






SPIS TREŚCI NUMERU 1 (416)

Międzynarodowy Rok Astronomii 2009 <i>Edwin Wnuk</i>	str. 1
O paradygmatach <i>Konrad Rudnicki</i>	str. 2
Kosmiczna linijka 1. Obłok Oorta <i>Bożena Czerny, Agnieszka Janiuk</i>	str. 5
Konkurs zadań astronomicznych  Zadania	str. 6
Kości Sichernana <i>Marcin Woźniak</i>	str. 7
Punkty charakterystyczne na prostej Eulera <i>Martha Ubik</i>	str.10
 Okna gotyckie – ciąg dalszy <i>Wojciech Guzicki</i>	str.12
Gra w zgadywanie <i>Jakub Radoszewski</i>	str.14
Aktualności	str.17
 Badamy niezwykle właściwości ciał sypkich <i>Stanisław Bednarek</i>	str.18
 Nowe obszary programowania <i>Andrzej Walat</i>	str.20
Informatyczny kącik olimpijski (16) <i>Filip Wolski</i>	str.21
Klub 44	str.22
Patrz w niebo	str.24
Styczeń	str.24
 Mała rzecz, a cieszny <i>Joanna Jaszuska</i>	str.25

W następnym numerze:
Czarne dziury w weekend

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nacz., Tomasz Kwast, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński, Andrzej Walat, Piotr Zalewski – z-ca red. nacz.
Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-639-73-67)

internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2009 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2009 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 0-804-200-600

Cena prenumeraty w 2009 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł



Międzynarodowy Rok Astronomii 2009

Rok 2009 został ogłoszony Międzynarodowym Rokiem Astronomii. Z inicjatywą wyszła Międzynarodowa Unia Astronomiczna, która została poparta przez UNESCO, a następnie, w grudniu 2007 roku, Zgromadzenie Ogólne ONZ podjęło decyzję o ustanowieniu Międzynarodowego Roku Astronomii 2009. Okazją jest uczczenie czterechsetnej rocznicy użycia po raz pierwszy teleskopu do obserwacji astronomicznych.

W 1609 roku Galileo Galilei, powszechnie zwany Galileuszem, po raz pierwszy użył skonstruowanej przez siebie lunety do obserwacji różnych obiektów na sferze niebieskiej. Odkrył cztery największe księżyce Jowisza, nazwane później Księżycami Galileuszowymi. Stwierdził, iż Wenus, podobnie jak Księżyc, jest widoczna w różnych fazach. Te obserwacje były bardzo mocnymi argumentami potwierdzającymi heliocentryczną teorię Kopernika. Galileusz obserwował także plamy słoneczne, kratery i łańcuchy górskie na Księżycu oraz stwierdził, iż Droga Mleczna składa się z ogromnej liczby pojedynczych gwiazd.

Dzisiaj luneta Galileusza wydaje się nam bardzo prymitywna, jednak obserwacje wykonane za jej pomocą były przełomem w astronomii – rozpoczęły erę obserwacji teleskopowych, która zaowocowała niezwykłymi odkryciami. Ciekawa jest czterowiekowa historia różnych technik obserwacyjnych, które w ostatnich kilkudziesięciu latach rozwijają się w sposób szczególny. W ostatnich dziesięcioleciach XX wieku uruchomione zostały teleskopy naziemne o średnicach 8–10 metrów, a na orbicie wokółziemskiej umieszczono teleskopy kosmiczne. Doprowadziło to do wielu fantastycznych odkryć astronomicznych – sięgamy prawie do krańców obserwowalnego Wszechświata. Ale to nie koniec rozwoju instrumentów astronomicznych zapoczątkowanego przez Galileusza w 1609 roku. W drugiej dekadzie XXI wieku rozpoczną obserwacje teleskopy naziemne o średnicach luster 30–40 metrów, a w przestrzeni kosmicznej znajdują się teleskopy nowej generacji, również takie, które będą mogły bezpośrednio obserwować planety wokół innych gwiazd niż Słońce.

Międzynarodowy Rok Astronomii 2009 będzie okazją, by promować astronomię, by przypomnieć historię rozwoju astronomicznych technik obserwacyjnych, ale przede wszystkim, by szeroko informować o ciekawych, często niezwykłych odkryciach. W przygotowania do Roku Astronomii włączyło się 140 krajów oraz wiele organizacji międzynarodowych i krajowych. Odbędzie się wiele różnych konferencji, sympozjów i innych imprez dla zawodowych astronomów i amatorów astronomii. Najważniejsze jednak będą różne przedsięwzięcia z udziałem szerokiej społeczności, w tym młodzieży szkolnej oraz studentów. Podobnie jak w innych krajach, również w Polsce utworzony został specjalny komitet, który będzie koordynował i wspomagał różne imprezy, akcje i inne działania w ramach Roku Astronomii 2009. Jest to grupa astronomów powołana przez Komitet Astronomii PAN i afiliowana przy Polskim Towarzystwie Astronomicznym. Na cały rok 2009 planowanych jest wiele imprez centralnych i lokalnych. Z pewnością te ostatnie będą najbardziej cenne dla upowszechniania wiedzy astronomicznej w mniejszych miejscowościach. Zachęcamy więc szkoły, gminy oraz inne lokalne organizacje do przygotowania różnych działań w ramach Roku Astronomii 2009. Zawodowi astronomowie z pewnością będą służyć pomocą oraz merytoryczną informacją.

Informacje na temat imprez związanych z Rokiem Astronomii 2009 można znaleźć na stronie internetowej: <http://www.astronomia2009.pl>.

Dla Czytelników *Delty* natomiast przygotowaliśmy z okazji Roku 2009 specjalne atrakcje: konkurs zadań z nagrodami oraz cykl artykułów pt. „Kosmiczna linijka” o bliskim i dalszym Wszechświecie.

Edwin WNUK

Prezes Polskiego Towarzystwa Astronomicznego

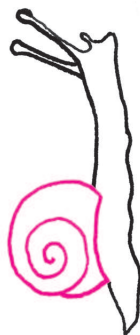
O paradygmatach

Konrad RUDNICKI*

Krzysztof Bolejko, *Kosmiczna depresja czy akceleracja, czyli o interpretacji danych obserwacyjnych*, „Delta” 5 (408) 2008, s. 9.

Ucieszył mnie artykuł Krzysztofa Bolejki o kierowaniu się w nauce paradygmatami. Wielu poważnych miłośników astronomii, czasem będących zaawansowanymi badaczami w innych dziedzinach, nie odróżnia ostro faktów obserwacyjnych od ich interpretacji i jest przekonanych, że współczesna astronomia stwierdziła to i owo tam, gdzie prawdą jest tylko, że większość współczesnych astronomów interpretuje obserwacyjne fakty w taki sposób, dodaje takie założenia, że „to i owo” wtedy z nich wynika. Zwrócenie przez pana Krzysztofa Bolejkę uwagi na fakt, że współczesny obraz Wszechświata może ulec poważnym zmianom, jeśli powszechnie dziś przyjmowany zestaw założeń, czyli paradygmat, zostanie zastąpiony innym, chciałbym uzupełnić historyczną informacją, skąd się w ogóle wzięła w nauce – nie tylko w kosmologii – moda na paradygmaty.

Jak wiadomo, w Kaliningradzie znajduje się grób wielkiego filozofa, niejakiego Immanuela Kanta (1724–1804), który w tym mieście przed przeszło dwustu laty pierwszy stworzył teorię poznania. We współczesnym języku i opierając się na powszechnie znanych dziś wynikach nauk, można opisać tę teorię następująco. Chcemy poznać istotę jakiegoś zagadnienia; nazywamy ją *rzeczą samą w sobie*. To ważny termin kantowskiej teorii. Do nas przychodzą różne sygnały od danej rzeczy: wzrokowe, słuchowe, czasem możemy czegoś dotknąć, coś powąchać, a nawet posmakować. To daje nam asortyment postrzeżeń związanych z ową rzeczą. Tym postrzeżeniom wychodzimy naprzeciw myślami i staramy się poznać rzecz samą w sobie, czyli rozwiązać nasze zagadnienie. I tu kłopoty są następujące. Sygnały idące ku nam są obiektywne, ale ograniczone. Widzimy rzecz w takim świetle, jakim została oświetlona, słyszymy taki jej dźwięk, do jakiego została pobudzona. Sygnały po drodze mogą ulec zakłóceniu, światło zmienić może natężenie, barwę, polaryzację, podobnie dźwięk. Do tego nasze zmysły nie zawsze postrzegają prawidłowo. Wkładam rozgrzaną rękę do mroźnej wody i czuję się oparzony. Dostaję pałką w ciemność i widzę błysk światła. Zresztą widzę czerwien, a naprawdę to jakiejś tam czerwieni w ogóle nie ma; jest drganie elektromagnetyczne i są fotony. Podobnie z tonami i ze wszystkimi postrzeżeniami. A w końcu poddaję to wszystko pod osąd mojemu subiektywnemu rozumowi. Czy on aby działa prawidłowo? Sam Kant doszedł do wniosku, że rzecz sama w sobie – z wyjątkiem szczególnych sytuacji – pozostaje niepoznawalna. Inni kontynuatorzy jego filozofii dopuszczali jej częściową poznawalność w pewnych aspektach. Wszystkie odmiany takich teorii, operujące terminem rzeczy samej w sobie (czasem zastępowanym innym słowem) i widzące proces poznania w spotkaniu postrzeżeń wywołanych obiektywnymi, ale niepełnymi i podlegającymi zafałszowaniu sygnałami, z subiektywnym myśleniem, nazywamy teoriami poznania typu kantowskiego.



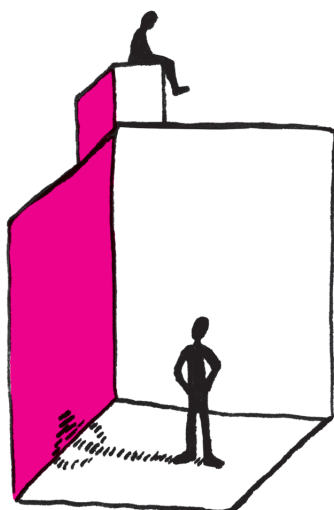
Już w XIX wieku wnikliwsi filozofowie zauważyli, że teorie poznania typu kantowskiego mają poważną wadę. Skąd wiemy, że czerwieni nie ma, a jest tylko fala świetlna lub fotony? Dlaczego wątpimy w prawidłowy proces naszego myślenia? – Bo się opieramy na wynikach fizyki, psychologii, logiki... Ale to są nauki szczegółowe, których wyniki powinny by dopiero zostać zweryfikowane przez teorię poznania, nie powinny więc występować jako jej założenia. Gdyby jednak przy przyjęciu takich założeń dało się uzasadnić prawomocność wyników nauk szczegółowych, to mielibyśmy teorię zbudowaną na zasadzie błędnego koła, ale wewnętrznie niesprzeczną. Tu natomiast wynikiem jest, że nauki szczegółowe w ogóle nie prowadzą do poznania prawdy (rzeczy samej w sobie), bądź że dają wyniki częściowo nieprawdziwe. Z założeń przyjętych jako podstawa wynika, że wśród tych założeń znajdują się błędne. Teoria jest sprzeczna sama ze sobą.

Ten fakt doszedł do świadomości większości naukowców gdzieś w połowie XX wieku, a ponieważ przeważnie nie znano żadnej innej teorii poznania niż typu kantowskiego, więc rozpowszechnił się pogląd, że jakakolwiek teoria poznania jest niemożliwa i wtedy coraz więcej badaczy powiedziało sobie:

*profesor Uniwersytetu Warszawskiego i Uniwersytetu Jagiellońskiego

Nie filozofujmy, jak szukać prawdy, ale naśladowujmy tych, którzy coś zrobili w nauce i działajmy w ich sposób. Zaczęto myśleć mniej więcej tak: jeśli Michael Faraday (1791–1867), eksperymentując z elektrycznością i magnetyzmem, odkrył między nimi ważne związki, to może eksperymentując jednocześnie z falami świetlnymi i dźwiękowymi, też odkryję nowe prawa fizyki. Jeśli Niokołaj Łobaczewski (1792–1856) przez zanegowanie aksjomatu równoległości stworzył nowy dział geometrii, to może przez zanegowanie innego aksjomatu matematyki stworzę coś równie wielkiego. Jeśli Charles Robert Darwin (1809–1862) przez teorię walki o byt wyjaśnił pewne zjawiska ewolucji istot żywych, to może w ten sam sposób uda się wyjaśnić ewolucję etyczną człowieka (tak uzyskany wynik teoretyczny był wykorzystywany w praktyce przez Adolfa Hitlera). Naśladowanie w rozsądny sposób prawdziwych mistrzów bywa owocne i w ten sposób współczesna nauka uzyskała wiele zdobyczy. Trzeba jednak powiedzieć, że w wielu przypadkach stoi bezradna tam, gdzie idzie o dojście do prawdy. Wyraz paradygmat, od dawna używany w językoznawstwie na określenie wzorca odmiany gramatycznej (ja siadłam, ty siadłaś, ona siadła, my siadłyśmy... itd.) od greckiego $\pi\alpha\rho\alpha$ (*dokładnie według*) i $\delta\epsilon\iota\gamma\mu\alpha$ (*próbka, przykład*), zajął teraz w epistemologii główne miejsce zamiast teorii poznania. Niestety, paradygmat nie daje żadnego odniesienia do prawdy w tym, co jest naśladowane, ani w tym, co przez naśladownictwo otrzymujemy. W naukach technicznych nie jest to wielkim mankamentem. Bywa – w badaniach podstawowych.

Dość pesymistycznemu końcowemu wnioskowi artykułu Krzysztofa Bolejki, który można ująć tak, że dopiero gdy dobrze odczujemy wady obecnego paradygmatu kosmologii, będziemy w stanie zastąpić go innym, lepszym, chciałbym przeciwstawić bardziej optymistyczny pogląd, przyjęty przez sporą już liczbę naukowców, zarówno przyrodników, jak i humanistów. Ale najpierw pewna wstawka historyczna.



Nieco młodszy od Kanta, ale pracujący w tej samej epoce, był pewien mieszczanin, któremu potem nadano szlachectwo, Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832). Zajmował się on wieloma rzeczami. Był, między innymi, ministrem stanu księstwa Sasko-Weimarskiego. Znany jest przede wszystkim jako pisarz i poeta, ale sam uważał się za przyrodnika, który w wolnych chwilach pisuje wiersze. Jego prace przyrodnicze to – z niewielkimi wyjątkami – drobne przyczynki z zakresu botaniki, zoologii, geologii, paleontologii, optyki. Większość jego rozlicznych, ale drobnych odkryć naukowych była tak na czasie, że gdyby on ich nie zrobił, dokonaliby ich w następnych latach inni. Natomiast jest osobliwe, że on ich dokonywał nieprzypadkowo, ale kierując się szczególną metodyką związaną z osobliwą metodologią zbudowaną na własnej teorii poznania, całkiem odmiennej od teorii typu kantowskiego. Nie pozostawił po sobie – w przeciwieństwie do Kanta – zwanego dzieła poświęconego tej teorii. Teorię pozostawił rozrzuconą po licznych przyczynkach i w listach do przyjaciół. Przypomniano sobie o niej w wieku XIX, w czasie stwierdzenia sprzeczności wewnętrznych w teoriach typu kantowskiego. Dziś istnieje kilka różnych odczytań tej teorii różniących się szczegółami. Tu podam tylko kilka jej cech charakterystycznych.

Ponieważ teoria poznania musi być pierwotna w stosunku do wszystkich nauk szczegółowych, jej podstawą jest bezpośrednia obserwacja tego, jak przebiega nasze poznanie. Taka obserwacja daje pewien obraz, a mianowicie pole świadomości (to nie termin naukowy, tylko opis), w którym się pojawiają na równych prawach aktualne postrzeżenia zmysłowe, postrzeżenia własnych uczuć, chęci, impulsów woli, wspomnienia dawnych postrzeżeń zmysłowych i innych. Pojawiają się też myśli. Gdybyśmy myśli nie postrzegali, nie mogliśmy nimi operować. Czasem postrzegamy też pewien niepokój, chęć pojęcia czegoś z postrzeżeń niebędących myślami, a następnie widzimy, jak ten niepokój znika, gdy z danym postrzeżeniem połączy się myśl odpowiednia do niego, tłumacząca je. Dostrzegamy w tym elementarny akt poznawczy. A sama myśl? Otóż sama myśl postrzeżona (uwaga: nie jakaś nazwa myśli, jakiś termin logiczny, ale myśl) tłumaczy zawsze sama siebie. Jeśli dostrzeżę myśl, którą można określić jako

poprzednik, następnik, przyczyna, skutek, to jest ona już przeze mnie pojęta, nie tworzy niepokoju. Niepokoić może tylko pytanie, czy dwie myśli pasują do siebie. Widzimy, że cechą charakterystyczną tak budowanej teorii poznania jest stwierdzenie takiej samej wagi postrzeżeń zmysłowych, co i postrzeżeń wewnętrznych. Kto w takim obrazie – dokładniej opisanym, niż ja to robię tutaj – widzi rzeczywisty sposób poznawania, ten może być goetheanistą – zwolennikiem goetheanistycznej teorii poznania. Kto przywykł do przekonania, że poznanie odbywa się zupełnie inaczej, nie zostanie nim. Na tym poziomie dyskusja nie jest możliwa. Brak metod poprawnej dyskusji, brak jeszcze logiki.

