

deltai

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

II-6.63.10-149 71-3.141592

NR 8 (555) 2020

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

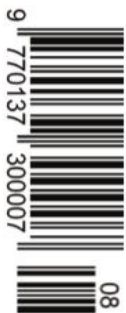
www.deltami.edu.pl

O problemie
sadu bez przesławitów
str. 6

Efekty nieliniowe
dla rowerzystów
str. 12



UNIwersYTET
WARSZAWSKI



Nakład: 3500 egz.


SPIS TREŚCI NUMERU 8 (555)

Wielościanny w wielościannach, czyli
matematyka eksperymentalna
Michał Adamaszek


Matematyczny kącik muzyczny II: Jak
dobrze nastroić klawesyn?
Konstanty Kostrzewski

O problemie sadu bez przeswytów
Piotr Zarzycki

 Zadania

 A co potem?
Magdalena Fikus

Piramida kwadratowych liczb
Maria Gałuszka

 Efekty nieliniowe dla rowerzystów
Jerzy Tyszkiewicz

Jaki jest kształt Wszechświata?
Jarosław Górnicki

Czułość funkcji logicznych, część 2
Mariusz Zajac


Z orbity na orbitę
Grzegorz Derfel

Klub 44

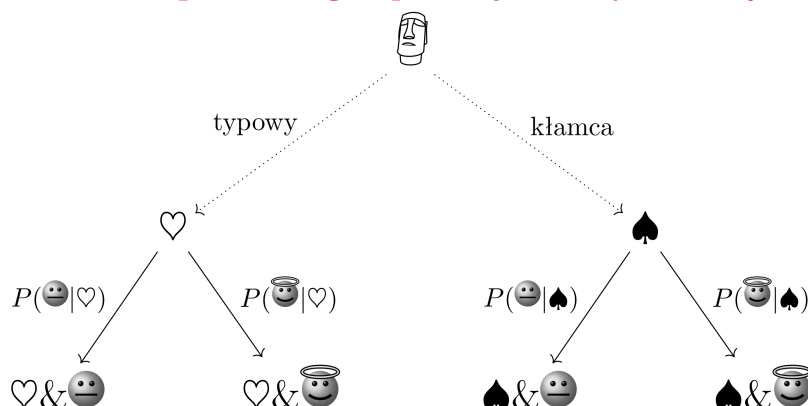
Prosto z nieba: Betelgeza coś
niewyraźnie wygląda

Niebo w sierpniu

Aktualności
Prawdy równoległe

 Nic nie może przecież wiecznie
trwać
Bartłomiej Bzdęga

W następnym numerze będziemy
przestrzegać przed jednomyślnością.



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji: Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Wielościany w wielościanach, czyli matematyka eksperymentalna

Michał ADAMASZEK*

* Mosek ApS, Kopenhaga

Czy istnieje coś takiego jak matematyka eksperymentalna? Zobaczmy. Ten tekst zaczniemy od prostego zadania z geometrii, następnie użyjemy komputera, aby rozwiązać je w przybliżeniu, a na koniec z tego przybliżenia zgadniemy dokładny wynik. Będzie też wiele szczegółów do uzupełnienia dla Czytelników. Programy użyte do eksperymentów można znaleźć w [3].

Zadanie z geometrii

Zadanie „Kwadrat w Trójkącie”. W trójkącie równobocznym zawarty jest kwadrat o największym możliwym polu. Jaką część pola trójkąta zajmuje ten kwadrat?

Rozwiązanie. Najpierw musimy uzasadnić, że optymalna konfiguracja wygląda tak jak na rysunku 1, z jednym bokiem kwadratu leżącym na boku trójkąta. Ten żmudny fragment pozostawiamy Czytelnikom, tym bardziej że wkrótce podamy inne, dosyć przekonujące uzasadnienie. Reszta to elementarna geometria. Zakładając, że duży trójkąt ma bok długości 1, mamy:

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

a stąd $x = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0,46410161513$, czyli stosunek pola kwadratu do pola trójkąta wynosi

$$\frac{x^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = 28\sqrt{3} - 48 \approx 0,497422611.$$

Skoro tak dobrze nam poszło, możemy zwiększyć odrobinę stopień trudności:

Zadanie „Sześcian w Dwudziestościanie”. W dwudziestościanie foremnym zawarty jest sześcian o największej możliwej objętości. Jaką część objętości dwudziestościanu zajmuje ten sześcian?

Za szybko? W takim razie wróćmy do podstaw i spróbujmy powoli uogólnić nasz oryginalny problem w dwóch wymiarach. Kolejnymi kandydatami na uogólnienia są zadania o „Kwadracie w Kwadracie” (mhm...), „Kwadracie w Pięciokącie foremnym” i tak dalej. Moglibyśmy też zapytać o dowolny „ N -kąć foremny w M -kącie foremnym”. W przypadku najbardziej ogólnego płaskiego problemu:

Zadanie „ P w Q ”. W danym wielokącie wypukłym Q zawarty jest wielokąt o największym możliwym polu, podobny do danego wielokąta wypukłego P . Jaką część pola Q zajmuje ten wielokąt?

Możemy już chyba tylko pomarzyć o eleganckim rozwiązaniu i zdać się na komputer. W ten właśnie sposób dochodzimy do pytania: jak wyrazić nasze zadania w języku zrozumiałym dla komputera?

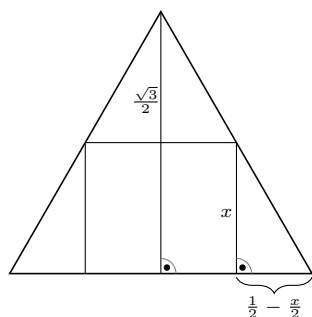
Programowanie liniowe

Programowanie liniowe pojawiało się niejednokrotnie w *Delcie* (np.: Kiljan Δ_{18}^3 , Adamaszek Δ_{19}^2 , Kowalik Δ_{13}^8 , Δ_{20}^2 , Wójcik Δ_{18}^2). W szkole uczymy się o układach równań liniowych i sposobach ich rozwiązywania. *Problem liniowy* dopuszcza bardziej ogólnie ograniczenia w postaci *równań i nierówności* liniowych. Taki układ może mieć zero, jedno lub wiele rozwiązań, a zadaniem *programowania liniowego* jest znalezienie takiego rozwiązania, które maksymalizuje zadaną funkcję liniową danych zmiennych.

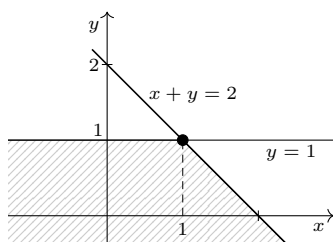
Dla przykładu rozważmy problem liniowy:

$$\begin{aligned} &\text{zmaksymalizuj} && 2x + 3y \\ &\text{przy założeniach} && x + y \leq 2, \\ &&& y \leq 1. \end{aligned}$$

Zbiór punktów spełniających założenia tego problemu jest pokazany na rysunku 2. Łatwo sprawdzić, że w tym zbiorze wyrażenie $2x + 3y$ przyjmuje największą wartość 5 w punkcie $(x, y) = (1, 1)$, a więc ten punkt jest rozwiązaniem (w tym przypadku jedynym). Problemy liniowe pojawiają się w wielu praktycznych zastosowaniach i, co ważne, można je efektywnie rozwiązywać na komputerze.



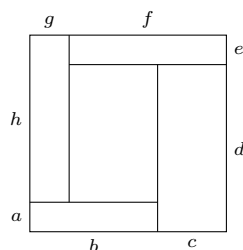
Rys. 1



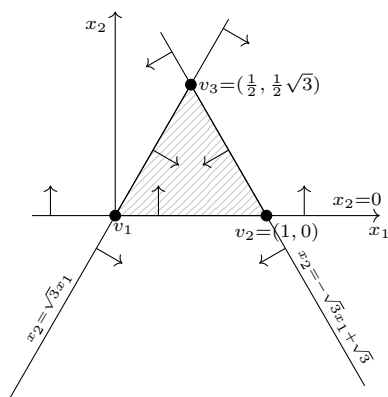
Rys. 2



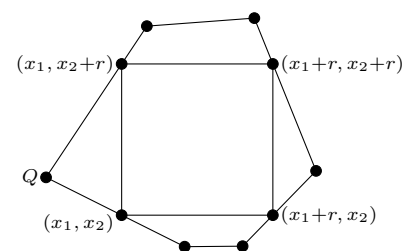
Rozwiązanie zadania M 1646.



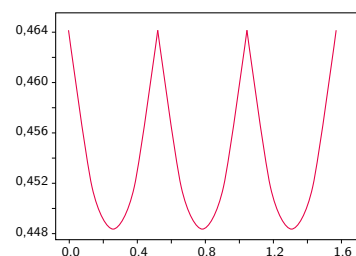
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Załóżmy, że bok kwadratu ma długość 1, i przypuśćmy, że $a + b < 1$. Ponieważ $b + c = 1$, mamy $a < c$. Jednocześnie $ab = cd$, zatem $b > d$. Skoro jednak $b + c = d + e$, musi być $c < e$. Analogicznie wnioskujemy stąd kolejno $d > f$, $e < g$, $f > h$, $g < a$ i $h > b$. Mamy zatem $b > d > f > h > b$, sprzeczność. Podobnie wykluczamy przypadek $a + b > 1$, zatem $a + b = 1$, więc $a = c = e = g$, skąd już w prosty sposób wnioskujemy, że środkowy prostokąt jest kwadratem.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rozwiązanie zadania M 1647.

Niech $P(x) = Cx(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$, gdzie C, x_1, \dots, x_{n-1} są liczbami całkowitymi. Oczywiście $P(P(x_i)) = 0$ dla $0 \leq i \leq n - 1$ (przyjmujemy $x_0 = 0$). Załóżmy, że $P(P(a)) = 0$ dla pewnego $a \neq x_i, 0 \leq i \leq n - 1$. Wówczas $P(a) = x_k$ dla pewnego $1 \leq k \leq n - 1$, czyli $Ca(a - x_1) \dots (a - x_{n-1}) = x_k$. W tej sytuacji $a(x_k - a)$ dzieli x_k . Załóżmy, że $x_k > 0$. Z podzielności $a(x_k - a) \mid x_k$ wnioskujemy kolejno $0 < a < x_k$ oraz $a = x_k - a = 1$, czyli $x_k = 2$. Jednak $x_k = 2$ ma tylko 4 różne dzielniki całkowite, co przeczy równości $P(a) = x_k$. Przypadek $x_k < 0$ rozpatrujemy podobnie i w ten sposób kończymy dowód, że tylko pierwiastki wielomianu $P(x)$ są całkowitymi pierwiastkami wielomianu $P(P(x))$, co dopełnia rozwiązanie.

Procedury do *programowania liniowego* można znaleźć w większości popularnych pakietów do obliczeń numerycznych, a wyspecjalizowane programy rozwiązują z dużą dokładnością problemy liniowe z milionami zmiennych i ograniczeń.

Wyrazimy teraz zadanie o „Kwadracie w Trójkącie” w tym języku. Ustalmy trójkąt T o wierzchołkach $v_1 = (0, 0)$, $v_2 = (1, 0)$, $v_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ (rys. 3). Po pierwsze zauważamy, że w języku problemów liniowych możemy opisać postulat „punkt $x = (x_1, x_2)$ należy do T ”. Rzeczywiście, są na to nawet dwa sposoby. W sposobie pierwszym wyrażamy fakt, iż punkt (x_1, x_2) leży po właściwej stronie każdej z prostych zawierających boki trójkąta:

$$(x_1, x_2) \in T \iff \begin{cases} x_2 \leq \sqrt{3}x_1, \\ x_2 \geq 0, \\ x_2 \leq -\sqrt{3}x_1 + \sqrt{3}. \end{cases}$$

Jeżeli nie chcemy pracować wyznaczać równań boków trójkąta, możemy użyć innego sposobu. Zapiszemy w nim, że punkt x należy do otoczki wypukłej wierzchołków trójkąta:

$$x \in T \iff \begin{cases} x = t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3, \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1, \\ t_1, t_2, t_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ponieważ współrzędne punktów v_i uważamy za stałe, powyższe zależności są liniowe w zmiennych x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 , a więc również definiują problem liniowy. Zauważamy też, że obydwie sposoby nadają się do opisanego dowolnego wielokąta wypukłego Q (Dlaczego tylko wypukłego?). Jedyne, czego potrzebujemy, to współrzędne wierzchołków Q lub równania prostych zawierających boki Q .

Potrąfimy już zapisać przynależność jednego punktu do ustalonego wielokąta wypukłego Q . Teraz możemy wreszcie wyrazić zadanie „Kwadrat w Q ”. Gdyby interesowały nas tylko kwadraty o bokach równoległych do osi współrzędnych, to ułożylibyśmy problem liniowy:

$$(1) \quad \begin{aligned} &\text{zmaksymalizuj } r \\ &\text{przy założeniach } \begin{cases} (x_1, x_2) \in Q, \\ (x_1 + r, x_2) \in Q, \\ (x_1, x_2 + r) \in Q, \\ (x_1 + r, x_2 + r) \in Q. \end{cases} \end{aligned}$$

Faktycznie, jeśli (x_1, x_2) jest lewym dolnym wierzchołkiem szukanego kwadratu, zaś r jest długością boku (rys. 4), to cztery podane założenia wyrażają przynależność wszystkich czterech wierzchołków kwadratu do wielokąta Q . Optymalne rozwiązanie tego problemu liniowego maksymalizuje długość boku r , a zatem i pole kwadratu.

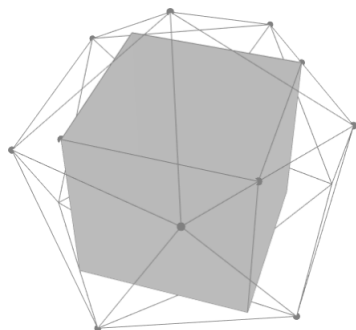
Jeżeli teraz uwzględnimy w jakiś sposób wszystkie możliwe obroty kwadratu wewnątrz wielokąta, to zadanie będzie rozwiązane! Jesteśmy już bardzo blisko. Dla $\alpha \in [0, \pi/2)$ oznaczmy przez Q_α wielokąt Q obrócony na płaszczyźnie o kąt α . Jeżeli wielokąt Q był dany np. poprzez współrzędne wierzchołków, to możemy bardzo łatwo obliczyć wierzchołki wielokąta Q_α i zapisać problem liniowy:

$$(2) \quad \begin{aligned} &\text{zmaksymalizuj } r \\ &\text{przy założeniach } \begin{cases} (x_1, x_2) \in Q_\alpha, \\ (x_1 + r, x_2) \in Q_\alpha, \\ (x_1, x_2 + r) \in Q_\alpha, \\ (x_1 + r, x_2 + r) \in Q_\alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

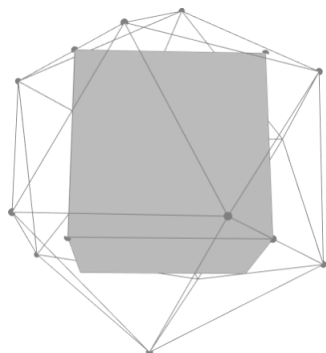
Oznaczmy rozwiązanie problemu (2) przez r_α . Jest to długość boku największego kwadratu o bokach równoległych do osi, zawartego w Q_α , a więc i długość boku największego kwadratu zawartego w Q i pochylonego pod kątem $-\alpha$. W takim razie $r = \max\{r_\alpha : \alpha \in [0, \pi/2)\}$ wyznacza długość boku kwadratu, który rozwiązuje zadanie „Kwadrat w Q ”. (Dlaczego wystarczy ograniczyć się do $\alpha \leq \pi/2$?)

Eksperymenty

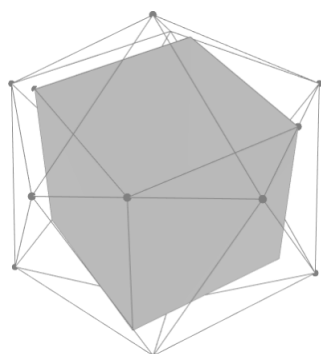
Oczywiście w praktyce nie możemy rozwiązać problemu (2) dla *wszystkich* wartości α , ale możemy wziąć ich wystarczająco wiele, aby naszkicować wykres funkcji r_α i przybliżyć maksimum z dużą dokładnością. Wróćmy do zadania „Kwadrat w Trójkącie”, od którego zaczęliśmy ten tekst. Wykres r_α dla tego problemu znajduje się na rysunku 5. Odczytujemy z niego, że maksimum przypada dla obrotu o $\alpha = 0$ (oraz, oczywiście!, $\alpha \in \{\pi/6, \pi/3\}$), tak jak początkowo przypuszczaliśmy. Otrzymujemy też przybliżoną wartość $r_0 \approx 0,464101616$, która zgadza się z dokładnym wynikiem do 8. miejsca po przecinku. Jako eksperymenciatorzy, jesteśmy usatysfakcjonowani zgodnością teorii z praktyką.



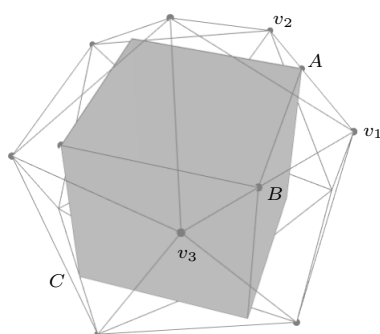
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Przejdźmy do zadania „Sześcian w Dwudziestościanie”. Wprowadziliśmy rozważania w tekście prowadziliśmy na płaszczyźnie, ale wszystko można powtórzyć w trzech wymiarach z nieznacznymi zmianami. W problemie (2) zamiast czterech wierzchołków kwadratu musimy uwzględnić osiem wierzchołków sześcianu, a zamiast Q_α musimy rozważyć wszystkie obroty $Q_{\alpha,\beta,\gamma}$ oryginalnej bryły Q w trzech wymiarach. Po tych poprawkach wciąż mamy serię problemów liniowych obliczających poszczególne wartości $r_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Wierzchołki dwudziestościanu foremnego możemy odszukać w literaturze. Przy oznaczeniu $\tau = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}$ następujące punkty

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, \frac{1}{2}, \tau), & v_2 &= (0, -\frac{1}{2}, \tau), & v_3 &= (\frac{1}{2}, \tau, 0), \\ v_4 &= (\frac{1}{2}, -\tau, 0), & v_5 &= (\tau, 0, \frac{1}{2}), & v_6 &= (\tau, 0, -\frac{1}{2}), \\ v_7 &= (-\frac{1}{2}, \tau, 0), & v_8 &= (-\frac{1}{2}, -\tau, 0), & v_9 &= (-\tau, 0, \frac{1}{2}), \\ v_{10} &= (0, \frac{1}{2}, -\tau), & v_{11} &= (0, -\frac{1}{2}, -\tau), & v_{12} &= (-\tau, 0, -\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

stanowią wierzchołki dwudziestościanu foremnego D o krawędzi długości 1 i objętości $\frac{5}{12}\sqrt{5} + \frac{5}{4}$. Implementujemy więc trójwymiarową wersję problemu liniowego (2), rozwiązujemy ją w pętli dla kilkuset wartości $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi/2)$ i... czekamy. Po dłuższym czasie otrzymujemy wynik: krawędź sześcianu ma długość w przybliżeniu

$$(3) \quad 0,93869735489196.$$

Otrzymujemy także kąty obrotu dające maksymalny sześcian. Możemy to wszystko narysować. Kilka rzutów największego sześcianu wpisanego w dwudziestościan zostało przedstawionych na rysunkach 6–8.

