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy.

43 miejsce: Damian Leśniak (16 pkt.), uczeń klasy drugiej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

4. W tym roku pożegnaliśmy Andrzeja Mąkowskiego, wieloletniego członka Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej. Pamiętamy Go jako osobę, która zawsze dbała o czystość języka i klarowność wypowiedzi. Dla uczczenia Jego pamięci Komitet Główny postanowił przyznać nagrodę im. Andrzeja Mąkowskiego za najlepiej zredagowane poprawne rozwiązanie jednego z zadań z finału LVIII Olimpiady Matematycznej.

Nominowano następujące osoby (w nawiasie podano numer zadania): *Patryk Drobiński (2)*, *Jacek Jendrej (2)*, *Miłosz Krupski (2)*, *Tomasz Kulczyński (1)*, *Przemysław Mazur (5)*, *Damian Rusak (2)* i *Urszula Swianiewicz (1)*.

Spośród nich nagrodzeni zostali:

Miłosz Krupski, uczeń klasy drugiej XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu.

Damian Rusak, uczeń klasy drugiej I LO im. Tadeusza Kościuszki w Legnicy.

Urszula Swianiewicz, uczennica klasy trzeciej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej dziękuje wszystkim, którzy pomagali laureatom i wyróżnionym uczniom w przygotowaniach do zawodów. Są to, oprócz nauczycieli uczących w szkole, następujące osoby:

Sylwia Antoniuk, Zbigniew Badura, Zofia Barańczuk, Małgorzata Bładoszewska, Irena Brzozowska, Piotr Butryn, Sławomir Dinew, Żygomir Dinew, Krzysztof Dorobisz, Nadbor Drozd, Zbigniew Garncarek, Maciej Gawron, Ryszard Gruca, Witold Jarnicki, Joanna Jaszuska, Grzegorz Kapustka, Michał Kapustka, Lev Kurlyandchik, Michał Matuszczyk, Michał Matyjewicz-Maciejewicz, Przemysław Mazur, Michał Niedźwiedź, Henryk Pawłowski, Leszek Pieniążek, Michał Pilipczuk, Aleksandra Porązik, Michał Skrzypczak, Maciej Sokółowski, Oscar Szwed, Urszula Szwedzicka, Tomasz Szymczyk, Sławomir Śmiarowski i Maciej Zdanowicz.

II OLIMPIADA MATEMATYCZNA GIMNAZJALISTÓW 2006/2007

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA (10 marca 2007)

1. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} ab = a + b \\ bc = b + c \\ ca = c + a \end{cases}$$

2. Każdemu wierzchołkowi 100-kąta foremnego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują? Odpowiedź uzasadnij.

Informacje o przebiegu II Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

W zawodach stopnia I uczestniczyło 448 uczniów. Spośród nich do zawodów II stopnia (okręgowych), które odbyły się w dniu 13 stycznia 2007 r. zakwalifikowano 315 uczniów, a do zawodów III stopnia (finałowych) – 70 uczniów. Na posiedzeniu w dniu 11 marca 2007 r. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów postanowił przyznać 42 osobom tytuł laureata (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 30 możliwych do zdobycia):

Nagrody stopnia pierwszego

Miejsca 1–4

Andrzej Dorobisz (30), uczeń kl. III Gimnazjum nr 2 im.

A. Mickiewicza w Krakowie. Nauczyciele: Ryszard Gruca, Marta Lichosik.

Jan Miłczek (30), ucz. kl. II Gimnazjum nr 24 w Gdyni, n.: Witold Zakrzacki.

Damian Orlef (30), ucz. kl. II Gimnazjum nr 3 w ZSO nr 11 w Zabrze, n.: Roman Drohojowski.

Anna Piekarska (30), ucz. kl. III Gimnazjum nr 49 w ZS nr 14 we Wrocławiu, n.: Irena Dułęba.

Miejsca 5–8

Magdalena Bojarska (30), ucz. kl. III Gimnazjum Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie, n.: Wojciech Guzicki.

Kajetana Buczek (30), ucz. kl. III Gimnazjum nr 28 im. J. Piłsudskiego w Krakowie, n.: Krystyna Lenart.

Maciej Dułęba (29), ucz. kl. I Gimnazjum nr 49 w ZS nr 14 we Wrocławiu, n.: Bogusław Merdas, Stefan Mizia.

Katarzyna Jastrzębska, ucz. kl. III Gimnazjum nr 16 w Szczecinie, n.: Eliza Siewnik, Adam Neugebauer.