Przyjąwszy przedstawiony obraz, można zauważyć, że myślenie jest subiektywne w tym sensie, że możemy na ogół myśleć o czym chcemy, jest zaś obiektywne w tym, że wynik myślenia nie zależy od nas, tylko od wewnętrznej natury myśli. Oczywiście, musimy odróżniać myśli od wyobrażeń, a myślenie od marzenia. „Ja sobie myślę, że moja drużyna wygra” nie jest w ogóle myśleniem, lecz życzeniem. Z obiektywnych cech myślenia wynika możliwość poznania słuszności, prawdy. Potem się okazuje, że od najprostszych tworów myślowych, które po polsku nazywamy pojęciami, trzeba odróżnić idee, mające nieco inne właściwości.

Nie opisując tu kolejnych piętrowości budowanej w ten sposób teorii poznania, co zajęłoby dużo miejsca, powiem, że goetheaniści, badając jakąś rzecz, starają się rozpatrzyć wszystkie możliwości jej wytłumaczenia, a przez eliminację wyjaśnień błędnych dochodzą do coraz bardziej zacieśniającego się obszaru możliwych wyjaśnień danego zjawiska. Starają się nie „wierzyć” w jedno wytłumaczenie związane z jednym paradygmatem, ale brać pod uwagę całe klasy wytłumaczeń związane z różnymi paradygmatami.

Wybitny goetheanista XX wieku, Szwajcar pracujący w Stanach Zjednoczonych, Fritz Zwicky (1898–1974) w książce *Morphological Astronomy* opisał obrazowo obecną modę na przywiązanie do jednego paradygmatu: „Gdy deszcz zaczyna padać na pierwotnie suchy obszar, woda, szukając dróg z wyższych miejsc w niższe, płynie różnymi drobnymi strumyczkami. Niektóre z nich są mniej lub więcej oczywiste, wyznaczone ukształtowaniem gór i dolin, podczas gdy inne noszą piętno pewnej przypadkowości. Jakkolwiek by pociekły pierwsze strumyczki, ich istnienie w znacznej mierze determinuje drogi ściekania następnych wód. Ustala się z czasem system rowków mający w znacznej mierze trwały charakter. Spływająca woda niesie nimi ze sobą ziemię do morza, odkrywając coraz to głębsze jej warstwy, podczas gdy warstwy gleby leżące pomiędzy korytami strumieni pozostają nietknięte. Jak deszcz otwiera ziemię tu i tam, tak idee otwierają drzwi do różnych aspektów życia, przyciągając trwale uwagę ludzi do niektórych z nich, częściowo zaś lub całkowicie ignorując pozostałe. Gdy się człowiek dostanie do rowka, czuje się zobowiązany ryc coraz głębiej, ale – co gorsza – nie zabiera wykopanego szlamu ze sobą, jak to czyni woda, ale wyrzuca go na boki, przykrywając nim niewykorzystany teren okoliczny i utrudniając sobie zobaczenie czegoś spoza własnego rowka. Czasem wyrzucanym szlamem może sypnąć w oczy – celowo lub niechcący – swoim sąsiadom, uniemożliwiając im w ogóle dostrzeganie czegokolwiek.”

Grupa kosmologów związana z kanadyjskim wydawnictwem (dawniej z czasopismem) *Apeiron*, szanując wyznawców powszechnie przyjmowanych paradygmatów, stara się brać pod uwagę również hipotezy budowy i ewolucji Wszechświata oparte na zupełnie innych paradygmatach. Bierze się pod uwagę nawet pomysły mające kształt fantastyczny, jeśli nie ma istotnych argumentów obserwacyjnych, aby je odrzucić. Czasem pomysły fantastyczne okazują się w nauce realnymi rozwiązaniami problemów. Ta grupa zorganizowała wiele konferencji naukowych, wydała sporo książek.

Zasady goetheanizmu przedstawiłem między innymi w referacie na międzynarodowym kongresie filozoficznym w Krakowie w roku 1998. Po polsku te zasady wraz z przykładami zastosowań opisałem w książce *Człowiek i jego środowisko – elementy filozofii przyrody i sztuki*, która została wydana przez Wyższą Szkołę Środowiska w Bydgoszczy. W tej książce zamieściłem też odsyłacze do podstawowej literatury źródłowej.

Kosmiczna linijka

Jak duży jest Wszechświat? Albo inaczej: ponieważ Wszechświat ekspanduje, to ile czasu zajęło mu, aby rozrósł się do obecnych rozmiarów, jeśli „wystartował” z jednego punktu? Czyli ile Wszechświat ma lat? Do niedawna astronomowie tylko z grubsza szacowali, że Wszechświat ma pomiędzy 12 a 14 miliardów lat. Wystrzelony w 2001 roku satelita WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) zarejestrował promieniowanie mikrofalowe, wyemitowane tuż po Wielkim Wybuchu – chwili narodzin Wszechświata. Na podstawie pomiarów małych fluktuacji w rozkładzie tego promieniowania możliwe było dokładniejsze oszacowanie wieku Wszechświata: obecnie przyjmuje się, że liczy on $13,7 \pm 0,13$ miliardów lat.

Możemy zatem powiedzieć, że granice obserwowalnego Wszechświata znajdują się w odległości 13,7 miliarda lat świetlnych – czyli około 4,2 Gpc. Aby sobie uzmysłwić, jak duży i jak różnorodny jest Wszechświat, zastanówmy się, co jest bliżej? 10 razy, 100 razy, milion razy bliżej? Skale odległości we Wszechświecie są tak ogromne, że aby skonstruować naszą „kosmiczną linijkę”, będziemy się posługiwać systemem logarytmicznym. W niniejszym cyklu artykułów przez cały rok 2009 poznawać będziemy obiekty znajdujące się na podziałce takiej właśnie logarytmicznej linijki. Dzisiaj pierwszy z nich – nasz sąsiad, Obłok Oorta, którego odległość od nas to około 0,04 parseka, tj. 10^{11} razy bliżej niż kraniec Wszechświata.

1. Obłok Oorta; odległość 300–100000 j.a. (0,04 pc na linijce)

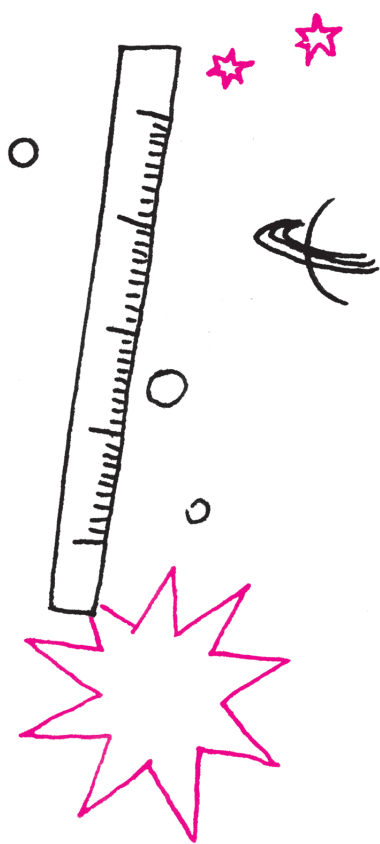
Peryferie Układu Słonecznego nadal kryją wiele tajemnic. Obiekty będące dalej niż ostatnia planeta Układu – Neptun (Pluton decyzją Międzynarodowej Unii Astronomicznej z roku 2006 do planet się nie zalicza) – świecą słabo i trudno je wykryć. Statki kosmiczne też tam jeszcze nie docierają (najdalej dotarła misja Voyager 2; po ponad 30 latach lotu jest w odległości prawie 90 j.a. od Ziemi).

Istnienie czegoś poza orbitą Plutona, ale bliżej niż najbliższe gwiazdy, rozważane było od dawna. W 1932 roku estoński astronom Ernst Opik zasugerował istnienie odległego obłoku materii, z którego miałyby pochodzić komety. Podobną hipotezę wysunął i szczegółowo rozważył w 1950 roku duński astronom Jan Oort.

Obecnie uważa się, że mamy dwa rezerwuary komet: w odległości 30–55 j.a. od Słońca znajduje się spłaszczony Pas Kuipera, a dalej rozciąga się sferyczny rezerwar – Obłok Oorta. Istnienie Pasa Kuipera potwierdzone jest przez bezpośrednie obserwacje obiektów należących do tego pasa. Pierwszy z tych obiektów odkryli w roku 1992 David Jewitt i Jane Luu, obecnie znamy już kilkadziesiąt ciał niebieskich tego typu, a ich lista szybko się wydłuża. Z Pasa Kuipera pochodzą komety poruszające się po torach eliptycznych niemal w tej płaszczyźnie, jaką tworzy orbita Ziemi wokół Słońca. Natomiast komety jednopojawieniowe, nadlatujące ze wszystkich kierunków, pochodzą, jak sądzi się, z Obłoku Oorta. Istnienie Obłoku Oorta pozostaje nadal hipotezą, ale silnie uzasadnioną przez obliczenia torów obserwowanych komet oraz analizę ich liczby i rozkładu. Obliczenia te wskazują, że Obłok Oorta liczy około 10^{11} obiektów. Są to w większości bryły lodowo-skalne o rozmiarach nie większych od 10 km, podobne do jąder obserwowanych komet. Ich ruch jest sporadycznie zaburzany przez siły pochodzące od Galaktyki jako całości lub od pobliskich gwiazd. Wtedy zmieniają orbitę, zbliżając się do Słońca. Analiza ruchu znanych ciał niebieskich wskazuje, że dwa spośród nich – planety karłowate 90377 Sedna oraz 2000 CR105 – mogą należeć do wewnętrznego obszaru Obłoku Oorta.

Poszukiwanie i badanie tych obiektów jest bardzo ważne, ponieważ peryferie Układu Słonecznego zawierają szczątki, jakie pozostały z pierwotnego obłoku materii po powstaniu Słońca i planet, a zatem stanowią nieocenioną pomoc w odtworzeniu historii planet. Obecnie uważa się, że obiekty Pasa Kuipera oraz Obłoku Oorta powstały około 4,5 mld lat temu, gdy formował się Układ Słoneczny. Obiekty Pasa Kuipera to zarodki planet – planetezymale – powstałe w zewnętrznej części dysku protoplanetarnego, które nie zdołały już połączyć się w większą planetę. Natomiast obiekty Obłoku Oorta powstały jako planetezymale w obszarze wielkich planet, ale następnie zostały przez nie grawitacyjnie wyrzucone na większe odległości.

Bożena CZERNY, Agnieszka JANIUK



Konkurs zadań astronomicznych



Szanowni Czytelnicy!

Z okazji Międzynarodowego Roku Astronomii postanowiliśmy zainaugurować w *Delcie* serię zadań rachunkowych z astronomii, o charakterze konkursu. W bieżącym numerze proponujemy dwa zadania. Kolejne będą się ukazywały w następnych numerach *Delty* do końca tego roku. Zadania są punktowane, liczba punktów za każde jest podana w nawiasie. Na rozwiązania z bieżącego numeru oczekujemy w terminie 1 miesiąca (do 1 lutego, decyduje data stempla pocztowego), pod adresem:

Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika
ul. Bartycka 18, 00-716 Warszawa

z dopiskiem na kopercie „Konkurs *Delty*”.

Rozwiązania zadań z numeru n będziemy zamieszczać w numerze $n + 2$.

Zakończenie konkursu nastąpi w styczniu roku 2010, a zdobywcy największej łącznej liczby punktów za wszystkie zadania z numerów 1–12/2009 otrzymają nagrody książkowe, ufundowane przez Polskie Towarzystwo Astronomiczne.

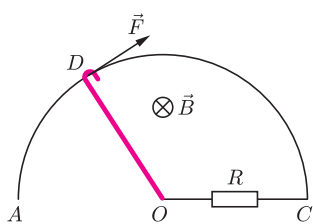
A 1. Gwiazdy należące do gwiazdozbioru Krzyża Południa znajdują się nie bliżej niż 25° i nie dalej niż 34° od południowego bieguna nieba. Z jakich szerokości geograficznych można gwiazdozbiór zobaczyć w całości? Z jakich nie widać żadnego jego fragmentu? Z jakich można go zobaczyć częściowo? [1 pkt]

A 2. Ile czasu (w jednostkach obecnego czasu średniego słonecznego lub atomowego) trwałaby ziemską średnia doba słoneczna, gdyby Ziemia obracała się z tą samą prędkością kątową (w układzie inercjalnym, czyli „względem Wszechświata”), lecz w przeciwną stronę niż w rzeczywistości? [1 pkt]



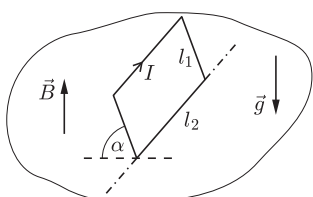
Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 1

F 731. Mamy dany obwód jak na rysunku 1. Zagięty pręt OD może ślizgać się bez oporu po łuku ADC o promieniu l , a prostopadle do płaszczyzny łuku skierowane jest pole indukcji magnetycznej B . Jaką siłę należy przyłożyć w punkcie D , prostopadle do przewodu OD , żeby go obracać ze stałą prędkością kątową ω ? Opór części OC układu wynosi R , opór pozostałych części należy pominąć. Rozwiązanie na str. 14

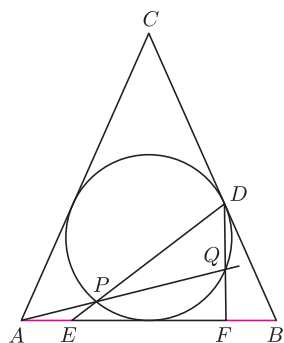


Rys. 2

F 732. Prostokątna ramka przewodząca, znajdująca się w pionowym polu magnetycznym o indukcji B , może obracać się swobodnie wokół jednego z boków (rys. 2). Znaleźć natężenie prądu płynącego przez ramkę, przy którym jest ona nieruchoma i nachylona pod kątem α do horyzontu. Boki ramki są długości l_1 i l_2 , a masy tych boków wynoszą odpowiednio m_1 i m_2 . Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Waldemar POMPE

M 1228. Dana jest szachownica 8×8 , której pola pokolorowane są w tradycyjny sposób. W jednym ruchu zmieniamy kolory pól w wybranym wierszu lub kolumnie: czarne pola przekolorowujemy na białe, a białe na czarne. Rozstrzygnąć, czy po pewnej liczbie ruchów możemy otrzymać szachownicę, w której dokładnie jedno pole jest czarne. Rozwiązanie na str. 9



Rys. 3

M 1229. Dany jest trójkąt ABC , w którym $BC = CA$ (rys. 3). Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boku BC w punkcie D . Prosta przechodząca przez punkt A przecina okrąg wpisany w trójkąt ABC w punktach P i Q , różnych od punktu D . Proste DP i DQ przecinają prostą AB odpowiednio w punktach E i F . Wykazać, że $AE = BF$. Rozwiązanie na str. 11

M 1230. Dana jest 15-cyfrowa liczba naturalna podzielna przez 81, niepodzielna przez 10 i której zapis dziesiętny składa się tylko z zer i jedynek. Wykazać, że usuwając jedno zero z zapisu dziesiętnego tej liczby, otrzymujemy liczbę 14-cyfrową, która nie jest podzielna przez 81. Rozwiązanie na str. 24



Kości Sichermana

Marcin WOŹNIAK*

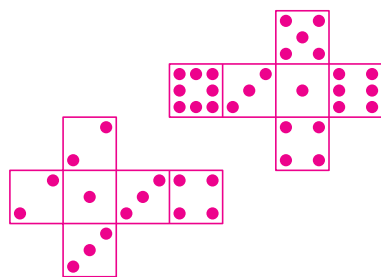
Istnieje wiele gier, w których jako generatora liczb losowych używa się dwóch tradycyjnych kości o liczbach oczek 1, 2, 3, 4, 5 i 6, a za wynik rzutu przyjmuje się sumę liczb oczek uzyskanych na tych kościach. Jak wiadomo, rozkład tej sumy nie jest jednostajny.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Podsumujmy wszystkie możliwe wyniki w tabeli. Widać, że prawdopodobieństwa ich uzyskania nie są równe:

Suma oczek	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Prawdopodobieństwo	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Okazuje się, że istnieje jeszcze inna para kości, tym razem różnych, która daje ten sam rozkład wyników. Kości te na cześć odkrywcy nazwane zostały kośćmi Sichermana.



Przez R (jak *row*) oznaczymy kość o liczbach oczek 1, 3, 4, 5, 6 i 8, a przez C (jak *column*) oznaczymy kość o liczbach oczek 1, 2, 2, 3, 3 i 4.

Łączna liczba oczek na ściankach kości R wynosi 27. Można je rozłożyć w taki sposób, aby suma oczek na przeciwległych ściankach wynosiła 9. Na tradycyjnych kościach suma ta wynosi 7, natomiast dla kości C otrzymujemy 5.