Tak jak poprzednio, domyślamy się, że wynik uzyskany za pomocą komputera nie jest dokładny i że optymalna konfiguracja jakościowo wygląda następująco: dwa wierzchołki A, B sześcianu leżą symetrycznie na dwóch sąsiednich krawędziach dwudziestościanu, dwa inne wierzchołki C, D na antypodycznych krawędziach, a pozostałe leżą wewnątrz ścian dwudziestościanu. Czy możemy stąd pokusić się o obliczenie dokładnych wartości? Otóż tak (rys. 9). Najpierw znajdujemy końce krawędzi dwudziestościanu, na których leżą punkty A i B . Okazuje się, że bez straty ogólności można w tym celu wybrać v_1, v_2, v_3 , które są w pozycji pokazanej na rysunku. Będziemy zakładać, że

$$A = tv_1 + (1-t)v_2, \quad B = tv_1 + (1-t)v_3, \quad C = -A, \quad D = -B,$$

dla pewnego $t \in (0, 1)$. Jak znaleźć t , dla którego punkty A, B, C, D są wierzchołkami sześcianu? Jest wiele sposobów, na przykład spełnione musi być równanie

$$|AC| = \sqrt{3}|AB|.$$

Po podstawieniu współrzędnych punktów A, B, C, v_1, v_2 dostajemy równanie kwadratowe w zmiennej t , które po nieco uciążliwych przekształceniach (może je wykonać za nas komputer, np. pakiet SAGE), przyjmuje postać:

$$\left(-\frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)t^2 + (3\sqrt{5} + 5)t - (\sqrt{5} + 2) = 0.$$

Pierwiastkiem tego równania w przedziale $(0, 1)$ jest $t = (\sqrt{5} + 7)/22$. Stąd możemy obliczyć dokładne współrzędne punktów A i B , a ostatecznie też długość krawędzi sześcianu

$$|AB| = \frac{7\sqrt{5} + 5}{22} \approx 0,93874890$$

(porównaj z (3)) i stosunek objętości sześcianu do dwudziestościanu:

$$\frac{|AB|^3}{5/12\sqrt{5} + 5/4} = \frac{219\sqrt{5} + 15}{1331} \approx 0,3791877.$$

Reasumując: przybliżenie uzyskane przy użyciu programowania liniowego okazało się wystarczająco dobre, aby odgadnąć dokładny wynik. Czy to rozumowanie jest pełnym dowodem? Niekoniecznie, ale niedaleko mu do dowodu [1]. Czy to rozumowanie stanowi przekonujące rozwiązanie? Raczej tak. Czy istnieje coś takiego jak matematyka eksperymentalna? Zdecydowanie!

Literatura

- [1] Moritz Firsching, *Computing maximal copies of polytopes contained in a polytope*, Experimental Mathematics Vol. 24 (2015), Issue 1, pp. 98-105
- [2] <https://mathoverflow.net/questions/138229/on-maximal-regular-polyhedra-inscribed-in-a-regular-polyhedron/154007>
- [3] <https://github.com/aszek/Delta/tree/master/polytopes>

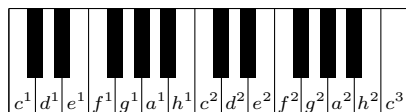
Więcej o zawieraniu dowolnych wielościanów foremnych w innych wielościanach i o historii problemu można poczytać w [1] i [2]. Do dalszych eksperymentów w tym zakresie można użyć programów z [3].

Matematyczny kącik muzyczny II: Jak dobrze nastroić klawesyn?

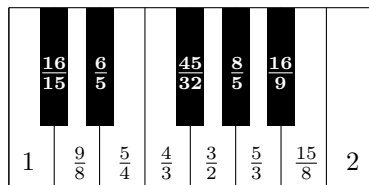
Konstanty KOSTRZEWSKI*

* Student, Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet
Warszawski

Przypomnienie w pigułce: interwały naturalne to różnice wysokości dźwięków wydawanych przez dwie struny różniące się tylko długością, przy czym stosunek tych długości wyraża się stosunkami niewielkich liczb naturalnych, np. 2 : 1 (oktawa), 3 : 2 (kwinta), 4 : 3 (kwarta), 5 : 4 (tercja wielka), 6 : 5 (tercja mała).



Ściągawka klawiaturowa. Dodanie końcówki „-is” odpowiada kolejnemu klawiszowi na klawiaturze (białemu lub czarnemu), a dodanie końcówki „-es” odpowiada poprzedniemu klawiszowi.

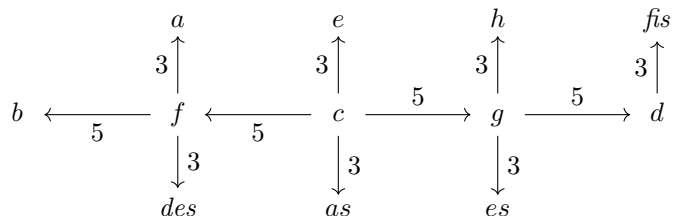


Przyjmując częstotliwość drgania struny c^1 za 1, kolejne dźwięki w stroju średniotonowym drgają z częstotliwością podaną powyżej.

W okresie baroku powstawały tzw. *fantazje chromatyczne*, czyli, ogólnie rzecz biorąc, utwory obficie korzystające z pochodów kolejnych dźwięków, np. *c, cis, d, dis, e*. Najlepiej brzmiały na instrumentach z dzielonymi czarnymi klawiszami, na których słyszalna jest różnica w barwie akordów, które zostały utożsamione we współczesnych instrumentach. W przeciwnym przypadku zatracą się barwa używanych współbrzmień.

W poprzednim artykule (Δ_{20}^7) pokazaliśmy, czym są interwały naturalne (wynikające z szeregu alikwotowego) oraz to, że przy użyciu do strojenia instrumentu tylko oktaw i kwint czystych „koło się nie zamknie”. W pewnym momencie zaczęło to sprawiać problem – odkąd pojawiła się w muzyce europejskiej muzyka wielogłosowa i operowanie trójdźwiękiem. Czysty trójdźwięk *durowy* (jak go obecnie nazywamy) składa się oczywiście z trzech dźwięków – między skrajnymi jest interwał kwinty czystej, a między dwoma dolnymi interwał tercji wielkiej. Trójdźwięk ten występuje naturalnie w szeregu alikwotowym – przykładowo dla dźwięku c składa się on z alikwotów c^2, e^2, g^2 . Nietrudno się przekonać, że interwał pomiędzy drugim i trzecim ze składowych trójdźwięku durowego jest tercją małą. Trójdźwięk zbudowany jest zatem z dwóch tercji. Możemy więc stworzyć też tzw. trójdźwięk *mollowy*, gdzie na dole jest tercja mała, a na górze wielka. Do myślenia linearnego w muzyce (tj. linią melodyczną) doszło myślenie harmoniczne, wpiętych oparte na tzw. *skalach modalnych*, a następnie systemie dur-moll. Trójdźwięk durowy brzmi radośnie, a mollowy smutno. Interwały oktawy, kwinty czystej i kwarty czystej brzmią „pusto” – to tercje nadają trójdźwiękom ich charakter, stąd ich ogromne znaczenie.

Strojenie kwintami czystymi daje bardzo zniekształconą tercję wielką (w porównaniu do tej naturalnej – opisuje to wspomniany w poprzednim artykule komat syntoniczny). W związku z tym zaczęto używać tercji wielkiej (tercja mała jest jej dopełnieniem do kwinty czystej) do strojenia instrumentów jako trzeciego wyjściowego interwału. Odbywało się to metodą „najkrótszej drogi” (tzw. *strój średniotonowy*) – mając ustalony dźwięk c (w każdej oktawie), za pomocą złożenia kwint i tercji metodą najkrótszej drogi konstruowano kolejne dźwięki:



Zauważmy, że przy tym stroju występuje pewna subtelna różnica między pewnymi parami dźwięków, np. *dis* i *es*, choć odpowiadają one temu samemu klawiszowi na klawiaturze. Dźwięk *dis* należy rozumieć jako „tercja w górę od h ”, natomiast dźwięk *es* to „tercja w dół od g ”. Zgodnie z filozofią „najkrótszej drogi” odpowiedni klawisz stroimy jako *es* (odpowiada mu droga $c \nearrow g \searrow es$, podczas gdy dźwiękowi *dis* odpowiada $c \nearrow g \nearrow h \nearrow dis$).

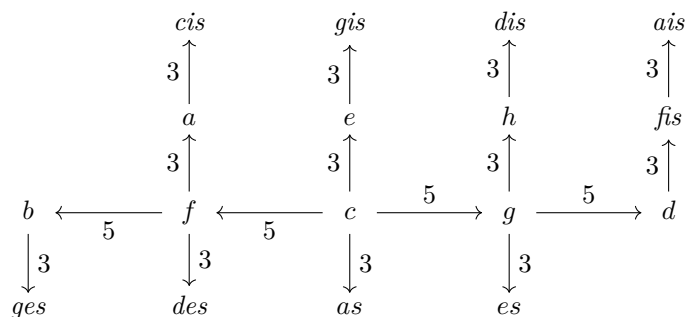
Wobec wciąż istniejących niedoskonałości ten system strojenia przyjmował przeróżne warianty. Niektóre z dźwięków lekko zmieniano, można było przykładowo w pewnym stopniu uśrednić dźwięki *dis* i *es* (itp.). Naturalnie zmieniało to barwę stroju, ale dawało pewien komfort słuchania, udoskonalając pewne interwały kosztem innych. Metoda ta oczywiście nie była idealna, zależała raczej od gustu i tolerancji konkretnego ludzkiego ucha.

Innym sposobem radzenia sobie z tą niedogodnością było wprowadzenie podziału czarnych klawiszy na dwie części – górną i dolną. Dzięki temu używano obu dźwięków, co zmniejszało liczbę interwałów brzmiących nieczysto. Przykładowo, klawisz *dis/es* podzielony był w taki sposób, że dźwięk *es* był na dole czarnego klawisza, a *dis* u góry – wiązało się to z częstością używania danego dźwięku. Dźwięk *es* występuje już w gamie *Es-dur*, mającej trzy znaki przy kluczu, podczas gdy *dis* dopiero w gamie *E-dur*, mającej cztery znaki przy kluczu. Liczba znaków przy kluczu oznacza „odległość” tej tonacji od tonacji *C-dur*. Im dalej tonacja jest od *C-dur*, tym bardziej nie stroi, jeśli zostaje zagrana

W zależności od instrumentu dzielono więcej lub mniej czarnych klawiszy. W 1555 roku Nicola Vincentino opisał instrument zwany *archicembalo*, w którym znajdowały się nawet klawisze pomiędzy *e* i *f* oraz między *h* i *c* (odpowiednio *eis* i *his*).

na instrumencie nastrojonym na bazie dźwięku *c*. Stąd dźwięk *es* był częściej stosowany i dlatego też znajdował się w dogodniejszej pozycji dla wykonawcy. Ze względu na czystość współbrzmień w muzyce dawnej spotykamy przede wszystkim tonacje mające mało znaków przy kluczu. Nie oznacza to jednak, że trójdźwięków „dalekich od *C*-dur” kompozytorzy unikali jak ognia – przeciwnie, ich nieczyste brzmienie miało nadać dziełu dodatkowych walorów emocjonalnych, wzmóc napięcie.

Uzupełniony schemat budowania kolejnych dźwięków dla instrumentów z podziałem czarnych klawiszy przedstawia się następująco:



W 1717 roku Louis Marchand, znakomity francuski klawesynista, improwizator i kompozytor zawitał do Drezna, gdzie akurat przebywał Johann Sebastian Bach. Został zaaranżowany pojedynek klawesynowy obu muzyków. Niestety nie doszedł on do skutku, Marchand opuścił Drezno na kilka godzin przed pojedyńkiem. Według anegdoty przestraszył się Bacha, który znał bardzo dobrze muzykę różnych regionów Europy, podczas gdy Marchand był obeznany głównie z francuską, a na dodatek Bach zdobył umiejętność strojenia klawesynu w taki sposób, że mógł na nim grać w każdej tonacji. W sytuacji, w której Bach wyprowadziłby rywala do tonacji normalnie nieużywanej, ten nie dość, że musiałby grać w tonacji, w której nie poruszał się komfortowo, to jeszcze na jego klawesynie (każdy grał na swoim) wystąpienie brzmiałoby zwyczajnie fałszywie.

W XVIII wieku wprowadzono do użytku strój równomiernie temperowany. W XIX wieku wyparł on już pozostałe, stając się powszechnie stosowanym. W systemie tym wszystkie półtony są równe, utożsamia się dźwięki *fis* i *ges*, *cis* i *des* itd. Nietrudno się przekonać, że proporcją określającą taki półton jest $\sqrt[12]{2} : 1$. System ten był znany dużo wcześniej, jednak był uznawany za niedoskonały ze względu na to, że żadna z tonacji nie brzmi w nim czysto, a możliwość korzystania ze wszystkich tonacji nie była aż tak pożądana. Ostatecznie jednak, m.in. za sprawą Andreeasa Werckmeistera, propagatora systemu równomiernie temperowanego, oraz zachwyconego nowymi możliwościami Johanna Sebastiana Bacha, strój ten zaczął się rozpowszechniać. Jednym z czynników było przejście od skal modalnych (kościelnych) do systemu dur-moll oraz coraz częstsze i bardziej skomplikowane stosowanie modulacji, tj. zmiany tonacji w trakcie utworu.

Aby porównać wspomniane systemy strojenia, wprowadzono jednostkę zwaną *centem*, która jest setną częścią współczesnego półtonu, czyli wyraża się stosunkiem $\sqrt[1200]{2} : 1$. Przykładowo kwinta czysta o stosunku $\frac{3}{2}$ ma miarę 701,955 centów, a kwinta czysta w stroju równomiernie temperowanym ma miarę 700 centów. Różnica ta jest praktycznie niesłyszalna. Natomiast tercja wielka o stosunku $\frac{5}{4}$ (386,31 centów) istotnie różni się od tej w systemie równomiernie temperowanym (400 centów). Różnica ta jest mniejsza niż ta pomiędzy tercją wielką $\frac{5}{4}$ a tą w stroju pitagorejskim – $\frac{81}{64}$ (407,82 centów), ale i tak słyszalna.

System równomiernie temperowany daje sporo możliwości – za cenę nieużywania „prawdziwie czystych” interwałów. Trzeba mieć jednak na uwadze, że doprowadzenie do powszechnego użycia tego systemu było naturalnym procesem i muzyka zachodnia gotowa była na poświęcenie „ideałów”, co wcale na złe jej nie wyszło – dość wspomnieć dzieła Beethovena, Brahmsa, Chopina, Liszta, Czajkowskiego i wielu innych wielkich kompozytorów. Na systemie równomiernie temperowanym istotnie oparta jest też *skala calotonowa*, często używana przez impresjonistów oraz *skala chromatyczna*, będąca podstawą muzyki dodekafonicznej. W II połowie XX wieku niektórzy kompozytorzy wrócili do poprzednich systemów strojenia, wprowadzając liczne zmiany i dodatkowe mikrointerwały.

Jedną ze wspomnianych wcześniej zalet i jednocześnie przyczyną wprowadzenia systemu równomiernie temperowanego jest możliwość modulowania – przechodzenia z jednej tonacji do drugiej. O sposobach prowadzenia modulacji i stopniu użycia w nich systemu równomiernie temperowanego opowiemy w następnym odcinku.

W skali calotonowej między kolejnymi dźwiękami są interwały sekundy wielkiej. Są tylko dwie takie skale – jedna zaczyna się od *c*, a druga od *cis*. Budując skalę calotonową od innego dźwięku otrzymamy po prostu przesunięcie cykliczne jednej z tych dwóch wymienionych.

Skala chromatyczna składa się z 12 dźwięków, odpowiadających wszystkim klawiszom na fortepianie.

O problemie sadu bez prześwitów

Piotr ZARZYCKI*

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Gdański

George Pólya, *Zahlentheoretisches und wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde*, Arch. Math. und Phys., 27, Series 2 (1918), 135–142.

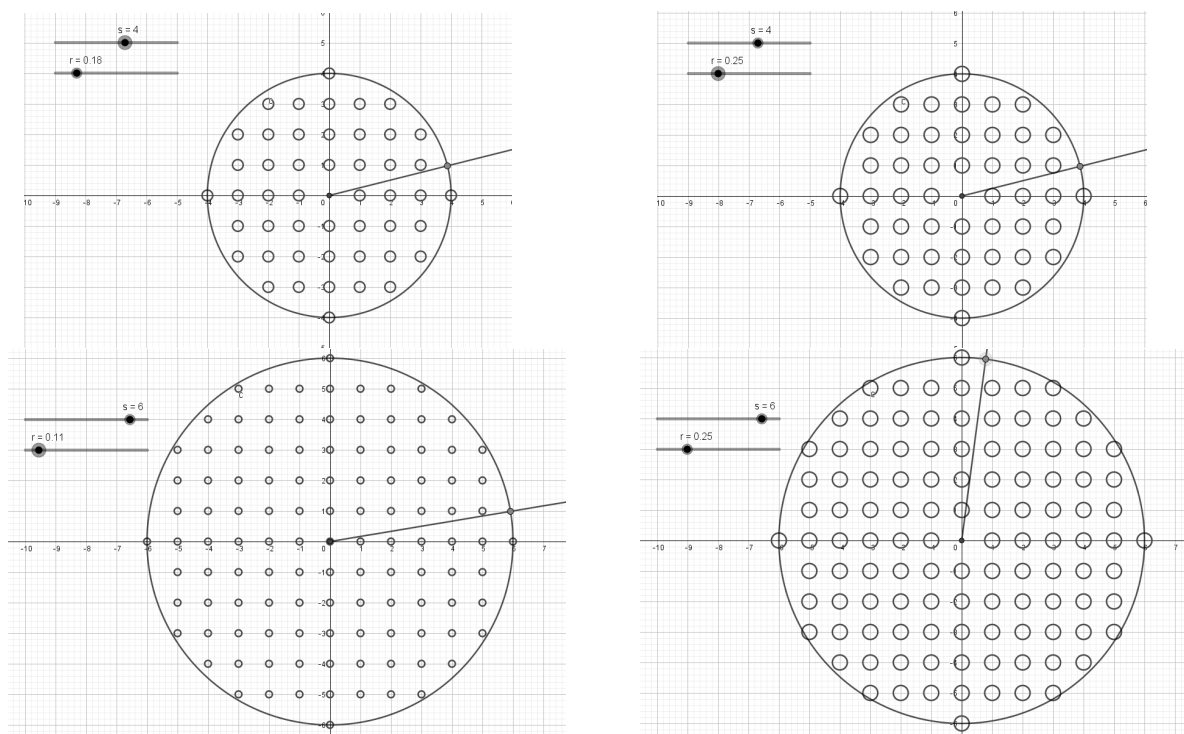
Zadanie Pólya znalazło się we wspomnianym zbiorze zadań George Pólya i Gábora Szegő *Problems and Theorems in Analysis* (vol. 2, chap. 5, Problem 239, Springer-Verlag, New York, 1976). Istnieje przekład rosyjski tej książki, niestety nie ma przekładu polskiego.

W 1918 roku George Pólya opublikował artykuł *Zahlentheoretisches und wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde*, w którym rozważał następujący problem (w literaturze anglojęzycznej nosi on nazwę *Orchard Visibility Problem*):

Sad ma kształt koła o promieniu $s \in \mathbb{N}^+$ i środku w początku układu współrzędnych. W każdym punkcie kratowym tego sadu, oprócz punktu $(0, 0)$, posadzono drzewo. Zakładamy, że każde drzewo ma pień, którego przekrój jest kołem o promieniu r . Jakie jest najmniejsze r , dla którego każdy promień wychodzący z punktu $(0, 0)$ napotyka na swojej drodze jakieś drzewo? Innymi słowy, dla jakich r , stojąc w punkcie $(0, 0)$, nie zobaczymy w tym sadzie żadnych prześwitów?

Eksperymenty

W sformułowaniu zadania z cytowanej książki Pólya i Szegő znajduje się oszacowanie dla poszukiwanego najmniejszego r , my jednak rozpoczniemy od eksperymentalnej analizy zagadnienia. Eksperymenty przeprowadzono za pomocą programu GeoGebra, korzystając z dwóch suwaków (dla s oraz dla r). Zamieszczone poniżej zrzuty ekranów dotyczą przypadków, gdy $s = 4$ oraz $s = 6$.



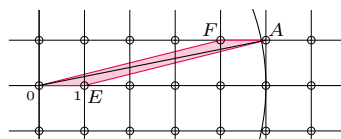
W obu przypadkach minimalny promień r , dla którego jakaś półprosta wychodząca z punktu $(0, 0)$ napotka drzewo, jest w przybliżeniu równy $\frac{1}{s}$. Kolejne spostrzeżenie wynika z symetrii. Otóż drzewa w kole położone są symetrycznie względem obu osi układu, więc wystarczy rozpatrywać I ćwiartkę koła (sadu) i ograniczyć się do drzew o środkach w punktach (x, y) , przy czym $x \geq y$.