Nagrody stopnia drugiego

Szymon Kanonowicz (26), ucz. kl. III Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu.

Maciej Rzeszut (26), ucz. kl. III Gimnazjum nr 16 z oddziałami integracyjnymi w Warszawie.

Piotr Szeffler (26), ucz. kl. II Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu.

Radosław Tekiel (26), ucz. kl. III Gimnazjum im. Orła Białego w Ustroniu Morskim.

Anna Lewicka (25), ucz. kl. III Zespołu Szkół Stowarzyszenia Rodzin Katolickich Archidiecezji Katowickiej im. prym. kard. Augusta Hłonda w Chorzowie.

Katarzyna Mandziuk (25), ucz. kl. III Gimnazjum nr 16 im. F. Chopina w Lublinie.

Michał Miśkiewicz (25), ucz. kl. III Gimnazjum nr 76 z oddziałami integracyjnymi w Warszawie.

Przemysław Juda (24), ucz. kl. III Gimnazjum Samorządowego nr 2 w Bolesławcu.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC . Wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina odcinek MN w punkcie D . Symetralna boku AB przecina odcinek MN w punkcie E . Wykaż, że $MD = NE$.

4. Ile jest takich liczb n należących do zbioru $\{1, 2, \dots, 2007\}$, dla których liczba $n^4 - 1$ jest podzielna przez 9? Odpowiedź uzasadnij.

5. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym? Odpowiedź uzasadnij.

Adam Wyrzykowski (24), ucz. kl. II Gimnazjum nr 8 w ZSO nr 4 im. C. K. Norwida w Olsztynie.

Piotr Byrski (23), ucz. kl. II Gimnazjum Towarzystwa Szkolnego im. M. Reja w Bielsku-Białej.

Łukasz Kowalewski (23), ucz. kl. III Gimnazjum nr 16 w Szczecinie.

Sławomir Niajko (23), ucz. kl. III Gimnazjum nr 16 w Szczecinie.

Rafał Podziński (23), ucz. kl. III Gimnazjum nr 29 im. ks. J. Twardowskiego w Łodzi.

Adam Chudziak (22), ucz. kl. II Społecznego Gimnazjum „Dwójka” nr 45 w Warszawie.

Piotr Markowski (22), ucz. kl. III Gimnazjum nr 1 im.

H. Sienkiewicza w Rawiczu.

Łukasz Szydełko (22), ucz. kl. III Gimnazjum nr 16 im.

S. Banacha w Bielsku-Białej.

Michał Zając (22), ucz. kl. I Publicznego Gimnazjum nr 2 im. J. Korczaka w Brzesku.

Michał Arndt (21), ucz. kl. III Gimnazjum nr 24 w Gdyni.

Nagrody stopnia trzeciego

Agata Maciocha (20), ucz. kl. III Publicznego Gimnazjum nr 9 z oddziałami dwujęzycznymi w Ozimku.

Adrianna Żołnierczuk (20), ucz. kl. III Gimnazjum Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie.

Joanna Rojek (19), ucz. kl. III Gimnazjum nr 8 w Toruniu.

Albert Baliński (18), ucz. kl. II Gimnazjum nr 24 w Gdyni.

Paulina Cholewik (18), ucz. kl. III Gimnazjum w Jasienicy.

Joanna Jończyk (18), ucz. kl. III Publicznego Gimnazjum

nr 52 oo. Pijarów im. ks. S. Konarskiego w Krakowie.

Maja Nguyen (18), ucz. kl. II Społecznego Gimnazjum nr 20 w Warszawie.

Michalina Pacholska (18), ucz. kl. II Gimnazjum nr 1 im.

H. Steinhausa we Wrocławiu.

Martyna Wałaszewska (18), ucz. kl. III Gimnazjum nr 50 w ZSO nr 6 w Bydgoszczy.

Przemysław Bielec (17), ucz. kl. III Gimnazjum im. Orła Białego w Ustroniu Morskim.

Mateusz Bonin (16), ucz. kl. III Gimnazjum nr 50 w ZSO nr 6 w Bydgoszczy.

Roman Kowalewski (16), ucz. kl. II Gimnazjum nr 24 w Gdyni.

Wojciech Lis (16), ucz. kl. III Gimnazjum nr 10 im.

J. Kochanowskiego w Chorzowie.

Piotr Miska (16), ucz. kl. III Gimnazjum nr 5 w ZSO nr 12 w Sosnowcu.