Tabela możliwych wyników przy rzucie kośćmi Sichermana wygląda następująco:

	R	1	3	4	5	6	8
C	1	2	4	5	6	7	9
	2	3	5	6	7	8	10
	2	3	5	6	7	8	10
	3	4	6	7	8	9	11
	3	4	6	7	8	9	11
	4	5	7	8	9	10	12

Zastanów wmy się, jak mogą wyglądać kości Sichermana. Chcielibyśmy odpowiedzieć na następujące pytania:

1. Jak znaleźć układ oczek na dwóch kościach, tak aby każda suma oczek, od 2 do 12, pojawiała się tak samo często jak na tradycyjnych kościach?
2. Ile jest różnych par kości spełniających ten warunek?
3. Jak rozwiązać pierwszy problem dla większej liczby kości? Dokładniej, jak znaleźć układ $k > 2$ kości, aby rozkład wyników rzutów był taki sam jak dla k kości tradycyjnych?

Aby odpowiedzieć na powyższe pytania, należy przyjrzeć się rozkładowi sum liczb oczek. Dla każdej z kości konstruujemy wielomianową funkcję tworzącą w ten sposób, że x^d przypiszemy każdej ścianie kostki, która ma d oczek.

Kościom tradycyjnym odpowiada funkcja tworząca

$$f(x) = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6;$$

dla kości R i C będzie to odpowiednio

$$x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^1 \quad \text{i} \quad x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x^1.$$

Ta konstrukcja funkcji tworzącej ma sens dla dowolnych kości z nieujemnymi liczbami na ściankach, bez względu na liczbę ścian. Zamiast rzucać dwiema kośćmi o funkcjach tworzących $f(x)$ i $g(x)$, możemy równoważnie rozpatrywać

*student, Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski

jedną kość o funkcji tworzącej równej $f(x) \cdot g(x)$. Funkcja tworząca dla pary tradycyjnych kości wynosi zatem

$$(x^1 + x^2 + \dots + x^6)^2 = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12},$$



gdzie współczynniki wskazują, ile razy pojawia się dany wynik przy rzucie 2 kości. Zauważmy ponadto, że dzięki funkcji tworzącej można łatwo obliczyć, ile jest ścianek na danej kości. Mianowicie, należy wziąć wartość funkcji tworzącej w $x = 1$. W przypadku kości tradycyjnych oczywiście $f(1) = 6$.

Zapiszmy teraz nasze zadanie za pomocą funkcji tworzących.

Niech $W_1(x)$ i $W_2(x)$ będą funkcjami tworzącymi kości Sichermana, które budujemy. Warunek, aby „działały” one jak tradycyjne kości, jest następujący:

$$(1) \quad (x^1 + x^2 + \dots + x^6)^2 = W_1(x) \cdot W_2(x).$$



Otrzymaliśmy zatem zadanie rozkładu wielomianu na czynniki. Co więcej, wielomiany $W_1(x), W_2(x)$ mają pewne z góry zadane własności:

- $W_1(1) = W_2(1) = 6$, ponieważ chcemy, żeby szukane kości miały po 6 ścianek,
- $W_1(x)$ i $W_2(x)$ nie mają wyrazu wolnego, w przeciwnym bowiem przypadku któraś ze ścianek musiałaby być pusta.

Przyjrzyjmy się rozkładowi wielomianu $x^1 + x^2 + \dots + x^6$ na czynniki:

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 &= \\ &= x(1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) = \frac{x(x^6 - 1)}{x - 1} = \frac{x(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x - 1} = \\ &= \frac{x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x - 1} = x(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$



Oznaczmy $V_1(x) = x, V_2(x) = x + 1, V_3(x) = x^2 + x + 1, V_4(x) = x^2 - x + 1$. Mamy zatem nowy zapis zadania (1):

$$(2) \quad (V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x))^2 = W_1(x) \cdot W_2(x).$$

Zauważmy, że $V_1(1) = 1, V_2(1) = 2, V_3(1) = 3, V_4(1) = 1$. Obserwacja ta narzuca rozwiązanie zadania (2). Okazuje się, że osiem wielomianów (po dwie kopie $V_i(x), i = 1, 2, 3, 4$) należy podzielić na dwie grupy, a w każdej z nich muszą znaleźć się:

- wyrażenie $V_1(x)$, jako jedyne gwarantujące nieobecność wyrazu wolnego,
- wyrażenia $V_2(x)$ i $V_3(x)$, ponieważ zgodnie z regułą liczenia liczby ścianek wielomian $W_j(x)$ w punkcie $x = 1$ powinien dawać wartość 6.



Pozostaje jedynie rozdysonować wielomiany $V_4(x)$. Jeśli uczynimy to sprawiedliwie, włączając po jednym $V_4(x)$ do wielomianów $W_1(x)$ i $W_2(x)$, wtedy otrzymamy kości klasyczne. Jeśli zaś oba $V_4(x)$ „wrzucimy” do jednego z nich, uzyskamy wtedy kości Sichermana.

Kości klasyczne:

$$W_1(x) = W_2(x) = V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

Kości Sichermana:

$$(kość C) \quad W_1(x) = V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4,$$

$$(kość R) \quad W_2(x) = V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x) \cdot V_4(x) = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8.$$

Znamy więc odpowiedź na pytanie 2: istnieje jeden układ kości Sichermana alternatywny do klasycznych kości.

Jeśli chcielibyśmy rozwiązać to zadanie, dopuszczając puste ścianki na kościach, czyli z pominięciem warunku, że każde $W_j(x), j = 1, 2$, musi zawierać wyrażenie $V_1(x)$, otrzymujemy dodatkowe rozwiązania postaci:

$$a) \quad W_1(x) = V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_1(x) \cdot V_1(x) = x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5,$$

$$W_2(x) = V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x) \cdot V_4(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^7;$$





Rozwiązanie zadania M 1228.

Niech a oznacza liczbę pól czarnych w ustalonym wierszu lub kolumnie.

Wówczas po wykonaniu ruchu liczba pól czarnych w tym wierszu (lub kolumnie) wynosi $8 - a$. Wobec tego po wykonaniu ruchu nie zmienia się parzystość liczby pól czarnych na szachownicy. Na początku pól czarnych było 32, nie jest zatem możliwe doprowadzenie do szachownicy z dokładnie jednym polem czarnym.

$$\begin{aligned} \text{b) } W_1(x) &= V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_1(x) \cdot V_1(x) \cdot V_4(x) \cdot V_4(x) = \\ &= x^2 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^9, \end{aligned}$$

$$W_2(x) = V_2(x) \cdot V_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3;$$

$$\begin{aligned} \text{c) } W_1(x) &= V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5, \\ W_2(x) &= V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x) \cdot V_1(x) \cdot V_1(x) = \\ &= x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7. \end{aligned}$$

A co dla większej liczby kości?

Szukamy dowolnego układu k kości takich, aby suma wyrzuconych na nich wartości miała taki sam rozkład, jak przy rzucie k kości klasycznych.

Konstruujemy kości Sichermana dla sumy liczby oczek na k kościach ($k > 2$), czyli

$$\begin{aligned} (x^1 + x^2 + \dots + x^6)^k &= (V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4(x))^k = \\ &= W_1(x) \cdot W_2(x) \cdot \dots \cdot W_k(x). \end{aligned}$$

Tym razem rozdzielamy $4k$ wielomianów $V_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, na k grup tak, żeby

- w każdej było wyrażenie $V_1(x)$,
- w każdej były wyrażenia $V_2(x), V_3(x)$,
- k kopii $V_4(x)$ dzielimy między $W_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Mamy zatem

$$(3) \quad W_j(x) = V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4^{r_j}(x), \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

gdzie zapis $V_4^{r_j}(x)$ oznacza, że r_j kopii $V_4(x)$ trafia do danego wielomianu $W_j(x)$, przy założeniach: $r_j \leq k$ oraz suma użytych potęg $V_4(x)$ w wielomianach $W_j(x)$ wynosi k .

W przypadku, gdy $r_j = 1$, uzyskujemy kostkę klasyczną, natomiast dla $r_j = 0$ i $r_j = 2$ otrzymujemy poznane już kości Sichermana: odpowiednio C i R.

Czy mogą pojawić się inne wartości r_j ?

Zastanówmy się, ile ścianek z dwoma oczkami znajduje się na kości scharakteryzowanej przez funkcję tworzącą $W_j(x)$, czyli jaki jest współczynnik przy x^2 w wielomianie $W_j(x)$. Po przemnożeniu występujących w każdej funkcji tworzącej (3) wyrażeń $V_1(x), V_2(x), V_3(x)$ otrzymujemy

$$(4) \quad \begin{aligned} W_j(x) &= V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot V_3(x) \cdot V_4^{r_j}(x) = \\ &= (x + 2x^2 + 2x^3 + x^4)(1 - x + x^2)^{r_j}. \end{aligned}$$

Zapiszmy $W_j(x)$ inaczej:

$$(5) \quad W_j(x) = (x + 2x^2 + A)(a_{r_j} + b_{r_j}x + B_{r_j}),$$

gdzie A jest wielomianem stopnia co najmniej 3, a B_{r_j} jest wielomianem stopnia co najmniej 2. Przez prostą indukcję można wykazać, że $a_{r_j} = 1$ oraz $b_{r_j} = -r_j$.

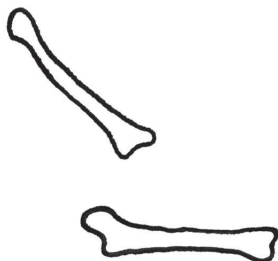
Wobec tego współczynnik przy x^2 w równaniu (5) wynosi $2a_{r_j} + b_{r_j} = 2 - r_j$. A to wyrażenie musi być nieujemne, ponieważ określa liczbę ścianek z dwoma oczkami, więc $r_j \leq 2$.

Wnioskujemy zatem, że nie istnieją inne kości spełniające warunki zadania – konkurencję dla kości klasycznych przy rzucaniu k kośćmi może stanowić jedynie „mieszanka” kości klasycznych i kości Sichermana. Warunek poprawności takiego układu jest następujący: sumy na k kościach będą takie same jak na kościach klasycznych wtedy i tylko wtedy, gdy

$$k = r_1 + \dots + r_k \quad \text{oraz} \quad r_j \in \{0, 1, 2\}.$$

Bibliografia:

1. Odczyt dr. Andrzeja Dąbrowskiego *Kości zostały rzucone*, Wisła, 2.06.2007.
2. Internet:
 - <http://www.math.ttu.edu/~aledet/stuff/dice.html>
 - <http://plus.maths.org/issue41/features/hobbs/index.html>
 - <http://www.mathnerds.com/mathnerds/best/crazydice/solution.aspx>



Przedstawione zadanie konstrukcyjne można rozwijać, rozpatrując kości o różnej liczbie ścianek. W ten sposób otrzymujemy wiele zadań do rozwiązania – niektóre sytuacje dają ciekawe wyniki, a inne nie.

Punkty charakterystyczne na prostej Eulera

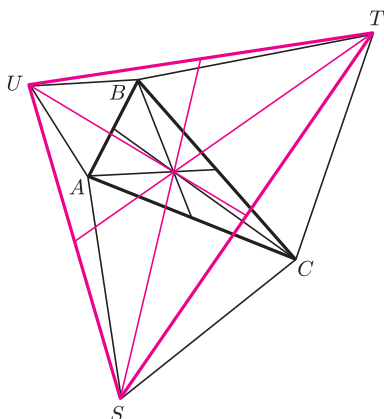
Martha UBIK

Jest to skrót pracy nagrodzonej srebrnym medalem w XXX Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2008 roku.

O podobnych problemach można poczytać np. w: V. Prasolov, *Problems in Plane and Solid Geometry*.

Okrąg Eulera nazywany jest również okręgiem Feuerbacha lub okręgiem dziewięciu punktów.

Punkty Eulera są to środki odcinków o jednym końcu w ortocentrum, a drugim w jednym z wierzchołków danego trójkąta (S. I. Zetel, *Geometria trójkąta*).



W geometrii często spotykamy się z obiektami, które, chociaż zdefiniowane jednym zdaniem, kryją w sobie wiele tajemnic. Moja praca traktowała o jednym z nich, a mianowicie o **prostej Eulera**. Jest to prosta, do której należą ortocentrum H , środek ciężkości G oraz środek O okręgu opisanego na danym trójkącie. W istocie, te punkty są współliniowe.

Dowód. Niech X, Y, Z będą odpowiednio środkami boków BC, CA, AB trójkąta ABC . Trójkąt XYZ jest podobny do trójkąta ABC w skali $\frac{1}{2}$. Wysokości w trójkącie XYZ przecinają się w punkcie O , więc $OX : HA = 1 : 2$.

Niech G' będzie punktem przecięcia odcinków OH i AX . Zatem $AG' : G'X = OX : HA = 1 : 2$, więc $G' = G$ oraz $OG' : G'H = OX : HA = 1 : 2$, z czego otrzymujemy, że odległość środka ciężkości od ortocentrum jest dwa razy większa niż jego odległość od środka okręgu opisanego na trójkącie. \square

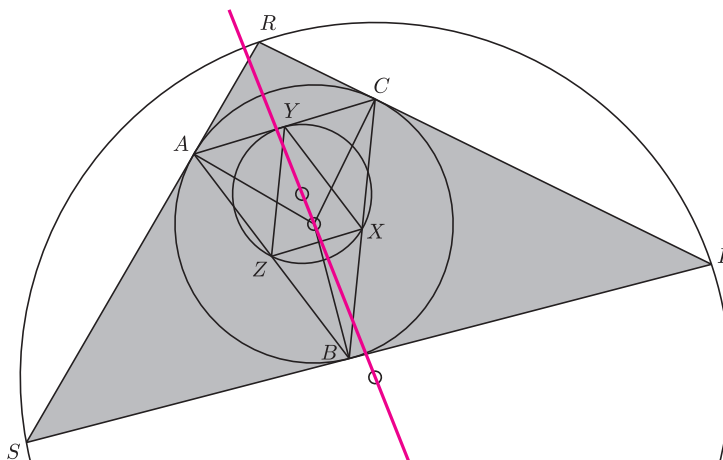
Ponadto na prostej Eulera leży środek okręgu Eulera, a więc okręgu, na którym leżą spodki wysokości, środki boków oraz punkty Eulera danego trójkąta.

W rzeczywistości jednak należy do niej wiele innych punktów charakterystycznych trójkąta. W pracy postarałam się wskazać kilka z nich, a także zdefiniować te najbardziej znane trochę inaczej.

Poniżej przedstawiam kilka twierdzeń z mojej pracy. Zachęcam do udowodnienia tych, które są podane bez dowodu.

Twierdzenie 1. Na bokach trójkąta ABC po ich zewnętrznej stronie zbudowano trójkąty równoboczne AUB, BTC i CSA . Środki ciężkości trójkątów ABC i STU pokrywają się (rysunek obok).

Twierdzenie 2. Na trójkącie ABC opisano okrąg i poprowadzono styczne do tego okręgu w punktach A, B oraz C . Punkty przecięcia tych stycznych oznaczono przez P, R oraz S . Środek okręgu opisanego na trójkącie PRS leży na prostej Eulera trójkąta ABC .



Jeśli proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie, to punkt ich przecięcia jest środkiem perspektywy trójkątów ABC i XYZ .

Twierdzenie 3. Środek perspektywy trójkąta spodkowego oraz trójkąta PRS zdefiniowanego powyżej leży na prostej Eulera trójkąta ABC .

Dowód. Oznaczmy przez H_A, H_B oraz H_C spodki wysokości trójkąta ABC opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A, B i C . Zauważmy, że

$$\sphericalangle H_C H_A B = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle A H_A H_C = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle A C H_C,$$

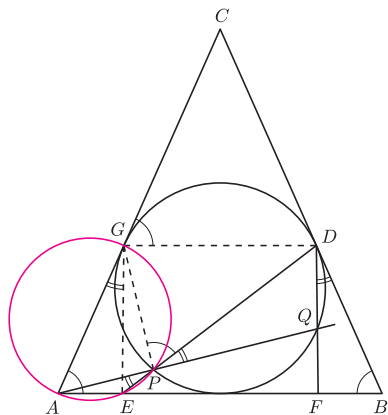
gdź na czworokącie $A C H_A H_C$ można opisać okrąg ($\sphericalangle C H_C A = \sphericalangle A H_A C = \frac{\pi}{2}$). Stąd

$$\sphericalangle H_C H_A B = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle C A B \right) = \sphericalangle C A B.$$



Rozwiązanie zadania M 1229.

Rozwiążemy zadanie przy założeniu, że punkt D nie leży między prostymi AB i AP (rysunek). Dowód w pozostałym przypadku jest analogiczny.



Oznaczmy przez G punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem AC . Wówczas

$$\sphericalangle GAE = \sphericalangle CGD = \sphericalangle GPD,$$

skąd wynika, że punkty A, E, P, G leżą na jednym okręgu. Wobec tego

$$\sphericalangle AGE = \sphericalangle APE = \sphericalangle DPQ = \sphericalangle BDF.$$

Równość ta w połączeniu z zależnościami $AG = BD$ oraz $\sphericalangle GAE = \sphericalangle DBF$ dowodzi, że trójkąty AGE i BDF są przystające. A zatem $AE = BF$.