Minimalny promień drzew dla sadu bez prześwitów – łatwiejsza część

Udowodnimy, że jeśli $r < \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, to sad ma prześwit. Spójrzmy na fragment sadu przedstawiony na marginesie (rozumowanie jest ogólne, ilustrujemy je dla $s = 6$).

Odległość punktów $E = (1, 0)$ i $F = (s - 1, 1)$ od półprostej OA , gdzie $A = (s, 1)$, wynosi $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, stąd drzewa w punkcie E oraz w punkcie F o promieniu $r < \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ nie dotykają półprostej OA . Zatem jeśli sad nie ma prześwitów, to $r \geq \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$.

Uzasadnienie, że promień $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ faktycznie jest najmniejszym możliwym, jest już bardziej złożone.

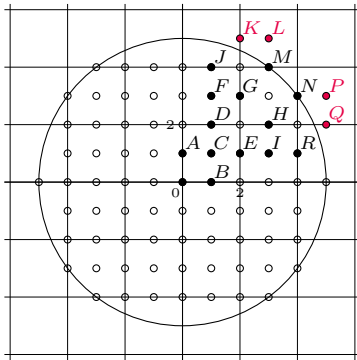
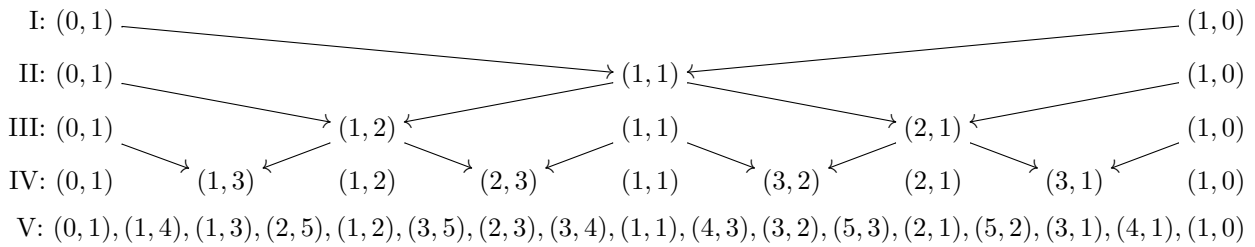


Minimalny promień drzew – trudniejsza część

Zauważmy najpierw, że kluczowe dla rozpatrywanego problemu są drzewa posadzone w punktach (a, b) , gdzie a oraz b są względnie pierwsze. Tak rzeczywiście jest, gdyż jeśli $\text{NWD}(a, b) = d > 1$, to drzewo w punkcie $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ zasłania drzewo w punkcie (a, b) . Przypomnijmy, że prześwity sadu obserwujemy z punktu $(0, 0)$. Rozpatrzmy więc wszystkie punkty w sadzie o współrzędnych względnie pierwszych. Dla $s = 5$ w pierwszej ćwiartce takich punktów jest łącznie trzynaście. Wszystkie te punkty można znaleźć, stosując *algorytm Sterna–Brocota*, który polega na prostej operacji sumowania punktów. Opiszemy go właśnie dla $s = 5$.

Opisana procedura bardzo przypomina algorytm generowania ułamków Farey'a ustalonego rzędu.

Rozpoczynamy od pary punktów $(0, 1)$ i $(1, 0)$ (etap I), a następnie na każdym kolejnym etapie pomiędzy dwa sąsiednie punkty z poprzedniego etapu wstawiamy punkt, którego współrzędne to sumy odpowiednich współrzędnych punktów sąsiednich. Popatrzmy na punkty otrzymane w kolejnych etapach tej procedury:



Zauważmy, że cztery punkty z etapu V nie należą do rozpatrywanego sadu, na rysunku obok zaznaczono je **kolorem**. 13 kluczowych dla naszego problemu punktów ma kolor **czarny**, pozostałe punkty są nieistotne. Otrzymane za pomocą algorytmu Sterna–Brocota na każdym etapie punkty mają ważne, łatwe do udowodnienia własności:

- ♠ jeśli punkty (a, b) oraz (c, d) są sąsiednie, to $bc - ad = 1$;
- ♣ punkty (a, b) w odniesieniu do ilorazu a/b są uporządkowane rosnąco, co oznacza także, że kąt, jaki tworzy półprosta łącząca $(0, 0)$ i (a, b) z dodatnią półosią OX , maleje.

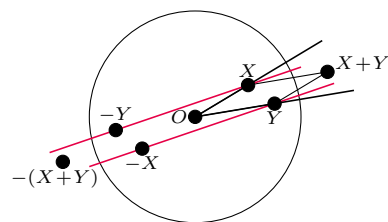
Rozpatrzmy parę sąsiednich punktów na jakimś etapie procedury Sterna–Brocota, które leżą w kole o promieniu s (nazwijmy te punkty X, Y), oraz takich, że punkt $X + Y$ leży poza tym kołem. Na rysunku takimi punktami są na przykład $E = (2, 1)$, $I = (3, 1)$, punkt $E + I = (5, 2) = Q$ leży na zewnątrz koła. Czwórka punktów $(O, X, Y, X + Y)$ tworzy równoległobok bez punktów kratowych wewnątrz. Kluczowe dla dalszych rozumowań jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie. Niech $(O, X, Y, X + Y)$ będzie czwórką punktów opisaną powyżej, przy czym $|X + Y|$, czyli odległość punktu $X + Y$ od punktu O , jest najmniejszą możliwą. Wówczas sad z drzewami o promieniu r nie ma prześwitów wtedy i tylko wtedy, gdy $r \geq \frac{1}{|X + Y|}$.

Dowód. Spójrzmy na rysunek na marginesie. Jeżeli pomiędzy drzewami znajdującymi się w punktach X i Y jest prześwit, to pomiędzy nimi będzie widoczne drzewo w punkcie $X + Y$. Ponieważ $X + Y$ znajduje się poza sadem, oznacza to, że nie możemy dopuścić do tego prześwitu. Zauważmy najpierw, że odległość punktów X, Y od prostej łączącej O z $X + Y$ wynosi $\frac{1}{|X + Y|}$. Wynika to z tego, że pole równoległoboku $O, X, Y, X + Y$ jest równe 1 (własność ♠). Ponadto z własności ♣ wynika, że w wycinku SOT rozpatrywanego koła nie ma punktów kratowych. Zatem jeśli $r < \frac{1}{|X + Y|}$, to półprosta łącząca O z $X + Y$ nie napotyka w sadzie żadnego drzewa.

Załóżmy teraz, że $r \geq \frac{1}{|X + Y|}$. Pokażemy, że w sadzie w pasie między zaznaczonymi kolorem prostymi nie ma żadnych punktów kratowych o współrzędnych względnie pierwszych. Niech $X = (a, b)$ oraz $X + Y = (c, d)$. Obie proste w kolorze są równoległe do prostej łączącej O z $X + Y$, zatem równania kolorowych prostych są postaci:

$$y_{\text{górn}} = \frac{d}{c} \cdot x + \frac{bc - ad}{c}, \quad y_{\text{dolna}} = \frac{d}{c} \cdot x + \frac{ad - bc}{c}.$$





Stąd jeśli punkt kratowy (x, y) leży w rozpatrywanym zbiorze, to otrzymujemy:

$$\frac{d}{c} \cdot x + \frac{ad - bc}{c} < y < \frac{d}{c} \cdot x + \frac{bc - ad}{c}, \quad ad - bc < cy - dx < bc - ad.$$

Zatem $cy - dx = 0$, czyli punkt (x, y) o współrzędnych względnie pierwszych leży na prostej łączącej O z $X + Y$, ale jedynym takim punktem z „listy” Brocota-Sterna jest punkt $X + Y$.

Z nierówności $r \geq \frac{1}{|X+Y|}$ wynika, że prosta łącząca O z $X + Y$ nie może ominąć drzewa w punkcie X ani Y . Jeśli weźmiemy inną czwórkę punktów $O, P, Q, P + Q$, przy czym punkty P, Q leżą w sadzie i każdy z nich ma współrzędne względnie pierwsze oraz punkt $P + Q$ leży na zewnątrz sadu, to $|P + Q| \geq |X + Y|$ oraz $\frac{1}{|P+Q|} \leq \frac{1}{|X+Y|}$. Jeśli weźmiemy promień drzewa równy $\frac{1}{|X+Y|}$, to prosta łącząca O z $P + Q$ nie ominie punktu P ani Q . \square

Możemy teraz postawić kropkę nad i – znaleźć minimalny promień drzew dla sadu bez prześwitów. Z twierdzenia wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej s ten minimalny promień oblicza się ze wzoru

$$r_{\min} = 1 / \min\{\sqrt{a^2 + b^2} : a, b \in \mathbb{Z}, \sqrt{a^2 + b^2} > s\}.$$

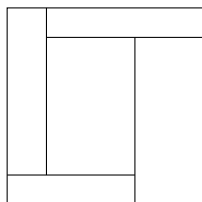
Oczywiście $s^2 + 1^2 = s^2 + 1 > s^2$, więc $r_{\min} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$.

Uwagi końcowe

W pracy *The orchard visibility problem and some variants* (Journal of Computer and System Sciences, 74 (2008), 587–597) Clyde P. Kruskal rozpatrzył problem sadu bez prześwitów w przypadku, gdy promień sadu nie jest liczbą całkowitą. W pracy tej pojawiają się również pytania dotyczące sadów i drzew rosnących w punktach sieciowych dla regularnych sieci trójkątnych i sześciokątnych.



Zadania



Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1645. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ istnieją nieparzyste liczby x_n, y_n spełniające równanie $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$.

Rozwiązanie na str. 16

M 1646. Kwadrat podzielono liniami równoległymi do jego boków na 5 prostokątów, jak na rysunku obok. Udowodnić, że jeśli zewnętrzne prostokąty mają równe pola, to wewnętrzny prostokąt jest kwadratem.

Rozwiązanie na str. 1

M 1647. Niech $P(x)$ będzie wielomianem n -tego stopnia ($n \geq 5$) o współczynnikach całkowitych, mającym n różnych pierwiastków całkowitych. Załóżmy, że 0 jest jednym z jego pierwiastków. Udowodnić, że wielomian $P(P(x))$ również ma dokładnie n różnych pierwiastków całkowitych.

Rozwiązanie na str. 2

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1005. Jak szybko temperatura powietrza maleje z wysokością nad powierzchnią Ziemi w pogodny, suchy i bezwietrzny dzień? Średnia masa molowa powietrza $\mu = 28,96$ g, przyspieszenie ziemskie $g = 9,81$ m/s², stała gazowa $R = 8,314$ J/(mol · K). W rozważanych warunkach powietrze spełnia równanie stanu gazu doskonałego.

Rozwiązanie na str. 10

F 1006. W „oku cyklonu” ciśnienie powietrza spada znacznie poniżej normalnego ciśnienia atmosferycznego $p_0 = 1013$ hPa, ale panuje tam przeważnie spokojna, bezwietrzna pogoda. Na zewnątrz tego obszaru, w promieniu do kilkuset kilometrów, wieją bardzo gwałtowne wiatry. Oko cyklonu Wilma w październiku 2005 roku miało promień około 2 km, panowało w nim ciśnienie 882 hPa, a silne wiatry występowały do 260 km od centrum. Oszacuj prędkość wiatru wokół oka tego cyklonu. Przyjmij, że gęstość powietrza $\rho = 1,2$ kg/m³.

Rozwiązanie na str. 18

A co potem?

Obiecałam sobie, że więcej o pandemii pisać nie będę, bo też i czytać nie mam ochoty. Ale dziś dotarła do mnie wersja polska *Scientific American* (kwiecień 2020), czyli *Świat Nauki* (czerwiec 2020). Czytając ten tekst w sierpniu, podczas gdy publikacja wyjściowa powstała w kwietniu, Czytelnik otrzymuje wiadomość „opóźnioną” o 4 miesiące. Ale ponieważ częściowo dotyczy ona przyszłości – to łatwiej zauważyć i ocenić na konkretnym przykładzie, jakie są możliwości profetyczne nauki. . .

Żeby jednak uniknąć zastrzeżeń o „wrózeniu z fusów”, zaczynamy od oceny podobnych epidemii wirusowych w przeszłości, od najbardziej „medialnej” i największej współcześnie pandemii grypy „hiszpanki” z lat 1918–1919. Jej genetyczne imię H1N1 pochodzi od dwóch istotnych białek. Kilka lat temu (pisałam o tym w *Delcie* 6/2020) odzyskano wirusa ze zwłok zmarłych pochowanych w wiecznej zmarzlinie. Zsekwencjonowano genom i namnożono we współczesnych laboratoriach. Z analizy genetycznej wirusa nie wynika wprost, dlaczego przyniósł tak tragiczne żniwo: 500 mln zakażonych, 50–100 mln zmarłych. Musimy się pogodzić z przyczynami środowiskowymi (ważne!) – związanymi z okresem biologicznie wyniszczającej wojny, złymi warunkami higienicznymi, słabym poziomem wiedzy medycznej i biologicznej, brakiem jakichkolwiek leków. Ta grypa wywołała dodatkowy szczyt zachorowań w populacji ludzi młodych (żołnierze), w przeciwieństwie do pozostałych – groźnych dla dzieci i seniorów. Wywołując populacyjną odporność (to wynik spotkania z nieznanym patogenem i brakiem leków), stała się obecnym na planecie wirusem endemicznym, zwykłą sezonową gripą. W 1957 roku z niewiadomych przyczyn szczep grypy H2N2 wyparł „hiszpankę” z ludzkiej populacji.

Wirus SARS-CoV, wyjątkowo zjadliwy wśród innych (siedmiu) ludzkich koronawirusów, spowodował epidemię w latach 2002–2003. Było łatwiej niż obecnie: objawy występowały od razu po zakażeniu, od tego momentu chorzy infekowali, ale tylko przez tydzień. Takimi sposobami, jak izolacja chorych, kwarantanny, dystans społeczny udało się ograniczyć epidemię do kilku światowych ognisk (Hongkong, Toronto) i do stosunkowo skromnych efektów działania: 8098 przypadków i 774 zgonów.

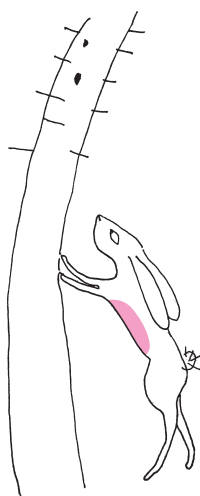
Na kolejną pandemię – w 2009 roku – grypy zwanej świńską byliśmy lepiej przygotowani. Wirus był znany od 90 lat, gdyż był to wirus H1N1, i w sześć miesięcy od jego ponownych narodzin przygotowano szczepionkę, dzięki której opanowano zimową falę występowania zachorowań, a wirus stał się „wirusem grypy sezonowej”.

Czego nauczyły nas poprzednie epidemie? Skuteczności działań społecznych na dużą skalę, prowadzonych aż do uzyskania prewencyjnej szczepionki lub skutecznego leku dla zakażonych. Nawet wirusolodzy uważają, że ważnym czynnikiem jest to, w jakim momencie pandemii rządy ogłoszą restrykcje i jak rygorystycznie dostosują się do ograniczeń społeczeństwa. Nowym współczesnym zjawiskiem jest współdziałanie naukowców na niespotykaną skalę, na wielu frontach, w wielu potężnych biotechnologicznych laboratoriach. Uważa się, że skuteczną szczepionkę będzie można szybko wytworzyć tylko metodami inżynierii genetycznej – w ciągu miesięcy, nie lat. Już w kwietniu podjęto badania w 80 firmach z 19 krajów. W cytowanym *Świecie Nauki* pisze się o 12 lekach, znajdujących się w początkowej fazie klinicznej, które można podzielić na trzy grupy: blokujące replikację wirusa, zapobiegające wnikaniu wirusa do komórek, powstrzymujące nadmierną reakcję układu odpornościowego człowieka. Te ostatnie badania wniosą niewątpliwie wiele nowych informacji o naszych reakcjach odpornościowych.

Tyle wiadomości dobrych. Czas na złe. Jeśli nie uda się skutecznie ochronić 9 mld ludzi, wirus będzie krążyć w populacji, po pewnym czasie zainfekuje łagodnie małe dzieci. Ludzie będą chorować, niektórzy ciężko. Jak większość wirusów, przetrwa, z czasem złagodnieje i nie będzie światową plagą.

Czy to jest uspokajający komunikat? Dla mnie, praktycznie zamkniętej w domu od pół roku (straciłam wszystkie przyrodnicze uroki wiosny) odpowiedź brzmi NIE!

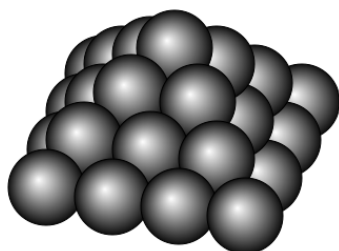
Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)



Piramida kwadratowych liczb

Maria GAŁUSZKA*

Piramidy w starożytnym Egipcie budowano na kształt ostrosłupa prawidłowego o podstawie kwadratu. Jak pokazują źródła historyczne, starożytni Egipcjanie potrafili obliczyć objętość takiego ostrosłupa. Jednak ich dobrze rozwinięta, jak na tamte czasy, matematyka, miała głównie zastosowanie praktyczne i raczej nikt nie formułował pytań, które miałyby na celu jedynie matematyczną rozrywkę. Jednym z matematyków, który szczególnie interesował się rozrywkowymi zastosowaniami królowej nauk, był Édouard Lucas, autor między innymi słynnej gry zwanej Wieżą Hanoi. W niniejszym artykule zwrócimy uwagę na sformułowany przez Lucasa problem z gatunku tych raczej mało praktycznych. Jak zobaczymy, ma on pewien związek z piramidami.



Wyobraźmy sobie piramidę o podstawie kwadratu utworzoną z jednakowych kul. W 1875 roku Édouard Lucas rzucił wyzwanie czytelnikom pewnego czasopisma matematycznego (nie była to *Delta* – przyp. red.), formułując

Zadanie. Udowodnić, że piramida o podstawie kwadratu ułożona z kul armatnich składa się z kwadratowej liczby kul wtedy i tylko wtedy, gdy bok jej podstawy ma długość 24 kul.

Problem ten można zapisać w formie równania diofantycznego

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + x^2 = y^2,$$

gdzie x jest liczbą kul armatnich w rzędzie tworzącym bok kwadratu będącego podstawą piramidy, a y^2 sumą wszystkich kul składających się na piramidę. Posługując się wzorem na sumę kwadratów pierwszych kolejnych liczb naturalnych, powyższe równanie możemy również zapisać w sposób równoważny jako

$$x(x+1)(2x+1) = 6y^2.$$

Lucas postawił poniższą hipotezę.

Hipoteza: Jedyne parami liczb naturalnych spełniającymi równanie

$$x(x+1)(2x+1) = 6y^2$$

są $x = 1, y = 1$ oraz $x = 24, y = 70$.

Okazała się ona prawdziwa, jednak początkowe próby jej udowodnienia były nieskuteczne. Sam autor również opublikował rzekomy dowód, jednak zawierał on lukę, której przez długi czas nikomu nie udało się uzupełnić. Dopiero w 1918 roku George Neville Watson przedstawił pierwsze kompletne uzasadnienie hipotezy Lucasa. Było ono jednak obszerne i wykorzystywało zaawansowane narzędzia. Dopiero później pojawiły się mniej wyrafinowane dowody. W dalszej części tego artykułu przedstawimy szkic jednego z nich, który można uznać za stosunkowo prosty, gdyż opiera się na elementarnej teorii liczb.

Niech para (x, y) będzie rozwiązaniem powyższego równania. W pierwszej części dowodu założymy, że x jest parzyste. Pomocne będą poniższe dwa lematy, których techniczne dowody przedstawimy w szkicowej postaci.

Lemat 1. Nie istnieje trójkąt prostokątny o bokach całkowitych, którego pole jest liczbą kwadratową.