Mariusz Olszewski (16), ucz. kl. III Gimnazjum SEC „Arka” we Wrocławiu.

Marcin Smulewicz (16), ucz. kl. I Gimnazjum Integracyjnego w Skierniewicach.

L OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 2006/2007

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Tabela zawiera wyniki pomiarów geocentrycznej prędkości radialnej Arktura (α Bootis), przeprowadzone w ciągu roku w jednym z obserwatoriów astronomicznych.

Na podstawie danych zawartych w tabeli sporządź wykres zmian prędkości radialnych Arktura oraz zinterpretuj otrzymany wynik.

Data	v_r [km/s]	Data	v_r [km/s]	Data	v_r [km/s]
I 15	+21,1	III 02	+12,2	VII 23	-30,1
I 19	+21,0	III 21	+4,9	VII 30	-29,5
I 27	+20,4	VI 21	-28,1	VIII 06	-28,6
II 03	+19,3	VI 24	-28,6	VIII 11	-27,8
II 07	+18,6	VII 01	-29,4	VIII 15	-27,0
II 10	+18,0	VII 08	-30,1	VIII 23	-25,2
II 15	+17,0	VII 11	-30,1	IX 21	-15,0
II 22	+15,1	VII 16	-30,2	XII 21	+19,0
II 24	+14,3	VII 20	-30,2		

2. Planetoida typu NEO obiega Słońce po elipsie w tej samej płaszczyźnie, w tym samym kierunku i z tym samym okresem co Ziemia. Mimośród orbity planetoidy $e = 0,6$. W pewnym momencie planetoida była w opozycji i w aphelium.

Jaka jest minimalna odległość tej planetoidy od Ziemi? Podaj logiczne uzasadnienie przyjętej odpowiedzi oraz zaznacz na rysunku w skali 1 j.a. = 6 cm położenia planetoidy i Ziemi w momencie, gdy odległość między nimi jest minimalna.

W rozwiązaniu pomini oddziaływania perturbacyjne i przyjmij, że orbita Ziemi jest okręgiem.

3. Zbliżenie się galaktyk, po zająsci pewnych warunków, może spowodować rozpadanie się jednej z nich. Jest to skomplikowany proces, jednak dla celów szacunkowych rozpatrz następujący prosty model.

Mała galaktyka o masie m i promieniu r obiega po okręgu o promieniu l dużo większą od niej galaktykę o masie M . Galaktyki mają kształt sferyczny. Zakładamy, że mała galaktyka nie obraca się wokół własnej osi oraz że $r \ll l$.

Przyjmując taki model, oszacuj krytyczną odległość l_k między galaktykami, po przekroczeniu której rozpocznie się odrywanie z małej galaktyki jej peryferyjnych gwiazd.

Uwaga: Szacowanie prowadzimy na podstawie analizy sił działających na skrajne (najdalsze i najbliższe w stosunku do większej galaktyki) i położone w centrum gwiazdy małej galaktyki.

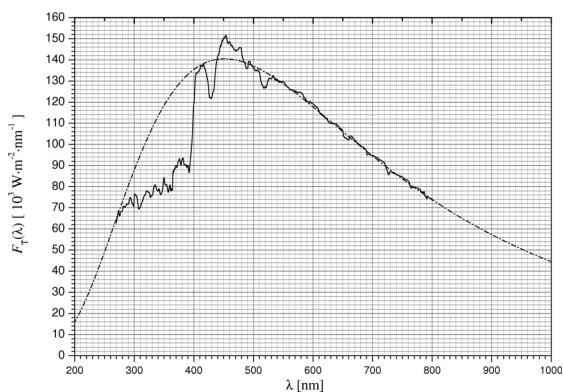
4. Światło przechodząc przez ośrodek materialny ulega osłabieniu. Strumień światła w wiązce biegnącej przez warstwę pochłaniającą ulega osłabieniu, zgodnie ze wzorem: $\Phi = \Phi_0 e^{-\alpha x}$, gdzie: Φ_0 – strumień światła dla $x = 0$ (nieosłabiony), x – grubość warstwy, przez którą przechodzi strumień, α – współczynnik absorpcji.

Zakładając, że obiektów refraktora składa się z dwóch soczewek (dublet), a grubość każdej soczewki stanowi 0,15 jej średnicy D , przedyskutuj problem nieopłacalności budowy dużych refraktorów – ostatni powstał jeszcze w XIX wieku.