I analogicznie:

$$\sphericalangle H_B H_A C = \sphericalangle CAB,$$

$$\sphericalangle H_A H_C B = \sphericalangle H_B H_C A = \sphericalangle BCA,$$

$$\sphericalangle H_A H_B C = \sphericalangle H_C H_B A = \sphericalangle ABC.$$

Korzystając z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą, mamy ponadto:

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle BAC, \quad \sphericalangle RCA = \sphericalangle CBA, \quad \sphericalangle SAB = \sphericalangle ACB.$$

Zatem trójkąty $H_A H_B H_C$ i PRS mają parami równoległe boki, a więc są podobne. W związku z tym istnieje jednokładność, która przekształca trójkąt $H_A H_B H_C$ wraz z opisanym na nim okręgiem na trójkąt PRS wraz z opisanym na nim okręgiem, a środek tej jednokładności jest środkiem perspektywy tych trójkątów. Ponieważ środki okręgów opisanych na każdym z tych trójkątów leżą na prostej Eulera trójkąta ABC (dlaczego?), środek jednokładności również leży na tej prostej, co kończy dowód. \square

Twierdzenie 4. Dany jest środek ciężkości G oraz wierzchołek A trójkąta ABC . Wybrano punkt F należący do odcinka AG . Wartość wyrażenia

$$FB^2 + FC^2 - GB^2 - GC^2$$

jest stała, to znaczy nie zależy od położenia punktów B i C , a jedynie od wyboru punktu F .

Dowód. Prawdziwe są następujące równości: $\vec{FB} = \vec{FG} + \vec{GB}$, $\vec{FC} = \vec{FG} + \vec{GC}$.

Czyli

$$\begin{aligned} FB^2 + FC^2 - GB^2 - GC^2 &= FG^2 + 2\vec{FG} \cdot \vec{GB} + GB^2 + FG^2 + \\ &\quad + 2\vec{FG} \cdot \vec{GC} + GC^2 - GB^2 - GC^2 = \\ &= 2(FG^2 + \vec{FG}(\vec{GB} + \vec{GC})) = 2(FG^2 + \vec{FG} \cdot \vec{AG}) = \\ &= 2FG(FG + AG) = \text{const.} \quad \square \end{aligned}$$

Twierdzenie 5. Przez H, G i O oznaczmy ortocentrum, środek ciężkości i środek okręgu opisanego pewnego trójkąta. Istnieje nieskończenie wiele trójkątów, dla których te punkty są odpowiednio ortocentrum, środkiem ciężkości i środkiem okręgu opisanego. Jeśli wybierzemy punkt A i dodamy warunek, że ma on być wierzchołkiem trójkąta, to otrzymamy co najwyżej jeden taki trójkąt.

Kiedy taki trójkąt istnieje?

Jeśli taki trójkąt istnieje, to można podać jego jednoznaczny konstrukcję.

Konstruujemy:	Otrzymujemy:
1. Półprostą AG , a na niej punkt leżący w odległości $AG/2$ od punktu G po przeciwnej stronie punktu G niż punkt A .	1. Punkt M , będący środkiem boku BC trójkąta ABC .
2. Półprostą AH .	2–3. Prosta BC zawierająca bok BC trójkąta ABC .
3. Prosta prostopadła do półprostej AH , przechodząca przez punkt M .	
4. Okrąg o środku w punkcie O i promieniu OA .	4. Punkty przecięcia okręgu z prostą BC , to jest wierzchołki B i C trójkąta ABC .

Twierdzenie 6. Dany jest trójkąt nierównoboczny ABC . Nie istnieje trójkąt wpisany w trójkąt ABC , którego ortocentrum, środek ciężkości oraz środek okręgu na nim opisanego pokrywają się odpowiednio z tymi punktami charakterystycznymi trójkąta ABC .

Twierdzenie 7. Niech Y_1, Y_2 i Y_3 będą środkami odcinków o jednym końcu w ortocentrum, a drugim w wierzchołkach trójkąta ABC . Zachodzi równość

$$\frac{AY_1}{Y_1B} \cdot \frac{BY_2}{Y_2C} \cdot \frac{CY_3}{Y_3A} = 1.$$

Prosta Eulera jest naprawdę ciekawym obiektem geometrycznym i warto się nią zainteresować!

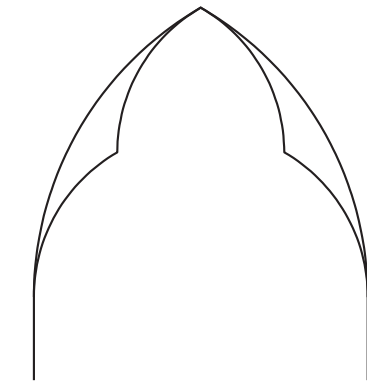


mała delta

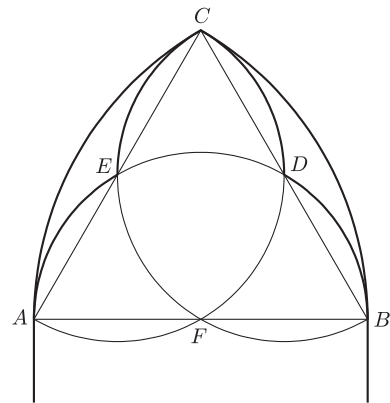
Okna gotyckie – ciąg dalszy

Do dokończenia rysunku okna gotyckiego brakowało tylko wypełnienia najmniejszych ostrołuków łukami takimi jak na rysunku 1. Okazuje się, że jest to bardzo łatwe.

Przypomnijmy, że ostrołuk powstawał z dwóch łuków AC i BC dorysowanych do trójkąta równobocznego ABC , takiego jak na rysunku 2. Niech teraz D , E i F będą środkami boków trójkąta ABC . Narysujemy trzy półokręgi o środkach w punktach D , E i F . Brakującymi łukami są: łuki AE i BD półokręgu o środku F , łuk EC półokręgu o środku D i łuk CD półokręgu o środku E . Nieco inne wykończenie okna można było uzyskać wykorzystując w tym celu fragment trójliścia. Na rysunku 3 widzimy takie wykończenie okna. Jak je rysujemy?



Rys. 1



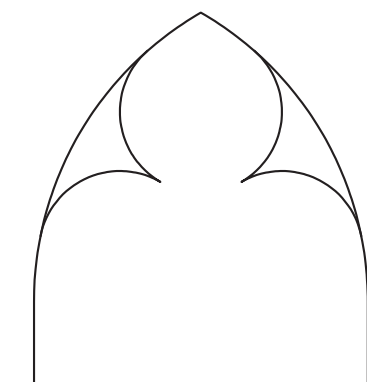
Rys. 2

Na początku dorysowujemy do trójkąta ABC trzeci łuk: AB . Otrzymujemy „trójkąt krzywoliniowy” ABC (tzw. trójkąt Reuleaux), w który wpisujemy trzy okręgi parami styczne zewnętrznie, takie same jak przy tworzeniu trójliścia (zob. rysunek 4). Musimy tylko wiedzieć, jakie są promienie tych okręgów i gdzie leżą ich środki. Zauważmy najpierw, że środki P , Q i R tych okręgów są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Trójkąty ABC i PQR mają wspólny środek O , ponadto punkt P leży na odcinku OA , punkt Q leży na odcinku OB i punkt R leży na odcinku OC . Dla określenia położenia tych środków wystarczy więc obliczyć długość odcinka OP .

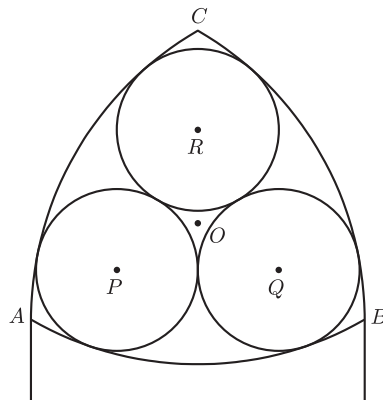
Obliczmy zatem długość promienia tych okręgów i długość odcinka OP . Przyjmijmy $AB = a$. Niech punkt S będzie punktem styczności okręgu o środku R i łuku BC . Wtedy, oczywiście, punkty A , R i S są współliniowe. Niech następnie punkt T będzie punktem styczności okręgów o środkach Q i R (zob. rysunek 5). Oznaczmy literą r promień okręgów wpisanych. Ponieważ trójkąt ATR jest prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$(*) \quad AT^2 + TR^2 = AR^2.$$

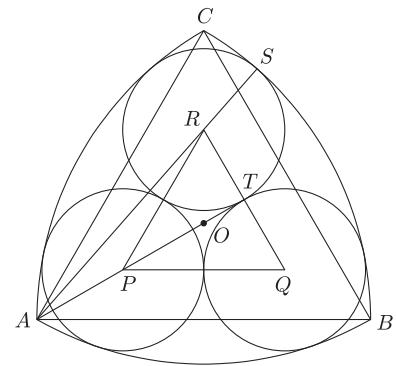
Oczywiście, $TR = r$ oraz $AR = a - r$. Zauważmy następnie, że $AT = AO + OT$. Odcinek AO jest równy promieniowi okręgu opisanego na



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

trójkącie ABC , a odcinek OT jest równy promieniowi okręgu wpisanego w trójkąt PQR . Zatem

$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{oraz} \quad OT = \frac{1}{3} \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Podstawiając obliczone długości odcinków do równości (*), otrzymujemy równanie

$$\left(\frac{(a+r)\sqrt{3}}{3}\right)^2 + r^2 = (a-r)^2$$

z niewiadomą r . Przekształcając to równanie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{(a+r)^2}{3} + r^2 &= a^2 - 2ar + r^2, & \frac{a^2 + 2ar + r^2}{3} &= a^2 - 2ar, \\ a^2 + 2ar + r^2 &= 3a^2 - 6ar, & r^2 + 8ar - 2a^2 &= 0. \end{aligned}$$

Jedynym pierwiastkiem dodatnim tego równania jest

$$r = (3\sqrt{2} - 4) \cdot a.$$

Następnie zauważamy, że

$$OP = \frac{2}{3} \cdot PT = \frac{2}{3} \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot r = \frac{2\sqrt{3} \cdot (3\sqrt{2} - 4)}{3} \cdot a.$$

Oczywiście, odcinki długości $(3\sqrt{2} - 4) \cdot a$ oraz $\frac{2\sqrt{3} \cdot (3\sqrt{2} - 4)}{3} \cdot a$ można w nietrudny sposób skonstruować za pomocą cyrkla i linijki.

Nieco inny wariant tego ostatniego wykończenia okna uzyskamy, wpisując trzy okręgi w oryginalny ostrołuk, tak jak na rysunku 6. Zauważmy, że okręgi o środkach P i Q mają jednakowe promienie, a okrąg o środku R jest od nich nieco mniejszy. Promień r okręgów o środkach P i Q można łatwo obliczyć z twierdzenia Pitagorasa. Tak jak poprzednio przyjmijmy $AB = a$. Niech S będzie punktem styczności okręgu o środku Q i łuku BC . Niech następnie punkt T będzie rzutem punktu Q na odcinek AB (zob. rysunek 7). Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ATQ wynika, że $AT^2 + TQ^2 = AQ^2$, czyli

$$\left(\frac{a}{2} + r\right)^2 + r^2 = (a-r)^2.$$

To równanie ma jeden pierwiastek dodatni: $r = \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \cdot a$. Nietrudno też podać położenie punktu Q ; znamy bowiem długości odcinków

$$AT = \frac{a}{2} + r = (\sqrt{3} - 1) \cdot a$$

oraz

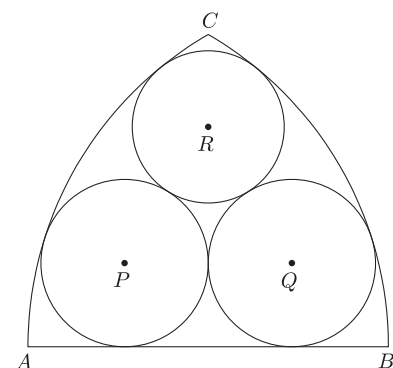
$$TQ = r = \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \cdot a.$$

Pokażemy teraz, w jaki sposób można obliczyć promień mniejszego okręgu i jak można wyznaczyć położenie środka tego okręgu. Niech U będzie punktem styczności tego okręgu z łukiem BC , niech V będzie punktem styczności dwóch dolnych okręgów i wreszcie niech W będzie rzutem punktu R na odcinek AB (zob. rysunek 8). Wtedy, oczywiście, punkty R , V i W są współliniowe i punkt W jest środkiem odcinka AB . Oznaczmy promień górnego okręgu literą x i niech $RV = h$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów AWR i PVR otrzymujemy układ równań:

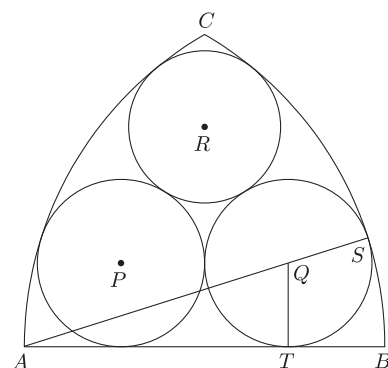
$$\begin{cases} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (r+h)^2 = (a-x)^2, \\ r^2 + h^2 = (r+x)^2. \end{cases}$$

Żmudne rozwiązanie tego układu równań pozostawimy Czytelnikowi; podamy tu jedynie przybliżone wartości niewiadomych: $x \approx 0,211a$, $h \approx 0,378a$ oraz $r \approx 0,232a$.

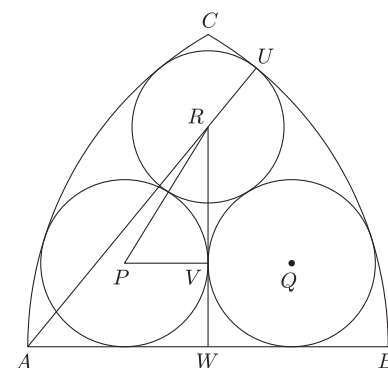
Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Gra w zgadywanie

Jakub RADOSZEWSKI

Jaś i Małgosia grają w następującą *Grę w zgadywanie*. Na początku gry Jaś wybiera sobie liczbę $x \in \{1, \dots, n\}$. Małgosia będzie próbować odgadnąć x , zadając Jasiowi pytania postaci: „Czy $x \leq a$?”, na które Jaś odpowiada „Tak” lub „Nie”. Małgosia dąży przy tym do zminimalizowania liczby zadanych pytań, natomiast Jasiowi zależy na tym, żeby Małgosia musiała ich zadać jak najwięcej.

No dobrze, ale co to tak naprawdę znaczy, że Małgosia chce zminimalizować liczbę zadanych pytań? Powiedzmy, że dla pewnego k mamy następujące dwie strategie:

- Jeżeli $x \neq \lfloor n/2 \rfloor$, to wartość x zostaje odgadnięta za pomocą co najwyżej k pytań, lecz odgadnięcie wartości x w przypadku, gdy $x = \lfloor n/2 \rfloor$, wymaga zadania $k + 2$ pytań.
- Odgadnięcie wartości x wymaga zawsze zadania $k + 1$ pytań.

Którą z nich Małgosia uzna za lepszą?

Z naszego punktu widzenia lepsza będzie druga z powyższych strategii. Ogólniej, będziemy poszukiwać takiej strategii gry dla Małgosi, przy której liczba pytań koniecznych do odgadnięcia wartości x w *najgorszym przypadku* będzie najmniejsza możliwa. W przypadku gry w zgadywanie przez najgorszy przypadek rozumiemy najgorszą z punktu widzenia danej strategii wartość x . Jest to zarazem jedyna rzecz, na którą Jaś ma wpływ w opisanej grze, więc jego celem będzie jak najbardziej złośliwy wobec Małgosi wybór x .

Intuicja podpowiada, że całkiem niezłą strategię gry dla Małgosi można skonstruować na podstawie *wyszukiwania binarnego*. Dokładniej, w pierwszym pytaniu wybieramy $a = \lfloor n/2 \rfloor$. W zależności od odpowiedzi na to pytanie będziemy się odtąd zajmować zbiorem $\{1, \dots, a\}$ lub $\{a + 1, \dots, n\}$. W pierwszym przypadku kolejną wartością, o którą spytamy, będzie $\lfloor a/2 \rfloor$, w drugim zaś środkowy całkowity element przedziału $[a + 1, n]$ itd. Można łatwo sprawdzić, że liczba pytań, jakie będziemy musieli zadać w najgorszym przypadku, jest przy tej strategii równa $\lceil \log n \rceil$ (gdyż po każdym pytaniu długość przedziału poszukiwań zostaje mniej więcej przepołowiona).

Czy jest to z naszego punktu widzenia strategia optymalna? Okazuje się, że tak! Otóż w dowolnej strategii, po otrzymaniu odpowiedzi na pytanie „Czy $x \leq a$?” wiemy, że x znajduje się w zbiorze $\{1, \dots, a\}$ lub też w $\{a + 1, \dots, n\}$. Od tego momentu możemy zadawać kolejne pytania, ograniczając się do jednego z tych dwóch przedziałów; nową wartością n przed drugim pytaniem będzie więc a lub $n - a$. Ponieważ nas interesuje najgorszy możliwy przypadek, to możemy założyć, że x znajduje się w dłuższym spośród tych dwóch przedziałów. Łatwo zauważyć, że właśnie w wyszukiwaniu binarnym wartość $\max(a, n - a)$ jest najmniejsza możliwa.