Szkic dowodu. Przypuśćmy, że w jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której istnieją x, y spełniające $xy = 2w^2$ oraz $x^2 + y^2 = z^2$ dla pewnego z . Zgodnie ze znaną charakterystyką rozwiązań drugiego z tych równań możemy przyjąć $x = 2rs, y = r^2 - s^2$ (r, s względnie pierwsze) i wówczas $rs(r^2 - s^2) = w^2$. Ze względnej pierwszości r i s wynika $r = a^2, s = b^2, r - s = c^2$ i $r + s = d^2$, skąd $(d+c)^2 + (d-c)^2 = (2a)^2$ oraz $(d+c)(d-c) = 2b^2$. Mamy jednak $b < w$, co przeczy definicji w i kończy dowód.

Lemat 2. Nie istnieje liczba naturalna n taka, że $2n^4 + 1$ jest liczbą kwadratową.

Szkic dowodu. Niech (n, m) będzie rozwiązaniem równania $2n^4 + 1 = m^2$ o możliwie najmniejszej wartości n . Wówczas m jest nieparzyste i możemy przekształcić równanie



Rozwiązanie zadania F 1005.

Powierzchnia Ziemi ogrzewa atmosferę. Ogrzana „porcja” powietrza o masie m rozszerza się i wznosi pod wpływem siły wyporu, aż osiągnie wysokość Δh , na której jej gęstość zrówna się z gęstością otaczającego gazu. Ze względu na bardzo małe przewodnictwo cieplne wznosząca się „porcja” powietrza podlega przemianom adiabatycznym. Zgodnie z I zasadą termodynamiki zmiana energii wewnętrznej gazu ΔU w tej przemianie równa jest pracy sił zewnętrznych działających na gaz:

$$\Delta U = -p\Delta V,$$

gdzie p oznacza ciśnienie zewnętrzne, a ΔV zmianę objętości gazu. Zmiana energii wewnętrznej gazu doskonałego $\Delta U = n c_V \Delta T$, gdzie $n = m/\mu$ oznacza liczbę moli gazu, c_V – jego molowe ciepło właściwe w stałej objętości, a ΔT zmianę temperatury. Na podstawie równania stanu gazu doskonałego mamy też:

$$V = \frac{nRT}{p},$$

a więc

$$p\Delta V = nR\Delta T - \frac{nRT\Delta p}{p}.$$

Z drugiej strony, w warunkach równowagi z otoczeniem – gazem o gęstości ρ , mamy $\Delta p = -g\rho\Delta h$. Dostajemy równanie:

$$n(c_V + R)\Delta T = \frac{-nRT\rho g\Delta h}{p}.$$

Po skorzystaniu z zależności $nRT/p = V$, $V/n = \mu/\rho$ oraz $c_P = c_V + R = 7R/2$ otrzymujemy warunek:

$$\frac{\Delta T}{\Delta h} = \frac{-\mu g}{c_P} = \frac{-2\mu g}{7R},$$

co po podstawieniu danych liczbowych prowadzi do wniosku, że w spokojnym, suchym powietrzu spadek temperatury z wysokością wynosi $9,76 \text{ K/km} \approx 1 \text{ K}/100 \text{ m}$.

do postaci $n^4 = 2m_1(m_1 + 1)$. Jeśli m_1 jest nieparzyste, to m_1 i $2(m_1 + 1)$ są względnie pierwsze, a zatem dla pewnych k, l mamy $m_1 = k^4$ i $2(m_1 + 1) = l^4$, skąd rozważając modulo 8, szybko otrzymujemy sprzeczność. Zatem m_1 jest parzyste i podobnie wnioskujemy $2m_1 = k^4$ i $m_1 + 1 = l^4 = u^2$. W tej sytuacji $2k_1^4 = u_1(u_1 + 1)$ (gdzie $k = 2k_1, u = 2u_1 + 1$). Z $l^2 = 2u_1 + 1$ wnioskujemy (modulo 4) parzystość u_1 , skąd $u_1 = 2a^4$ i $u_1 + 1 = b^4$, czyli $2a^4 + 1 = (b^2)^2$, co daje nam sprzeczność z minimalnością n .

Lemat 3. Jedynymi liczbami całkowitymi k , takimi że $8k^4 + 1$ jest liczbą kwadratową, są $k = 0$ i $k = 1$.

Szkic dowodu: Przypuśćmy, że $8k^4 + 1 = l^2$. Wówczas $l = 2s + 1$ i $2k^4 = s(s + 1)$. Jeśli s jest parzyste, to $s = 2a^4$ i $s + 1 = b^4$, a zatem $2a^4 + 1 = b^4$, skąd i z lematu 2 mamy $s = 0 = k$. Jeśli s jest nieparzyste, to $s = a^4$ i $s + 1 = 2b^4$, czyli $a^4 + 1 = 2b^4$. Wnioskujemy stąd (modulo 4), że liczby a i b są nieparzyste, ponadto podnosząc ostatnią równość do kwadratu i przekształcając, dostaniemy $(b^4 - a^2)(b^4 + a^2) = ((a^4 - 1)/2)^2$. Ze względnej pierwszości a i b mamy $(b^4 - a^2)/2 = c^2$ i $(b^4 + a^2)/2 = d^2$, a zatem $(b^2 - a)^2 + (b^2 + a)^2 = (2d)^2$ i $(b^2 - a)(b^2 + a) = 2c^2$. Zgodnie z lematem 1 oznacza to, że $b^2 = a$ i w konsekwencji $k = 1$.

Powróćmy do hipotezy Lucasa. Skoro x jest parzyste, to $x, x + 1$ i $2x + 1$ są parami względnie pierwsze. Stąd $x + 1, 2x + 1$, jako liczby nieparzyste, są albo kwadratami, albo potrójnymi kwadratami. Zatem $x + 1 \not\equiv 2 \pmod{3}$ oraz $2x + 1 \not\equiv 2 \pmod{3}$, a stąd $x \not\equiv 1 \pmod{3}$ oraz $2x \not\equiv 1 \pmod{3}$, co daje również, że $x \not\equiv 2 \pmod{3}$. Ostatecznie $x \equiv 0 \pmod{3}$. Wobec tego liczby $x + 1$ i $2x + 1$ są kwadratami (gdyby były potrójnymi kwadratami, nie byłyby względnie pierwsze z x). Wtedy dla pewnych liczb naturalnych p, q, r parami względnie pierwszych możemy zapisać

$$x = 6q^2, \quad x + 1 = p^2, \quad 2x + 1 = r^2.$$

Ponadto $6q^2 = (r - p)(r + p)$, a skoro p, r są nieparzyste, to $4 \mid 6q^2$. Wtedy $2 \mid q^2$, czyli $2 \mid q$.

Ze względnej pierwszości p i r wynika względna pierwszość liczb całkowitych $\frac{r-p}{2}$ i $\frac{r+p}{2}$.

Niech s będzie liczbą całkowitą taką, że $2s = q$. Wtedy $6s^2 = \frac{r-p}{2} \cdot \frac{r+p}{2}$. Skoro $\frac{r-p}{2}, \frac{r+p}{2}$ są względnie pierwsze, to otrzymujemy dwie możliwości.

- 1) Jedna z liczb $\frac{r-p}{2}, \frac{r+p}{2}$ jest postaci $6A^2$, a druga B^2 , gdzie A, B są nieujemne całkowite. Wtedy $p = \pm(6A^2 - B^2)$ i $q = 2AB$. Skoro jednak $6q^2 + 1 = x + 1 = p^2$, to $24A^2B^2 + 1 = (6A^2 - B^2)^2$, czyli $(6A^2 - 3B^2)^2 = 8B^4 + 1$. Korzystając z lematu 3, otrzymujemy $A = B = 1$. Stąd $x = 6q^2 = 24$.
- 2) Jedna z liczb $\frac{r-p}{2}, \frac{r+p}{2}$ jest postaci $3A^2$, a druga $2B^2$, gdzie A, B są nieujemne całkowite. Wtedy $p = \pm(3A^2 - 2B^2)$ i $q = 2AB$. Wobec równości $24A^2B^2 + 1 = (3A^2 - 2B^2)^2$ otrzymujemy, że $(3A^2 - 6B^2)^2 = 2(2B)^4 + 1$. Następnie z lematu 2 wnioskujemy, że nie istnieje liczba całkowita dodatnia B spełniająca powyższe założenia. Stąd równanie $x(x + 1)(2x + 1) = y^2$ nie ma rozwiązań w tym przypadku.

Wykazaliśmy więc, że gdy x jest parzyste, to problem Lucasa ma tylko jedno rozwiązanie: $x = 24, y = 70$.

Pozostaje nam sytuacja, kiedy to x jest nieparzyste. Najpierw odwołamy się do dość znanego w teorii liczb równania Pella, a właściwie do jego szczególnego przypadku, to znaczy równania $X^2 - 3Y^2 = 1$. Wiemy, że jego wszystkie rozwiązania to ciąg liczb

$$u_n = \frac{1}{2}(a^n + b^n), \quad v_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}(a^n - b^n),$$

gdzie $a = 2 + \sqrt{3}, b = 2 - \sqrt{3}$.

Do przeprowadzenia drugiej części dowodu potrzebny będzie jeszcze jeden lemat, którego dowód również pominiemy. Bazuje on na pewnej obserwacji dotyczącej rozwiązań równania $X^2 - 3Y^2 = 1$.

Lemat 4. Niech M będzie liczbą naturalną. Wtedy $u_n = 4M^2 + 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M = 1$ oraz $n = 2$.

Dowód wspomnianego wyżej lematu również nie jest skomplikowany, jednak opiera się na kilku innych obserwacjach dotyczących własności rekurencyjnych ciągu rozwiązań równania $X^2 - 3Y^2 = 1$, których treści tutaj pominiemy, gdyż same w sobie nie są one dla nas szczególnie interesujące.

Skoro $x, x + 1, 2x + 1$ są parami względnie pierwsze, to x jest kwadratem albo potrójnym kwadratem i $x \not\equiv 2 \pmod{3}$. Wówczas $x + 1$ (parzyste) jest odpowiednio albo kwadratem pomnożonym przez 6, albo podwójnym kwadratem. Zatem $x + 1 \not\equiv 1 \pmod{3}$, a stąd już łatwo wywnioskować, że $x \equiv 1 \pmod{3}$ i $2x + 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Wtedy istnieją takie liczby naturalne p, q, r parami względnie pierwsze, że

$$x = p^2, \quad x + 1 = 2q^2, \quad 2x + 1 = 3r^2.$$

Następnie otrzymujemy, że $6r^2 + 1 = 4x + 3 = 4p^2 + 3$. Ponadto

$$(6r^2 + 1)^2 - 3(4qr)^2 = 12r^2(3r^2 + 1 - 4q^2) + 1 = 1.$$

Równanie to przyjęło postać szczególnego równania Pella, przy czym $6r^2 + 1 = 4p^2 + 3$ odpowiada wyrazom ciągu u_n . Korzystając z lematu 3, otrzymujemy $6r^2 + 1 = 7$, co daje nam $r = 1$, a wtedy $x = 1$.

Uzyskaliśmy drugie rozwiązanie problemu Lucasa. Tym samym zakończyliśmy dowód jego hipotezy.

Wiele informacji zawartych w tym tekście zaczerpnęłam z artykułu W.S. Anglina *The Square Pyramid Puzzle*, *The American Mathematical Monthly* Vol. 97, No. 2 (Feb., 1990), pp. 120-124.

Rozważając powyższe piramidy, można zadać sobie również pytanie, kiedy suma kul jest liczbą trójkątną, czyli poszukać rozwiązań równania diofantycznego

$$x(x + 1)(2x + 1) = 3y(y + 1).$$

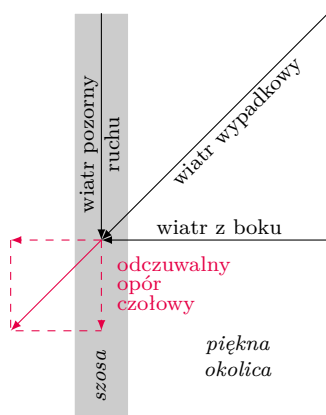
Na to również są znane wyniki. Aby dostarczyć sobie matematycznej rozrywki, czemu by nie zadać innego warunku dla liczby będącej sumą kul? Jeśli tylko mamy do czynienia z pewnym ciągiem liczb, którego jawny wzór jest nam znany, to cała zabawa sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego równania diofantycznego. Tym samym zachęcam Cię, drogi Czytelniku, do sformułowania podobnego problemu.

5

mała delta

Efekty nieliniowe dla rowerzystów

W matematyce często rozróżnia się rzeczy liniowe od nieliniowych. W szkole uczy się o funkcjach liniowych i nieliniowych, ale te pojęcia są dużo szersze i oprócz teorii dotyczą także wielu sytuacji praktycznych. Układ liniowy można przeanalizować w ten sposób, że rozkłada się go na części, analizuje działanie każdej z nich osobno, a na końcu dodaje do siebie poszczególne wyniki. W układzie nieliniowym taka analiza może dać niepoprawne wyniki.



Dla zilustrowania problemu zajmijmy się turystą rowerowym jadącym z prędkością $v = 5 \text{ m/s}$ na letnią wycieczkę. Przy tej prędkości zazwyczaj siła oporu aerodynamicznego, wyrażająca się wzorem „stała” $\cdot v^2$, zaczyna dominować nad wszystkimi innymi oporami ruchu – oznaczmy tę stałą przez γ . Ale rowerzysta na razie nie zastanawia się nad tym wszystkim. Słońce świeci, szosa jest pozioma i gładka, wiatru nie ma i jest przyjemnie.

Nagle pogoda się pogarsza i prostopadle do szosy zaczyna wiać wiatr z prędkością $v = 5 \text{ m/s}$. Turysta myśli sobie: i co z tego, przecież wieje dokładnie z boku, może i jest mniej przyjemnie, ale to nie będzie mi przeszkadzać w jeździe. Jednak jest to błąd wywołany kontaktami z częstymi w życiu codziennym układami liniowymi, tak naprawdę wiatr będzie go całkiem znacząco hamował. To trochę zaskakujące zjawisko jest właśnie manifestacją nieliniowości układu, który tworzą rowerzysta z rowerem i powietrze.

Obliczmy siły działające na kolarza: przy bezwietrznej pogodzie siła aerodynamiczna była skierowana do tyłu i wynosiła $F_1 = \gamma \cdot v^2$. Po pojawieniu się wiatru bocznego wiatr wypadkowy hamujący rowerzystę jest skierowany pod kątem $\pi/4$ i ma prędkość $\sqrt{2}v$. Zatem siła oporu jest skierowana tak samo i ma wartość $\gamma \cdot 2v^2$. Jej składowa hamująca to $F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma \cdot 2v^2 = \sqrt{2}\gamma v^2 = \sqrt{2} \cdot F_1$, czyli jest o ponad 41% większa niż poprzednio. Za ten nieco deprymujący wynik odpowiedzialny jest fakt, że siła oporu aerodynamicznego nie jest liniową (w sensie szkolnym) tylko kwadratową funkcją prędkości. Niestety, wbrew swoim wyobrażeniom kolarz musi zwiększyć wysiłek, by utrzymać tę samą prędkość co poprzednio.

Wiatr z boku jest naprawdę irytujący: wszystko jedno, czy się jedzie na wakacyjny piknik, czy z niego wraca, hamuje przy jeździe w obu kierunkach. Czy nie przyjemniej byłoby w jedną stronę jechać z wiatrem, nawet jeśli w drugą będzie trochę ciężiej? I to znowu jest oczekiwanie liniowego zachowania od nieliniowego układu. Znowu zakładamy, że prędkość wiatru i rowerzysty jest taka sama. Obliczmy dla przykładu pracę, którą musi wykonać rowerzysta, aby pokonać opór aerodynamiczny na niedługim odcinku drogi, długości d , jadąc dokładnie z wiatrem i wracając dokładnie pod wiatr. Praca to iloczyn drogi i siły. Z wiatrem ta praca jest zerowa, bo nie

odczuwa żadnego oporu powietrza. Pod wiatr wynosi $d \cdot \gamma(2v)^2 = 4d\gamma v^2$. Przy wietrze z boku praca jest w obie strony taka sama i łącznie wynosi $2d \cdot F_2 = 2\sqrt{2}d\gamma v^2$. Zatem lepiej jest jechać, mając oba razy wiatr z boku, niż raz z wiatrem i raz pod wiatr.

Mam jeszcze jedną złą wiadomość dla naszego rowerzysty, już poza dyskusją o nieliniowości siły oporu aerodynamicznego. Stała we wzorze na tę siłę (a zatem i na pracę) zależy od powierzchni przekroju bryły stawiającej opór i jej współczynnika oporu aerodynamicznego c_x . Tak się pechowo składa, że gdy wiatr zacznie wiać choćby trochę z boku, to wzrośnie powierzchnia stawiająca opór, bo rower z rowerzystą mają większą powierzchnię boczną niż czołową. Wzrośnie też c_x , bo rowery są projektowane z myślą o pokonywaniu przede wszystkim oporu czołowego. Paradoksalnie, to może nawet spowodować, że w praktyce jednak lepiej będzie jechać raz z wiatrem i raz pod wiatr, niż oba razy mając go z boku. Pokazuje to, że rzeczywistość jest bardziej skomplikowana niż prosty model, który dotąd omawialiśmy.

Jerzy TYSZKIEWICZ

Autor tego tekstu jadąc na dłuższą wycieczkę rowerem, zawsze sprawdza prognozę pogody, żeby wiedzieć, czy będzie padać, czy nie i jak silnie będzie wiać oraz z jakiego kierunku. A gdy już jedzie, to jego średnia prędkość na trasie wynosi właśnie około 5 m/s.

Jaki jest kształt Wszechświata?

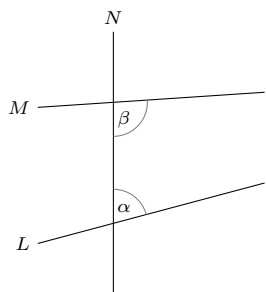
Jarosław GÓRNICKI*

* Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

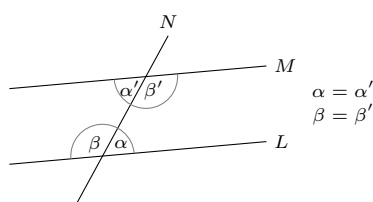
W stosunku do wielkości Ziemi wszystkie ziemskie nierówności (łańcuchy górskie, doliny) to znikome, zaniedbywalne zniekształcenia. Ponieważ w naszej skali nasze bliskie otoczenie przypomina płaską powierzchnię, więc nie powinno nas dziwić, że pierwsze geometryczne rozważania dotyczyły płaszczyzny.

Kulminacją geometrycznych osiągnięć antycznego świata są *Elementy* Euklidesa napisane w III wieku p.n.e. Euklides wykazał, jak można na płaszczyźnie użyć pięciu aksjomatów do systematycznego wywnioskowania z nich dużego zbioru twierdzeń geometrycznych. Oto aksjomaty Euklidesa:

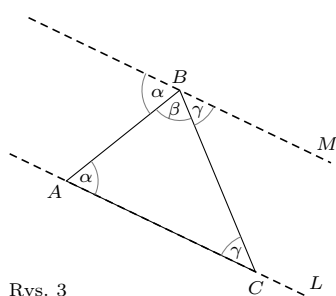
- I. *Od dowolnego punktu do dowolnego punktu można poprowadzić prostą.*
- II. *Ograniczoną prostą można w sposób ciągły przedłużyć do prostej.*
- III. *Z dowolnego środka dowolnym promieniem można zakreślić okrąg.*
- IV. *Wszystkie kąty proste są równe.*
- V. *Jeśli prosta padająca na dwie proste tworzy po jednej stronie kąty wewnętrzne w sumie mniejsze od dwóch kątów prostych, to te dwie proste przedłużone nieskończenie przetną się po tej stronie (rys. 1).*



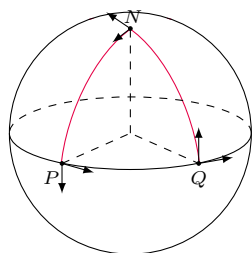
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Więcej o niepłaskości Ziemi można przeczytać w artykułach Michała Miśkiewicza w Δ_{16}^4 i Δ_{16}^{10} .