Wskazówki: znajdź przebieg funkcji $\Phi = \Phi(D)$, potraktuj obiektyw jak dwie leżące blisko siebie płyty płasko równoległe.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Na wykresie dołączonym do zadania przedstawiono widmo ciągłe pewnej gwiazdy. Widmo to zostało złożone z danych uzyskanych za pomocą kilku spektrografów o niskiej zdolności rozdzielczej (linia ciągła). Korzystając z obszaru pomiędzy 550 nm a 800 nm, do zaobserwowanego widma dopasowano widmo opisane funkcją Plancka (linia przerywano-kropkowa), otrzymując wartość temperatury $T = 6420$ K. Dopasowanie to pozwoliło również na kalibrację względnych natężeń do wartości bezwzględnych w ten sposób, że oś rzędnych przedstawia moc wypromieniowywaną w jednostkowym przedziale długości fali przez jednostkę powierzchni gwiazdy.



Widmo gwiazdy obejmuje zakres długości fal od 270 nm do 800 nm. Porównanie zaobserwowanego widma i dopasowanej funkcji Plancka (tzn. dopasowanego rozkładu

widmowego promieniowania ciała doskonale czarnego) pozwala stwierdzić, że w zakresie 270 nm–400 nm funkcja Plancka źle opisuje widmo gwiazdy, w zakresie 400 nm–550 nm opisuje je zaledwie zadowalająco, natomiast dla fal krótszych od 270 nm i dłuższych niż 550 nm – bardzo dobrze. Przy tym założeniu, korzystając z dołączonego widma, znajdź przybliżoną wartość temperatury efektywnej gwiazdy.

2. Według hipotezy wysuniętej przez Johanna Keplera biblijne zjawisko Gwiazdy Betlejemskiej mogło być kojarzone z koniunkcjami Jowisza i Saturna, które nastąpiły w 7 roku przed naszą erą. Wtedy jednak, nawet w momencie minimalnego zbliżenia, odległość kątowna obu planet na niebie wynosiła około jednego stopnia.

Opisz przebieg takiego zjawiska, gdyby zachodziło ono w pobliżu opozycji Jowisza i doszło do centralnego zakrycia jednej planety przez drugą.

Przyjmij następujące granice jasności i średnic rozpatrywanych planet:

Jasność Jowisza obserwowanego z Ziemi: $-1,7 \div -2,9$ mag

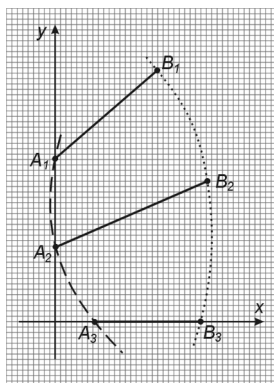
Jasność Saturna obserwowanego z Ziemi: $+1,3 \div -0,3$ mag

Średnica kątowna Jowisza obserwowanego z Ziemi: $30,4'' \div 50,1''$

Średnica kątowna Saturna obserwowanego z Ziemi: $15,0'' \div 20,9''$

Okres obiegu Jowisza wokół Słońca wynosi 11,9 lat, a Saturna – 29,5 lat. Zdolność rozdzielcza oka wynosi 1 minutę łuku.

3. Zmiany położenia na sferze niebieskiej składników gwiazdy fizycznie podwójnej są wywołane wzajemnym ruchem obiegowym gwiazd oraz ruchem całego układu w przestrzeni. Na rysunku zaznaczono położenia składników A i B dla trzech różnych momentów. Zakładając, że układ jest odosobniony oraz że, masa składnika B jest równa masie Słońca wyznacz masę składnika A.



4. Zamieszczone mapki www.mimuw.edu.pl/delta/ola.zip obejmują fragmenty sfery niebieskiej o powierzchni około $24^\circ \times 30^\circ$ wokół jasnyc gwiazd – gwiazdy te nie są jednak zaznaczone na mapkach.

Po przeprowadzeniu identyfikacji poszczególnych obszarów nieba, na każdej mapce:

- zaznacz położenie brakującej jasnej gwiazdy,
- określ jej jasność za pomocą okręgu o odpowiedniej wielkości,
- podaj nazwę tej gwiazdy oraz nazwę gwiazdozbioru, do którego należy,
- zaznacz za pomocą strzałki kierunek ku północnemu biegunowi niebieskiemu.

5. Mierzalnymi parametrami kosmologicznymi są przesunięcie ku czerwieni z oraz wartość stałej Hubble'a, której obecna wartość H_0 wynosi około $70 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$.