Mamy już strategię dla Małgosi, ale jak podpowiedzieć coś Jasiowi? Ponieważ Jaś nie powinien zakładać żadnej konkretnej strategii Małgosi, to może mu być strasznie ciężko odgadnąć, jakie x sprawi jej najwięcej kłopotów. Z tego względu najlepszym rozwiązaniem dla Jasia będzie... drobne oszustwo. Otóż Jaś wcale nie potrzebuje wymyślać sobie na początku wartości x ; wystarczy, że na pytania Małgosi będzie zawsze odpowiadał tak, żeby długość pozostającego jej przedziału poszukiwań była możliwie największa. Jeżeli Jaś będzie przy tym odpowiednio ostrożny (czyli nigdy nie udzieli odpowiedzi sprzecznej z poprzednimi), to jego oszustwo nigdy nie zostanie wykryte! Zauważmy też, że taka strategia Jasia wymusza na Małgosi branie pod uwagę zawsze najgorszego możliwego przebiegu gry, co uzasadnia nasz wcześniejszy wybór kryterium porównywania strategii.

Jasiowi i Małgosi znudziła się już prościutka gra w zgadywanie, więc wymyślili oni jej nową wersję, która zwłaszcza Jasiowi bardzo się spodobała: teraz Jaś



Uzasadnienie takiego a nie innego wyboru strategii znajduje się w dalszej części tekstu.

Zauważmy, że w drugim z przypadków liczby ze zbioru $\{a + 1, \dots, n\}$ możemy utożsamiać z liczbami $\{1, \dots, n - a\}$.



Rozwiązanie zadania F 731.

Z prawa Faradaya mamy

$$|\mathcal{E}_{\text{ind}}| = B \frac{\Delta S}{\Delta t} = Bl^2 \omega^2 / 2.$$

Z porównania mocy prądu i układu otrzymujemy

$$Fv = Fl\omega = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}^2}{R},$$

stąd

$$F = \frac{B^2 l^3 \omega}{4R}.$$

może kłamać przy odpowiadaniu na pytania! Tym razem Małgosia nie była jednak w stanie skutecznie odgadnąć żadnej wartości x , więc dzieci postanowiły ograniczyć swobodę Jasia – może on skłamać co najwyżej raz w ciągu jednej gry. Małgosia wymyśliła już sposób modyfikacji strategii wyszukiwania binarnego, dzięki któremu działa ona także dla nowej gry. Otóż pytania można zadawać tak samo jak poprzednio, ale żeby nie dać się wpuścić w maliny, wystarczy każde z nich dwukrotnie powtórzyć. Jeżeli odpowiedzi będą takie same, to Jaś nie skłamał, a jeżeli różne, to Małgosia zadaje jeszcze trzecie pytanie, żeby poznać prawdziwą odpowiedź i, co więcej, odtąd już wie, że Jaś nie może więcej kłamać, więc może ona zastosować dokładnie strategię wyszukiwania binarnego. Można obliczyć, że wartość x zostanie w ten sposób odgadnięta zawsze w co najwyżej $2 \cdot \lceil \log n \rceil + 1$ ruchach. Dzieci zaczęły się jednak zastanawiać, czy jest to strategia optymalna dla tej gry.

W opisanej strategii dla $n = 5$ może być konieczne zadanie 7 pytań. Czy potrafisz wskazać strategię, w której w tym przypadku 6 pytań zawsze wystarczy? Odpowiedź na to pytanie może wymagać nieco pokombinowania.

Okazuje się, że nie, a pierwszą wartością n , dla której opisana strategia może wymagać więcej pytań niż optymalna, jest 5. Nie zrazimy się jednak początkowym niepowodzeniem i skonstruujemy optymalną strategię również i dla tej gry, choć tym razem może nam się przydać do tego pomoc komputera.

Załóżmy więc, że Małgosia zadała pytanie „Czy $x \leq a$?” i uzyskała na nie odpowiedź „Tak”. Co Małgosia może z tej odpowiedzi wywnioskować o wartości x ? W sumie... niestety nic. Jeżeli Jaś powiedział prawdę, to $x \leq a$, ale równie dobrze może zachodzić $x > a$, jeżeli tylko Jaś skłamał. Musi jednak istnieć możliwość wywnioskowania czegośkolwiek, gdyż w przeciwnym razie gra by się nigdy nie skończyła. Okazuje się, że na podstawie odpowiedzi Jasia można wysnuć wnioski nie tyle o wartości x , ale o liczbie dotychczasowych kłamstw Jasia w zależności od tej wartości. Faktycznie, jeżeli $x \leq a$, to Jaś jeszcze ani razu nie skłamał, a w przeciwnym przypadku skłamał dokładnie raz.

Następnie Małgosia zadaje Jasiowi drugie pytanie „Czy $x \leq b$?”, tym razem powiedzmy dla $b > a$. Jeżeli Jaś na to pytanie również odpowiedział „Tak”, to wiadomo, że:

- jeżeli $x \leq a$, to Jaś jeszcze ani razu nie skłamał;
- jeżeli $a < x \leq b$, to Jaś skłamał dokładnie raz;
- jeżeli $x > b$, to Jaś skłamał dokładnie dwa razy; to jest jednakże niemożliwe, gdyż Jaś ma do dyspozycji tylko jedną możliwość skłamania.

Jeżeli zaś Jaś na drugie pytanie Małgosi odpowiedział przecząco, to można z tego wywnioskować, że $x \leq a$ lub $x > b$ oraz że Jaś skłamał już dokładnie raz.

Bazą wiedzy nazwiemy komplet informacji, jakie Małgosia może wywnioskować po zadaniu Jasiowi pewnej liczby pytań. W dotychczasowych rozważaniach bazy wiedzy wyrażaliśmy słownie, ale teraz spróbujemy sformalizować nieco ich opis. Możemy, na przykład, zauważyć, że po zadaniu dowolnej liczby pytań baza wiedzy Małgosi będzie n -elementowym ciągiem (a_i) , określającym, dla każdego i , liczbę dotychczasowych kłamstw Jasia, o ile $x = i$. Zakładając, że Jaś nie oszukuje w swoich odpowiedziach (bardziej niż mu na to pozwalają zasady), to $a_i \geq 2$ oznacza po prostu, że $x \neq i$, czyli możemy ograniczyć naszą uwagę do ciągów nad $\{0, 1, 2\}$. Jest to stosunkowo miła informacja; wynika z niej, że możliwych baz wiedzy jest skończenie wiele (a dokładniej 3^n).

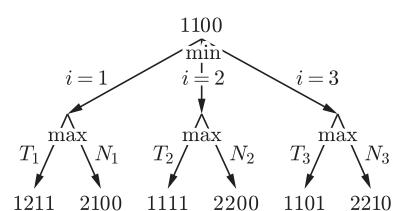
Umiemy więc już w systematyczny sposób interpretować ciągi odpowiedzi Jasia, ale... wciąż nie wiemy właściwie, jak należy zadawać pytania! W naszej strategii optymalnej wykorzystamy więc *programowanie dynamiczne*, tzn. spróbujemy dla każdej możliwej bazy wiedzy obliczyć liczbę pytań, za pomocą których można, mając wszystkie informacje z tej bazy, odgadnąć faktyczną wartość x . Znowu interesować nas będzie *najgorszy możliwy przypadek*, czyli najbardziej złośliwa wobec Małgosi kombinacja wartości x oraz momentu, w którym Jaś skłamał (jeżeli w ogóle zdecyduje się to uczynić). Cały proces zaczynamy od bazy odpowiadającej ciągowi zerowemu, a kończymy na ciągach z co najwyżej jedną wartością różną od 2.

Więcej o programowaniu dynamicznym można przeczytać w dowolnej książce o algorytmice, np.: T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein, *Wprowadzenie do algorytmów*.

Zauważmy istotną różnicę między tym podejściem a optymalną strategią dla prostej gry w zgadywanie. Poprzednio Małgosia miała sztywny schemat zadawania pytań, który po prostu konsekwentnie realizowała. Tym razem jeszcze przed samą rozgrywką Małgosia zasympuluje sobie rozmaite możliwości na kartce (lub na komputerze), a dopiero potem zastosuje najlepszą strategię, jaką znalazła.

Tak naprawdę wykorzystaliśmy tzw. rekurencję ze spamiętywaniem, a nie programowanie dynamiczne, ale w gruncie rzeczy techniki te są różnymi zapisami tej samej metody.

Ta procedura może się zapętlić, ale tylko wtedy, gdy $T_i = A$ lub $N_i = A$. Niemię jednak w takim przypadku i -tego pytania możemy po prostu nie rozważać.



Schemat wyznaczania wyniku dla $A = 1100$.

Czy zauważyliście, w którym momencie pokazaliśmy ograniczenie na wartość wyniku?

Jak więc obliczyć wynik dla danego ciągu $A = a_1, \dots, a_n$ reprezentującego pewną bazę wiedzy, tj. $w(A)$? Przeglądamy wszystkie możliwe pytania („Czy $x \leq i$?” dla $i = 1, 2, \dots, n - 1$). Dla i -tego pytania rozważamy bazy wiedzy

$$T_i = a_1, \dots, a_i, \min(a_{i+1} + 1, 2), \dots, \min(a_n + 1, 2)$$

oraz

$$N_i = \min(a_1 + 1, 2), \dots, \min(a_i + 1, 2), a_{i+1}, \dots, a_n,$$

które otrzymujemy, jeżeli odpowiedzią na to pytanie jest odpowiednio „Tak” lub „Nie”. Dla każdej z wyznaczonych baz wyliczamy rekurencyjnie wartość w (lub wykorzystujemy gotową wartość, jeżeli została ona już obliczona we wcześniejszych krokach algorytmu). Ponieważ dążymy do wyboru najlepszego możliwego pytania, a dla każdego pytania zakładamy najbardziej pesymistyczny wariant odpowiedzi Jasia, to:

$$w(A) = \min_{1 \leq i \leq n-1} \{\max(w(T_i), w(N_i))\}.$$

Koszt czasowy obliczenia tego wszystkiego to $O(3^n \cdot n)$.

Zauważmy, że na podstawie wartości w stosunkowo łatwo jest skonstruować optymalną strategię dla Małgosi. Faktycznie, jeżeli po zadaniu pewnej liczby pytań bazą wiedzy jest A , to Małgosia jako następne pytanie powinna wybrać „Czy $x \leq i$?”, gdzie i spełnia: $\max(w(T_i), w(N_i)) = w(A)$. Nieco zaskakujące może być to, że również Jaś może uczynić pożytek z tych wartości w swojej strategii, jeżeli – tak jak poprzednio – postanowi dokonać niewykrywalnego oszustwa, tzn. wybrać wartość x dopiero w trakcie gry. W tym celu na pytanie Małgosi „Czy $x \leq i$?” Jaś powinien odpowiedzieć tak, aby przejść do tej z baz T_i oraz N_i , dla której wynik jest większy, o ile ta baza nie jest sprzeczna, czyli nie jest ciągiem złożonym z samych dwójek.

Skonstruowaliśmy więc poszukiwane strategie; problem tkwi w tym, że złożoność czasowa ich wyznaczenia jest wykładnicza, co już dla niewielkich n może być dla naszych graczy bardzo kłopotliwe, nawet jeśli użyją komputera. Okazuje się jednak, że złożoność czasową tego procesu można istotnie zmniejszyć, redukując rozmiar zbioru baz wiedzy. Każda baza wiedzy jest sumą pewnej liczby ciągów typu $1 \dots 10 \dots 0$ oraz typu $0 \dots 01 \dots 1$. Jak można łatwo sprawdzić (do czego zachęcamy Czytelnika), suma takich ciągów musi być postaci:

- I. $2 \dots 21 \dots 10 \dots 01 \dots 12 \dots 2$ lub
- II. $2 \dots 21 \dots 12 \dots 21 \dots 12 \dots 2$.

W przypadku I z punktu widzenia strategii istotne są jedynie liczby kolejnych jedynek, zer i jedynek, więc mamy $O(n^3)$ istotnie różnych baz tej postaci. Z kolei strategia gry dla bazy postaci II jest praktycznie taka sama jak dla bazy złożonej z samych jedynek w takiej samej ich liczbie, czyli jest to po prostu wyszukiwanie binarne (brak zer – Jaś nie może już więcej kłamać). Zredukowaliśmy zatem moc zbioru baz wiedzy do $O(n^3)$, a złożoność algorytmu do wielomianowej: $O(n^4)$. Okazuje się, że także i ten wynik można jeszcze poprawić (tym razem nie następuje już redukcja liczby możliwych baz wiedzy), osiągając złożoność $O(n^3 \log n)$. W tym celu trzeba zauważyć, że wynik dla dowolnej bazy jest rzędu $O(\log n)$ oraz że przy danej bazie A dla $i < j$ zachodzi $w(T_i) \leq w(T_j)$ i $w(N_i) \geq w(N_j)$, a następnie uczynić pożytek z tych spostrzeżeń za pomocą kilku dodatkowych tablic w algorytmie. Szczegóły tego usprawnienia pozostawiamy Czytelnikowi, podobnie jak uogólnienie opisanego rozwiązania na wersję gry, w której Jaś może skłamać co najwyżej k razy.

Na koniec przedstawiamy jeszcze jedną ciekawą zagadkę dla Czytelnika. Mamy j jajek, z których każde ma wytrzymałość $h \in \{0, \dots, H\}$, tzn. zrzucone z wysokości h nie rozbija się, ale z wysokości $h + 1$ już tak. Nie znamy wartości h , a jedynie j oraz H ; chcemy wyznaczyć h za pomocą najmniejszej możliwej liczby zrzutów jajek. Jajko, które po zrzuceniu się nie rozbija, może być wykorzystane do dalszych prób. Jak zaprojektować eksperyment? Jak zmodyfikować strategię, jeżeli co najwyżej jedno jajko może być wadliwe, tzn. rozbijać się po zrzuceniu z wysokości nie większej niż h ? Wreszcie jak postępować, jeżeli jest maksymalnie k różnych wadliwych jajek?

Co widzi PAMELA?

Akronimem PAMELA (*a Payload for Antimatter Matter Exploration and Light-nuclei Astrophysics*) nazwano misję kosmiczną satelity wyniesionego w 2006 roku na orbitę przez raketę Sojuz. Jak wskazuje angielskie rozwinięcie akronimu, celem misji jest badanie składu promieniowania kosmicznego.

Porównanie strumieni cząstek i antycząstek dla energii rzędu kilkudziesięciu gigaelektronowoltów może doprowadzić do wyodrębnienia sygnału świadczącego o rozpadach lub anihilacji cząstek ciemnej materii, tym samym pośrednio dowodzić ich istnienia w określonej postaci lub ograniczać niektóre modele przewidujące takie istnienie. Poprzednie eksperymenty zaobserwowały wzrost stosunku liczby pozytonów do elektronów dla energii powyżej kilku GeV. Wzrost ten był statystycznie mało istotny, ale i tak wywołał lawinę prac interpretujących go jako sygnał świadczący o istnieniu ciemnej materii w postaci słabo oddziałujących masywnych cząstek, tzw. WIMPów (od *Weakly Interacting Massive Particles*) przewidywanych np. przez supersymetryczne rozszerzenia Modelu Standardowego oddziaływań elementarnych. Dlatego wyniki PAMELA'i, która powinna poprawić statystyczną dokładność wyniku dla zakresu gigaelektronowoltowego o czynnik jednocyfrowy oraz rozszerzyć go na niezbadany dotąd obszar (kilkudziesięciogigaelektronowoltowy), były oczekiwane z niecierpliwością.

Żeby wykonać swoją misję, PAMELA musi umieć rozpoznawać elektrony, protony i lekkie jądra oraz ich antymaterialne odpowiedniki. Jest ona rodzajem teleskopu, który mierzy czas przelotu cząstki naładowanej, a więc również kierunek lotu, określa jej znak i ładunek dzięki pomiarowi kilku punktów trajektorii w polu magnetycznym stałego magnesu neodymowego oraz odróżnia elektrony (pozytony) od protonów (antyprotonów) i jąder poprzez pomiar charakterystyki rozwoju kaskad wywoływanych przez te cząstki w kalorymetrze wolframowym przekładanym krzemowymi sensorami.

Większość rejestrowanych cząstek to protony i elektrony. Największym wyzwaniem jest zmierzenie małej, ale niezwykle interesującej domieszki pozytonów wśród protonów. W najbardziej interesującym zakresie energii powyżej 50 GeV strumień protonów jest cztery rzędy wielkości większy niż strumień pozytonów. Zaprojektowane i sprawdzone (jeszcze przed wysłaniem w kosmos) prawdopodobieństwo uznania protonu za pozyton wynosi jedną stutysięczną, więc, teoretycznie przynajmniej, pozwala na uzyskanie stosunku sygnału do tła rzędu dziesięciu. Nieredukowalne tło jest związane z możliwością oddziaływania protonu już w pierwszych warstwach kalorymetru z przemianą praktycznie całej energii na neutralne piony, które natychmiast rozpadają się na wysokoenergetyczne fotony. Kaskada elektromagnetyczna wywołana oddziaływaniem tych fotonów z polem elektrycznym

jąder materii może być nieodróżnialna od kaskady wywołanej grzeźnięciem pozytonu.

Na zeszłorocznych letnich konferencjach, zamiast spodziewanej publikacji, ujawnione zostały jedynie przecieki typu „nie potwierdzamy ani nie zaprzeczamy.” Spowodowało to powstanie, oprócz wyważonych rozważań, wielu nadinterpretacji formalnie niesprzecznych z enigmatycznymi zeznaniami PAMELA'i. Ten socjologicznie (nie)ciekawy efekt został przerwany ukazaniem się dwóch preprintów [1, 2].

