

deltam

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$ $E=hc/\lambda$ $\pi=3,141592\dots$

NR 10 (557) 2020
CENA 5,5 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

str. 1
**Proporcjonalność
bez partii
politycznych**




UNIwersYTET
WARSZAWSKI

Nakład: 3500 egz.

Kosmiczna rafa – zdjęcie przypomina kosmiczną wersję podwodnego świata rojącego się od gwiazd. Widać tu fragment Wielkiego Obłoku Magellana, naszej największej galaktyki satelitarnej, położonej w odległości 160 tys. lat świetlnych od Drogi Mlecznej. Gigantyczna czerwona mgławica, przypominająca część rafy koralowej, to NGC 2014, natomiast jej mniejsza, zabarwiona na niebiesko towarzyszka to NGC 2020. *Kosmiczna rafa* została udostępniona dla upamiętnienia 30. urodzin Kosmicznego Teleskopu Hubble'a.

Źródło: NASA, ESA i STScI

SPIS TREŚCI NUMERU 10 (557)

Proporcjonalność bez partii politycznych <i>Piotr Skowron</i>	str. 1
Wielomiany, nierówności i Newton <i>Łukasz Rajkowski</i>	str. 4
 Zadania	str. 6
Twierdzenie Lorda Rayleigha <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 7
Cykle Milankovića <i>Michał Bejger</i>	str. 9
 Jej Wysokość Natura <i>Magdalena Fikus</i>	str. 11
Optymalizacja ruchu pojazdów za pomocą kwantowego wyzarzania <i>Paweł Gora</i>	str. 12
Kosinus kąta mrówczą pracą wyznaczany <i>Grzegorz Derfel</i>	str. 15
Zaglądamy do środka gwiazdy <i>Alex Schwarzenberg-Czerny</i>	str. 16
Drugie prawo Keplera i owale Newtona. Kontrowersje wokół Lematu XXVIII w <i>Principiach</i> <i>Grzegorz Łukaszewicz, Mikołaj Sierżęga</i>	str. 17
Klub 44	str. 20
Prosto z nieba: 30 lat teleskopu Hubble'a	str. 22
Niebo w październiku	str. 22
Aktualności GW190521: masywne wibracje	str. 24
 Jego Wysokości, część 2 <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W kolejnym numerze opisujemy, za co Hillel Furstenberg oraz Gregory Margulis otrzymali tegoroczną Nagrodę Abela.



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl
Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

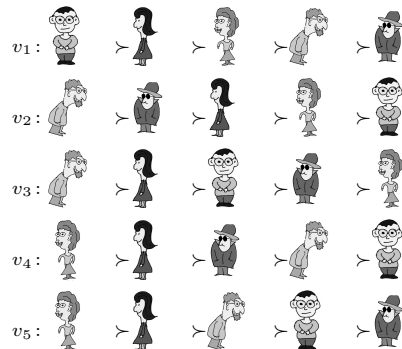
Na okładce: Kosmiczna rafa - zdjęcie przypomina kosmiczną wersję podwodnego świata rojącego się od gwiazd. Widać tu fragment Wielkiego Obłoku Magellana, naszej największej galaktyki satelitarnej, położonej w odległości 160 tys. lat świetlnych od Drogi Mlecznej. Gigantyczna czerwona mgławica, przypominająca część rafy koralowej, to NGC 2014, natomiast jej mniejsza, zabarwiona na niebiesko towarzyszka to NGC 2020. *Kosmiczna rafa* została udostępniona dla upamiętnienia 30. urodzin Kosmicznego Teleskopu Hubble'a.

Proporcjonalność bez partii politycznych

Piotr SKOWRON*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Innym klasycznym modelem rozważanym w ramach teorii wyboru społecznego jest model oparty o rankingi. Wtedy wymagamy, aby wyborcy uszeregowali kandydatów od najbardziej do najmniej preferowanego. W takim modelu przykład preferencji wyborców może wyglądać następująco:



Model, w którym wyborcy wskazują kandydatów, których akceptują, jest jednak szczególnie atrakcyjny. W takim systemie głosowania wyborcom stosunkowo łatwo jest oddać głos, podczas gdy uszeregowanie, nawet tylko kilkunastu kandydatów, jest dużo trudniejsze.



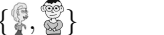
¹Oczywiście nie jest to jedyny proporcjonalny komitet. Każdy komitet, który będzie składał się z dwóch kandydatów akceptowanych przez pierwszą grupę 400 wyborców, jednego kandydata akceptowanego przez drugą grupę 200 wyborców i jednego kandydata akceptowanego przez ostatnią grupę wyborców, będzie równie dobry. Na potrzeby naszej analizy założymy, że mamy pewną regułę rozstrzygania remisów, używaną, gdy istnieje kilka optymalnych komitetów.

Thorvald Nicolai Thiele (1838–1910), profesor astronomii i dyrektor obserwatorium astronomicznego na Uniwersytecie w Kopenhadze. Jego najbardziej znane prace dotyczą matematyki, w szczególności statystyki.

Koniec dziewiętnastego wieku był szczególnie korzystnym okresem dla naukowców zajmujących się projektowaniem systemów wyborczych. Na przykład Szwecja wprowadzała w tym czasie prawo wyborcze dla kobiet; w związku z tym partia konserwatywna spodziewała się utraty większości parlamentarnej i skłonna była rozważać zmianę dotychczasowej ordynacji wyborczej. Inny, równie ciekawy, system wyborczy został opracowany mniej więcej w tym samym czasie przez szwedzkiego matematyka Larsa Edvarda Phragmęna (1863–1937).

Rozważmy następujący scenariusz: n wyborców pragnie wybrać komitet, czyli podzbiór kandydatów o ustalonej liczebności. Oznaczmy zbiór wyborców jako $N = \{1, 2, \dots, n\}$, zbiór kandydatów jako $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ (w szczególności n i m to, odpowiednio, liczba wyborców i liczba kandydatów), a rozmiar komitetu, który chcemy wyłonić jako k (przy czym $k \leq m$). Na przykład wyobraźmy sobie, że wyborcy chcą wybrać parlament o rozmiarze k w małym kraju, w którym nie zaistniała jeszcze koncepcja partii politycznych (w związku z czym muszą głosować bezpośrednio na kandydatów, a nie na partie polityczne), albo że pracownicy pewnej firmy lub organizacji chcą wybrać k osób, które będą ich reprezentować w związkach zawodowych. Załóżmy, że każdy z wyborców głosuje, wskazując podzbiór kandydatów, których uważa za akceptowalnych: dla wyborcy $i \in N$ taki podzbiór akceptowalnych kandydatów będziemy oznaczać przez $A(i)$. Pokażemy, że wskazanie „sprawiedliwego” sposobu przeprowadzenia takich wyborów jest nieoczywiste.









Przykład 1. Przyjmijmy, że $n = 800$, $m = 9$, a głosy wyborców są następujące:

- 400 wyborców akceptuje: {
- 200 wyborców akceptuje: {
- 200 wyborców akceptuje: {

Przypuśćmy, że $k = 4$. Jaki komitet powinien zostać wybrany w tym przypadku? Komitet $S = \{\text{candidate icons}\}$ wydaje się być rozsądnym wyborem¹. Taki komitet jest proporcjonalny – dla każdej z trzech grup wyborców, liczba wybranych kandydatów, których ci wyborcy aprobuja, jest proporcjonalna do liczby wyborców w tej grupie.

Preferencje wyborców w przykładzie 1 mają pewną specyficzną strukturę: dla każdego z dwóch wyborców ich zbiory akceptowalnych kandydatów są takie same lub rozłączne. Pozwala to pogrupować wyborców i kandydatów w taki sposób, że wskazanie proporcjonalnego komitetu jest proste i intuicyjne. Co jednak, gdy mamy do czynienia z bardziej złożonymi i „chaotycznymi” preferencjami?

Przykład 2. Rozważmy następujące preferencje wyborców:

- v_1 : {
- v_2 : {
- v_3 : {
- v_4 : {
- v_5 : {
- v_6 : {
- v_7 : {
- v_8 : {

Przypuśćmy, że chcemy wybrać proporcjonalny komitet rozmiaru $k = 4$. W tym wypadku odpowiedź nie jest już tak oczywista.