Piąty aksjomat Euklidesa ma także następujące sformułowanie (John Playfair, 1785 r.).

V'. *Przez każdy punkt poza prostą przechodzi dokładnie jedna prosta z nią rozłączna.*

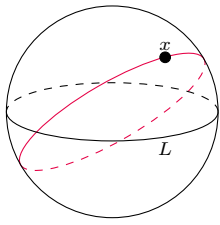
Jako przykład wykorzystania aksjomatów uzasadnimy dobrze znaną na płaszczyźnie obserwację: *suma miar kątów trójkąta równa się 180° .*

W pierwszym kroku wykazemy, że jeśli prosta N przecina dwie proste równoległe M i L , to naprzemianległe kąty są równe (rys. 2). Z aksjomatu V $\alpha + \beta' = \alpha + (180^\circ - \alpha')$ musi być równe 180° , bo w przeciwnym wypadku proste M i L przecinają się. Stąd $\alpha = \alpha'$. Analogicznie $\beta = \beta'$.

Niech będzie dany trójkąt $\triangle ABC$ o kątach α, β, γ (rys. 3). Wobec II aksjomatu prostą łączącą A i C możemy przedłużyć do prostej L . Z aksjomatu V' (postulatu o równoległych) istnieje prosta M przechodząca przez punkt B , która nie przecina prostej L . Wówczas z dowiedzionej już części $\alpha = \alpha'$ i $\gamma = \gamma'$, więc $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta + \gamma' = 180^\circ$.

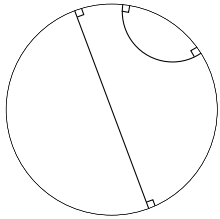
Najwięcej kontrowersji budził V aksjomat Euklidesa. Przez stulecia próbowano wywnioskować go z czterech pozostałych aksjomatów. I choć próby te kończyły się niepowodzeniem (na końcu artykułu przedstawiamy kilka z nich), to nikt nie był pewien, czy jakiś młody geniusz za sto czy dwieście lat nie będzie miał wspaniałego nowego pomysłu, który w końcu doprowadzi do poszukiwanego dowodu. Gdyby udało się stworzyć taki model geometrii, w którym pierwsze cztery aksjomaty byłyby prawdziwe, a V aksjomat nie byłby spełniony, to sprawa byłaby definitywnie wyjaśniona – V aksjomat byłby niezależny od czterech pozostałych. Ten problem okazał się trudny. Czy gdzieś istnieją trójkąty o sumie miar kątów nie dających 180° ? Jeszcze w XVIII wieku Immanuel Kant w *Krytyce czystego rozumu* (1781 r.) głosił, że geometria euklidesowa jest wiedzą *a priori* – jest nam dana wraz z życiem. Kant się mylił!

Dalekie podróże skłaniały ludzi do zastanawiania się nad tym, czy Ziemia jest płaska? Jak to rozstrzygnąć, pozostając stale na Ziemi? Obserwacje zaćmień Księżyca i cienia, jaki pozostawia na nim Ziemia, nie są przekonujące. Postąpimy inaczej, z bieguna północnego N idziemy do równika a km do punktu P (rys. 4). Na równiku skręcamy pod kątem prostym na wschód i idziemy wzdłuż równika a km do punktu Q , po czym pod kątem prostym skręcamy na północ i po a km znajdujemy się na biegunie N , gdzie wektor kierunku naszego marszu jest teraz prostopadły do wektora kierunku naszego startu. Okazało się, że w ten sposób wytyczyliśmy na Ziemi trójkąt $\triangle NPQ$, którego suma miar kątów jest równa 270° . O takiej powierzchni (na której sumy miar kątów w trójkącie przekraczają 180°) mówimy, że ma *krzywiznę dodatnią*. Zatem Ziemia nie jest płaska!

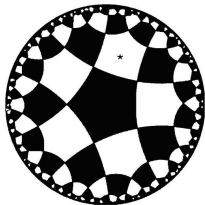


Rys. 5

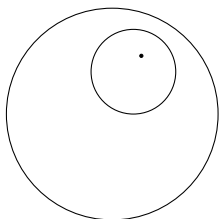
Na przykładzie sfery świetnie widać, że z lokalnych obserwacji (doświadczeń) nie zawsze można wyciągnąć trafne wnioski o zjawisku globalnym.



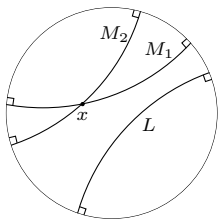
Rys. 6. Typowe proste w dysku hiperbolicznym



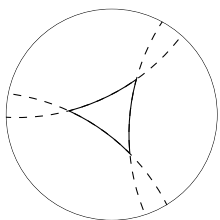
Rys. 7. Podział dysku hiperbolicznego za pomocą pięciokątów. Wyróżniony gwiazdką pięciokąt ma boki takiej samej długości jak pięciokąt centralny i takie samo pole



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Jak na takiej powierzchni (sferze) zachowują się aksjomaty Euklidesa? Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy określić na tej powierzchni pojęcie prostej. Na płaszczyźnie prosta łącząca punkty A i B charakteryzuje się tym, że jest najkrótszą ścieżką łączącą te punkty. Gdy punkty A i B umieścimy na sferze, to najkrótszym odcinkiem je łączącym będzie krótszy fragment koła wielkiego, który powstanie z przecięcia sfery przez płaszczyznę, jaką wyznaczają punkty A , B i środek sfery. Na przykład najkrótsza droga łącząca Paryż i Vancouver przebiega przez okolice bieguna północnego.

Skoro prostymi na sferze są koła wielkie, to łatwo widać, że na sferze V aksjomat Euklidesa jest fałszywy. Niech L będzie równikiem Ziemi i x punktem na półkuli północnej. Jakiemukolwiek kołu wielkiemu przechodzącemu przez punkt x będzie w połowie leżeć na półkuli północnej, a w połowie na półkuli południowej, przecinając równik w dwóch (!) antypodycznych punktach (rys. 5). Innymi słowy, na Ziemi nie ma prostej przechodzącej przez punkt x , która nie przecina prostej L . Niestety ten model geometrii (zwany *geometrią sferyczną*) nie pozwala na rozstrzygnięcie, czy V aksjomat jest niezależny od czterech pozostałych aksjomatów. Powód jest trywialny. Nie wszystkie pierwsze cztery aksjomaty Euklidesa są prawdziwe w geometrii sferycznej. Na przykład sfera nie zawiera okręgów o dowolnie dużym promieniu (aksjomat III), punkty antypodyczne (biegun północny i południowy) łączy nieskończenie wiele prostych, a na płaszczyźnie przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta (podważa to I aksjomat).

Potrzebujemy innej geometrii. Z listów Gaussa wynika, że około 1817 roku uświadomił on sobie, że można zbudować logicznie spójną geometrię, różną od euklidesowej (z odrzuconym V aksjomatem), ale swoich przemyśleń nie ogłosił. Zrobili to niezależnie od siebie Nikołaj Łobaczewski (1829 r.) i János Bolyai (1832 r.).

Na rysunku 6 przedstawiamy model dwuwymiarowej *geometrii hiperbolicznej* odkryty przez Eugenio Beltramiego w 1868 roku (14 lat później podał go również Henri Poincaré). Zrozumienie tego modelu wymaga nie tylko zdefiniowania linii prostej, ale również obowiązującej w nim odległości. W tym modelu przestrzeń jest przedstawiona jako wnętrze koła (bez brzegu). Prostymi są średnice lub łuki okręgów euklidesowych przecinające brzeg koła pod kątem prostym (rys. 6). Proste są wyznaczone jednoznacznie przez dwa punkty lub przez punkt i koniec, lub przez dwa końce. Odległości stają się większe (w porównaniu do tego, jak wyglądają), gdy zbliżamy się do brzegu tak, że brzeg jest nieskończenie daleko od centrum. W rezultacie najkrótsza droga między dwoma punktami ma tendencję do odchylenia się w kierunku centrum i, jak już mówiliśmy, jest łukiem okręgu euklidesowego, który przecina brzeg pod kątem prostym (rys. 7).

Dodatkowo w tym modelu koła są zawsze reprezentowane przez koła euklidesowe, ale mają przesunięte środki (rys. 8), ich promienie mogą być dowolnie duże, wówczas koło prawie dotyka brzegu modelu. Kąty, w tym „prostokątność”, są w tym modelu wiernie przeniesione z płaszczyzny euklidesowej. Oznacza to, że w takiej przestrzeni spełnione są wszystkie pierwsze cztery aksjomaty Euklidesa. A co z V aksjomatem? Otóż w modelu geometrii hiperbolicznej V aksjomat Euklidesa jest fałszywy, co widać na rysunku 9. Proste M_1 i M_2 przecinają się w punkcie x , ale żadna z nich nie przecina prostej L . Zatem w modelu geometrii hiperbolicznej istnieją dwie proste przechodzące przez punkt x (tak naprawdę nieskończenie wiele), które nie przecinają prostej L . Pokazaliśmy w ten sposób, że Euklides miał rację, przyjmując V aksjomat, gdyż jest on niezależny od czterech pozostałych aksjomatów! Teraz już wiemy, że wszelkie próby wyprowadzenia V aksjomatu Euklidesa z czterech pozostałych aksjomatów z góry były skazane na niepowodzenie.

Ponadto w geometrii hiperbolicznej suma miar kątów trójkąta jest mniejsza niż 180° (rys. 10). O takiej powierzchni mówimy, że ma *krzywiznę ujemną*.

W ten oto sposób odkryliśmy, że istnieją różne geometrie i żadna z nich nie jest bardziej uprzywilejowana od innych. 10 czerwca 1854 roku Bernhard Riemann, mając 28 lat, w swoim wykładzie habilitacyjnym *O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii* poszedł jeszcze dalej. Umieszczając obserwatora wewnątrz przestrzeni (wielowymiarowej rozmaitości), stwierdził, że geometria przestrzeni może się zmieniać od punktu, tu być hiperboliczną, tam euklidesową, a gdzie indziej sferyczną.

Próby dowodu V aksjomatu Euklidesa:

- (1) Niech y będzie innym punktem po tej samej stronie prostej L co punkt x i w tej samej od niej odległości. Połącz x z y prostą (I aksjomat), a następnie przedłuż tę ograniczoną prostą do prostej M (II aksjomat). Wtedy prosta M nie przecina prostej L .
- (2) Niech prosta M będzie złożona ze wszystkich punktów po tej samej stronie prostej L co punkt x i będących od niej w tej samej odległości. Otrzymana prosta nie przecina prostej L .
- (3) Punkt na płaszczyźnie kartezjańskiej można zapisać za pomocą współrzędnych. Prosta (nie pionowa) L ma równanie $y = mx + c$. Zmieniając c , możemy przesunąć prostą L w górę lub w dół. Żadna z tak otrzymanych prostych nie może się przecinać i każdy punkt należy do dokładnie jednej prostej.

Dzisiaj za sprawą ogólnej teorii względności Alberta Einsteina (1916 r.) i potwierdzającej ją obserwacji Arthura Eddingtona z roku 1919 przyjmujemy, że otaczająca nas przestrzeń (dokładniej czasoprzestrzeń) jest zakrzywiona, choć możliwe, że tego typu zakrzywienia są tylko niewielkimi perturbacjami znacznie większego i bardziej symetrycznego kształtu.

Tytułowe pytanie o kształt Wszechświata jest jednym z wielkich otwartych problemów astronomii (kosmologii) – czy wielkoskalowy kształt Wszechświata, gdyby wyprostować łuki, ugięcia wynikające z obecności gwiazd, galaktyk, czarnych dziur itp., nadal byłby zakrzywiony jak wielka kula, czy też byłby płaski (jak wodne łóżko), a może jest on bardziej skomplikowaną wielowymiarową rozmaitością o ujemnej krzywiznie. Może Ty masz pomysł, jak to rozstrzygnąć, Czytelniku?

Czułość funkcji logicznych, część 2

Mariusz ZAJĄC*

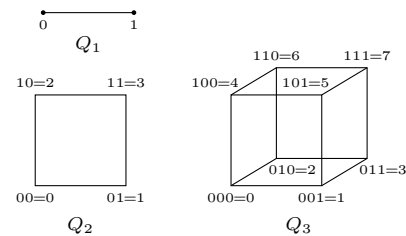
* Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska

[1] Hao Huang, *Induced subgraphs of hypercubes and a proof of the Sensitivity Conjecture*, arxiv.org/abs/1907.00847.

W pierwszej części artykułu (Δ_{20}^7) omówiliśmy pojęcia funkcji logicznej, jej czułości i przedstawiliśmy, na razie bez dowodów, pewne związane z nimi twierdzenia, udowodnione w pracy [1].

Celem drugiej części jest przedstawienie owych dowodów w wersji nieco uproszczonej w stosunku do oryginalnej pracy [1], ale wciąż wymagającej znajomości podstaw algebry liniowej, w tym mnożenia macierzy i pewnej wiedzy o wymiarze przestrzeni liniowej.

Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą i niech $N = 2^n$. Zapiszmy elementy zbioru $V_n = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ w układzie dwójkowym (uzupełniając w miarę potrzeby nieznaczącymi początkowymi zerami, tak by każda liczba miała dokładnie n cyfr) i przedstawmy je graficznie w ten sposób, że elementy V_n (zwane wierzchołkami) będą punktami, a odcinki (zwane krawędziami) połączą pary wierzchołków różniące się w układzie dwójkowym tylko jedną cyfrą. Uzyskany graf nazwiemy **n -wymiarową kostką Q_n** (nazwa wiąże się niewątpliwie z podobieństwem Q_3 do szkieletu sześciangu, czyli standardowej kostki do gry).



Rys. 1. Na przykład w Q_{12} połączone będą między innymi $x = 859 = 001101011011_2$ i $y = 843 = 001101001011_2$

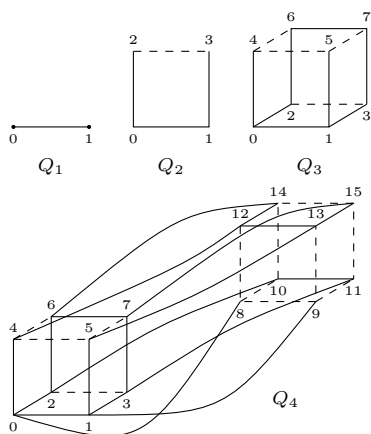
Spróbujmy przezwyciężyć fakt, że bezpośrednio odczuwamy istnienie tylko trzech wymiarów, spoglądając na kostki rekurencyjnie: Q_1 to dwa punkty połączone odcinkiem, Q_2 to dwa odcinki, np. dolny i górny, połączone dwiema pionowymi krawędziami, Q_3 to dwie kopie Q_2 , np. dolny i górny kwadrat, połączone czterema pionowymi krawędziami, \dots , Q_{m+1} to dwie kopie Q_m , połączone 2^m krawędziami i tak dalej.

Zapowiedziane pod koniec pierwszej części twierdzenie (jeśli ponad połowę wierzchołków n -wymiarowej kostki zajmują mrówki, to któraś z nich ma co najmniej \sqrt{n} sąsiadek) możemy sformułować w następujący równoważny sposób.

Twierdzenie (Huang [1]). *Jeśli wyróżnimy niektóre wierzchołki n -wymiarowej kostki Q_n , czyli wybierzemy podzbiór $W \subseteq V_n$, przy zachowaniu warunku, że każdy element W ma mieć mniej niż \sqrt{n} sąsiadów należących do W , to wyróżnione wierzchołki stanowią będą co najwyżej połowę wszystkich wierzchołków kostki, czyli $|W| \leq N/2$.*

W terminologii teorii grafów twierdzenie Huang brzmi: *każdy indukowany podgraf $G \subseteq Q_n$ spełnia $\Delta(G) < \sqrt{n} \Rightarrow |V(G)| \leq 2^{n-1}$. Dużo krócej, ale trzeba wpiერw wyjaśnić, że $V(G)$ to zbiór wierzchołków grafu G , $\Delta(G)$ to największy stopień wierzchołka (stopień to z kolei liczba krawędzi o końcu w danym wierzchołku), a podgraf indukowany oznacza pewne wierzchołki wraz ze wszystkimi łączącymi je krawędziami Q_n .*

Dla zgodności z wcześniejszymi oznaczeniami i rysunkiem 1 należałoby oznaczyć najwyższą wiersz i skrajną lewą kolumnę nazwać zerowymi, a nie pierwszymi, wtedy np. w macierzy A_2 wiersze i kolumny mają numery 0, 1, 2, 3, a podkreślona jedynka oznacza krawędź łączącą wierzchołki 2 i 3.



Rys. 2. Można sprawdzić, że krawędź łącząca x i y jest ciągła dokładnie wtedy, gdy wspólna część zapisów dwójkowych x i y na lewo od cyfry je odróżniającej zawiera parzystą liczbę jedynek. Na przykład dla $x = 859 = 001101011011_2$ i $y = 843 = 001101001011_2$ w fragmencie 0011010 są trzy jedynki, więc krawędź ta jest przerywana

Nietrudno zauważyć, że macierz H_n^2 ma liczby n na głównej przekątnej, bo każdy wierzchołek Q_n ma n sąsiadów. Zera poza przekątną H_n^2 wiążą się zaś z tym, że każda dwuwymiarowa ściana kostki jest kwadratem z trzema bokami ciągłymi i jednym przerywanym lub odwrotnie (widać to na rysunku 2).



Rozwiązanie zadania M 1645. Liczby $x_3 = y_3 = 1$ spełniają wymaganą w zadaniu równość. Załóżmy, że nieparzyste liczby x_n, y_n spełniają $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$. Wówczas

$$7 \left(\frac{x_n \pm y_n}{2} \right)^2 + \left(\frac{7x_n \mp y_n}{2} \right)^2 = 2(7x_n^2 + y_n^2) = 2^{n+1}.$$

Skoro x_n, y_n są nieparzyste, to jedna z par $\frac{1}{2}(x_n + y_n, |7x_n - y_n|)$ oraz $\frac{1}{2}(|x_n - y_n|, 7x_n + y_n)$ składa się z dwóch liczb nieparzystych, i tę parę wybieramy jako (x_{n+1}, y_{n+1}) . W ten indukcyjny sposób możemy skonstruować rozwiązanie wyjściowego równania dla dowolnej liczby naturalnej n .

Dowód. Każdemu grafowi można przypisać tzw. **macierz sąsiedztwa**, czyli tablicę liczb mającą tyle wierszy i kolumn, ile graf ma wierzchołków, w której na przecięciu wiersza o numerze k i kolumny o numerze l stoi 1, gdy wierzchołki k i l są połączone krawędzią, a 0, gdy nie są. Macierzami kostek Q_n są A_n , spełniające następujące zależności (tu i dalej I_d oznacza macierz jednostkową rozmiaru $d \times d$):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, A_{m+1} = \begin{bmatrix} A_m & I_{2^m} \\ I_{2^m} & A_m \end{bmatrix}, \dots$$

Hao Huang minimalnie modyfikuje te macierze, definiując

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, H_{m+1} = \begin{bmatrix} H_m & I_{2^m} \\ I_{2^m} & -H_m \end{bmatrix}, \dots$$

Jak widać, H_n to prawie ta sama macierz kostki, co wcześniejsza A_n , z tym że niektórym krawędziom przypisana jest liczba -1 , a nie 1. Jeśli oznaczymy je liniami przerywanymi, to nasze kostki będą wyglądały tak jak na rysunku.

Nas najbardziej zainteresują kwadraty macierzy H_m . Bezpośredni rachunek pokazuje, że

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2, H_2^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot I_4,$$

a ponadto

$$H_{m+1}^2 = \begin{bmatrix} H_m & I_{2^m} \\ I_{2^m} & -H_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_m & I_{2^m} \\ I_{2^m} & -H_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_m^2 + I_{2^m} & 0 \\ 0 & H_m^2 + I_{2^m} \end{bmatrix},$$

zatem przez indukcję $H_n^2 = n \cdot I_{2^n}$. Określmy wreszcie $H = \frac{1}{\sqrt{n}} H_n$ i obliczmy $H^2 = \frac{1}{n} H_n^2 = I_N$.