W pierwszym przedstawione są wyniki dotyczące rejestrowanego strumienia antyprotonów. Są one bardzo ciekawe, bo bardzo dokładne w porównaniu do poprzednich osiągnięć w tej dziedzinie, ale z punktu widzenia poszukiwaczy sensacji nieciekawe, bo zgadzają się ze standardowymi przewidywaniami, zamykając interpretacyjną furtkę zostawioną przez poprzedników.

Sprawa pozytonów, omówiona w drugim preprincie, wygląda zupełnie inaczej. Ale nie, jeżeli chodzi o dokładność wyników, bo ta jest również bardzo wysoka. Można odnieść wrażenie, że to właśnie ta dokładność powstrzymywała zespół badawczy PAMELA'i przed ich opublikowaniem, gdyż wyniki te, na pierwszy rzut oka, po prostu nie zgadzają się z wynikami poprzednich eksperymentów dla niskoenergetycznego zakresu. Autorzy argumentują, że ta niezgodność jest wywołana zależną od ładunku modulacją strumienia skorelowaną z aktywnością słoneczną. Efekt ten rzeczywiście był obserwowany przez balonowy eksperyment BESS dla stosunków strumieni antyprotonów i protonów mierzonych przed i po zmianie polaryzacji pola magnetycznego Słońca w 2000 roku. Wyniki, które nie zgadzają się z obserwacjami PAMELA'i, rzeczywiście zostały uzyskane w poprzedniej dekadzie.

Jeżeli chodzi o wysokoenergetyczny zakres, to wzrost stosunku strumieni pozytonów i elektronów został bezapelacyjnie potwierdzony, ale w sposób nie do końca sprzyjający ciemnomaterialnym interpretacjom. Modele karmione poprzednio obserwowanym wzrostem tego stosunku dla energii powyżej kilku gigaelektronowoltów przewidują zamieranie tego wzrostu w okolicach kilkudziesięciu GeV. A tego nie widać. Tempo wzrostu wydaje się rosnać z energią, chociaż przewidywanego jego obniżenia nie da się wykluczyć ze względu na słabą jeszcze statystyczną dokładność wyniku dla najwyższych energii. Autorzy twierdzą również, że trend wzrostowy może być spowodowany, jeśli nie zachowaniem się ciemnej materii, to aktywnością niedalekich pulsarów. Tak więc, choć pomiary są przełomowo dokładne, to, jeżeli chodzi o ich interpretację, na (co najmniej) dwoje babka wróżyła.

Piotr ZALEWSKI

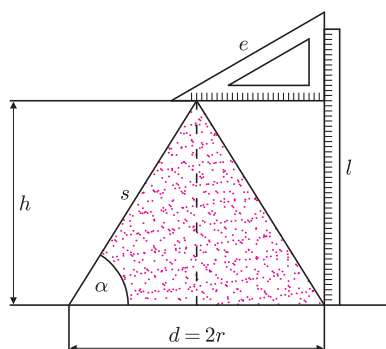
[1] PAMELA Collaboration, *A new measurement of the antiproton-to-proton flux ratio up to 100 GeV in the cosmic radiation*, arXiv:0810.4994.

[2] PAMELA Collaboration, *Observation of an anomalous abundance in the cosmic radiation*, arXiv:0810.4995.

Badamy niezwykle właściwości ciał sypkich

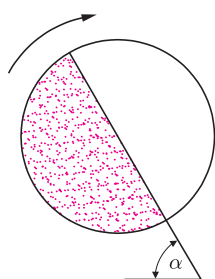
Stanisław BEDNAREK

Na pytanie, ile znamy stanów skupienia ciał, odpowiadamy zwykle, że trzy – stały, ciekły i gazowy. Czy wszystkie ciała dają się zaliczyć do jednej z tych trzech kategorii? Weźmy dla przykładu suchy piasek. Jeżeli wsypimy go do słoika, to przyjmie on jego kształt, wsypany do butelki przyjmuje również jej kształt. Widzimy, że piasek, podobnie jak ciecz, przyjmuje kształt naczynia, w którym został umieszczony. Wysypmy piasek na płaską powierzchnię. Piasek utworzy stożkowy pagórek o określonym kącie nachylenia powierzchni do podłoża. Natomiast ciecz rozleje się maksymalnie szeroko, tworząc z podłożem kąt nachylenia równy zeru.



Rys. 1. Wyznaczanie maksymalnego kąta stabilności; s – ciało sypkie, e – ekierka, l – linijka, h – wysokość, d – średnica, r – promień, α – maksymalny kąt stabilności.

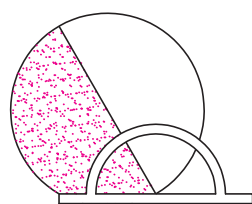
Jedną z interesujących właściwości ciał sypkich jest maksymalny kąt stabilności. Weźmy po szklance cukru, mąki, grochu i kaszy. Wysypmy je kolejno na płaską powierzchnię. Korzystając z ekierki i linijki, postaramy się określić ich maksymalne kąty stabilności. Przykładając ekierkę do linijki, zmierzmy wysokość usypanego pagórka (rys. 1). Następnie mierzymy jego średnicę i dzielimy przez dwa, obliczamy promień. Z kolei obliczamy tangens maksymalnego kąta stabilności, dzieląc wysokość przez promień. Na koniec, posługując się tablicami funkcji trygonometrycznych lub kalkulatorem z funkcjami, dla obliczonej wartości tangensa odczytujemy maksymalny kąt stabilności α .



Rys. 2. Obserwacja maksymalnego kąta stabilności α podczas obrotu.

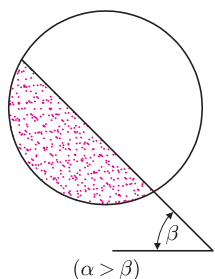
Maksymalny kąt stabilności możemy również wyznaczyć w inny sposób. W tym celu potrzebne będzie płaskie, przezroczyste pudełko w kształcie walca o średnicy 7–8 cm. W takie pudełka pakowane są niektóre cukierki lub galaretki. Jeśli mamy dostęp do gabinetu chemicznego lub fizycznego, możemy wypożyczyć dwuczęściowe, szklane, okrągłe naczynie nazywane szalką Petriego. Jeżeli nie uda się nam zdobyć pudełka, to możemy posłużyć się słoikiem z zakrętką.

Pudełko lub słoik napełniamy do połowy ciałem sypkim, np. kaszą czy cukrem, i zamykamy. Następnie ustawiamy pudełko, tak żeby jego oś była pozioma, i obracamy je wokół tej osi (rys. 2). Jak zachowuje się ciało wewnątrz pudełka? Obracając pudełko lub słoik, zauważamy, że kąt nachylenia ciała wzrasta aż do pewnej wartości, którą jest maksymalny kąt stabilności α . Kąt ten można zmierzyć, przykładając kątomierz bezpośrednio do pudełka lub słoika (rys. 3). Po przekroczeniu maksymalnego kąta stabilności α ciało zsypuje się i kąt β nachylenia jego powierzchni do poziomu staje się mniejszy od α . Ten nowy kąt nachylenia powierzchni ciała nazywa się kątem odpowiedzi (rys. 4).



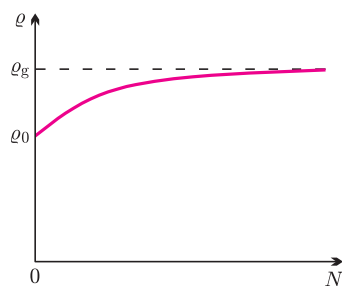
Rys. 3. Bezpośredni pomiar maksymalnego kąta stabilności kątomierzem.

Godny uwagi jest sposób, w jaki zachodzi przejście ciała sypkiego od stanu z maksymalnym kątem stabilności do stanu określonego przez kąt odpowiedzi. Przejście to odbywa się przez obsypywanie kolejnych porcji ciała w postaci małych lawinek. Lawinki te tworzą się jednak tylko z powierzchniowych warstw ciała, a warstwy położone głębiej pozostają nieruchome. Proces ten zachodzi odmiennie niż w przypadku cieczy, w których przemieszczanie następuje w całej objętości ciała.

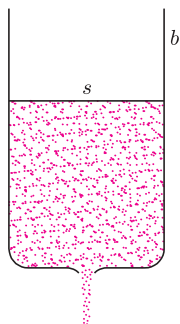


Rys. 4. Kąt odpowiedzi ciała sypkiego β .

Zbadamy teraz, jak zmienia się gęstość ciała sypkiego w wyniku wstrząsów. Do słoika wsypujemy ciało sypkie, np. kaszę, wypełniając nią około 3/4 objętości. Pisakiem zaznaczamy na szkle położenie górnej powierzchni ciała. Linijką mierzymy wysokość słupka ciała w słoiku i zapisujemy wynik. Potrząsamy jeden raz słoikiem i ponownie zaznaczamy położenie górnej powierzchni ciała oraz przeprowadzamy pomiar i zapisujemy jego wynik. Opisane czynności powtarzamy wielokrotnie, tak długo aż po kolejnym potrząśnięciu słoikiem nie zaobserwujemy zmian wysokości.



Rys. 5. Zależność gęstości ciała sypkiego ρ od liczby wstrząśnień N ; ρ_g – gęstość graniczna, ρ_0 – gęstość początkowa.



Rys. 6. Badanie czasu wypływu ciała sypkiego; b – butelka, s – ciało sypkie.

Obliczamy odwrotność wysokości i przyjmujemy ją jako miarę gęstości ciała sypkiego. Sporządzamy wykres przedstawiający zależność gęstości ciała sypkiego od liczby wstrząśnień (rys. 5). Wykonane doświadczenie umożliwia nam wyciągnięcie dwóch wniosków. Pierwszy z nich sugeruje, że ciało sypkie nie ma ustalonej gęstości. Gęstość ciała sypkiego zależy bowiem od jego „historii”, czyli od tego, jakim procesom było ono wcześniej poddawane. Drugi wniosek sugeruje, że istnieje pewna gęstość graniczna, do której dąży ciało w wyniku wielokrotnego potrząśnięcia.

Kolejne doświadczenie pozwoli nam stwierdzić, jak szybko ciała sypkie wypływają przez otwór w naczyniu. Do jego przeprowadzenia będzie potrzebna przezroczysta, plastikowa butelka od napojów o pojemności 1,5 l, suchy piasek, linijka, kawałek taśmy klejącej, nożyczki, mocna nitka i stoper lub zegarek z sekundnikiem. W środku dna butelki wywiercamy otwór o średnicy 5–8 mm, używając do tego celu ostrego końca nożyczek. Zaklejamy otwór kawałkiem taśmy klejącej. Szyjkę butelki obwiązujemy nitką, tak żeby można było zawiesić butelkę w pozycji pionowej.

Butelkę napełniamy piaskiem. Do bocznej powierzchni butelki przykładamy linijkę i odklejamy taśmę, pozwalając na swobodne wysypywanie się piasku z butelki (rys. 6). W ustalonych przedziałach czasu, np. co $\Delta t = 15$ s, odczytujemy długość słupka piasku Δl , który wysypał się z butelki. Następnie obliczamy prędkość wysypywania się piasku, dzieląc Δl przez Δt . Jaki warunek spełniają obliczone prędkości? Powtarzamy doświadczenie, używając wody zamiast piasku i obliczamy prędkość jej wypływu. Jaki warunek spełniają prędkości wypływu wody? Okazuje się, że prędkość wysypywania piasku z butelki jest stała i nie zależy od wysokości słupka piasku znajdującego się w butelce. Zupełnie inaczej rzecz ma się z wodą. Jej szybkość wypływu jest zmienna i zależy od wysokości słupka wody w butelce – im większa wysokość, tym większa prędkość wypływu. To właśnie stała prędkość wysypywania się piasku pozwoliła na jego zastosowanie do pomiaru czasu w klepsydrach.

W tym momencie nasuwa się pytanie, jak wyjaśnić to niezwykle zachowanie się piasku? Prędkość wypływu wody jest zależna od wysokości słupka wody nad otworem, ponieważ zależy ona od ciśnienia, a to z kolei zależy od wysokości. W przypadku ciała sypkiego prędkość jego wypływu jest stała, a więc również jego ciśnienie powinno pozostawać stałe, niezależnie od wysokości. Dzieje się tak dlatego, że ciężar piasku jest równoważony przez siły tarcia między ziarnami piasku i przez siły tarcia o ścianki naczynia. Ponadto, w materiałach sypkich tworzą się konstrukcje nośne, złożone z ciasno upakowanych i zazębiających się ziaren, które pomagają równoważyć ciężar materiału sypkiego. W wyniku tego ciśnienie w ciele sypkim jest stałe, a czas jego wypływu wprost proporcjonalny do wysokości słupka ciała nad otworem.



Piaskowy obraz w akcji.

Kończąc, wspomnę o piaskowych obrazach, czyli interesujących pamiątkach, wykorzystujących właściwości materiałów sypkich (fotografia). Obrazy takie składają się z dwóch szybek oprawionych w ramkę, między którymi zamknięte są różnokolorowe ziarna piasku, powietrze i woda. Odległość między szybkami jest porównywalna z rozmiarami ziaren piasku. Tak więc układ można traktować jako dwuwymiarowy. Po ustawieniu ramki pod pewnym kątem do poziomu rozpoczyna się proces przesypywania kolorowych ziaren piasku, które tworzą niepowtarzalne, fascynujące wzory. Jeżeli ktoś chciałby dowiedzieć się więcej o piaskowych obrazach, może zajrzeć pod adres internetowy

http://www.ewmar.pl/index_piaski.htm.

Pierwsze komputery, w latach czterdziestych XX wieku, były używane głównie do złożonych obliczeń numerycznych. Również pierwsze wysokopoziomowe języki programowania, jak na przykład bardzo popularny przez wiele lat FORTRAN, były tworzone głównie na potrzeby obliczeń numerycznych.

Z czasem zakres zastosowań komputerów i programowania zaczął się stopniowo poszerzać. Pojawiły się i zaczęły nabierać znaczenia nowe rodzaje zadań programistycznych, a w związku z tym powstały nowe metody i języki programowania. Zmiany były tak zasadnicze, że dla podkreślenia ich wagi mówimy czasem o nowych **paradygmatach programowania**. Rozwój badań nad sztuczną inteligencją był impulsem do powstania metod i języków **programowania funkcyjnego**, takich jak LISP i od niego pochodne, np. Scheme, Logo i wiele innych. Wzrost znaczenia zadań sterowania doprowadził do powstania **programowania zorientowanego obiektowo** i odpowiednich języków programowania obiektowego, takich jak SIMULA i SMALLTALK, a w końcu do tego, że dziś prawie każdy zaawansowany język programowania jest obiektowy. Ale na tym nie koniec. Pojawiają się i nadal będą się pojawiały coraz to nowe obszary zastosowań programowania. W tym artykule ograniczę się do dwóch obszarów, jakimi są **uczenie się** oraz **twórczość plastyczna**.

Uczenie się i programowanie

Logo ma w Polsce opinię elementarnego języka do nauki podstaw programowania. Mało kto wie, że Papert z zespołem współpracowników z MIT stworzyli Logo głównie jako **środowisko uczenia się** bardzo różnorodnych umiejętności, nie tylko i nie na pierwszym miejscu – umiejętności programowania. Jednym z moich celów jako autora kolumny *Logomotywy* jest ukazanie roli Logo jako środowiska uczenia się. Wiele interesujących przykładów i głębokich uwag na temat uczenia się przez programowanie można znaleźć w książkach [1] i [2].

Stephen Wolfram we wstępie do głośnej książki *A New Kind of Science* napisał: „Trzy wieki temu nastąpił przełom w nauce dzięki rewolucyjnemu odkryciu, że reguły w postaci równań matematycznych mogą być użyteczne do opisu świata przyrodniczego. Celem tej książki jest zapoczątkowanie równie wielkiego przełomu, zapoczątkowanie nowej nauki opartej na znacznie bardziej ogólnych regułach, które można wyrażać w formie prostych programów komputerowych.”

Choć może nie wszyscy podzielają zdanie, że dzieło Wolframa jest tak przełomowe, jak uważa autor, to jednak jego główna myśl, iż programy komputerowe mogą być równie dobrymi (a często są znacznie lepszymi) modelami rzeczywistości, jak tradycyjne już równania i nierówności, jest dzisiaj akceptowana dość powszechnie. Skoro tak, to każdy powinien uczyć się w jakimś zakresie programowania, tak jak dziś każdy uczy się równań i nierówności. Posługiwanie się równaniami jest nie tylko celem, lecz również warunkiem dalszej skutecznej nauki. To samo można powiedzieć o umiejętności programowania.