Wyżej opisany model był badany – między innymi – pod koniec dziewiętnastego wieku przez duńskiego astronoma i matematyka Thorvalda Nicolai Thielego. Thiele zaprojektował regułę obecnie nazywaną PAV (*Proportional Approval Voting*). Dla $r \in \mathbb{N}$, niech $H(r)$ oznacza r -tą liczbę harmoniczną, tzn. $H(r) = \sum_{i=1}^r 1/i$. Reguła PAV wybiera komitet S , który maksymalizuje wartość $\text{pkt}(S) = \sum_{i \in N} H(|A(i) \cap S|)$. Innymi słowy, dla każdego wyborcy $i \in N$ i dla każdego komitetu $S \subseteq C$ ($|S| = k$) analizujemy, ilu kandydatów z komitetu S wyborca i akceptuje ($|A(i) \cap S|$); bierzemy liczbę harmoniczną o tym indeksie z tej wartości ($H(|A(i) \cap S|)$) i traktujemy ją jako wynik punktowy, który wyborca i przypisuje komitetowi S . Dla każdego komitetu liczymy sumę punktów przypisanych temu komitetowi przez wszystkich wyborców i wybieramy ten komitet S , którego wynik punktowy $\text{pkt}(S)$ jest najwyższy. Na pierwszy

²W regule PAV maksymalizujemy wartość zadowolenia wyborców. Wyborca będzie bardziej zadowolony, jeżeli wybory wygra chociaż jeden z akceptowanych przez niego kandydatów, niż gdyby miał nie wygrać żaden. Oczywiście będzie także bardziej zadowolony, jeżeli wygra dwóch kandydatów, których akceptuje, jeszcze bardziej, jeżeli wygra trzech takich kandydatów itd. Zadowolenie z każdym kolejnym akceptowanym kandydatem będzie rosło coraz wolniej. Jest wiele funkcji, poza funkcją harmoniczną, które spełniają tę własność. Wykażemy jednak, że funkcja harmoniczna jest w pewien sposób „specjalna” i użycie akurat tej funkcji powoduje, że system wyborczy jest proporcjonalny.

Aby reguła PAV mogła wyłonić zwycięski komitet, trzeba obliczyć wynik punktowy dla każdego możliwego komitetu. Takich komitetów jest $\binom{m}{k}$. Powoduje to pewne praktyczne ograniczenia: wydaje się, że ciężko użyć reguły PAV, zwłaszcza dla dużych wartości m i k . Współczesne prace z dziedziny informatyki pokazują, że potrafimy sobie dobrze radzić z tym problemem, stosując nowoczesne algorytmy heurystyczne i aproksymacyjne. Ponadto istnieją alternatywne systemy głosowania, które mają podobne własności co reguła PAV, a których obliczanie jest dużo prostsze, np. sekwencyjny wariant PAV lub sekwencyjna reguła Phragmèna.

rzut oka nie jest jasne, dlaczego użyliśmy liczb harmoniczných w definicji reguły PAV². Jak się jednak okaże, w tym przypadku jest to jak najbardziej uzasadnione.

W przykładzie 2 zastosowanie reguły PAV doprowadzi do wyboru komitetu $S = \{\text{członek 1}, \text{członek 2}, \text{członek 3}, \text{członek 4}\}$. Wyborca v_1 akceptuje jednego członka tego komitetu, więc przypisze mu $H(1) = 1$ punkt; wyborca v_2 akceptuje trzech kandydatów z S , więc przypisze temu komitetowi $H(3) = 1 + 1/2 + 1/3 = 11/6$ punktów. Sumarycznie komitet ten otrzyma następującą liczbę punktów:

$$\text{pkt}(\{\text{członek 1}, \text{członek 2}, \text{członek 3}, \text{członek 4}\}) = 1 + 11/6 + 3/2 + 3/2 + 1 + 1 + 1 + 3/2 = 31/3.$$

PAV wybierze ten właśnie komitet, ponieważ wynik punktowy dla każdego innego 4-elementowego podzbioru kandydatów będzie mniejszy bądź równy $31/3$.

Dlaczego regułą wyborczą PAV możemy uważać za proporcjonalną? Tu z pomocą przychodzi nam podejście aksjomatyczne: najpierw spróbujemy formalnie zdefiniować pewną matematyczną własność, która będzie mówiła, czy dana reguła wyborcza jest proporcjonalna, czy też nie; następnie sprawdzimy, czy PAV rzeczywiście spełnia tę własność.

Definicja (silna proporcjonalność). Powiemy, że reguła wyborcza \mathcal{R} spełnia silną proporcjonalność, jeśli dla każdego profilu preferencji, dla każdej liczby $\ell \in \mathbb{N}$ oraz dla każdej grupy wyborców $V \subseteq N$ takiej, że $|V| \geq \ell \cdot n/k$ oraz $|\bigcap_{i \in V} A(i)| \geq \ell$, reguła zwróci komitet S taki, że $\frac{1}{|V|} \cdot \sum_{i \in V} |A(i) \cap S| \geq \ell$.

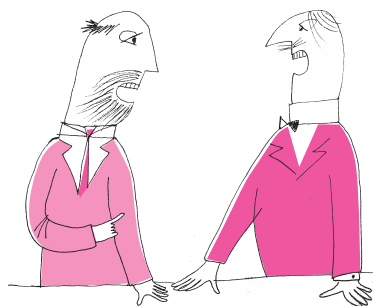
Zgodnie z powyższą definicją grupa $\ell \cdot n/k$ wyborców (czyli grupa, która stanowi ℓ/k część wszystkich wyborców) powinna mieć prawo decydować o ℓ członkach komitetu (czyli o ℓ/k części wybranego komitetu); np. grupa 30% wyborców powinna móc decydować o 30% członków komitetu. Zatem jeżeli grupa ma co najmniej $\ell \cdot n/k$ wyborców ($|V| \geq \ell \cdot n/k$) oraz jeżeli grupa ta zgadza się co do tego, że akceptuje pewnych ℓ kandydatów ($|\bigcap_{i \in V} A(i)| \geq \ell$), to średnio wyborcy z tej grupy powinni akceptować co najmniej ℓ członków wybranego komitetu ($\frac{1}{|V|} \cdot \sum_{i \in V} |A(i) \cap S| \geq \ell$).

Powyższa własność jest bardzo pożądana, ale nie istnieje reguła wyborcza, która by ją spełniała. Aby się o tym przekonać, spójrzmy na następujący przykład:

$$\begin{array}{cccc} v_1: \{\text{członek 1}, \text{członek 2}\} & v_4: \{\text{członek 1}, \text{członek 3}\} & v_7: \{\text{członek 2}, \text{członek 3}\} & v_{10}: \{\text{członek 3}, \text{członek 4}\} \\ v_2: \{\text{członek 1}\} & v_5: \{\text{członek 2}\} & v_8: \{\text{członek 3}\} & v_{11}: \{\text{członek 4}\} \\ v_3: \{\text{członek 1}\} & v_6: \{\text{członek 2}\} & v_9: \{\text{członek 3}\} & v_{12}: \{\text{członek 4}\}. \end{array}$$

Przyjmijmy, że $k = 3$. W tym przykładzie grupa wyborców v_1, \dots, v_4 stanowi $1/3$ społeczeństwa i zgadza się co do kandydata członek 1 . Wyborcy ci powinni zatem akceptować średnio co najmniej jednego członka komitetu, więc członek 1 musi zostać wybrany jako członek zwycięskiego komitetu (gdybyśmy nie wybrali członek 1 , to nawet przy wyborze członek 2 i członek 3 wyborcy v_1, \dots, v_4 akceptowaliby średnio tylko $1/2$ członków wybranego komitetu). Analogiczne rozumowanie zastosowane do grupy v_4, \dots, v_7 pozwala nam stwierdzić, że również członek 2 musi być członkiem zwycięskiego komitetu. I tu podobnie stwierdzamy, że członek 3 oraz członek 4 muszą zostać wybrani. Jest to niemożliwe, ponieważ możemy wybrać jedynie trzech kandydatów.

Możemy natomiast delikatnie osłabić powyższą własność: będziemy wymagać, aby grupa wyborców V , która spełnia warunki $|V| \geq \ell \cdot n/k$ i $|\bigcap_{i \in V} A(i)| \geq \ell$ (czyli grupa, której intuicyjnie powinno przysługiwać prawo wyboru ℓ członków komitetu), akceptowała średnio co najmniej $\ell - 1$ wybranych kandydatów. W definicji silnej proporcjonalności zmieniamy warunek $\frac{1}{|V|} \cdot \sum_{i \in V} |A(i) \cap S| \geq \ell$ na $\frac{1}{|V|} \cdot \sum_{i \in V} |A(i) \cap S| \geq \ell - 1$ i tę własność będziemy nazywać *slabą proporcjonalnością*.