Następnym krokiem będzie rozważenie kilku przestrzeni liniowych:

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{R}^N = \{(x_0, \dots, x_{N-1}) : x_i \in \mathbb{R}\}, \\ U_W &= \{(x_0, \dots, x_{N-1}) \in U : x_i = 0 \text{ dla każdego } i \notin W\}, \\ U_+ &= \{v \in U : Hv = v\} = \{v \in U : H_n v = \sqrt{n}v\}, \\ U_- &= \{v \in U : Hv = -v\} = \{v \in U : H_n v = -\sqrt{n}v\}, \end{aligned}$$

oraz nieujemnej funkcji rzeczywistej $F_W((x_0, \dots, x_{N-1})) = \sum_{k \in W} |x_k|$.

Przypomnijmy wreszcie, że zgodnie z założeniem twierdzenia każdy element W ma najwyżej $d = \lceil \sqrt{n} - 1 \rceil < \sqrt{n}$ sąsiadów należących do W , i wykażmy kilka faktów.

Fakt 1. Jeśli $v \in U_W$, to $F_W(H_n v) \leq d \cdot F_W(v)$.

Dowód. Z definicji mnożenia macierzy dla $v \in U_W$ mamy

$$(H_n v)_k = \sum_{l=0}^{N-1} (H_n)_{kl} v_l = \sum_{l \in W} (H_n)_{kl} v_l, \text{ zatem}$$

$$\begin{aligned} F_W(H_n v) &= \sum_{k \in W} \left| \sum_{l \in W} (H_n)_{kl} v_l \right| \leq \sum_{k \in W} \left(\sum_{l \in W} |(H_n)_{kl}| |v_l| \right) = \\ &= \sum_{l \in W} \left(\sum_{k \in W} |(H_n)_{kl}| \right) |v_l| \leq \sum_{l \in W} d \cdot |v_l| = d \cdot F_W(v), \end{aligned}$$

przy czym ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż $|(H_n)_{kl}|$ wynosi 1, jeśli k i l sąsiadują w Q_n , oraz 0, jeśli nie sąsiadują. \square

Fakt 2. Jeśli $v \in U_W \cap U_+$ lub $v \in U_W \cap U_-$, to $v = 0$.

Dowód. W przeciwnym razie $F_W(v) > 0$ i na mocy faktu 1

$$F_W(v) = F_W(-v) = F_W(Hv) = \frac{1}{\sqrt{n}} F_W(H_n v) \leq \frac{d}{\sqrt{n}} \cdot F_W(v) < F_W(v),$$

sprzeczność. \square

Fakt 3. Każdy element $v \in U$ da się zapisać w postaci $v = v_+ + v_-$, gdzie $v_+ \in U_+$, $v_- \in U_-$.

Dowód. Istotnie, połóżmy $v_+ = \frac{v+Hv}{2}$, $v_- = \frac{v-Hv}{2}$. Wtedy $Hv_+ = \frac{Hv+H^2v}{2} = \frac{Hv+v}{2} = v_+$, $Hv_- = \frac{Hv-H^2v}{2} = \frac{Hv-v}{2} = -v_-$. □

Na zakończenie przypomnijmy sobie ogólny fakt z algebry liniowej: jeśli U_1 i U_2 są dwiema podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni U , to zbiór $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ jest również przestrzenią liniową wymiaru

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Fakty 2 ($\dim(U_W \cap U_+) = \dim(U_W \cap U_-) = 0$) i 3 ($U_+ + U_- = U$) dają teraz:

$$\dim(U_W) = \dim(U_W + U_+) - \dim(U_+) \leq \dim(U) - \dim(U_+),$$

$$\dim(U_W) = \dim(U_W + U_-) - \dim(U_-) \leq \dim(U) - \dim(U_-),$$

$$0 \leq \dim(U_+ \cap U_-) = \dim(U_+) + \dim(U_-) - \dim(U). \quad *$$

Dodanie powyższych trzech nierówności daje $2 \dim(U_W) \leq \dim(U)$, co kończy dowód, gdyż $\dim(U) = N$, $\dim(U_W) = |W|$. □

Twierdzenie o czułości

Wróćmy do pomysłu, by w funkcjach boolowskich przyjmować, że liczbową wartością prawdy jest 1, a fałszu -1 . Jak może to nam pomóc?

Fakt 4. Gdy w wielomianie n zmiennych żadna zmienna nie występuje w potęgze większej niż 1 (nazwijmy taki wielomian **zredukowanym**), to średnia arytmetyczna jego wartości na zbiorze $\{1, -1\}^n$ równa jest wyrazowi wolnemu tego wielomianu.

Przykład. Jak wiadomo, koniunkcja przyjmuje trzy razy wartość -1 (fałsz) i raz wartość 1 (prawda). Średnią wartością jest więc $\frac{-1-1-1+1}{4} = -\frac{1}{2}$, i taki też jest, jak widzimy obok, wyraz wolny definiującego koniunkcję wielomianu.

Dowód. Ponieważ średnia sumy dwóch funkcji jest równa sumie średnich, to wystarczy zauważyć, że średnia wartość każdego iloczynu $x_1 x_2 \dots x_k$ wynosi 0, czyli że ów iloczyn wynosi 1 lub -1 dokładnie tak samo często. Ale to w zasadzie oczywiste: jakiegokolwiek będą wartości pierwszych $k-1$ zmiennych, nasz iloczyn będzie równy 1 lub -1 w zależności od znaku x_k , a średnia zawsze wyniesie 0. □

Teraz możemy już wykazać, jak z udowodnionego wyżej twierdzenia Huanga wynika zapowiadane w pierwszej części poniższe twierdzenie.

Twierdzenie o czułości. Dla każdej funkcji boolowskiej f zachodzi nierówność $s(f) \geq \sqrt{\deg(f)}$.

Dowód. Niech $n = \deg(f)$. Jak mówiliśmy wcześniej, wybór liczbowych wartości stałych logicznych nie wpływa na stopień f , więc możemy przyjąć, że wielomian funkcji f , zapisany w konwencji „prawda = 1, fałsz = -1 ” i zredukowany, nadal ma stopień n , czyli zawiera pewien jednomian $c x_1 x_2 \dots x_n$ ze współczynnikiem $c \neq 0$ (bez zmniejszenia ogólności założmy, że $c > 0$). Niech teraz

$$(\dagger) \quad g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n, 1, \dots, 1).$$

Ponieważ $x_1^2 = x_2^2 = \dots = x_n^2$, to wielomian g ma po redukcji wyraz wolny $c > 0$, więc na mocy faktu 4 ma dodatnią średnią wartość. Znaczący to tyle, że g osiąga na kostce $\{1, -1\}^n$ wartość 1 częściej niż -1 , czyli więcej niż 2^{n-1} razy.

Na mocy twierdzenia Huanga istnieje więc taki punkt $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{1, -1\}^n$, że wartość funkcji g wynosi 1 zarówno w nim, jak i w co najmniej \sqrt{n} z jego sąsiadów na kostce. Ale jeśli w sąsiadujących (czyli różniących się jedną współrzędną) wierzchołkach funkcja g ma tę samą wartość, to funkcja f ma wartości przeciwne, bo wyrażenie $x_1 x_2 \dots x_n$ zawsze zmienia znak przy przejściu do sąsiada. Zatem funkcja f przyjmuje inną wartość w co najmniej \sqrt{n} sąsiadach x niż w samym x . Z definicji oznacza to, że $s(f, x) \geq \sqrt{n}$ i tym bardziej $s(f) \geq \sqrt{n} = \sqrt{\deg(f)}$. □

Jest to najlepszy możliwy wynik, gdyż omawiane w pierwszej części zagadnienie urodzin Emila daje dla każdego m przykład funkcji stopnia m^2 o czułości m .

*Tak naprawdę Huang dowodzi w pracy, że $\dim(U_+) = \dim(U_-) = N/2$ oraz $U_+ \cap U_- = \{0\}$, bo są to ortogonalne przestrzenie własne, odpowiadające wartościom własnym o dającej się wyznaczyć krotności, ale ta droga stawia przed Czytelnikiem znacznie wyższe wymagania wstępne.

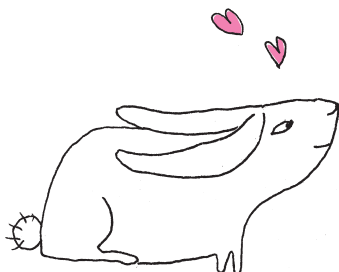
Każdą funkcję boolowską możemy tak zredukować, gdyż dla $x \in \{1, -1\}$ zachodzi $x^{2k} = 1$, $x^{2k+1} = x$.

\wedge	-1	1
-1	-1	-1
1	-1	1

$$(x \wedge y) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}xy$$

Jeszcze inaczej: w k rzutach uczciwą monetą parzystą liczbę orłów uzyskamy tak samo często, jak nieparzystą.

Funkcja f może mieć więcej niż n argumentów, wzór (\dagger) mówi jednak, że ignorujemy zmienne inne niż x_1, x_2, \dots, x_n , nadając im wartość 1.



Z orbity na orbitę

Grzegorz DERFEL*

*Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

Wyobraźmy sobie wahadłowiec krążący wokół Ziemi po kołowej orbicie o promieniu r_1 . Jego prędkość w tym ruchu v_1 można łatwo wyznaczyć, biorąc pod uwagę, że siła grawitacji pełni rolę siły dośrodkowej, zakrzywiającej tor lotu wahadłowca, co można ująć równaniem

$$F_g = \frac{GMm}{r_1^2} = \frac{mv_1^2}{r_1},$$

gdzie G jest stałą grawitacji, M masą Ziemi, a m masą wahadłowca. Wynika z tego, że

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}.$$

Załóżmy, że misja wahadłowca wymaga przejścia na inną kołową orbitę o większym promieniu r_2 . Wzór analogiczny do powyższego przewiduje, że prędkość na tej nowej, większej orbicie będzie mniejsza:

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}.$$

Tymczasem, aby osiągnąć tę orbitę, wahadłowiec musi nie przyhamować, lecz zwiększyć prędkość ponad wartość v_1 , co może wydać się dziwne.

Poniżej opisane są dwa sposoby przeprowadzenia takiej zmiany orbity.

Pierwszy z nich znany jest jako manewr transferowy Hohmanna. Nazwa ta pochodzi od nazwiska Waltera Hohmanna, niemieckiego naukowca, który opisał go w roku 1925. Zmiana orbity składa się z kilku etapów przedstawionych na rysunku 1. W pewnym punkcie A orbity kołowej ciąg silników wahadłowca – zakładamy dla uproszczenia, że działają bardzo krótko – nadaje mu prędkość

$$v_A = kv_1 = k\sqrt{\frac{GM}{r_1}},$$

gdzie $k > 1$. Powoduje to zmianę kształtu orbity z okręgu w elipsę, której ognisko pokrywa się ze środkiem Ziemi. (Zakładamy, że intencją kosmonautów nie jest ucieczka w kosmos po paraboli lub hiperboli, więc $k < \sqrt{2}$.) Prędkość v_A powinna być tak dobrana, aby apogeum elipsy, tj. punkt B , znalazło się na planowanej orbicie kołowej. Zasada zachowania momentu pędu dla ruchu po tej elipsie wyraża się równością

$$mv_A r_1 = mv_B r_2,$$

więc w punkcie B wahadłowiec będzie miał prędkość

$$v_B = \frac{kv_1 r_1}{r_2}$$

mniejszą od v_A . Czynniki k określający wartość v_A , a także prędkość v_B można wyznaczyć z zasady zachowania energii zapisanej dla ruchu po elipsie. Zachowanie energii oznacza równość całkowitych energii w perigeum (punkt A) i apogeum (punkt B)

$$\frac{mv_A^2}{2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{GMm}{r_2}.$$

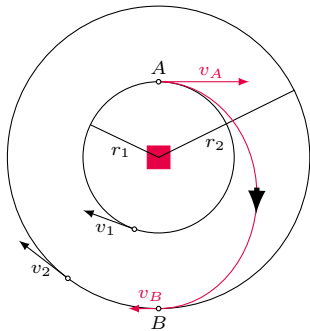
Stąd otrzymujemy

$$k = \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}}$$

oraz

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{r_1} \frac{2r_2}{r_1 + r_2}} \quad \text{i} \quad v_B = \sqrt{\frac{GM}{r_2} \frac{2r_1}{r_1 + r_2}}.$$

Prędkość v_B jest mniejsza od v_2 odpowiadającej orbicie kołowej przechodzącej przez punkt B , dlatego aby przejść z orbity eliptycznej na kołową, wahadłowiec musi drugi raz przyspieszyć. Pierwsze przyspieszenie jest niezbędne, aby zastąpić kołową orbitę elipsą z apogeum w odległości r_2 od środka Ziemi, gdzie energia potencjalna jest większa niż w odległości r_1 i trzeba ją uzyskać kosztem



Rys. 1. Przejście z orbity o promieniu r_1 na orbitę o promieniu $r_2 > r_1$ z zastosowaniem manewru Hohmanna



Rozwiązanie zadania F 1006.

Źródłem siły dośrodkowej utrzymującej szybką rotację powietrza wokół oka cyklonu jest różnica ciśnień w odległości r i $r + \Delta r$ od oka cyklonu. Rozważmy fragment strugi wiatru o szerokości Δr i powierzchni S w kierunku prostopadłym do promienia. Równowaga działających sił prowadzi do równania:

$$\frac{\rho S v^2 dr}{r} = S(p(r + dr) - p(r)) \approx S \frac{dp}{dr} dr.$$

Otrzymujemy:

$$v^2 \approx \frac{r}{\rho} \frac{dp}{dr}.$$

Dla oszacowania wartości pochodnej ciśnienia przyjmijmy, że ciśnienie w centrum wynosi 880 hPa, a na krańcu cyklonu, w odległości 250 km, wynosi 1010 hPa. Według naszego wzoru prędkość wynosi zero w centrum i rośnie z r . Z dala od centrum zmiany ciśnienia maleją i na krańcu cyklonu pochodna ciśnienia wynosi zero. Przyjmijmy, że maksymalna prędkość osiągana jest w odległości 50 km od centrum, i do obliczeń weźmy średnią wartość pochodnej p . Otrzymujemy:

$$v^2 \approx \frac{50\,000 \text{ m} \cdot 130 \cdot 10^2 \text{ Pa}}{2,5 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot 1,2 \text{ kg/m}^3} \approx 2167 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

a więc $v \approx 46,55 \text{ m/s} \approx 168 \text{ km/godz}$. Maksymalny zarejestrowany poryw wiatru cyklonu Wilma osiągnął 295 km/godz., ale przez większość blisko dwutygodniowego „życia” tego cyklonu maksymalna prędkość wiatru wynosiła od 175 do 200 km/godz.

energii kinetycznej zwiększonej przyspieszającym działaniem silników. Drugie przyspieszenie jest konieczne, aby odrobić stratę prędkości powstałą podczas ruchu po elipsie od A do B . Wartości bezwzględne zmian prędkości wynoszą

$$\left| (k-1) \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \right| \text{ w punkcie } A$$

oraz

$$\left| (k-1) \sqrt{\frac{GM}{r_2}} \right| \text{ w punkcie } B.$$

Suma ich modułów bywa używana jako miara wydatku energii niezbędnej do wykonania manewru, uzyskanej kosztem zużycia paliwa przez silniki. Czas przejścia, czyli czas lotu po połowie elipsy, można obliczyć ze wzoru

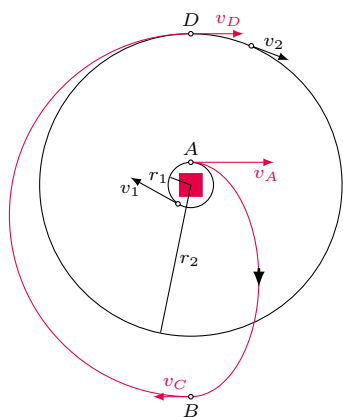
$$t = \pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}},$$

gdzie $a = \frac{r_1+r_2}{2}$ jest długością dużej półosi elipsy. Wzór ten wyraża połowę ujętego III prawem Keplera okresu obiegu po pełnej eliptycznej orbicie.

Analogiczne rozważania dotyczą przejścia z orbity dalszej na bliższą Ziemi. Po przyhamowaniu następuje lot po trajektorii eliptycznej, która zbliża wahadłowiec do Ziemi. Druga redukcja prędkości zapewnia prędkość właściwą dla ruchu po planowanej orbicie kołowej.

Dla przykładu rozważmy przejście z orbity o promieniu $r_1 = 6700$ km na $r_2 = 33500$ km. Następowaloby ono dzięki przyspieszeniom od $v_1 = 7,71$ km/s do $v_A = 9,96$ km/s oraz od $v_B = 1,99$ km/s do $v_2 = 3,45$ km/s. Suma zmian prędkości wynosiłaby $\Delta v = 3,71$ km/s, a cały manewr trwałby 3 godziny i 56 minut.

Manewr Hohmanna przestaje być optymalny przy dużym stosunku promieni orbit $\frac{r_2}{r_1}$. Wtedy lepiej zastosować tzw. transfer dwueliptyczny, służący także do zmiany orbity mniejszej na większą i odwrotnie. Przejście z niskiej orbity o promieniu r_1 na wyższą o promieniu r_2 zilustrowane jest na rysunku 2.



Rys. 2. Przejście z orbity o promieniu r_1 na orbitę o promieniu $r_2 > r_1$ z zastosowaniem transferu dwueliptycznego

Prędkość v_B przyjmuje wartość wynikłą z zachowania momentu pędu $v_B = \frac{kv_1 r_1}{a}$. Zasada zachowania energii zastosowana dla drogi od A do B

$$\frac{mv_A^2}{2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{GMm}{a}$$

pozwała powiązać parametry k i a tak, że $k^2 = \frac{2a}{a+r_2}$. Stąd

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{r_1} \frac{2a}{a+r_1}},$$

$$v_B = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{2r_1}{a+r_1}}.$$

Zachowanie momentu pędu i energii decyduje też o relacji między v_C i v_D takiej, że $v_C = \frac{v_D r_2}{a}$. Otrzymujemy się

$$v_C = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{2r_2}{a+r_2}},$$

$$v_D = \sqrt{\frac{GM}{r_2} \frac{2a}{a+r_2}},$$

przy czym $v_D > v_C$. Suma zmian prędkości wywoływanych pracą silników wynosi

$$\Delta v = |v_1 - v_A| + |v_B - v_C| + |v_D - v_2|,$$

a cały manewr trwa

$$t = \pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} + \pi \sqrt{\frac{a_1^3}{GM}},$$

czyli tyle, ile lot po połówkach obu elips, gdzie $a_1 = \frac{a+r_2-r_1}{2}$.

Tak jak w manewrze Hohmanna, krótki impuls ciągu w punkcie A pierwotnej orbity zwiększa prędkość od v_1 do $v_A = kv_1$ (gdzie $k > 1$), dzięki czemu wahadłowiec wchodzi na orbitę eliptyczną. Jej kształt określony jest odległością a od ogniska (środek Ziemi) do apogeum (punkt B). Wielkość a , która musi być większa od r_2 , powinna być wybrana z uwzględnieniem faktu, że decyduje o energii zużytej na wykonanie transferu i o czasie jego trwania. Podczas lotu po połowie elipsy od A do B prędkość w punkcie B spada do wartości v_B . W tym punkcie następuje kolejne impulsowe przyspieszenie do prędkości v_C , dobranej tak, aby wahadłowiec kontynuował lot po innej eliptycznej orbicie z apogeum w punkcie B i perigeum w punkcie D leżącym już na orbicie końcowej. Dążąc po tej elipsie do perigeum, wahadłowiec przyspiesza i do punktu D dociera z prędkością v_D . Jest ona większa niż v_2 , a więc do przejścia na orbitę kołową o promieniu r_2 niezbędne jest hamowanie od v_D do v_2 . Wzory wyrażające zasady zachowania pozwalają obliczyć poszczególne prędkości.