Twórczość plastyczna i programowanie

Powszechnie wiadomo, że wspomniany wyżej MIT – Massachusetts Institute of Technology – jest jedną z najbardziej renomowanych na świecie uczelni (w zakresie kształcenia najwyższej klasy profesjonalnych programistów prawie tak dobry jak Uniwersytet Warszawski). Ale nie wszyscy wiedzą, że chlubą MIT jest Media Laboratory – wydział projektowania artystycznego kształcący nowoczesnych designerów (zobacz [5]). John Maeda, guru tego wydziału, jednej ze swoich książek nadał tytuł *Creative Code – Twórczy program*. Oczywiście, tytuł książki jest skrótem myślowym. John Maeda dobrze wie, że prawdziwym twórcą komputerowego dzieła plastycznego jest autor programu, a nie program lub komputer. Współcześni artyści i designerzy posługują się nie tylko komputerowymi wirtualnymi ołówkami, pędzlami i rozpylaczami, ale również piszą programy, które tworzą dzieła artystyczne. Ale na razie nie powstały jeszcze (o ile wiem) publikacje próbujące określić zasady dobrego programowania w tej dziedzinie. Jakość programu ocenia się wyłącznie według walorów artystycznych dzieła.

Programowanie i alfabetyzacja

Istnieje wiele analogii między współczesnym postępowaniem programowania i historią rozwoju czytelnictwa i piśmiennictwa. Czytanie i pisanie było aż do późnego średniowiecza zajęciem bardzo nielicznej grupy profesjonalistów: mnichów kopiujących święte księgi, kronikarzy i kancelistów królewskich, krótko mówiąc – skrybów. Odkrycie druku i metod produkcji taniego papieru spowodowało, że bardzo szybko stało się umiejętnością potrzebną każdemu. Wraz z wkraczaniem piśmiennictwa na nowe obszary wykrystalizowało się wiele istotnie różnych zakresów języka pisanego: język literacki, prasowy, naukowy, prawniczy itd. Można świetnie funkcjonować w jednym zakresie i być kompletnym analfabetą w innych.

Stworzenie metod programowania funkcyjnego oraz programowania zorientowanego obiektowo było istotnym postępowaniem w rozwoju informatyki, ale programowanie nadal było zajęciem profesjonalnych programistów (skrybów). Pojawienie się nowych obszarów zastosowań programowania, takich jak, na przykład, uczenie się i twórczość plastyczna, powodują, że staje się ono stopniowo zajęciem coraz większej liczby grup społecznych. Podobnie jak istnieją różne zakresy języka pisanego i różne związane z nimi subkultury językowe, istnieją też różne kultury programowania.

Literatura

- [1] Abelson H., Di Sessa A. (1992), *Geometria żółwia*, WNT, Warszawa.
- [2] Di Sessa A. (2000), *Changing Minds, Computers, Learning, and Literacy*, A Bradford Book, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England.
- [3] Maeda J. (2004), *Creative Code*, Thames & Hudson, London.
- [4] Wolfram S. (2002), *A New Kind of Science*, Wolfram Media, Inc.
- [5] www.media.mit.edu

Informatyczny kącik olimpijski (16)

Zajmijmy się kolejnym zadaniem z Międzynarodowej Olimpiady Informatycznej, tym razem – Egipt 2008. Oto jego treść:



Mamy zbudować ogród – długą rabatkę złożoną z kwiatów lotosu (L) oraz „papirusu” (P). (Jak wszyscy wiemy, chodzi konkretnie o ciborę papirusową, z której wyrabiano papirus.) Dla naszych potrzeb ogród będziemy opisywać ciągiem liter L i P. Ogród ma być ładny, co w tym wypadku oznacza, że w żadnym jego podslowie (czyli spójnym fragmencie) liczby lotosów i papirusów nie mogą się różnić o więcej niż 2. Istnieje wiele takich możliwych ogrodów. Naszym zadaniem jest, mając podany ogród, obliczenie, na jakiej pozycji (modulo M) taki ogród by się znalazł, gdybyśmy wszystkie ogrody o tej samej długości posortowali alfabetycznie.

Zastanówmy się najpierw, co to znaczy, że liczba lotosów i papirusów nie różni się o więcej niż dwa w żadnym podslowie ogrodu. Możemy, na przykład, oznaczyć literę L przez 1, a P – przez -1 . Wtedy suma liczb w żadnym podslowie nie może być mniejsza niż -2 ani większa niż 2. Gdyby budować ogród zgodnie z taką regułą, to byłoby to uciążliwe – z każdą kolejną dostawioną literą musielibyśmy sprawdzać każde możliwe pod słowo kończące się na niej.

Jednym z pod słów jest cały ogród – suma liczb w całym ogrodzie też musi być w przedziale $[-2, 2]$. Dalej, jeśli oznaczymy przez S_i sumę liczb od początku ogrodu do pozycji i , to otrzymujemy warunek: $|S_i - S_j| \leq 2$. A więc, jeśli któreś S_i jest równe 2, to żadne inne nie może być ujemne. Podobnie, jeśli któreś S_i wynosi -2 , to żadne inne nie może być dodatnie. Jest jeszcze trzeci przypadek – wszystkie S_i są w przedziale $[-1, 1]$.

W ten sposób uprościliśmy warunek „ładności” do dwóch przypadków do rozpatrzenia (przypadki z 2 i z -2 możemy traktować jednakowo – są symetryczne).

Wybermy przypadek z 2 i założmy, że istnieje a_0 ogrodów o jakiejś ustalonej długości i takich, że $S_i = 0$ – podobnie wprowadźmy oznaczenia a_1 i a_2 . Niech b_0, b_1, b_2 będą liczbami ogrodów o jedną roślinę dłuższych, a c_0, c_1, c_2 – o dwie.

Ile jest ogrodów o długości $i + 1$ takich, że $S_{i+1} = 0$? S_i nie może być równe -1 , a więc w tym przypadku musiałyby być równe 1. W takim razie $b_0 = a_1$. Podobnie dochodzimy do wniosku, że $b_2 = a_1$, a $b_1 = a_0 + a_2$. Następny krok: $c_0 = b_1 = a_0 + a_2$, $c_1 = b_0 + b_2 = 2a_1$, a $c_2 = b_1 = a_0 + a_2$. Ale w takim razie $c_0 + c_1 + c_2 = 2(a_0 + a_1 + a_2)$! A więc ogrodów o długości $i + 2$ jest dwa razy więcej niż ogrodów o długości i . Czytelnik łatwo może sprawdzić, że jest to prawdą też w przypadku, gdy S_i mają pozostawać w przedziale $[-1, 1]$ oraz $[-2, 0]$. Równie łatwo można sprawdzić, że:

- Jeśli S_i mają pozostawać w przedziale $[-2, 0]$ lub $[0, 2]$, to ogrodów o długości i jest $2^{\lfloor i/2 \rfloor}$.
- A jeśli S_i mają pozostawać w przedziale $[-1, 1]$, to ogrodów o długości i jest $2^{\lfloor (i+1)/2 \rfloor}$.

Jak to się ma do naszego problemu?

Spójrzmy na kolejne rośliny w naszym ogrodzie. Litera L jest wcześniej w alfabecie – zignorujmy więc jej wystąpienia. Z kolei kiedy natrafiamy na P na pozycji k , to prawdopodobnie istnieje ileś ogrodów, które pokrywały się z naszym aż do tej pozycji, ale na tej właśnie pozycji mają L, a więc są wcześniej w alfabecie. Dodajmy więc liczbę tych ogrodów do liczby wszystkich ogrodów, które są wcześniej w alfabecie, niż nasz.

Mamy więc pewien początkowy fragment ogrodu o długości k ; chcielibyśmy wiedzieć, ile jest ogrodów w ten sposób się zaczynających. Założmy, że liczba S_i w dotychczasowej części nigdy nie była ujemna, a S_k wynosi 1. W takiej sytuacji ten ogród możemy dokończyć dowolnym ogrodem, który ma S_i (licząc od pozycji $k + 1$ -szej) w przedziale $[-1, 1]$. Gdyby S_k było równe 0 (w tym przypadku akurat – niemożliwe (dlaczego?)) lub 2, to moglibyśmy dokończyć – odpowiednio – ogrodem o S_i w przedziale $[0, 2]$ lub $[-2, 0]$.

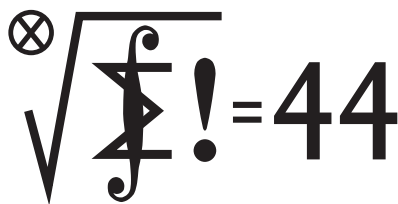
Analogicznie sytuacja ma się w pozostałych przypadkach – tj. gdy S_i do pozycji k zawiera się w $[-1, 1]$ lub $[-2, 0]$. Ale co jeśli zawiera się w kilku z nich? Zauważmy, że dla ogrodów o dodatniej długości mogą to być tylko przypadki $[-1, 1]$ i $[-2, 0]$ lub $[-1, 1]$ i $[0, 2]$. Wtedy – zgodnie z zasadą włączeń i wyłączeń – interesująca nas liczba ogrodów to suma liczb ogrodów z poszczególnych przypadków, minus te ogrody, które zawierają się w $[-1, 0]$ lub odpowiednio w $[0, 1]$ (ponieważ policzyliśmy je dwukrotnie). Obu jest po jednym: PLPLPLPL... oraz LPLPLPLP...

W takim razie rozwiązanie tego zadania wymaga tylko tyle pamięci, ile potrzeba, żeby spamiętać potęgę 2 modulo M .

Ciekawostka – gdybyśmy mieli zapewnione, że M jest pierwsze, to moglibyśmy to zadanie rozwiązać w stałej pamięci. Ciąg należałoby wtedy wczytywać na bieżąco, a co do potęg 2 – najpierw obliczylibyśmy największą, a potem dzielili ją przez 2 modulo M (rozszerzony algorytm Euklidesa). Niestety, byłoby to jednocześnie nieco wolniejsze rozwiązanie.

Filip WOLSKI

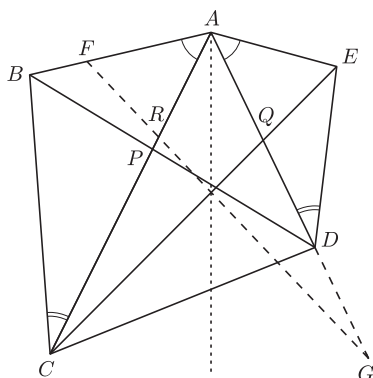
Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2009

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 561 ($WT = 1,25$) i 562 ($WT = 2,68$) z numeru 5/2008

Jerzy Witkowski	Radlin	42,80
Marcin Kasperski	Warszawa	42,50
Marek Prauza	Poraj	39,95
Zbigniew Galias	Kraków	39,34
Andrzej Idzik	Bolesławiec	38,42
Adam Woryna	Ruda Śląska	35,24



565. Z założeń wynika, że trójkąty ABC i AED są podobne; tak więc

$$(1) \quad \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AD|}, \quad \frac{[ABC]}{[AED]} = \left(\frac{|AC|}{|AD|} \right)^2$$

($[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ). Warunek: „ $[ACD]$ jest średnią geometryczną $[ABC]$ i $[AED]$ ” przepiszemy jako zależność $[ABC] : [ACD] = [ACD] : [AED]$. Po pomnożeniu stronami przez $[ABC] : [ACD]$ i uwzględnieniu drugiej równości (1) warunek ten przybiera postać

$$\left(\frac{[ABC]}{[ACD]} \right)^2 = \left(\frac{|AC|}{|AD|} \right)^2.$$

Skoro zaś $[ABC] : [ACD] = |BP| : |PD|$, uzyskany warunek jest równoważny zachodzeniu równości

$$(2) \quad \frac{|BP|}{|PD|} = \frac{|AC|}{|AD|}.$$

Należy wykazać, że proporcja (2) ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $|AP| = |AQ|$.

Na półprostych AB^{\rightarrow} , AC^{\rightarrow} , AD^{\rightarrow} zaznaczamy odpowiednio takie punkty F , R , G , że $|AF| = |AE|$, $|AR| = |AQ|$, $|AG| = |AC|$. Skoro $|AB| > |AE|$, to punkt F leży między A i B , a punkt D leży między A i G , i żadne z tych punktów się nie pokrywają. Punkty F , R , G są współliniowe, jako obrazy punktów E , Q , C w symetrii względem dwusiecznej kąta CAD . Dyskutujemy warunek „ $|AP| = |AQ|$ ”, czyli „ $P = R$ ”, jest

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 573, 574

Redaguje Marcin E. KUCZMA

573. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki ciąg arytmetyczny liczb naturalnych (a_1, \dots, a_n) oraz taki ciąg geometryczny liczb naturalnych (b_1, \dots, b_n) , że

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_{n-1} < a_{n-1} < b_n < a_n.$$

574. W pewnym czworościanie wszystkie sfery dopisane są styczne do ścian czworościanu w środkach okręgów wpisanych w te ściany. Udowodnić, że czworościan jest foremny.

Zadanie 574 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2008

Przypominamy treść zadań:

565. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EAD|$, $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle EDA|$, przy czym $|AB| > |AE|$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P ; przekątne AD i CE przecinają się w punkcie Q . Dowieść, że odcinki AP i AQ mają jednakową długość wtedy i tylko wtedy, gdy pole trójkąta ACD jest średnią geometryczną pól trójkątów ABC i ADE .

566. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 3 i niech $n = (4^p - 1)/3$. Wykazać, że liczba $2^{n-1} - 1$ jest podzielna przez n .

więc równoważny współliniowości punktów F , P , G – czyli spełnieniu równości

$$(3) \quad \frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BP|}{|PD|} \cdot \frac{|DG|}{|GA|} = 1$$

(twierdzenie Menelaua dla trójkąta ABD).

Przekształcamy lewą stronę (3), korzystając w ostatnim kroku z pierwszego związku (1):

$$\begin{aligned} \frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BP|}{|PD|} \cdot \frac{|DG|}{|GA|} &= \frac{|AE|}{|AB| - |AE|} \cdot \frac{|BP|}{|PD|} \cdot \frac{|AC| - |AD|}{|AC|} = \\ &= \left(\frac{|AB|}{|AE|} - 1 \right)^{-1} \cdot \frac{|BP|}{|PD|} \cdot \left(1 - \frac{|AD|}{|AC|} \right) = \frac{|BP|}{|PD|} \cdot \frac{|AD|}{|AC|}. \end{aligned}$$

Otrzymana równość dowodzi, że istotnie warunki (2) i (3) są równoważne.

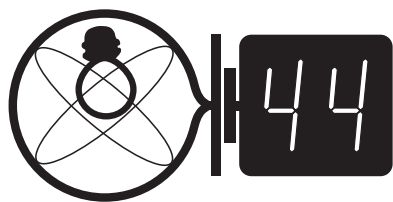
566. W myśl małego twierdzenia Fermata, liczba $3(n - 1) = 4^p - 4$ dzieli się przez p . Zatem także $n - 1$ dzieli się przez p ; iloraz jest liczbą parzystą (bo n jest nieparzystą). Tak więc $n - 1 = 2kp$ dla pewnej liczby całkowitej k .

Oznaczmy: $2^p - 1 = u$, $2^p + 1 = v$; są to liczby względnie pierwsze. Z zależności

$$2^{n-1} = (2^p)^{2k} = \begin{cases} (u + 1)^{2k} \equiv 1 \pmod{u} \\ (v - 1)^{2k} \equiv 1 \pmod{v} \end{cases}$$

wnosimy, że liczba $2^{n-1} - 1$ dzieli się przez iloczyn $uv = 3n$, więc i przez n .

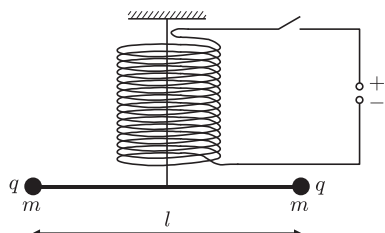
Klub 44



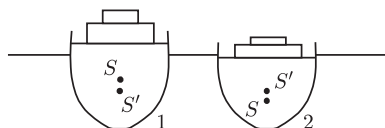
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2009

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
460 ($WT = 1,75$) i 461 ($WT = 2,43$)
z numeru 6/2008

Krzysztof Magiera	Łosiów	26,16
Andrzej Idzik	Bolesławiec	24,36
Radosław Poleski	Kołobrzeg	22,24
Tomasz Wietecha	Tarnów	21,45



Rys. 1



Rys. 2. Przekrój poprzeczny statekóv:
 S – środek masy stateku, S' – środek masy wypartej wody.

462. Jeśli by zastąpić statek taką samą masą wody, to wypełniłaby wnękę po wypartej wodzie równo do jej poziomu i w stanie równowagi działająca na nią siła wypadkowa byłaby równa zeru. Zatem na pustą wnękę działa taka siła ze strony otaczającej wody, jakby była to „masa ujemna” – odpychana przez pole grawitacyjne (taki jest sens prawa Archimedesesa). Stąd w pewnym uproszczeniu (wynikającym z niesferycznego rozkładu masy) każdy ze statekóv można zastąpić jego masą umieszczoną w środku masy plus taką samą masą ujemną umieszczoną w środku masy wypartej wody, co w sumie daje pionowo zorientowany „dipol grawitacyjny”. Oddziaływanie statekóv na siebie jest sumą dwóch sił przyciągających (masa dodatnia działa na dodatnią, ujemna na ujemną) i dwóch odpychających (na krzyż). Jeśli środek masy S' wypartej wody leży u obu statekóv na tej samej wysokości, a środek masy statekóv S leży powyżej S' (tak jest najczęściej, zob. rys. 2), to oddziaływanie odpychające pochodzi od masy nieco bardziej oddległych od siebie, a ponadto te siły nie są skierowane poziomo, lecz ukośnie, więc ich poziome składowe są mniejsze i przyciąganie przeważa. Nietrudno wykazać, że tak samo jest dla wszystkich przypadków, gdy zwroty dipoli są zgodne, natomiast gdy jeden statek jest „typu 1”, a drugi „typu 2” (rys. 2), to przeważa odpychanie.