³Formalne wykazanie, że jakakolwiek reguła wyborcza licząca punkty przy użyciu innej funkcji niż funkcja harmoniczna $H(r)$ nie spełnia słabej proporcjonalności, wymaga dłuższego dowodu. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do pracy [1] (Twierdzenie 11). Pokażemy jednak, jak przeprowadzić takie rozumowanie w konkretnym przypadku. Załóżmy, że liczymy punkty, używając funkcji $g(r) = r/H(r)$ zamiast $H(r)$, czyli że używamy funkcji rosnącej szybciej niż funkcja harmoniczna. Rozważmy teraz wybory, w których 70 wyborców akceptuje kandydatów c_1, \dots, c_{10} i 30 wyborców akceptuje kandydatów c_{11}, \dots, c_{20} . Niech $k = 10$. Łatwo sprawdzić, że komitet, który maksymalizuje wynik punktowy, składa się z 9 kandydatów spośród c_1, \dots, c_{10} i jednego kandydata spośród c_{11}, \dots, c_{20} – taki maksymalny wynik punktowy to $70 \cdot 9/H(9) + 30 \cdot 1/H(1) \approx 252,7$. Zatem w tym wypadku grupa 30 wyborców akceptuje średnio tylko jednego kandydata z wybranego komitetu. Własność słabej proporcjonalności wymaga, aby członkowie tej grupy akceptowali średnio co najmniej dwóch kandydatów z wybranego komitetu. Pokazuje to, że użycie funkcji $g(r) = r/H(r)$ nie daje własności słabej proporcjonalności.

Reguła PAV spełnia własność słabej proporcjonalności, co udowodnimy poniżej. Co więcej, gdybyśmy w regule PAV liczyli punkty komitetu, używając innej funkcji niż harmoniczna $H(r) = \sum_{i=1}^r 1/i$, to taka reguła już nie spełniałaby własności słabej proporcjonalności³. Innymi słowy, to właśnie użycie liczb harmonicznych w definicji reguły PAV sprawia, że reguła ta jest proporcjonalna.

Twierdzenie ([2]). *Reguła PAV spełnia własność słabej proporcjonalności.*

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że reguła PAV wybrała komitet S oraz że istnieje grupa wyborców V i liczba $\ell \geq 1$ taka, że:

- (i) $|V| \geq \ell \cdot n/k$,
- (ii) $|\bigcap_{i \in V} A(i)| \geq \ell$ oraz
- (iii) $\frac{1}{|V|} \cdot \sum_{i \in V} |A(i) \cap S| < \ell - 1$.

Wykażemy, że z komitetu S możemy usunąć jednego kandydata, a w zamian dodać innego, tak że wynik punktowy komitetu $\text{pkt}(S)$ wzrośnie. Będzie to sprzeczność z tym, że komitet S został wybrany przez regułę PAV; wszak PAV wybiera tylko te komitety, których wartość punktowa jest najwyższa.

Dla każdego wybranego kandydata $c \in S$, przez $\Delta(c)$ oznaczymy wartość, o którą zmniejszy się wynik punktowy S , gdy usuniemy z niego c . Formalnie $\Delta(c) = \text{pkt}(S) - \text{pkt}(S \setminus \{c\})$. Przez $N(c)$ oznaczymy zbiór wyborców, którzy akceptują kandydata c , $N(c) = \{i \in N : c \in A(i)\}$. Oszacujemy sumę $\sum_{c \in S} \Delta(c)$:

$$\begin{aligned} \sum_{c \in S} \Delta(c) &= \sum_{c \in S} (\text{pkt}(S) - \text{pkt}(S \setminus \{c\})) = \\ &= \sum_{c \in S} \sum_{i \in N} (\text{H}(|A(i) \cap S|) - \text{H}(|A(i) \cap (S \setminus \{c\})|)) = \\ &= \sum_{c \in S} \sum_{i \in N(c)} (\text{H}(|A(i) \cap S|) - \text{H}(|A(i) \cap S| - 1)) = \\ &= \sum_{c \in S} \sum_{i \in N(c)} \frac{1}{|A(i) \cap S|} = \sum_{i \in N} \sum_{c \in A(i) \cap S} \frac{1}{|A(i) \cap S|} = \\ &= \sum_{i \in N : |A(i) \cap S| \geq 1} \left(|A(i) \cap S| \cdot \frac{1}{|A(i) \cap S|} \right) \leq |N| = n. \end{aligned}$$

Zatem ponieważ $|S| = k$, istnieje kandydat $c_r \in S$, dla którego $\Delta(c_r) \leq n/k$.

Rozważmy teraz kandydata c_a , który jest akceptowany przez wszystkich wyborców z V oraz który nie został wybrany do zwycięskiego komitetu. Taki kandydat zawsze istnieje; jeżeli wszyscy kandydaci z $\bigcap_{i \in V} A(i)$ należeliby do S , to oznaczałoby, że wyborcy z V akceptują średnio co najmniej ℓ członków S ; założyliśmy jednak, że $\frac{1}{|V|} \cdot \sum_{i \in V} |A(i) \cap S| < \ell - 1$. Niech $\Delta(c_a)$ oznacza wartość, o jaką zwiększy się wynik punktowy komitetu S , gdy dodamy do niego c_a , $\Delta(c_a) = \text{pkt}(S \cup \{a\}) - \text{pkt}(S)$. Mamy:

$$\begin{aligned} \Delta(c_a) &= \sum_{i \in N} (\text{H}(|A(i) \cap (S \cup c_a)|) - \text{H}(|A(i) \cap S|)) \geq \\ &\geq \sum_{i \in V} (\text{H}(|A(i) \cap S| + 1) - \text{H}(|A(i) \cap S|)) = \sum_{i \in V} \frac{1}{|A(i) \cap S| + 1} \geq \end{aligned}$$

(z nierówności między średnią harmoniczną a arytmetyczną)

$$\begin{aligned} &\geq \frac{|V|^2}{\sum_{i \in V} (|A(i) \cap S| + 1)} = \frac{|V|^2}{\sum_{i \in V} |A(i) \cap S| + |V|} > \frac{|V|^2}{|V|(\ell - 1) + |V|} = \\ &= \frac{|V|}{\ell} \geq \frac{\ell \cdot n/k}{\ell} = n/k. \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem, że $\Delta(c_a) > \Delta(c_r)$. Ponadto gdy dodamy c_a do mniejszego komitetu, np. do $S \setminus \{c_r\}$, to wynik punktowy wzrośnie bardziej, niż gdybyśmy dodali c_a do S . Zatem gdy w komitecie S wymienimy c_r na c_a , to otrzymamy komitet o wyższym wyniku punktowym niż S . To daje sprzeczność, ponieważ reguła PAV w takim wypadku powinna wybrać $(S \setminus \{c_r\}) \cup \{c_a\}$ zamiast S . \square

Literatura

- [1] H. Aziz, M. Brill, V. Conitzer, E. Elkind, R. Freeman, and T. Walsh. Justified representation in approval-based committee voting. *Social Choice and Welfare*, 48(2):461–485, 2017.
- [2] H. Aziz, E. Elkind, S. Huang, M. Lackner, L. Sánchez-Fernández, and P. Skowron. On the complexity of extended and proportional justified representation. In *Proceedings of the 32nd Conference on Artificial Intelligence (AAAI-2018)*, pages 902–909, 2018.

Wielomiany, nierówności i Newton

Lukasz RAJKOWSKI

Wielomian jaki jest, każdy widzi. I każdy, kto widzi, wie również, że wielomiany miewają pierwiastki rzeczywiste (czyli miejsca zerowe), ale nie zawsze. I tak wielomian $x^2 - 5x + 6$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste ($x_1 = 2$ i $x_2 = 3$), ale wielomian $x^2 - 2x + 5$ nie ma ani jednego. Twierdzenie Bézouta orzeka, że jeśli x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $P(x)$, to możemy zapisać $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ dla pewnego wielomianu $Q(x)$. Jeśli dla liczby naturalnej k zachodzi $P(x) = (x - x_0)^k R(x)$ dla pewnego wielomianu $R(x)$ oraz $R(x_0) \neq 0$, to mówimy, że x_0 jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu P . W tej sytuacji wielomian $x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1)$ ma jeden pierwiastek dwukrotny i jeden pierwiastek jednokrotny. Z twierdzenia Bézouta można wywnioskować, że wielomian stopnia n może mieć co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych (uwzględniając krotności). Jeśli ma ich dokładnie n , będziemy go nazywać *najedzonym*. Nie jest to formalny, matematyczny termin, jednak wydaje się dużo bardziej wdzięczny niż dokładne tłumaczenie angielskiego terminu *real rooted*. Rzecz jasna, wielomiany, które nie są najedzone, będziemy nazywać *głodnymi*.