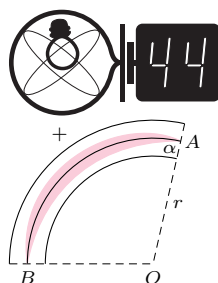
Jeśli zmiana orbity z $r_1 = 6700$ km na $r_2 = 33500$ km odbyłaby się drogą transferu dwueliptycznego z parametrem równym np. 50000 km, to charakterystyczne prędkości wynosiłyby $v_A = 10,24$ km/s $v_B = 1,37$ km/s, $v_C = 2,53$ km/s i $v_D = 3,77$ km/s. Sumaryczna zmiana prędkości Δv przyjęłaby wartość 4,01 km/s, co oznacza większe zużycie paliwa niż podczas transferu Hohmanna. Zmiana orbity zajęłaby także dużo więcej czasu, bo aż 44 godziny i 52 minuty. Ten przykład ilustruje główną wadę transferu dwueliptycznego, jaką jest długi czas jego realizacji. Manewr dwueliptyczny przeprowadzony z dowolnym $a > r_2$ jest oszczędniejszy od manewru Hohmanna, jeśli $\frac{r_2}{r_1} > 15,58$. Taką samą przewagę ma on, gdy $11,94 < \frac{r_2}{r_1} < 15,58$, pod warunkiem, że przeprowadza się go z dostatecznie dużą wartością a . Natomiast gdy $\frac{r_2}{r_1} < 11,94$, to żaden wariant transferu dwueliptycznego nie jest korzystniejszy od manewru Hohmanna. Różnice w zużyciu paliwa pomiędzy tymi dwiema procedurami są jednak niewielkie. Maksymalna oszczędność, jaką można uzyskać, zastępując manewr Hohmanna dwueliptycznym, wynosi 8%.

Klub 44 F

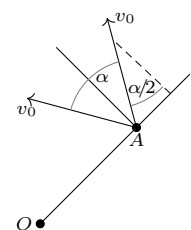
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2020

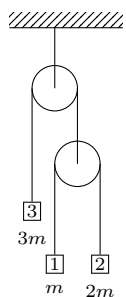
Przypominamy treść zadań:



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

696. Z punktu A kondensatora cylindrycznego wylatuje lekko rozchodząca się wiązka jonów dodatnich. Kąt rozwarcia wiązki wynosi α (rys. 1, 2). Wszystkie jony w wiązce mają taką samą energię. Jony, których prędkość w punkcie A jest prostopadła do odcinka OA , poruszają się po okręgu o promieniu $r_0 = |OA|$, współśrodkowym z okładkami kondensatora. Wykazać, że wiązka jonów ponownie zogniskuje się w pewnym punkcie B , i znaleźć kąt AOB . Wyznaczyć maksymalną szerokość wiązki.

697. W układzie przedstawionym na rysunku 3 oba bloczki nie obracają się, a nitki mogą ślizgać się po nich bez tarcia. Bloczek ruchomy jest nieważki, masy ciężarków są dane. Znaleźć przyspieszenie ciężarka o masie $3m$.

696. Linie pola elektrycznego w kondensatorze cylindrycznym skierowane są wzdłuż promieni okładek i w rozważanym przypadku mają zwrot do punktu O . Z prawa Gaussa wartość natężenia pola $E = b/r$, gdzie r jest odległością od punktu O , b stałą proporcjonalności. Przyspieszenie dośrodkowe jonu poruszającego się po orbicie o promieniu r_0 wywołane jest siłą $F = qb/r_0 = m\omega_0^2 r_0$, stąd prędkość kątowna jonu $\omega_0 = \sqrt{qb/(mr_0^2)}$.

Na jon odległy o $r_0 + x$ od środka okręgu O działa w układzie wirującym wokół osi kondensatora siła

$$F_x = -\frac{qb}{r_0 + x} + m\omega^2 (r_0 + x),$$

gdzie ω jest prędkością kątowną jonu i możemy ją otrzymać z zasady zachowania momentu pędu:

$$m\omega_0 r_0^2 = m\omega (r_0 + x)^2, \quad \omega = \omega_0 r_0^2 / (r_0 + x)^2.$$

Stąd

$$F_x = -\frac{bq(2r_0x + x^2)}{(r_0 + x)^3}.$$

Dla $x \ll r_0$

$$F_x = -\frac{2bq}{r_0^2}x = -kx.$$

Jony, których prędkość w punkcie A tworzy mały kąt z prędkością jonów na podstawowej orbicie, wykonują radialne drgania harmoniczne o okresie

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{mr_0^2/(2bq)},$$

który jest jednakowy dla wszystkich jonów. Po czasie $T/2$ wszystkie jony, które wystartowały w punkcie A , spotkają się w jednym punkcie B orbity podstawowej. Szukany kąt AOB ma wartość $\varphi = \omega_0 T/2 = \pi/\sqrt{2}$.

Związek między amplitudą drgań w ruchu harmonicznym i maksymalną prędkością ma postać: $x_{\max} = v_{\max}T/(2\pi)$. W naszym przypadku

$$v_{\max} = \omega_0 r_0 \sin \alpha/2 \approx \omega_0 r_0 \alpha/2.$$

Maksymalna szerokość wiązki jonów

$$d = 2x_{\max} = r_0 \alpha / \sqrt{2}.$$

697. Ciężarki 1 i 2, o łącznej masie $3m$, ślizgają się po ruchomym bloczku, zatem naprężenie N nici, na której zawieszony jest ten bloczek, jest mniejsze od $3mg$. Ciężarek 3 porusza się w dół, a jego równanie ruchu ma postać $3ma = 3mg - N$, gdzie a jest szukany przyspieszeniem.

Ponieważ bloczek ruchomy jest nieważki, naprężenie N_1 nici, na której zawieszony są ciężarki 1 i 2, równe jest połowie naprężenia górnej nici: $N_1 = N/2$.

Oznaczmy przez a_1 przyspieszenia ciężarków 1 i 2 w układzie nieinercyjnym związanym z ruchomym bloczkiem. Równanie ruchu układu obu ciężarków ma postać

$$3ma_1 = m(g + a),$$

równanie ruchu ciężarka pierwszego

$$ma_1 = N/2 - mg - ma.$$

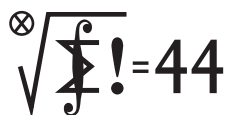
Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy wynik:

$$a = g/17.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 686 ($WT = 3,23$) i 687 ($WT = 2,4$) z numeru 11/2019

Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Michał Koźlik	Gliwice	39,70
Paweł Perkowski	Ożarów	36,18
Krzysztof Magiera	Łosiów	32,62
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Aleksander Surma	Myszków	27,75
Mateusz Kapusta	Wrocław	25,37
Sławomir Buć	Myszków	22,22

Klub 44 M



Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2020

Przypominamy treść zadań:

799. Czy da się tak uporządkować zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych, by otrzymać ciąg różnowartościowy, w którym każde dwa sąsiednie wyrazy albo różnią się o 2, albo jeden z nich jest dwukrotnością pozostałego?

800. Dla ustalonych liczb dodatnich a, b określamy funkcję $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\exp\left(-\frac{a}{x} + 1\right) + \exp\left(-\frac{b}{x} + 1\right) \right).$$

- Uzasadnić, że istnieje dokładnie jedna liczba $L = L(a, b) > 0$, dla której $f(L) = 1$, i że $\min\{a, b\} \leq L(a, b) \leq \max\{a, b\}$; zatem liczba $L(a, b)$ może być uważana za pewną średnią liczb a, b .
- Znaleźć, gdzie ta średnia wpisuje się w ciąg nierówności $H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$ między średnimi: harmoniczną, geometryczną i arytmetyczną liczb a, b ?

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 793 ($WT = 1,62$) i 794 ($WT = 2,50$) z numeru 1/2020

Janusz Fielt	Warszawa	43,82
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Łukasz Merta	Kraków	40,14
Zbigniew Skalik	Wrocław	40,04
Błażej Żmija	Kraków	39,73
Michał Adamaszek	Kopenhaga	39,02
Paweł Burdzy	Warszawa	38,82
Jakub Węgrecki	Kraków	37,06
Marek Spychała	Warszawa	36,69
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,30

Widać, że w bliskim czasie czeka nas ogromny wysyp czterdziestoczwojek.

799. Jest to możliwe. Przedstawimy jedną z możliwych konstrukcji.

Niech a będzie dowolną dodatnią liczbą nieparzystą. Spójrzmy na ciąg

$$a \rightarrow 2a \implies a + 1 \rightarrow 2a + 2 \rightarrow 2a + 4 \rightarrow a + 2 \implies 2a + 5,$$

w którym pojedyncza strzałka oznacza jedną z dopuszczalnych operacji $(x + 2, x - 2, x \cdot 2, x/2)$, zaś podwójna strzałka (\implies) oznacza wielokrotne dodanie lub odjęcie dwójki, przebiegające monotonicznie przez wszystkie liczby tej samej parzystości, co liczby połączone tą podwójną strzałką. Na przykład dla $a = 7$ mamy ciąg

$$7 \rightarrow \underbrace{14 \rightarrow 12 \rightarrow 10 \rightarrow 8}_{\implies} \rightarrow 16 \rightarrow 18 \rightarrow \underbrace{9 \rightarrow 11 \rightarrow 13 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 19}_{\implies}$$

(jedynie dla $a = 1$ strzałka $2a \implies a + 1$, czyli $2 \implies 2$ jest „pusta”). W tak określonym ciągu występują wszystkie liczby naturalne z przedziału $[a, 2a + 5]$, każda jednorazowo.

Wystarczy teraz określić liczby a_1, a_2, a_3, \dots wzorem rekurencyjnym $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 5$ i zastosować podaną konstrukcję w każdym z przedziałów $[a_n, a_{n+1}]$.

800. Funkcja f jest ciągła i rosnąca, a jej granice przy końcach dziedziny $(0, \infty)$ wynoszą 0 oraz e . Zatem liczba $L = L(a, b)$, dla której $f(L) = 1$, jest jednoznacznie określona. Wykażemy, że $H \leq L \leq G$ (gdzie $H = \frac{2ab}{a+b}$, $G = \sqrt{ab}$); stąd też wyniknie, że L leży pomiędzy a i b . Wobec ściślej monotoniczności funkcji f wystarczy dowieść, że $f(H) \leq 1 \leq f(G)$.

Niech $g(x) = e^{-1/x}$ dla $x > 0$; jest to funkcja rosnąca. Skoro $H = \frac{2ab}{a+b}$, zatem

(1) $f(H) = \frac{e}{2} (g(u) + g(v))$, gdzie $u = \frac{2a}{a+b}, v = \frac{2b}{a+b}$; $u + v = 2$. Badając znak $g''(x)$, stwierdzamy, że funkcja g jest wklęsła w przedziale $[\frac{1}{2}, \infty)$. Jeżeli więc liczby u, v leżą w tym przedziale, to $g(u) + g(v) \leq 2g(\frac{u+v}{2}) = 2/e$. Jeśli zaś np. $u < \frac{1}{2}$, rozważamy dwa podprzypadki (pamiętając, że $v = 2 - u$):

gdy $\frac{1}{3} \leq u < \frac{1}{2}$: $g(u) + g(v) < g(\frac{1}{2}) + g(\frac{5}{3}) = e^{-2} + e^{-3/5}$;

gdy $0 < u < \frac{1}{3}$: $g(u) + g(v) < g(\frac{1}{3}) + g(2) = e^{-3} + e^{-1/2}$;

w wszystkich przypadkach uzyskane wartości nie przekraczają $2/e$. Otrzymane oszacowanie $g(u) + g(v) \leq 2/e$ pokazuje (zgodnie ze wzorem (1)), że $f(H) \leq 1$.

Pozostało do wykazania, że $f(G) \geq 1$; do tego użyjemy funkcji $h(x) = e^{-x} + e^{-1/x}$, bowiem

$$(2) \quad f(G) = f(\sqrt{ab}) = \frac{e}{2} \cdot h\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

Nietrudno się przekonać, że dla $x > 1$ zachodzi nierówność $h'(x) > 0$, czyli $e^{-1/x} > x^2 e^{-x}$, równoważna (przez logarytmowanie) nierówności $-1/x > 2 \ln x - x$; tę ostatnią nierówność sprawdzamy bez trudu, przenosząc wszystko na jedną stronę i ponownie różniczkując. Zatem istotnie $h'(x) > 0$ dla $x > 1$; stąd $h(x) \geq h(1) = 2/e$ dla $x \geq 1$. Ponieważ bez straty ogólności można przyjąć, że $a \geq b$, ze wzoru (2) wnosimy, że $f(G) \geq 1$. To kończy rozwiązanie.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: Betelgeza coś niewyraźnie wygląda

Szacowna staruszka Betelgeza – jedna z najjaśniejszych gwiazd nocnego nieba – to czerwony nadolbrzym o masie około 15–20 mas Słońca. Liczy sobie 8–8,5 miliona lat. Niecałe 40 tysięcy lat temu w jej jądrze skończył się wodór, więc przetrzuciła się na spalanie helu – w wyniku czego nieco ostygła i trochę się rozdeła. Aktualnie jest już na etapie końcowym swojej ewolucji i w niedalekiej przyszłości wybuchnie jako supernowa. „Niedaleka przyszłość” to w astronomii jednak pojęcie względne – wybuch może nastąpić już w tym roku albo za... dziesiątki tysięcy lat. Dlatego obserwowany na przełomie roku spadek jasności gwiazdy wywołał spore poruszenie wśród astronomów. Czyżby to miało nastąpić już wkrótce?

Jasność gwiazd jest często mierzona w określonych pasmach długości fal. Pomiary jasności Betelgezy wykonano m.in. w filtrze V , definiowanym na długości fali ~ 550 nm, co ściśle odpowiada długościom fali widzianej przez ludzkie oko.

Typowa jasność Betelgezy na tej długości fali to $V \sim 0,2$ – $0,3$ magnitudo. Na początku grudnia 2019 roku zarejestrowano gwałtowny spadek jej jasności – do $V = 1,12$ magnitudo. Już wtedy był to absolutny rekord. Spadek jasności jednak się nie zatrzymał. Betelgeza wciąż słabła, osiągając pod koniec stycznia zaledwie $V = 1,61$ magnitudo.

Początkowo w środowisku naukowym wiele osób zinterpretowało nagle pociemnienie Betelgezy jako wczesne oznaki wybuchu supernowej. Byłoby to niesamowite zjawisko, widoczne na niebie gołym okiem przez wiele dni. Niestety, z żalem muszę oznajmić, że jest to najmniej prawdopodobny scenariusz. Pod koniec lutego jasność Betelgezy zaczęła wracać do normy.

Co więc spowodowało gwałtowny spadek jasności? Astronomowie rozważają wiele możliwości, ale głównymi podejrzanymi są: chwilowe ochłodzenie powierzchni gwiazdy i/lub przesłonięcie jej przez chmurę pyłu.

Na podstawie obserwacji spektroskopowych gwiazdy, czyli bardzo dokładnych pomiarów linii emisyjnych i absorpcyjnych, astronomowie stwierdzili, że temperatura powierzchni Betelgezy nie zmieniła się proporcjonalnie do jej pociemnienia. Oznacza to, że spadek jasności prawdopodobnie nie był spowodowany przez efekty zachodzące wewnątrz gwiazdy. Jeżeli za spadek jasności Betelgezy byłyby odpowiedzialne np. nagle ruchy konwekcyjne na jej powierzchni, to ochłodzenie jej powierzchni musiałyby być większe niż zaobserwowano.

Drugi podejrzanym to gigantyczna chmura pyłu znajdująca się pomiędzy nami a gwiazdą wzdłuż linii widzenia. Mogła ona przysłonić światło gwiazdy, powodując jej pociemnienie. Skąd ta chmura się tam wzięła? Wygląda na to, że mógł to być materiał pochodzący z samej Betelgezy – tzw. pył okołogwiazdowy, powstały w wyniku utraty masy przez gwiazdę.

Tak naprawdę jednak nie jesteśmy pewni i potrzebne są dalsze obserwacje, aby ustalić, dlaczego Betelgeza nagle zaczęła wyglądać niewyraźnie...

Anna DURKALEC

Skala jasności absolutnej wyrażana w magnitudach działa odwrotnie, niż podpowiadałaby intuicja. Obiekty o ujemnej jasności absolutnej są jaśniejsze niż te o dodatniej jasności absolutnej – ogólnie rzecz ujmując, im mniejsza jasność absolutna, tym jaśniejsza gwiazda. Dlatego gwiazda o jasności absolutnej 0,2 magnitudo jest jaśniejsza niż ta o jasności absolutnej 1,61.



Niebo w sierpniu

Sierpień jest miesiącem, w którym szybko ubywa dnia. W jego trakcie wysokość górowania Słońca zmniejsza się o ponad 10° , a czas jego przebywania nad widnokresem o prawie dwie godziny. Słońce zaczyna sierpień w środku gwiazdozbioru Raka. 10 sierpnia nasza Gwiazda Dzienna przechodzi do gwiazdozbioru Lwa, a 12 dni później w odległości około $0,5^\circ$ mija Regulusa, najjaśniejszą gwiazdę konstelacji.

W tym miesiącu kończy się w Polsce sezon na obserwacje łuku okołohoryzontalnego i obłoków srebrzystych. Aby

mieć szansę na ujrzenie pierwszego z wymienionych zjawisk, trzeba się udać na południe od naszych granic, natomiast drugiego – na północ.

Sierpień zacznie się spotkaniem Księżyca z parą dwóch największych planet Układu Słonecznego. Srebrny Glob przejdzie przez pełnię 3 sierpnia, niestety tym razem bez zaćmienia. Pierwszego dnia miesiąca oświetlona w 96% tarcza Księżyca wejdzie w odległości $3,5^\circ$ od planety **Jowisz**, a niecałe 8° dalej na wschód pokaże się planeta **Saturn**. Do godziny 2:30, tuż przed zachodem wszystkich

trzech ciał Układu Słonecznego, naturalny satelita Ziemi zbliży się do Jowisza na $2,5^\circ$. Kolejnego wieczora Księżyc prawie w pełni wszędzie już ponad 4° na południowy wschód od Saturna.

Obie planety w drugiej połowie lipca przeszły przez opozycję względem Słońca i w sierpniu nadal są dobrze widoczne. Jednak ze względu na to, że przebywają w Strzelcu, ich warunki obserwacyjne szybko ulegną pogorszeniu. W sierpniu przesuną się wyraźnie na południowy zachód i zaczną zachodzić przed godziną 2. Z każdym kolejnym tygodniem zauważalnie zmniejszy się czas, przez który można je obserwować. Obecnie zarówno Jowisz, jak i Saturn poruszają się ruchem wstecznym i przez cały miesiąc utrzymują między sobą dystans około 8° . Do końca miesiąca jasność Jowisza spadnie do $-2,5^m$, a średnica jego tarczy zmniejszy się do $44''$. W tym samym czasie jasność Saturna zmniejszy się do $+0,3^m$, ale średnica jego tarczy utrzyma wartość $18''$.

Księżyc powędruje dalej, wspinając się coraz wyżej i jednocześnie zmniejszając fazę. W dniach 6–7 sierpnia tarcza Srebrnego Globu przetnie gwiazdozbiór Wodnika, przechodząc około 7° na południe od planety **Neptun**, szycującej się do wrześnieowej opozycji. Z tego względu Neptun porusza się już ruchem wstecznym i do końca miesiąca zbliży się do gwiazdy φ Aquarii na $2,5^\circ$. Obecny sezon obserwacyjny ostatnia z planet spędzi na północny wschód od niej. W sierpniu jasność Neptuna wynosi $+7,8^m$, a zatem podczas spotkania z Księżycem zginie w jego blasku. Trzeba zapamiętać jego położenie na niebie i wrócić tam, gdy Księżyc zmniejszy blask i odsunie się od planety.

W sierpniu przez opozycję przechodzi planeta karłowata (1) **Ceres**, która po przeciwnej stronie Ziemi niż Słońce znajdzie się 28 sierpnia, a przez cały miesiąc zakreśli fragment łuku od 9 do 6° na północ od gwiazdy Fomalhaut, najjaśniejszej gwiazdy Ryby Południowej. W tym czasie Ceres pojaśnieje do $+7,7^m$, czyli porównywalnie do Neptuna, a zatem do jej obserwacji potrzebna jest bezksiężycowa noc i przynajmniej lornetka. Ceres znajduje się bliżej Słońca i Ziemi od Neptuna, stąd wędruje po niebie znacznie szybciej od niego i przez cały miesiąc przemierzy po niebie około 6° . Po drodze 6 sierpnia zbliży się na $5'$ do świecącej z jasnością $+3,6^m$ gwiazdy 88 Aquarii, natomiast 18 sierpnia przejdzie $6'$ od gwiazdy 6. wielkości HIP 113673.