463. Wprowadźmy oznaczenia: r – promień balonika, V – jego objętość, n – liczba moli gazu wewnątrz, M – masa molowa tego gazu, p – ciśnienie wewnątrz, M' – masa molowa powietrza, p' – ciśnienie powietrza, m – masa powłoki, σ – współczynnik we wzorze na nadwyżkę ciśnienia

Zadania z fizyki nr 470, 471

Redaguje Jerzy B. BROJAN

470. Wagon o długości l jechał ze stałą prędkością po torze początkowo prostoliniowym, który począwszy od pewnego punktu przechodzi w łuk okręgu o promieniu znacznie większym od l , bez przechyłu bocznego. Wózki wagonu są rozmieszczone w odległości d od jego środka, ich rozmiary są małe, a masa wagonu jest rozłożona równomiernie wzdłuż jego długości. Niech F_1 będzie wartością siły poziomej działającej na szynę ze strony pierwszego wózka po jego wejściu w łuk, gdy drugi wózek jeszcze poruszał się po prostej, natomiast F_2 – wartością tej siły, gdy cały wagon znalazł się na łuku. Jeśli $F_1 = \frac{3}{4}F_2$, to jaki wynika stąd wniosek na temat stosunku d do l ?

471. Wzdłuż osi pionowo ustawionej długiej zwojnicy wisi nić, a na nici – poziomy pręt z dwiema kulkami na końcach (rys. 1). Promień zwojnicy jest równy r , liczba zwojów na jednostkę jej długości – n , długość pręta – l , ładunek każdej z kulek – q , masa kulki – m , a masę samego pręta można pominąć. Jeśli nić nie wywiera na pręt żadnego momentu siły, to jakim wzorem jest dana prędkość kątowa, jaką uzyska pręt po włączeniu zasilania zwojnicy prądem stałym o natężeniu I ?

Czy zjawisko to da się praktycznie zaobserwować przy realnych wartościach wszystkich danych?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2008

Przypominamy treść zadań:

462. Dwa statki spoczywają obok siebie na morzu. Jeśli nie ma żadnego wiatru ani prądów wody, to czy oddziaływanie grawitacyjne spowoduje zbliżenie do siebie statekóv (choćby bardzo powolne)? Czy odpowiedź może zależeć od rozkładu masy wewnątrz statekóv?

463. Kulisty balonik zawiera lekki gaz i dzięki temu unosi się w powietrzu w stanie równowagi. Jego powłoka rozciąga się sprężysto, a energia sprężystości jest proporcjonalna do powierzchni balonika (wtedy nadwyżka ciśnienia we wnętrzu jest odwrotnie proporcjonalna do promienia balonika – faktu tego nie trzeba dowodzić). Jak zareaguje balonik – uniesie się do góry, opadnie, czy pozostanie w równowadze – gdy temperatura wzrośnie, pozostając jednakowa wewnątrz i na zewnątrz? Jak zareaguje na wzrost ciśnienia zewnętrznego? Jaki powinien być związek między temperaturą a ciśnieniem zewnętrznym, aby przy ich zmianie balonik pozostawał w równowadze? Powłoka jest cienka, a jej właściwości sprężyste nie zmieniają się z temperaturą.

$p - p' = \sigma/r$. Po skorzystaniu ze wzoru na gęstość gazu doskonałego $\rho = pM/RT$ warunek równowagi balonika $V(\rho' - \rho) = m$ można przekształcić do postaci

$$(1) \quad n(M' - M) = m + \frac{\sigma M'}{RT} \frac{V}{r} = m + \frac{\sigma M'}{RT} \frac{4}{3} \pi r^2,$$

co po pomnożeniu obu stron przez przyspieszenie ziemskie można interpretować jako równowagę „czystej” siły wyporu (po lewej stronie) i ciężaru powłoki powiększonego o wielkość wynikającą z nadwyżki ciśnienia (po prawej). Równoważną postacią tego równania jest

$$(2) \quad n(M' - M) = m + \frac{\sigma n M'}{p'r + \sigma}.$$

Promień balonika zależy od ciśnienia zewnętrznego i temperatury zgodnie z równaniem III stopnia

$$(3) \quad \left(p' + \frac{\sigma}{r}\right) \frac{4}{3} \pi r^3 = nRT.$$

Nawet bez rozwiązywania tego równania widzimy, że wzrost temperatury (bez zmiany p') powoduje wzrost promienia balonika, a stąd spadek wartości prawej strony równania (2) – balonik się uniesie. Wzrost ciśnienia zewnętrznego (bez zmiany T) powoduje natomiast spadek promienia r , czyli spadek wartości prawej strony równania (1), co także oznacza uniesienie się balonika. Jeśli balonik ma pozostać w równowadze, to stały musi być iloczyn $p'r$ (z równania (2)), a podstawiając $r = \text{const}/p'$ do (3), otrzymujemy szukany związek między ciśnieniem zewnętrznym a temperaturą

$$Tp'^2 = \text{const}.$$



Rozwiązanie zadania F 732.

Z warunku znikania momentów sił działających na ramkę:

$(m_1 + m_2)gl_2 \cos \alpha = BI l_1 l_2 \sin \alpha$
otrzymujemy

$$I = \frac{(m_1 + m_2)g}{B \cdot l_1} \operatorname{ctg} \alpha.$$



Rozwiązanie zadania M 1230.

Dana 15-cyfrowa liczba a jest podzielna przez 9, a więc w jej zapisie dziesiętnym występuje dokładnie dziewięć jedynek. Z kolei liczba ta nie jest podzielna przez 10, a więc cyfrą jedności liczby a jest 1.

Niech $a = \overline{x0y}$. Wtedy w zapisie dziesiętnym liczby x występuje mniej niż dziewięć jedynek. Stąd wynika, że liczba x nie jest podzielna przez 9.

Usuając 0 z zapisu dziesiętnego liczby $a = \overline{x0y}$, otrzymujemy liczbę $b = \overline{xy}$. Zatem jeśli zapis dziesiętny liczby y składa się z k cyfr, to $a = 10^{k+1}x + y$ oraz $b = 10^k x + y$. Wówczas $a - b = 9 \cdot 10^k x$, a ponieważ liczba x nie jest podzielna przez 9, więc obie liczby a i b nie mogą być równocześnie podzielne przez 81. Wobec tego skoro liczba a jest podzielna przez 81, to liczba b nie może być podzielna przez 81.

Patrz w niebo

Około 15 pc od nas znajduje się w Rybach pewien biały karzeł (o symbolu katalogowym G29-38), z wielu względów zwyczajny. Ma temperaturę 11 800 K, średnicę zbliżoną do średnicy Ziemi, masę około 0,7 masy Słońca i gęstość rzędu tony na cm^3 . Emituje jednak nadmiernie dużo podczerwieni, pochodzącej zresztą z rozmaitych temperatur, co może oznaczać, że otacza go jakaś gorąca materia. Nie znaleziono tam żadnego brązowego karła, pozostało więc sprawdzić, czy mogą za to promieniowanie być odpowiedzialne drobne cząstki obiegające białego karła w różnych odległościach. Oceny wykazały, że pierścieni skalnych okruców zaczyna się w odległości około 100 000 km od karła i sięga 7 razy dalej, mieści się więc wewnątrz granicy Roche'a, czyli odległości, poniżej której siły pływowe gwiazdy mogłyby rozerwać jakąś planetoidę. Jest to sytuacja analogiczna do przypadku pierścieni Saturna, które leżą wewnątrz jego granicy Roche'a. To prawdopodobnie cząstki tego pierścienia świecą w podczerwieni. Oceniono też, że nawet pojedyncza duża planetoida byłaby w stanie dostarczyć ilość materiału zapewniającą obserwowane świecenie w podczerwieni.

Drugą osobliwością omawianego białego karła jest nadmiar ciężkich pierwiastków w jego atmosferze. Mogłyby one pochodzić z planetoidy (lub kilku), która spadła na gwiazdę i w ten sposób dostarczyła tych pierwiastków. Jest to jednak zdarzenie mało prawdopodobne; mówiąc obrazowo, w przestrzeni międzygwiazdowej jest ogromnie wiele miejsca i dlatego bardzo trudno jest trafić planetoidą bezpośrednio w gwiazdę. Znaleziono jednak wytłumaczenie, co prawda dość wymyślne. Biały karzeł musiał być w przeszłości czerwonym olbrzymem. Jakikolwiek jego planety, w miarę utraty przezeń masy, musiały wędrować na obszerniejsze orbity. Wzajemne oddziaływanie tych planet doprowadziło do skierowania ich na orbity chaotyczne, w szczególności sięgające dużych odległości od gwiazdy. Tam planety te zamieszały otaczającą ją „ziarnik komet”, którego obecności można się tam spodziewać choćby dlatego, że Słońce go ma (w postaci Obłoku Oorta). Część unoszących się tam okruców musiała skierować się wtedy ku gwiazdzie i, wpadając do jej atmosfery, spowodowała obserwowaną nadobfitość ciężkich pierwiastków.

Tomasz KWAST

Styczeń

Zaczął się Nowy Rok, zima i najdłuższe noce. Już wczesnym wieczorem Droga Mleczna łączy wschód z zachodem, a niemal w zenicie widać, może nawet w miastach, Wielką Mgławicę Andromedy – obiekt właściwie jesienny. Jest to najdalszy obiekt widoczny gołym okiem, a zarazem najbliższa galaktyka, M31. W jej sąsiedztwie znajdują się przynajmniej dwa inne obiekty mgławicowe, a do ich obejrzenia warto mieć lornetkę. Są to M33 w Trójkącie (druga co do jasności galaktyka, 5,8 mag) oraz M34 w Perseuszu (gromada otwarta gwiazd, 5,7 mag). Nie da się tych symboli „skompletować”, gdyż brakująca tu M32 to towarzysząca M31 mała galaktyka eliptyczna o jasności 8,2 mag.

Rok 2009, choć to Międzynarodowy Rok Astronomii, będzie wyjątkowo ubogi np. w zaćmienia. Zaćmienia Słońca będą dwa: 26 I (obraczkowe, widoczne na Atlantyku, w południowej Afryce, południowo-wschodniej Azji i w Australii) i 21/22 VII (całkowite, południowa i wschodnia Azja, zachodni i środkowy Pacyfik). Będą też cztery zaćmienia Księżyca, całkiem nieefektywne: częściowe 31 XII i trzy półcieniowe (9 II, 7 VII, 5/6 VIII). Z jasnych gwiazd Księżyc zakryje Antaresa 21 I, co będzie widać na Pacyfiku, w centralnej Ameryce Południowej i na Atlantyku. Merkury znajdzie się najdalej od Słońca 4 I i można go szukać w Koziorożcu na zachodnim niebie. Tego też dnia Ziemia znajdzie się najbliżej Słońca, czyli w perihelium. Z kolei 14 I Wenus znajdzie się najdalej od Słońca i będzie ją widać w Wodniku, również na zachodnim niebie. Marsa nie widać, bo jest, jak Słońce, w Strzelcu. Jowisz jest w Koziorożcu i wcześniej zachodzi, i tylko Saturn we Lwie jest widoczny przez całą noc. Pełnia Księżyca wypada 11 I, a nów 26 I. Około 3 I można spodziewać się średnio obfitego roju Kwadrantydów.

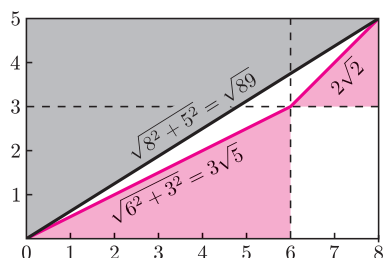
T. K.



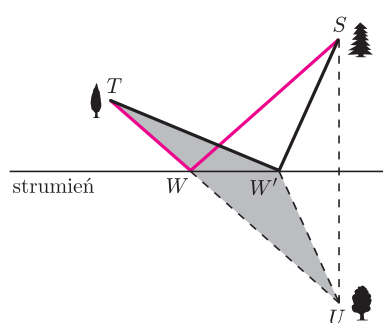
Mała rzecz, a cieszy

Joanna JASZUŃSKA*

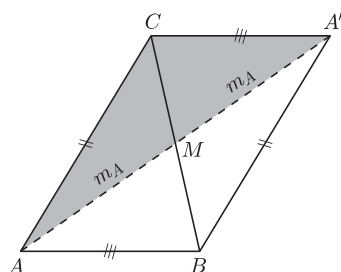
Niektóre twierdzenia wydają się czasem tak proste i intuicyjnie oczywiste, że aż można wątpić w ich przydatność. Taka choćby *nierówność trójkąta* (NT): *suma długości dwóch boków trójkąta zawsze jest większa od długości trzeciego boku*. Wszak każdy wie, że zamiast iść wzdłuż dwóch krawędzi trawnika, szybciej jest przejść na ukos. Oto kilka przykładów, że nierówność trójkąta jednak bywa przydatna, i to nie tylko w zadaniach geometrycznych.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

1. Która z liczb jest większa: $2\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$ czy $\sqrt{89}$?

R. Można, oczywiście, rozwiązać to zadanie obliczeniowo – podnosząc do kwadratu, upraszczając... Ale można też spojrzeć na rysunek 1 i wtedy, z NT oraz twierdzenia Pitagorasa, wszystko staje się jasne. □

2. Sarna chce iść najkrótszą drogą od ulubionej topoli do ulubionego świerka, a po drodze napić się wody ze strumienia. Topola i świerk są po tej samej stronie strumienia. Jaką drogą powinna iść sarna?

R. Oczywiście, sarna powinna iść od topoli T prosto do miejsca wodopoju W , a następnie prosto od W do świerka S . Aby wybrać optymalne W , sarna, stojąc w T , powinna upatrzeć sobie drzewo U dokładnie po przeciwnej stronie strumienia, niż jest S , i skierować się wprost na nie (rys. 2). Wtedy punkty T, W, U są współliniowe. Dla dowolnego innego W' , z symetrii względem strumienia oraz z NT dla $\triangle TWW'$, zachodzi $TW' + W'S = TW' + W'U > TU = TW + WU = TW + WS$, czyli droga przez tak wybrane W jest najkrótsza możliwa. □

3. Udowodnij, że w dowolnym trójkącie suma długości środkowych jest mniejsza niż obwód.

R. Oznaczmy przez m_A, m_B, m_C środkowe trójkąta ABC poprowadzone z odpowiednich wierzchołków. Niech trójkąt $A'CB$ będzie obrazem trójkąta ABC w symetrii środkowej względem środka M boku BC (rys. 3). Wtedy punkty A, M, A' są współliniowe i $AA' = 2m_A$. Na mocy NT dla $\triangle AA'C$ uzyskujemy $2m_A < AC + A'C = AC + AB$. Analogicznie $2m_B < AB + BC$ oraz $2m_C < AC + BC$. Dodając stronami i dzieląc przez 2, otrzymujemy tezę. □

4. Na płaszczyźnie danych jest 100 punktów A_1, \dots, A_{100} oraz okrąg o promieniu 1. Udowodnij, że na tym okręgu istnieje taki punkt B , że $\sum_{i=1}^{100} BA_i \geq 100$.

R. Niech B_1B_2 będzie pewną średnicą danego okręgu. Wówczas z NT dla dowolnego i zachodzi $B_1A_i + B_2A_i \geq B_1B_2 = 2$. Dodając stronami takie NT dla wszystkich i , otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{100} (B_1A_i + B_2A_i) = \sum_{i=1}^{100} B_1A_i + \sum_{i=1}^{100} B_2A_i \geq 200.$$

Stąd któraś z dwóch liczb $\sum_{i=1}^{100} B_1A_i, \sum_{i=1}^{100} B_2A_i$ musi być równa co najmniej 100. Przyjmujemy wtedy jako B odpowiedni z punktów B_1, B_2 . □

5. Udowodnij nierówność $a^3 + b^3 + c^3 < (a + b + c)(ab + bc + ca)$, gdzie a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta.

R. Nierówność nietrudno przekształcić do postaci

$$a^2(a - b - c) + b^2(b - c - a) + c^2(c - a - b) - 3abc < 0.$$

Z NT wszystkie wyrażenia w nawiasach są ujemne. Kwadraty długości boków oraz abc są dodatnie, zatem całe wyrażenie po lewej stronie jest mniejsze od zera, co kończy dowód. □

*Instytut Matematyczny PAN, Warszawa

Na koniec proponuję kilka zadań „domowych”.

6. W trapezie $ABCD$ punkt M jest środkiem ramienia BC . Wykaż, że wówczas $AM + MD > AB + CD$.

7. Wewnątrz trójkąta ABC o obwodzie $2p$ dany jest punkt X . Wykaż, że wówczas $p < AX + BX + CX < 2p$.

8. Udowodnij uogólnienie NT: dowolna łamana o końcach A i B jest dłuższa od odcinka AB .

9. W czworokącie $ABCD$ kąt BAD jest prosty i $AB = AD$. Udowodnij, że $BC + CD + DB \geq 2AC$.

10. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + (2i - 1)^2}$$

dla $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, takich że $\sum_{i=1}^n a_i = n^2$.