Czy można rozpoznać najedzony (lub głodny) wielomian „na pierwszy rzut oka”? Zaczniemy od wielomianów stopnia pierwszego – oczywiście każdy z nich jest najedzony. Wielomiany stopnia drugiego mogą być głodne (tak jak wspomniany wcześniej wielomian $x^2 - 2x + 5$), jednak po latach szkolnego treningu powinniśmy je bez trudu rozpoznać. Wszak jeśli trójmian kwadratowy $a_2x^2 + a_1x + a_0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste (czyli jest najedzony), to jego wyróżnik $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$ jest nieujemny, czyli $a_1^2 \geq 4a_0a_2$. Widać zatem, że poczucie sytości u wielomianu może być związane z pewnymi nierównościami dotyczącymi jego współczynników. Celem artykułu jest przedstawienie uogólnienia wspomnianej przed chwilą własności trójmianu kwadratowego na wielomiany większych stopni. Wyraża je następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Załóżmy, że wielomian $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ jest najedzony, i niech $A_k = a_k / \binom{n}{k}$ dla $k = 0, 1, \dots, n$. Wówczas*

$$(*) \quad A_{k-1}A_{k+1} \leq A_k^2, \\ \text{dla } k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Aby udowodnić powyższe twierdzenie, potrzebujemy najpierw przyjrzeć się dokładniej najedzonym wielomianom. Dla wygody, w dalszej części artykułu przyjmijmy oznaczenia takie jak w treści twierdzenia. Istotne będą dla nas pewne dwie operacje, które możemy przeprowadzić na najedzonym wielomianie, tak aby nie zgłodniał. Pierwsza z nich to „lustrzane odbicie”:

Fakt 1. *Załóżmy, że wielomian $P(x)$ jest najedzony. Wówczas wielomian $\mathfrak{Q}(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ również jest najedzony.*

Żeby przekonać się o słuszności faktu 1, musimy przyjrzeć się, czy i jak zmieniają się pierwiastki i ich krotności, gdy stosujemy „lustrzane odbicie”. Zwróćmy uwagę, że skoro $a_n \neq 0$, to 0 nie może być pierwiastkiem wielomianu $\mathfrak{Q}(x)$ (jego wyraz wolny jest niezerowy). Załóżmy, że 0 jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu P (jeśli 0 nie jest pierwiastkiem $P(x)$, przyjmijmy $k = 0$). Wówczas $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$ i $a_k \neq 0$ (a jeśli $k = 0$, nie bierzemy pod uwagę pierwszego ciągu równości). W tej sytuacji wielomian $\mathfrak{Q}(x)$ ma stopień $n - k$. Załóżmy teraz, że $x_0 \neq 0$ jest l -krotnym pierwiastkiem wielomianu $P(x)$, i niech $P(x) = (x - x_0)^l Q(x)$. Nietrudno uzasadnić, że dla dowolnego $x \neq 0$ zachodzi $\mathfrak{Q}(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$. W tej sytuacji proste przekształcenia algebraiczne prowadzą do wniosku, że

$$\mathfrak{Q}(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \left(\frac{1}{x} - x_0\right)^l Q\left(\frac{1}{x}\right) = (-x_0)^{-l} \left(x - \frac{1}{x_0}\right)^l \mathfrak{Q}(x),$$

gdzie $\mathfrak{Q}(x)$ jest „lustrzanym odbiciem” wielomianu $Q(x)$. Ponieważ $\mathfrak{Q}\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0^{-n} Q(x_0) \neq 0$, powyższa równość dowodzi, że $\frac{1}{x_0}$ jest l -krotnym pierwiastkiem wielomianu $\mathfrak{Q}(x)$. Przedstawione rozważania dowodzą, że wielomian $\mathfrak{Q}(x)$ jest najedzony, gdyż krotności odwrotności niezerowych pierwiastków wielomianu $P(x)$ sumują się do $n - k$, czyli stopnia wielomianu $\mathfrak{Q}(x)$.

Druga operacja niepowodująca głodu, która będzie nam potrzebna, to różniczkowanie wielomianu. Czytelnikom, którzy nie znają różniczkowania, polecamy przeczytać krótką notkę na stronie 5.

Fakt 2. *Załóżmy, że wielomian $P(x)$ jest najedzony. Wówczas wielomian $P'(x)$ również jest najedzony.*

Powyższy fakt wynika stąd, że różniczkowanie obniża krotność każdego pierwiastka o 1, w związku z czym wyjściowy wielomian „traci” przy różniczkowaniu K pierwiastków, gdzie K jest liczbą różnych jego pierwiastków. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia Rolle’a, między dwoma sąsiednimi (na osi liczb rzeczywistych) pierwiastkami wielomianu $P(x)$ istnieje pierwiastek wielomianu $P'(x)$, i w ten sposób wielomian $P'(x)$ „zyskuje” $K - 1$ nowych pierwiastków. Uwzględniając te dwie obserwacje, potrafimy zlokalizować $n - 1$ (gdzie n to stopień wielomianu $P(x)$) pierwiastków $P'(x)$, licząc krotności. Ponieważ stopień $P'(x)$ również wynosi $n - 1$, jest on najedzony.



Uzbrojeni w fakty 1 i 2 możemy przejść do dowodu twierdzenia. Załóżmy, że wielomian $P(x)$ jest najedzony, i wybierzmy dowolnie $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Ponieważ różniczkowanie nie sprawia, że wielomian staje się głodny, to stosując tę operację $(k - 1)$ razy na wielomianie $P(x)$, otrzymamy wielomian

$$R(x) = \frac{n!}{(n - k + 1)!} a_n x^{n-k+1} + \frac{(n - 1)!}{(n - k)!} a_{n-1} x^{n-k} + \dots + \frac{(k - 1)!}{0!} a_{k-1}.$$

Ponieważ wielomian $R(x)$ jest najedzony, to jego lustrzane odbicie

$$\mathfrak{R}(x) = \frac{(k - 1)!}{0!} a_{k-1} x^{n-k+1} + \frac{k!}{1!} a_k x^{n-k} + \dots + \frac{n!}{(n - k + 1)!} a_n$$

także jest najedzone. W tej sytuacji różniczkując $(n - k - 1)$ razy wielomian $\mathfrak{R}(x)$, dostaniemy najedzony wielomian

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^{(k-1)}(x) &= \frac{(n - k + 1)!}{2!} \frac{(k - 1)!}{0!} a_{k-1} x^2 + \frac{(n - k)!}{1!} \frac{k!}{1!} a_k x + \\ &+ \frac{(n - k - 1)!}{0!} \frac{(k + 1)!}{2!} a_{k+1} = \\ &= \frac{1}{2} n! \cdot (A_{k-1} x^2 - 2A_k x + A_{k+1}). \end{aligned}$$

Oznacza to, że wielomian $A_{k-1} x^2 - 2A_k x + A_{k+1}$ również jest najedzony, jednak zgodnie z informacjami przedstawionymi we wstępie do tego artykułu oznacza to, że $(2A_k)^2 \geq 4A_{k-1}A_{k+1}$, co jest równoważne (*) i kończy dowód.

Nierówności (*) noszą nazwę *nierówności Newtona*, gdyż Isaac Newton w swoim dziele *Arithmetica Universalis* (1707) stwierdził (bez dowodu), że liczba rzeczywistych pierwiastków wielomianu $P(x)$ jest nie mniejsza od stopnia wielomianu pomniejszonego o liczbę zmian znaku w ciągu

$$A_0^2, \quad A_1^2 - A_0 A_2, \quad A_2^2 - A_1 A_3, \quad \dots, \quad A_{n-1}^2 - A_{n-2} A_n, \quad A_n^2.$$

Nietrudno przekonać się, że przedstawiona hipoteza jest silniejsza od naszego twierdzenia, jednak na swój dowód czekała ponad 100 lat. Udowodnił ją James Sylvester w roku 1865.

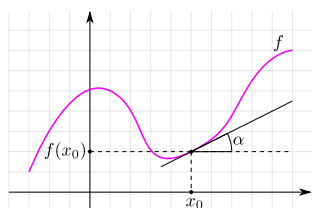
Nasze twierdzenie nie musiało być aż tak cierpliwe, gdyż wykazał je w roku 1729 uczeń Newtona, Colin Maclaurin, próbując uzasadnić hipotezę postawioną przez nauczyciela. Zauważył on również, że jeśli wielomian $P(x)$ jest najedzony, $a_n = 1$ i liczby A_i są dodatnie, to zachodzi

$$\sqrt[n]{A_0} \leq \sqrt[n-1]{A_1} \leq \dots \leq \sqrt{A_{n-2}} \leq A_{n-1}.$$

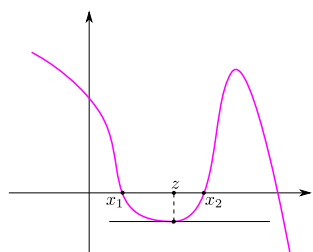
Są to tak zwane *nierówności Maclaurina*. Ich uzasadnienie jest następujące: przy poczynionych założeniach dla dowolnego $k = 1, 2, \dots, n - 1$ mamy

$$(A_n A_{n-2})(A_{n-1} A_{n-3})^2 \dots (A_{n-k+1} A_{n-k-1})^k \leq A_{n-1}^2 A_{n-2}^4 \dots A_{n-k}^{2k},$$

co po skróceniu przez $A_{n-1}^2 A_{n-2}^4 \dots A_{n-k+1}^{2k-2}$ daje $A_{n-k-1}^k \leq A_{n-k}^{k+1}$ i ostatecznie $\sqrt[k+1]{A_{n-k-1}} \leq \sqrt[k]{A_{n-k}}$.