Wszelkie czasy, a więc te odpowiadające konkretnym przesunięciom ku czerwieni wylicza się z modeli wynikających z przyjęcia odpowiedniego składu i własności materii zawartej we Wszechświecie. Dlatego w pracach naukowych, podając odpowiednie czasy, informuje się, jakiego modelu użyto do ich obliczenia. Aby przekonać się,

że nie chodzi o drobne różnice, oblicz obecny wiek Wszechświata oraz moment odpowiadający przesunięciu ku czerwieni $z = 7$ w dwu różnych modelach

- a) $R(t) = A\sqrt{t}$ – wszechświat zdominowany przez promieniowanie,
- b) $R(t) = A(t)^{\frac{2}{3}}$ – wszechświat zdominowany przez pył (czyli np. gwiazdy), przy czym $R(t)$ jest czynnikiem skali, natomiast A jest stałą.

Spróbuj dopasować wykładnik α modelu opisanego ogólnym wzorem $R(t) = A(t)^\alpha$, do obecnie przyjmowanego wieku Wszechświata wynoszącego ok. $1,35 \cdot 10^{10}$ lat. Również w tak uzyskanym modelu oblicz czas odpowiadający $z = 7$.

Uwaga. Przesunięcie ku czerwieni jest związane z czynnikiem skali wzorem: $z = \frac{R(t_0)}{R(t_e)}$, gdzie t_e oznacza moment emisji światła, a t_0 – chwilę obecną.

Stała Hubble'a jest stałą w przestrzeni, natomiast jej zależność od czasu opisuje wzór: $H(t) = \frac{dR(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R(t)}$.

6. Pochłanianie i rozpraszanie światła (ekstynkcja) w przestrzeni międzygwiazdowej są powodowane głównie przez pył. Rozmiary pyłu są na tyle małe, że ekstynkcja zależy między innymi od długości fali światła. Jednak przy rozważaniach szacunkowych można założyć, że osłabienie światła dalekich obiektów zależy jedynie od długości przebytej drogi.

Przyjmując, że światło ulega e -krotnemu ($e \cong 2,72$) osłabieniu po przejściu pewnej drogi l , równej średniej drodze swobodnej fotonu w ośrodku, znajdź wzór określający różnicę między wielkością gwiazdową obiektu, którego światło przeszło w ośrodku międzygwiazdowym drogę L , a wielkością gwiazdową tego obiektu, gdyby jego światło nie uległo osłabieniu.

W terminologii astronomicznej tę różnicę wielkości gwiazdowych nazywa się ekstynkcją i tak rozumiana ekstynkcja służy do określania poprawek obserwowanych wielkości gwiazdowych dalekich obiektów.

Przyjmując, że w okolicy Słońca (w promieniu kilku tysięcy lat świetlnych) średnia droga swobodna fotonu wynosi 3000 lat świetlnych, oblicz tak szacowaną ekstynkcję dla α Cyg (*Deneb*) o jasności absolutnej $M = -7,2^m$ i jasności obserwowanej $m = 1,25^m$. Jaki popełnilibyśmy błąd w ocenie odległości do tej gwiazdy, gdybyśmy w zmierzzonej jasności obserwowanej gwiazdy nie uwzględnili tej poprawki?

Końcowa klasyfikacja

Laureaci

Szymon Jędrzejewski, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu
 Piotr Polesiuk, Piotr Polesiuk, I LO im. Ignacego Paderewskiego w Wałbrzychu
 Woitold Świątkowski, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu
 Tomasz Smoleński VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu
 Przemysław Bienias, I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi
 Piotr Godlewski, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu
 Paweł Swaczyna, Salezjański ZSP „Don Bosko” w Świętochłowicach
 Oskar Kopczyński, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
 Maciej Śmigiełski, Gim. i Lic. Akademickie w Toruniu

Finaliści

Paweł Wróbel, ZSO w Świdnicy
 Jakub Szczęśny, I LO im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku
 Marcin Chwał, LO im. Stefana Żeromskiego w Strzegomiu
 Marcin Stano, II LO im. Frycza Modrzewskiego w Rybniku
 Adam Ciesielski, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
 Maciej Chmielewski, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu
 Krzysztof Wójcik, XIII LO w Szczecinie
 Grzegorz Gajda, I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi
 Patryk Pjanka, VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach
 Jakub Kowalczyk, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu
 Róża Chojnacka, LO im. Komisji Edukacji Narodowej w Stalowej Woli