9 sierpnia Księżyc zmniejszy fazę do 74% i dotrze na $3,5^\circ$ do **Marsa**. Czerwona Planeta w sierpniu pokona odcinek 9° w południowo-wschodniej części gwiazdozbioru Ryb, szycując się do październikowej opozycji. Jednak wciąż porusza się ruchem prostym. W tym miesiącu Mars znacznie zbliży się do Ziemi i wyraźnie zwiększy jasność, z $-1,1$ do $-1,8^m$. Jednocześnie średnica jego tarczy urośnie od 15 do $19''$, a faza z 86 do 92%. Pod koniec nocy astronomicznej Mars wznosić się będzie na wysokości przekraczającej 35° , a zatem ponad 20° wyżej niż podczas poprzedniej opozycji w 2018 roku.

Przez gwiazdozbiór Barana wędruje planeta **Uran**, do której w sierpniu Mars zbliży się do 13° . W połowie miesiąca, 15 sierpnia, Uran zmieni kierunek ruchu

z prostego na wsteczny, rozpoczynając tym samym okres najlepszej widoczności w tym sezonie obserwacyjnym. Planeta w tym sezonie kreśli swoją pętlę niewiele ponad $0,5^\circ$ od gwiazdy 6. wielkości 29 Ari, która bardzo dobrze nadaje się na gwiazdę do porównania dla Urana. Planeta jest o $0,3^m$ jaśniejsza. Księżyc spotka się z Uranem 11 sierpnia, przechodząc wtedy 4° od niego i prezentując tarczę w fazie 56%.

W kolejnych dniach Srebrny Glob podąży ku nowiu 19 sierpnia. O tej porze roku ekliptyka rano tworzy duży kąt z widnokresem, a zatem Księżyc da się obserwować prawie do samego nowiu. Po drodze odwiedzi on gwiazdozbiory Byka, Bliźniąt i Raka. Oprócz Księżycza na porannym nieboskłonie króluje planeta **Wenus**, która 13 sierpnia osiągnie maksymalną elongację zachodnią, oddalając się na prawie 46° od Słońca. Planeta w sierpniu przemierzy 30° , zaczynając miesiąc niecałe 2° na południe od gwiazdy ζ Tauri, czyli południowego rogu Byka. Potem Wenus przetnie północny kraniec Oriona i przejdzie do Bliźniąt, mijając 23 sierpnia Meksutę, czyli ζ Gem, w odległości $0,5^\circ$, a 4 dni później gwiazdę Wasat, czyli δ Gem, w odległości 2° . W tym czasie jasność planety spadnie z $-4,4$ do $-4,2^m$.

Księżyc tuż po ostatniej kwadrze, 12 sierpnia, przejdzie 9° na południe od Plejad. Dobę później faza Księżycza zmniejszy się do 36% i przetnie linię łączącą Hiady z Plejadami, zbliżając się na niecałe 5° do Aldebarana i jednocześnie na 2° do ϵ Tauri, czyli najbardziej na północ położonej gwiazdy Hiad. Dwa dni później, 14 sierpnia, faza Księżycza spadnie do 27%, a jego tarcza dotrze na 8° do gwiazdy El Nath, czyli północnego rogu Byka. Jeszcze kolejnego ranka Srebrny Glob w fazie 18% dotrze na 6° do Wenus, a między nim a planetą znajdą się jeszcze gwiazdy η i μ Gem. 16 sierpnia sierp Księżycza zwięzi się do 11% i zajmie pozycję prawie w połowie drogi między parą gwiazd Kastor i Polluks z Bliźniąt a planetą Wenus. Cały układ na godzinę przed wschodem Słońca wzniesie się na około 20° . Następnego ranka sierp Księżycza pokaże fazę 5% i znajdzie się 7° pod Polluksem. Natomiast 18 sierpnia, dobę przed nowiem, być może uda się dostrzec bardzo cienki sierp Księżycza, w fazie 1° , ale na wysokości zaledwie 3° nad widnokresem.

Po nowiu Srebrny Glob przejdzie na niebo wieczorne, a tam ekliptyka jest nachylona niekorzystnie i ciekawe spotkanie czeka Księżyc dopiero 26 sierpnia, gdy po I kwadrze pokaże się 8° na północny wschód od Antaresa, a dwa dni później, już w fazie zwiększonej do 81%, dotrze na $1,5^\circ$ do Nunki i jednocześnie 4° do Jowisza. 29 sierpnia Księżyc minie Saturna w odległości 3° .

Jak co roku w okolicach 13 sierpnia maksimum aktywności mają **meteory z roju Perseidów**. W tym roku ich obserwacje zakłóci Księżyc po ostatniej kwadrze, świecący na tle gwiazdozbioru Byka, jakieś 40° pod radiantem roju. Gdyby nie to, można by liczyć na ponad 100 zjawisk na godzinę. Jednak po wschodzie Księżycza liczba widocznych meteorów znacznie się zmniejszy.

Ariel MAJCHER

Prawdy równoległe

Czterdzieści osiem anten radiowych spogląda na powierzchnię Antarktydy z gondoli balonu stratosferycznego lecącego na wysokości 37 kilometrów nad powierzchnią Ziemi. Mogą one wychwycić fale radiowe wytworzone podczas oddziaływań wysokoenergetycznych neutrin z antarktycznym lodem. Uważa się, że takie neutrina o energiach eksaelektronowoltów (10^{18} eV) mogą być rezultatem oddziaływania cząstek promieniowania kosmicznego o bardzo wysokich energiach z fotonami mikrofalowego promieniowania tła. W ten właśnie sposób zespół eksperymentu ANITA (*Antarctic Impulsive Transient Antenna*) stara się lepiej zrozumieć własności promieniowania kosmicznego i wyjaśnić pochodzenie jego najbardziej energetycznej części. Jak dotąd miały miejsce cztery kampanie pomiarowe. ANITA-I wystartowała z McMurdo na Antarktydzie latem 2006/2007. ANITA-II, zmodyfikowany instrument z 40 antenami, została wypuszczona latem 2008/2009, ANITA-III w grudniu 2014 roku, a ANITA-IV dwa lata później. W trakcie swojej misji każdy instrument podróżuje po kontynencie z wiatrem okołobiegunowym przez mniej więcej miesiąc.



W danych pomiarowych z pierwszej i trzeciej kampanii znaleziono ślady bardzo dziwnego zjawiska. Sygnał radiowy wskazywał na cząstki, które poruszały się z dołu do góry. Wyglądało to tak, jakby cząstki te zostały wyprodukowane we wnętrzu Ziemi i „wychodziły” na jej powierzchnię. Trudno podejrzewać neutrina o wytworzenie takiego sygnału. Wprawdzie cząstki te są znane ze swoich bardzo słabych oddziaływań i olbrzymiej przenikliwości, ale prawdopodobieństwo oddziaływań neutrin rośnie z kwadratem ich energii. Prawdopodobieństwo przejścia neutrina o energii odpowiadającej danym z ANITA – na wskroś przez naszą planetę – jest znikomo małe. Z tego względu badacze ANITA postawili hipotezę, że mamy, być może, do czynienia z nowymi, nieznanymi wcześniej cząstkami [1].

Przykładem takiej cząstki mogłaby być cząstka ciemnej materii zaproponowana przez Lathama Boyle’a, Kierana Finna i Neila Turoka z Instytutu Perimeter (Perimeter Institute for Theoretical Physics, Waterloo, Ontario, Kanada). Szczegółowe rachunki sprawdzające taką możliwość zostały przeprowadzone jeszcze w 2018 roku przez Luisa A. Anchordoquiego i współpracowników [2]. Sam Neil Turok skomentował ten wynik w maju bieżącego roku dla czasopisma popularnonaukowego *New Scientist*, mówiąc, że zgodnie z jego teorią zaobserwowane tajemnicze cząstki były pielgrzymami z zupełnie nowego wszechświata. Ten nowy wszechświat miałby się uformować podczas Wielkiego Wybuchu w tym samym miejscu co nasz, ale poruszać się w czasie w przeciwnym kierunku, kurcząc się, a nie rozszerzając, i składać się głównie z antymaterii, a nie materii. Informacja o odkryciu nowego, równoległego wszechświata rozeszła się błyskawicznie w różnych mediach, włącznie z tabloidami, a oryginalna notatka prasowa Uniwersytetu Hawajskiego donosząca o zarejestrowaniu dziwnych sygnałów nagle zyskała na popularności wśród internautów (ponad 8 tysięcy odsłon w dniach 19–21 maja, w porównaniu z nieco ponad 800 odsłonami od początku roku do 18 maja).

Widząc, że informacja o odkryciach, w których brali udział naukowcy z Uniwersytetu Hawajskiego, rozpoczęła „równoległe” internetowe życie, uczelnia ta wydała oświadczenie, które w samym swoim tytule stwierdza, że *media błędnie łączą wyniki badań prowadzonych na Uniwersytecie Hawajskim z teorią wszechświata równoległego*, a kierujący zespołem ANITA Peter Gorham publicznie ubolewał, że przyklejono mu łatkę badacza wszechświatów równoległych.

Formułując płytka złośliwość, można by powiedzieć, że sezon ogórkowy rozpoczął się w tym roku nieco wcześniej niż zwykle. Opowiedziana tu historia pokazuje

jednak, do jakiego stopnia nasz dostęp do informacji – a zatem i nasz sposób postrzegania świata – zależy wciąż w praktyce od mediów, tych tradycyjnych i tych nowych. W porównaniu z wieloma ważnymi procesami społecznymi i gospodarczymi kwestia właściwej interpretacji lecących „do góry nogami” cząstek zarejestrowanych przez ANITA jest przecież rozkosznie niewinna.

Krzysztof TURZYŃSKI

- [1] P. W. Gorham *et al.*, „Observation of an Unusual Upward-Going Cosmic-Ray-like Event in the Third Flight of ANITA”, *Phys. Rev. Lett.* 121 (2018) 161102.
 [2] L. A. Anchordoqui *et al.*, „Upgoing ANITA events as evidence of the CPT symmetric universe”, *LHEP* 1 (2018) 1, 13–16.



Nic nie może przecież wiecznie trwać

Bartłomiej BZDEGA

W ósmym kąciku pisałem o niezmiennikach, czyli o tych własnościach obiektów, które zostają zachowane po poddaniu ich wybranym przekształceniom. Teraz pora na *pólniezmienniki*, które są bliskimi krewniakami niezmienników – ale w odróżnieniu od nich mogą (a czasem nawet muszą) się zmieniać, jednak zmiana ta jest w jakiś sposób kontrolowana.

Zajmiemy się tu takimi pólniezmiennikami, które robią coś zupełnie innego niż niezmienniki – są narzędziami w dowodzeniu, że z danego obiektu, przy użyciu wybranych przekształceń, jest możliwe – lub wręcz nieuniknione – osiągnięcie obiektu o pożądanej własności.

Następujący przykład powinien to rozjaśnić. *Na płaszczyźnie narysowano n odcinków, których końce są różne i żadne trzy końce nie leżą na jednej prostej. Ruch polega na wybraniu dwóch przecinających się odcinków – powiedzmy AB i CD – i zastąpieniu ich odcinkami AC i BD . Wykazać, że nieuniknione jest osiągnięcie stanu, w którym żadne dwa z tych odcinków się nie przecinają.*

Z każdym ruchem maleje suma długości narysowanych odcinków (to jest poszukiwany pólniezmiennik), która może przyjąć jedynie skończenie wiele różnych wartości. Z tego wynika, że w pewnym momencie nie będzie już można wykonać ruchu – a to świadczy o tym, że żadne odcinki się nie przecinają.

W zadaniach 1, 2, 5 i 6 stosujemy podobne rozumowanie, by wykazać nieuniknioną końca niezależnie od tego, które z dostępnych przekształceń w danym momencie wybrano. W pozostałych zadaniach musimy sterować przekształceniami w odpowiedni sposób.

Zadania

1. Na okręgu znajduje się $n \geq 2$ punktów czarnych i n białych. Rysujemy n cięciw, z których każda ma jeden koniec biały a drugi czarny. Udowodnić, że można zrobić to tak, by każde dwie narysowane cięciwy przecinały się.
2. Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n . Każda płytka jest z jednej strony czerwona, a z drugiej niebieska. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: wybieramy płytke P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P . Następnie odwracamy płytke P na drugą stronę. Czy ta zabawa może trwać bez końca?
3. W każdym polu tabeli $m \times n$ wpisano pewną liczbę rzeczywistą. W danej chwili możemy wybrać jedną kolumnę lub wiersz tej tabeli i zmienić znaki występujących w nim liczb na przeciwnie. Wykazać, że stosując takie operacje, można doprowadzić do tego, by suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie była nieujemna.
4. Dana jest pewna skończona rodzina zbiorów skończonych, niekoniecznie rozłącznych. Każdy element każdego ze zbiorów tej rodziny jest czerwony lub niebieski. Ruch polega na wybraniu jednego ze zbiorów i zamianie koloru – czerwonego na niebieski, a niebieskiego na czerwony – wszystkich jego elementów. Udowodnić, że w skończonej liczbie ruchów można doprowadzić do tego, by każdy zbiór w tej rodzinie miał co najmniej tyle elementów niebieskich co czerwonych.
5. W szeregu stoi n żołnierzy. Na komendę *Na lewo patrz!* część z nich odwraca się w lewo, a część w prawo. Następnie co sekundę wszyscy żołnierze, którzy stoją obok siebie i są zwróceny do siebie twarzami, obracają się o 180° . Wykazać, że po pewnym czasie żołnierze przestaną się obracać.
6. Mamy dany wielokąt wklęsły. Ruch polega na wyborze przekątnej AB leżącej na zewnątrz tego wielokąta, przy czym cały wielokąt poza punktami A i B musi leżeć po jednej stronie prostej AB . Następnie jedną z łamanych, na które punkty A i B dzieli brzeg wielokąta, odbijamy środkowosymetrycznie względem środka odcinka AB , otrzymując nowy wielokąt. Dowieść, że po pewnej, skończonej liczbie takich operacji, otrzymamy wielokąt wypukły.
7. Na tablicy napisano trzy nieujemne liczby całkowite. Wybieramy z tej trójki dwie liczby k, m i zastępujemy je liczbami $k + m$ i $|k - m|$, a trzecia liczba pozostaje bez zmiany. Z otrzymaną trójką postępujemy tak samo. Rozstrzygnąć, czy z każdej początkowej trójki liczb całkowitych nieujemnych można w ten sposób otrzymać trójkę, w której co najmniej dwie liczby są zerami.

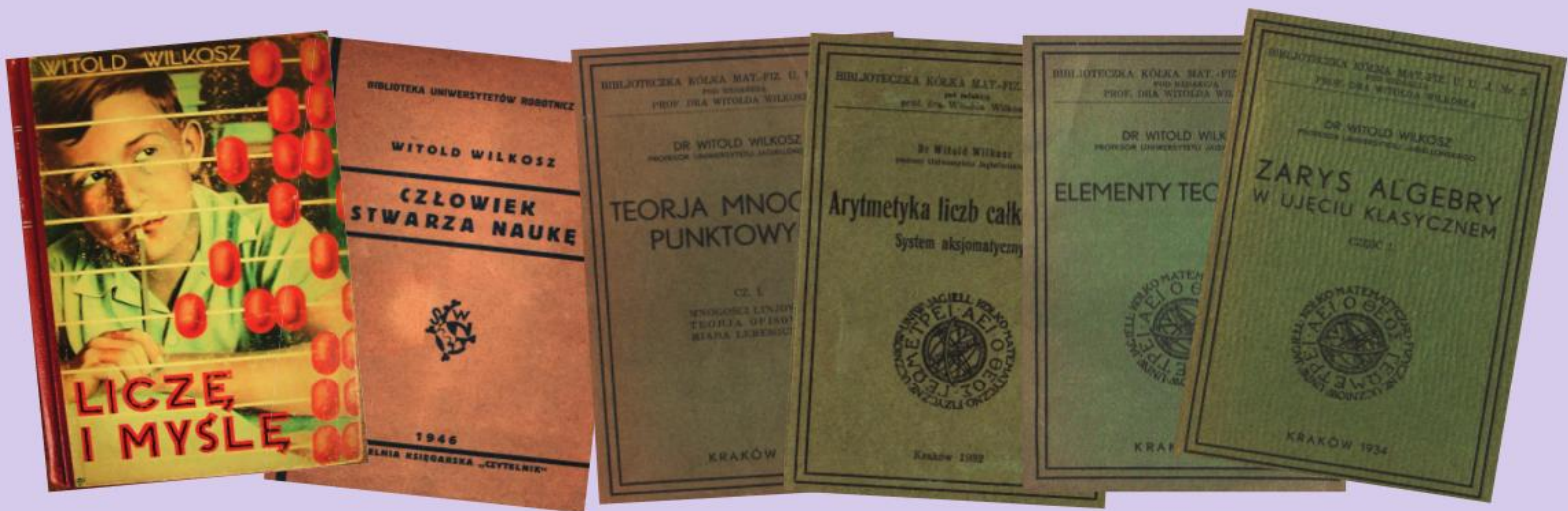
Wskaźniki do zadań

1. Narysować n cięciw "byłe jak" i zastosować rozumowanie podobne do tego, które przedstawiono w wstępie.
2. Przeanalizować liczbę jednostkowych odcinków, które oddzielają płytki w różnych kolorach na wierzchnich stronach.
3. Gdy wykonamy operację na wierszu lub kolumnie o ujemnej sumie, to wzrosnie suma wszystkich m liczb, a ta może przyjąć jedynie skończenie wiele wartości.
4. Wykonując ruch na zbiorze o najmniejszej liczbie elementów niebieskich niż czerwonych, zwiększymy ogólną liczbę niebieskich elementów.
5. Zamiaszt odwracać się, niech żołnierze zwróceni do siebie twarzami wykonują krok w przód, tak by się zamieniły miejscami. Każdy żołnierz może wykonać tylko skończenie wiele takich kroków.
6. Jest jasne, że pole wielokąta wzrasta po każdym ruchu. Wstarczy wykazać, że przyjmując ono tylko skończenie wiele wartości. W tym celu dla wielokąta $A_1A_2 \dots A_n$ rozważmy wektory $\vec{v}_1 = A_1A_2, \vec{v}_2 = A_2A_3, \dots, \vec{v}_n = A_nA_1$. Wykazuje ruch zmienia jedynie kolejność wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, a ta jednoznacznie określa pole wielokąta.
7. Trójkę (A, B, C) zapiszemy w postaci $(2^{\alpha}a, 2^{\beta}b, 2^{\gamma}c)$, w której α, β, γ są całkowite nieujemne, zaś a, b, c są nieparzyste lub równe 0. Jeśli w tej trójce jest najwyżej jedno zero, to stosując operacje z zadania, można doprowadzić do trójki $(2^{\alpha}a', 2^{\beta}b', 2^{\gamma}c')$, w której $a' + b' + c' > a + b + c$. W tym celu przydatne są równości $x + y - |x - y| = 2 \min\{x, y\}$ i $x + y + |x - y| = 2 \max\{x, y\}$, dzięki którym z trójki (A, B, C) otrzymany trójkę $(2A, 2B, C)$.



Oddział Krakowski Polskiego Towarzystwa Matematycznego
ogłasza

Konkurs im. Witolda Wilkosza na najlepszą studencką pracę popularyzującą matematykę



Na konkurs można zgłaszać zarówno prace już opublikowane/przyjęte do druku, jak i prace napisane specjalnie na Konkurs.
Zakres popularyzowanej matematyki nie jest niczym ograniczony.

Termin nadsyłania prac: 30 października 2020

Szczegóły: <http://www2.im.uj.edu.pl/ptm/#wilkosz>
Regulamin Konkursu: <http://www2.im.uj.edu.pl/ptm/files/Wilkosz-2020.pdf>