Na tym rysunku $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$



Ilustracja twierdzenia Rolle'a

O różniczkowaniu dla nieróżniczkujących. Ze względu na młodszych Czytelników *Delta* poniżej prezentujemy krótką „bajkę” o tym, czym to różniczkowanie jest. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją. Jeśli istnieje prosta styczna do wykresu funkcji f w pewnym punkcie $(x_0, f(x_0))$, to tangens kąta nachylenia tej stycznej nazwiemy *pochodną funkcji f w punkcie x_0* i będziemy oznaczać przez $f'(x_0)$. W szczególności, jeśli $f'(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$, to styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest pozioma. Łatwo w związku z tym uwierzyć, że jeśli dla pewnych $x_1 < x_2$ mamy $f(x_1) = f(x_2) = 0$ oraz w każdym punkcie przedziału $[x_1, x_2]$ istnieje styczna do wykresu funkcji f , to w pewnym punkcie ta styczna jest pozioma, czyli istnieje $z \in (x_1, x_2)$ takie, że $f'(z) = 0$. Mówi o tym *twierdzenie Rolle'a*.

Okazuje się, że pochodna wielomianu $P(x)$ wyraża się wzorem $P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n - 1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$, czego nie będziemy tutaj dowodzić. Jeśli $Q(x)$ i $R(x)$ są wielomianami, można algebraicznie udowodnić następującą równość, co polecamy jako ćwiczenie:

$$(R(x)Q(x))' = R'(x)Q(x) + R(x)Q'(x).$$

Równość ta jest słuszna nie tylko dla wielomianów, ale w ogólnym przypadku dowód już nie jest algebraiczny. Kolejnym ćwiczeniem jest uzasadnienie, jak z powyższej równości wynika fakt, że jeśli a jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu $P(x)$, to jest $(k - 1)$ -krotnym pierwiastkiem wielomianu $P'(x)$.

Przypomnijmy teraz wzory Viète'a: jeśli $-x_1, \dots, -x_n$ są pierwiastkami wielomianu $P(x)$ i $a_n = 1$, to

$$a_{n-1} = \sum_{i=1}^n x_i, \quad a_{n-2} = \sum_{i<j}^n x_i x_j, \quad \dots, \quad a_0 = x_1 x_2 \dots x_n.$$

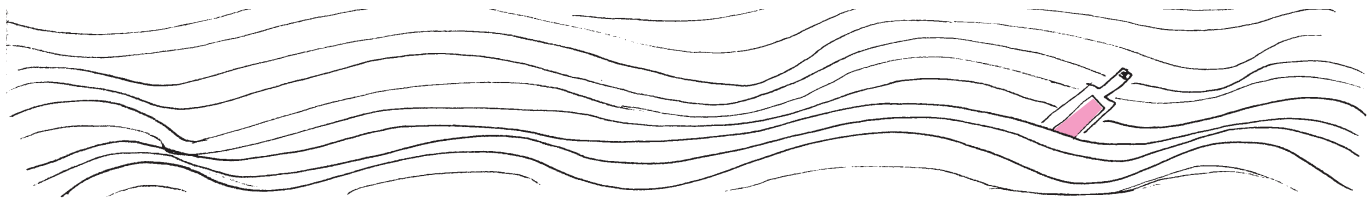
Jeśli wszystkie liczby x_i są dodatnie, to spełnione są założenia dla nierówności Maclaurina. Zwróćmy uwagę, że wówczas

$$A_0 = x_1 x_2 \dots x_n \text{ oraz } A_{n-1} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

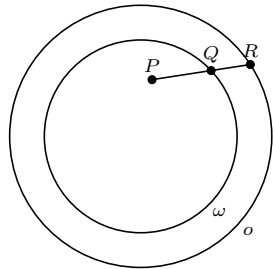
W tej sytuacji nierówność Maclaurina stanowi uogólnienie dobrze znanej nierówności między średnią geometryczną a arytmetyczną. Warto zwrócić uwagę, że popularny dowód tej nierówności poprzez zastosowanie indukcji wstecznej pochodzi od matematyka Augustina Cauchy'ego i został opublikowany dopiero w 1827 roku. Czytelnikom, którzy nie są zaznajomieni z tym pięknym rozumowaniem, polecamy artykuł *Indukcja wsteczna* z Δ_{11}^2 .

Na zakończenie warto zaznaczyć, że przedstawione twierdzenie *nie charakteryzuje* najedzonych wielomianów. Dla przykładu, wielomian $4x^3 + 4x^2 - 3x - 5 = (x-1)(4(x+1)^2 + 1)$ nie jest najedzony, ale spełnia opisane przez (*) nierówności. Czy w ogóle istnieją takie charakteryzacje? I tak i nie, ale to już inna, dłuższa historia.

O innej, dłuższej historii Zainteresowany Czytelnik może przeczytać w artykule *A new look at Newton's inequalities* autorstwa Constantina Niculescu, z którego korzystałem, pisząc niniejszy tekst. Inspirację zaczerpnąłem z cyklu wykładów Nikhila Srivastavy wygłoszonych na Uniwersytecie Warszawskim pod tytułem *Geometry of Polynomials*. Nagrania z tych wykładów są udostępnione w serwisie YouTube – gorąco polecam skorzystać.



Zadania



Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1651. Zaprojektować dwie różne sześciennie kości do gry, dające te same prawdopodobieństwa wyrzucenia poszczególnych sum oczek co dwie kości standardowe. Na każdej ścianie nowej pary kości ma znaleźć się dodatnia liczba oczek.

Rozwiązanie na str. 11

M 1652. Okrąg ω leży wewnątrz okręgu o i współdzieli z nim środek. W kole ograniczonym przez ω znajduje się punkt P . Znaleźć taki punkt R na okręgu o , by długość odcinka QR , gdzie Q jest punktem przecięcia okręgu ω z odcinkiem PR , była jak największa.

Rozwiązanie na str. 15

M 1653. Jaś wymyślił pewien wielomian P o nieujemnych współczynnikach całkowitych. Małgosia może pytać Jasia o wartość $P(a)$ dla wybranego przez nią całkowitego argumentu a . Ile pytań potrzebuje Małgosia, aby wyznaczyć wielomian P ?

Rozwiązanie na str. 12

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1009. Jak wykazują badania, czas τ skutecznej reakcji kierowcy na nagłe zdarzenie to około 2 s. (a) Jaką bezpieczną odległość s_0 od jadącego przed nim pojazdu powinien zachować kierowca, jeśli oba pojazdy jadą z tą samą prędkością v ? (b) Jaki odcinek drogi powinien widzieć kierowca jadący z prędkością v , żeby uniknąć zderzenia z nieruchomą przeszkodą? Przyspieszenie ziemskie wynosi g , współczynnik tarcia opon o asfalt wynosi f .

Rozwiązanie na str. 14

F 1010. Bardzo daleko od Ziemi meteoroid porusza się z prędkością v_0 wzdłuż prostej mijającej Ziemię w odległości d od jej środka. Jaka będzie najmniejsza odległość D , na jaką meteoroid zbliży się do środka Ziemi? Przyspieszenie ziemskie wynosi g , promień Ziemi R .

Rozwiązanie na str. 13

Twierdzenie Lorda Rayleigha

Jarosław GÓRNICKI*

* Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Lord Rayleigh, właściwie John William Strutt, 3. Baron Rayleigh (1842–1919), laureat Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki w 1904 r. (badanie gęstości gazów i odkrycie, wspólnie z Sir W. Ramsayem, argonu).

Własność opisaną w twierdzeniu Lorda Rayleigha odkrył ponownie w 1926 roku kanadyjski matematyk Samuel Beatty (1881–1970), *Amer. Math. Monthly* 33 (1926), no 3, Problem 3173. Rozwiązanie: *Monthly* 34 (1927), str. 159.

Brytyjski fizyk Lord Rayleigh w 1877 roku w książce *The Theory of Sound* (vol. I, str. 123) opisał prawidłowość, którą można wyrazić następująco:

Twierdzenie 1. Niech α i β będą dodatnimi liczbami niewymiernymi takimi, że $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Niech $[x]$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x . Wówczas dla zbiorów

$$A = \{[n\alpha] : n = 1, 2, \dots\}, \quad B = \{[n\beta] : n = 1, 2, \dots\}$$

mamy: (i) $A \cap B = \emptyset$ oraz (ii) $A \cup B = \mathbb{N}$.

Ciągi liczb naturalnych, które spełniają własności (i) oraz (ii), nazywamy *komplementarnymi*.

Dowód tego twierdzenia nie jest trudny. Przede wszystkim zauważmy, że jeśli α i β są liczbami niewymiernymi, to żadna z liczb postaci $n\alpha$, $n\beta$ (gdzie $n \in \mathbb{N}$) nie jest liczbą naturalną. Ponadto warunek $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ gwarantuje, że $\alpha > 1$ i $\beta > 1$.

Załóżmy, że istnieją liczby $m, n \in \mathbb{N}$ takie, że $[m\alpha] = [n\beta] = p \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$p < m\alpha < p + 1 \quad \text{i} \quad p < n\beta < p + 1.$$

Stąd

$$\frac{m}{p+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m}{p} \quad \text{i} \quad \frac{n}{p+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{n}{p}.$$

Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy nierówność

$$\frac{m+n}{p+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 < \frac{m+n}{p},$$

z której wynika, że

$$p < m+n < p+1,$$

a to jest niemożliwe w zbiorze liczb naturalnych. Dowodzi to prawdziwość własności (i).

Zauważmy, że jedna z liczb α , β należy do przedziału $(1, 2)$, a to gwarantuje, że $1 \in A \cup B$. Istotnie, jeśli $\alpha > 2$ i $\beta > 2$, to $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2}$ i $\frac{1}{\beta} < \frac{1}{2}$, więc $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1$, co przeczy założeniu.

Jeśli liczba naturalna $q \geq 2$ i $q \notin A \cup B$, to istnieją liczby naturalne m i n takie, że

$$\alpha m < q < q+1 < \alpha(m+1) \quad \text{i} \quad \beta n < q < q+1 < \beta(n+1).$$

Wynikają stąd nierówności

$$\frac{m}{q} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m+1}{q+1} \quad \text{i} \quad \frac{n}{q} < \frac{1}{\beta} < \frac{n+1}{q+1},$$

które po dodaniu stronami dają nierówność

$$\frac{m+n}{q} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 < \frac{m+n+2}{q+1}.$$

Stąd

$$m+n < q < q+1 < m+n+2,$$

co jest niemożliwe w zbiorze liczb naturalnych. Zatem $A \cup B = \mathbb{N}$.

Przykład. Jeśli $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ (ϕ to tzw. złota proporcja), to $\beta = 1 + \phi = \phi^2$ i

$$A = \{[n\phi] : n = 1, 2, \dots\} = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, \dots\},$$

$$B = \{[n\phi^2] : n = 1, 2, \dots\} = \{2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, \dots\}.$$

Dla par

$$(1) \quad (a_n, b_n) = ([n\phi], [n\phi^2]), \quad n = 1, 2, \dots,$$

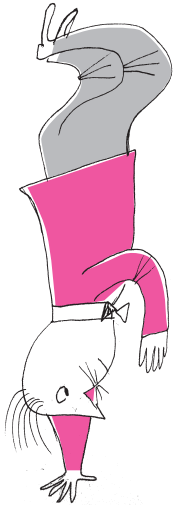
czyli (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10) itd., mamy następujące własności:

- $b_n - a_n = n$.

Istotnie, ponieważ $\phi^2 = 1 + \phi$, więc

$$b_n - a_n = [n(1 + \phi)] - [n\phi] = [n + n\phi] - [n\phi] = n + [n\phi] - [n\phi] = n.$$

Zatem n -ta para jest postaci $(a_n, a_n + n)$.



Złota proporcja to podział odcinka na dwie części tak, by stosunek dłuższej z nich (a) do krótszej (b) spełniał proporcję $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$.

- (••) a_n jest najmniejszą liczbą naturalną, która nie wystąpiła w żadnej parze (a_k, b_k) dla $k < n$. Istotnie, niech c będzie najmniejszą liczbą naturalną, która nie wystąpiła wśród liczb a_k ani wśród liczb b_k dla $k \leq n-1$. Wtedy, zgodnie z twierdzeniem Lorda Rayleigha, liczba c musi wystąpić w zbiorze liczb a_k lub b_k dla $k \geq n$. Ponieważ najmniejszą liczbą naturalną w tych zbiorach jest liczba a_n ($a_j < a_{j+1}$, $b_j < b_{j+1}$ oraz $a_j < b_j$ dla wszystkich $j = 1, 2, \dots$), więc $c = a_n$.

Również odwrotnie, pary liczb spełniające warunki (•) i (••) są postaci (1).

Oto dwie sytuacje, w których znajomość twierdzenia Lorda Rayleigha jest pomocna.

Problem olimpijski. Na XX Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej (Bukareszt, 1978 r.) w pierwszym dniu zawodów pojawiło się następujące zadanie konkursowe:

Zadanie. Zbiór liczb $\{1, 2, \dots\}$ jest sumą dwóch rozłącznych podzbiorów $\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$ i $\{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$, gdzie

$$f(1) < f(2) < \dots < f(n) < \dots,$$

$$g(1) < g(2) < \dots < g(n) < \dots,$$

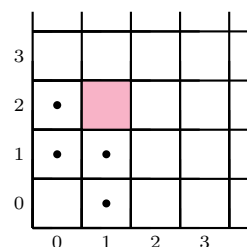
i $g(n) = f(f(n)) + 1$ dla wszystkich $n \geq 1$. Wyznaczyć $f(240)$.

Dla ucznia, który nie zna twierdzenia Lorda Rayleigha, problem wydaje się (jest?) beznadziejny (patrz J. Browkin, *Zbiór zadań z olimpiad matematycznych*, tom 6, WSiP, Warszawa 1983, zadanie 94).

Wiedza o twierdzeniu Lorda Rayleigha radykalnie zmienia sytuację. Załóżmy, że

$$f(n) = [\alpha n] \text{ i } g(n) = [\beta n],$$

Opis gry Wythoffa w języku szachów: figura królowej z szachów jest umieszczona na szachownicy nieograniczonej od góry i z prawej strony. Każdy z dwóch graczy, na przemian, wykonuje ruch królową. W jednym ruchu gracz może przesunąć królową o dowolną dostępną liczbę pól w dół albo na lewo, albo po przekątnej w kierunku boków ograniczających szachownicę. Zwycięzcą gry zostaje gracz, który pierwszy umieści królową w rogu szachownicy.



Rys. 1. Gracz B może wykonać ruch tylko tam, gdzie są kropki

gdzie α i β są pewnymi liczbami niewymiernymi, takimi że $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Liczby α, β spróbujemy wyznaczyć z warunku $g(n) = f(f(n)) + 1$, czyli

$$(2) \quad [\beta n] = [\alpha[\alpha n]] + 1 \text{ dla } n \geq 1.$$

Ponieważ przy $n \rightarrow \infty$, $\frac{[\beta n]}{n} \rightarrow \beta$ i $\frac{[\alpha n]}{n} \rightarrow \alpha$, więc

$$\frac{[\alpha[\alpha n]]}{n} = \frac{[\alpha[\alpha n]]}{[\alpha n]} \cdot \frac{[\alpha n]}{n} \rightarrow \alpha \cdot \alpha = \alpha^2.$$

Zatem dzieląc obie strony równości (2) przez n i przechodząc z $n \rightarrow \infty$, otrzymujemy $\beta = \alpha^2$. Wówczas z równości $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ mamy $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ i $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \approx 1,61803$ oraz $\beta = 1 + \alpha = \phi^2 \approx 2,61803$.

Oczywiście ϕ i ϕ^2 są liczbami niewymiernymi takimi, że $\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$. Zatem funkcje $f(n) = [\phi n]$ i $g(n) = [\phi^2 n]$ spełniają twierdzenie Lorda Rayleigha, czyli większość warunków zadania. Pozostaje pokazać, że spełniają one warunek (2). Nierówność $[\phi n] \leq \phi n < [\phi n] + 1$ mnożymy przez ϕ i mamy

$$\phi[\phi n] \leq \phi^2 n < \phi([\phi n] + 1) < \phi[\phi n] + 2,$$

$$[\phi[\phi n]] \leq [\phi^2 n] \leq [\phi([\phi n] + 1)] \leq [\phi[\phi n] + 2],$$

czyli

$$f(f(n)) \leq g(n) \leq f(f(n) + 1) \leq f(f(n)) + 2.$$

Ponieważ między liczbami naturalnymi $f(f(n))$ i $f(f(n)) + 2$ zawarta jest dokładnie jedna liczba naturalna, więc $g(n) = f(f(n)) + 1$. Oznacza to, że funkcje $f(n) = [\phi n]$ i $g(n) = [\phi^2 n]$ spełniają warunki zadania. Ponadto nietrudno wykazać za pomocą indukcji, że istnieje co najwyżej jedna para funkcji f i g , spełniających te warunki. Wobec tego

$$f(240) = \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot 240 \right] = 120 + [120\sqrt{5}] = 388.$$

Gra Wythoffa. W 1907 roku holenderski matematyk Willem Abraham Wythoff opisał następującą grę: para nieujemnych liczb całkowitych (P, Q) jest punktem początku gry. Gra toczy się między dwoma zawodnikami, którzy wykonują ruchy na przemian. Ruch każdego gracza polega na zastąpieniu punktu (P, Q) przez jeden z punktów

$$(P - M, Q), (P, Q - M) \text{ lub } (P - M, Q - M),$$

gdzie $M \geq 1$ jest liczbą naturalną i nowo uzyskaną parę (P', Q') tworzą nieujemne liczby całkowite. Pierwszy gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa (lub równoważnie, wygrywa gracz, który pierwszy osiągnie pozycję $(0, 0)$).

Przykładowa rozgrywka:

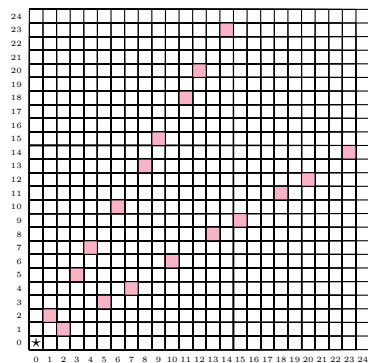
$$(16, 21) \xrightarrow{A} (16, 13) \xrightarrow{B} (12, 9) \xrightarrow{A} (5, 9) \xrightarrow{B} (2, 6) \xrightarrow{A} (2, 1) \xrightarrow{B} (\dots).$$

W tym momencie gracz B ma możliwość ruchu na jedną z czterech pozycji (rys. 1): $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$. Bez względu na to, jaki ruch wykona gracz B, w następnym ruchu gracz A osiągnie pozycję $(0, 0)$ i zostanie zwycięzcą.

Gra może dostarczyć przyjemności, póki jeden z graczy nie odkryje strategii wygrywającej, tj. takiego postępowania, które przy możliwie najlepszej grze przeciwnika i tak zapewni mu zwycięstwo, oczywiście jeśli sam nie popełni błędów. Kto chce zmierzyć się z problemem, niech przerwie dalszą lekturę.

Rozstrzygnięcie zawiera twierdzenie.

Twierdzenie 2 (W.A. Wythoff, 1907 r.). W grze Wythoffa strategia wygrywająca istnieje jedynie dla pozycji postaci (a_n, b_n) lub (b_n, a_n) , gdzie $(a_n, b_n) = ([n\phi], [n\phi^2])$, $n \geq 1$.



Rys. 2

Oznaczmy przez \mathcal{W} zbiór pozycji, o których mówi twierdzenie 2.

Uzasadnienie tego rezultatu wykorzystuje obserwacje z omawianego wcześniej przykładu.

Po pierwsze, wykonując ruch z pozycji należącej do zbioru \mathcal{W} , przechodzimy na pozycję, która nie należy do zbioru \mathcal{W} (rys. 2).

Na przykład nie ma żadnego ruchu z pozycji (a_n, b_n) do pozycji (a_m, b_m) lub (b_m, a_m) , gdzie $m < n$. Jest tak, bo z określenia a_n (patrz (••)) $a_n \neq a_m$ i $a_n \neq b_m$. Ponadto $b_n > b_m > a_m$, zatem $b_n \neq a_m$ i $b_n \neq b_m$. Ruch wzdłuż przekątnej też nie daje sukcesu, bo $b_n - a_n = n$, a $b_m - a_m = m$.

Po drugie, zawsze istnieje ruch z pozycji nienależącej do zbioru \mathcal{W} na pozycję należącą do zbioru \mathcal{W} lub na pozycję $(0, 0)$.

Niech gracz znajduje się w pozycji $(a, b) \notin \mathcal{W} \cup \{(0, 0)\}$. Jeśli $a = b$ lub $a = 0$, lub $b = 0$, to jeden ruch pozwala znaleźć się na pozycji $(0, 0)$ i zostać zwycięzcą.

Załóżmy, że $0 < a < b$. Przyjmijmy najpierw, że $a = a_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $b > b_n$, to istnieje bezpośredni ruch na pozycję (a_n, b_n) . W przeciwnym razie $a_n < b < b_n$. Niech $m = b - a$. Wtedy $m < n = b_n - a_n$ (patrz (•)), więc $a_m < a_n$ i istnieje ruch na pozycję (a_m, b_m) . W końcu, jeśli $a \neq a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to zgodnie z twierdzeniem Lorda Rayleigha $a = b_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $b > a \geq a_n$ i istnieje ruch na pozycję (b_n, a_n) . Gdy $0 < b < a$, rozumowanie jest podobne.

Wniosek. Jeśli w grze Wythoffa gracz będzie wykonywał ruch z pozycji $(a, b) \in \mathcal{W}$ lub $a = b$, lub $a = 0$ lub $b = 0$ i nie popełni błędu, to zostanie zwycięzcą!

Cykle Milankovića

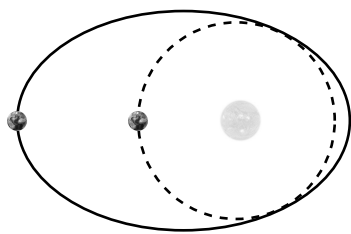
Michał BEJGER

Okazuje się, że astrologowie mają rację: położenie planet ma kluczowy wpływ na nasze życie. Oczywiście jednocześnie mylą się, ponieważ wpływ planet jest inny, niż to wynika z wróżb i horoskopów. Ziemia jest jedną z planet Układu Słonecznego i jako taka podlega grawitacyjnym wpływom innych ciał niebieskich: Słońca, Księżyca i dużych planet, w szczególności Jowisza. Wpływy te są tak istotne, że kształtują klimat na Ziemi w długiej skali czasowej rzędu dziesiątek i setek tysięcy lat. W szczególności epizodyczna natura okresów zlodowaceń i interglacjalów (okresów, w których lodowce ustępują), która jest udokumentowana w skamieniałościach z ostatnich kilku milionów lat, powodowana jest przede wszystkim cyklicznymi zmianami w parametrach orbitalnych Ziemi w ruchu wokół Słońca.

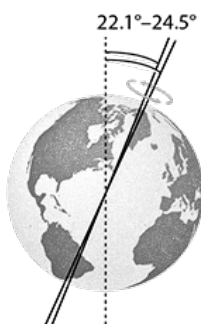
Najważniejsze efekty planetarne odpowiedzialne za cykliczne zmiany klimatu to periodyczności w mimośrodzie orbity Ziemi, nachyleniu osi obrotu Ziemi do płaszczyzny orbity oraz precesji osi obrotu. Te periodyczne zmiany nazywane są *cyklami Milankovića*. Wymienione periodyczności są modyfikowane przez dodatkowe efekty: zmiany w nachyleniu płaszczyzny orbity Ziemi względem całkowitego orbitalnego momentu pędu Układu Słonecznego, wyznaczonego z grubsza przez układ Słońce–Jowisz, oraz precesję orbity Ziemi, czyli ruch peryhelium.

Cykle są powiązane z ilością promieniowania słonecznego docierającego do powierzchni Ziemi. Głównym czynnikiem zmian klimatu nie jest wyłącznie całkowita ilość energii docierająca ze Słońca na Ziemię, ale sezonowość w nadmiarze lub niedoborze energii na określonym obszarze Ziemi, np. północnej półkuli. W związku z tym okresy powiększonej lub zmniejszonej ilości promieniowania słonecznego bezpośrednio wpływają na skomplikowany układ zależności lądów i oceanów definiujący globalny klimat Ziemi, m.in. na pojawianie się, wzrost i cofanie się lodowców i związane z tym zmniejszanie lub zwiększanie się wilgotności atmosfery.

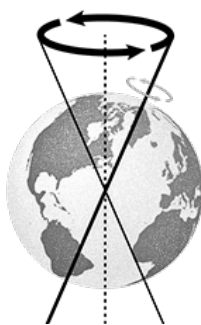
Milutin Milanković żył podobnie jak Tesla na przełomie XIX i XX wieku, był astronomem i klimatologiem, który zajmował się charakterystyką klimatów planet w Układzie Słonecznym i wyjaśnieniem długoterminowych zmian klimatu na Ziemi spowodowanych zmianami położenia Ziemi w stosunku do Słońca. Podobne hipotezy były proponowane w XIX wieku m.in. przez Josepha Adhemara i Jamesa Crolla, ale dopiero Milanković gruntownie przeanalizował przyczyny zmian.



a)



b)



c)

Mechanizmy odpowiedzialne za cykle Milankovića:

- a) zmiana mimośrodowości orbity Ziemi,
- b) zmiana nachylenia osi obrotu Ziemi,
- c) precesja osi obrotu.

Pierwszy z trzech cykli Milankovića dotyczy mimośrodu (ekscentryczności) orbity Ziemi, czyli kształtu elipsy orbity Ziemi w ruchu wokół Słońca (rys. a). Parametr ten jest zdefiniowany jako $\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, gdzie a i b to, odpowiednio, wielka i mała półoś orbity. W przypadku orbity Ziemi ϵ zmienia się od 0 do 5% w cyklu około 100 tys. lat, periodycznie zmienia się więc minimalna i maksymalna odległość Ziemia–Słońce, co z kolei zmienia ilość energii na powierzchni Ziemi w różnych porach roku. Obecnie różnica w odległości Ziemia–Słońce w aphelium i peryhelium to nieco ponad 2%, co przekłada się na 5% różnicy w otrzymywanej energii. Gdy orbita Ziemi jest najbardziej ekscentryczna, ilość energii słonecznej otrzymywanej w peryhelium jest około 25% większa niż w aphelium.

Drugi cykl wywołuje zmianą kąta nachylenia osi obrotu Ziemi w stosunku do płaszczyzny orbity (rys. b). Występuje on z częstotliwością około 41 tys. lat, a samo nachylenie zmienia się od 22,1° do 24,5°; obecnie wynosi około 23,44°. Jak wiadomo, nachylenie jest odpowiedzialne za pory roku. Z powodu cyklicznych zmian tego kąta zmienia się zatem znaczenie pór roku. Przy mniejszym nachyleniu promieniowanie słoneczne Słońca jest bardziej równomiernie rozłożone między zimą a latem, ale zwiększa za to różnicę w sumarycznej ilości energii deponowanej w rejonie równika i na biegunach.

Trzeci cykl Milankovića jest związany z precesją osi obrotu Ziemi, czyli zmianą kierunku osi obrotu (rys. c). Precesja jest wywołana oddziaływaniem grawitacyjnym Słońca i Księżyca. Obecnie oś obrotu Ziemi jest wycelowana na północnej półkuli w okolice gwiazdy Polaris (α Ursae Minoris), zwanej z tego powodu Gwiazdą Północną, a Ziemia jest w peryhelium orbity (najbliżej Słońca) podczas zimy na północnej półkuli. Jest to sytuacja tymczasowa, ponieważ precesja osi obrotu ma okres około 26 tys. lat (okres zwany rokiem platońskim). Za około 11 tys. lat oś obrotu będzie wskazywać na Wega (α Lyrae). Wtedy zima na półkuli północnej będzie występować, gdy Ziemia znajdzie się w aphelium orbity. Oznacza to zaostrzenie klimatu na półkuli północnej: zimy będą wtedy zimniejsze, a lata gorętsze. Cykl związany z precesją trwa w istocie nieco krócej niż rok platoński, około 23 tys. lat, ponieważ jest modyfikowany przez precesję całej orbity Ziemi: kierunek Słońce–peryhelium, ustalany względem odległych gwiazd, zmienia się z okresem około 112 tys. lat. Dla kompletności wspomnijmy jeszcze jedną periodyczność w ewolucji orbity Ziemi, to jest zmianę nachylenia płaszczyzny orbity Ziemi w stosunku do płaszczyzny prostopadłej do momentu pędu układu (płaszczyzny niezmienniczej Laplace’a). Okres zmian wynosi około 100 tys. lat, czyli tyle samo co zmiany mimośrodu orbity. Obecnie nachylenie płaszczyzny orbity wynosi około 1,57°.

Czemu to jest ważne? Ilość energii i istotność pory roku, w których Ziemia jest bardziej lub mniej oświetlana, wpływają w długiej skali czasowej na rosnącą lub malejącą grubość pokrywy lodowej, a przez to także na poziom wody w globalnym oceanie. W epokach lodowcowych więcej wody jest uwięzionej w lodzie, a więc w atmosferze jest jej mniej, klimat staje się zatem bardziej suchy, co oczywiście ma niebagatelne znaczenie dla roślin i zwierząt. Łądogłód powiększa się, gdy Ziemia jest w większej odległości od Słońca latem, a jednocześnie nachylenie osi obrotu planety jest małe. Relatywnie ciepła zima sprzyja opadom na biegunach, a stosunkowo mniejsza ilość energii otrzymywanej podczas chłodnego lata nie jest w stanie roztopić całości śniegu. Gdy jednak Ziemia latem jest bliżej Słońca, a nachylenie osi obrotu jest większe, lód topi się sprawniej i następuje wycofanie się lodowców. Regularne okresy suszy i epok wilgotnych doprowadziły m.in. do szybkiej ewolucji hominidów w wielkiej dolinie ryftowej we wschodniej Afryce i cyklicznych ekspedycji z Afryki do Europy, a stamtąd do Azji, Ameryk i Australii.

Epoka periodycznych zlodowaceń, czyli czwartorzęd, jeden z okresów ery kenozoicznej (*nowego życia*) rozpoczął się na Ziemi około 2,6 miliona lat temu. Przez większość czasu okresy ocieplenia i ochłodzenia występowały w cyklu 41 tys. lat, zgodnym ze zmianami kąta nachylenia osi obrotu Ziemi. Około miliona lat temu, z nie do końca znanych przyczyn, klimat zaczął oscylować z okresem 100 tys. lat związanym ze zmianami mimośrodu orbity. Okresy lodowcowe i interglacjalne trwają od tego czasu dłużej, ale są też bardziej ekstremalne. Jednocześnie ostatnie około 11,7 tys. lat, czyli holocen (*nowy kształt*), który rozpoczął się z końcem ostatniego zlodowacenia, to najdłuższy od pół miliona lat okres stabilnego i ciepłego klimatu; być może dlatego, że wszystkie parametry orbitalne odpowiedzialne za cykle Milankovića mają obecnie średnie wartości. Znajdujemy się w okresie interglacjalnym, w którym wzrost temperatury jest wywołany przez postępujące w krótkiej skali czasowej globalne ocieplenie. Nie ma ono nic wspólnego z cyklami Milankovića, ale niestety bardzo wiele z bezpośrednią działalnością człowieka.

Jej Wysokość Natura

Lato już za nami, a jesień z nami. Lato, spędzane w tym roku w kraju, przyniosło dużo ciekawych obserwacji i odkryć – na miarę każdego z nas. Mój syn pokazał mi aplikację, dzięki której mogę sprawdzić nazwy gwiazd nade mną (mam taką słabość, lubię znać nazwę góry, na którą idę, lub gwiazdy, planety, którą zobaczyłam w sąsiedztwie rąbka Księżyca).

Robert Scott, tragiczny zdobywca bieguna południowego w 1912 roku (dotarł tam jako drugi, wracając zmarł), zostawił w namiocie notatki i list do żony, w którym napisał: „zainteresuj chłopaka przyrodą, to lepsze niż sport”. Peter Scott tworząc Centrum Ochrony Ptaków Wodnych i Mokradeł w Slimbridge, spełnił testament ojca. Jest dziś uznawany za autorytet m.in. w badaniach łabędzi, założył w 1963 roku Czerwoną Księgę gatunków zagrożonych, w której w roku 2019 znalazło się ponad 105 tysięcy gatunków.

Są miejsca na Ziemi, gdzie w sezonie jesiennym szpaki dokonują synchronicznych lotów. Mogą w nich brać udział nawet dziesiątki tysięcy ptaków. Lecą wielką chmurą, każdy z prędkością kilkudziesięciu kilometrów na godzinę. Jak to się dzieje, że nie wpadają na siebie? Odpowiedzi na to pytanie naukowcy udzielili niedawno: każdy ptak koordynuje swoją pozycję z sześcioma otaczającymi go towarzyszami lotu. Czas reakcji (zmiana kierunku) to 0,00001 sekundy. Niby proste, a uwierzyć trudno. I cel takich lotów jeszcze jest dyskutowany... Tajemnica.

Ptaki, stale obecne wokół nas, dostarczają niezmierną przestrzeń do prac badawczych. Jak to się dzieje, że sowy – jedyne wśród ptaków – latają bezszelestnie (można mierzyć akustykę tych lotów)? Kto wymyślił mewom procedurę tupania w podmokłym terenie, które dżdżownice biorą za wędrowanie kreta i wychodzą na powierzchnię? A tam już tupiący ptak czeka! Jakie ptaki gniazdują w norach ziemnych, a łączną długość ich korytarzy w kolonii na wyspach Farne ocenia się na 80 km? Do danego gniazda przyzwyczajają się i wracają na następny sezon lęgowy.

Maskonur – ptak wodny z rodziny alk, zagrożony wyginięciem, w kolorach jaskrawych, pomarańczowych i czarno-białych.

Mieszkańcy jakiego kraju mają wyłączność na zbiór najdelikatniejszego puchu edredonów? Koldra z tego puchu może kosztować ćwierć miliona euro?

Islandia. Polarną odzież wykonaną z tego puchu wycenia się łącznie na 30 mln euro. Puch podbiera się z wyściółki gniazda. Edredony to kaczki żyjące na wybrzeżach mórz północnej półkuli.

Z ptakami dzielimy około 50 genów związanych z mową, ekspresją muzyczną i śpiewem. Śpiew ptaków nie jest wrodzony, muszą się go nauczyć od rodziców. W 1784 roku Amadeusz Mozart kupił szpaka, który gwizdał melodię jego koncertu g-dur, nim jeszcze koncert ten został publicznie przedstawiony. Przez kolejne 3 lata byli „muzycznie” nierozłączni, a po śmierci ptaka Mozart napisał o nim pożegnalny wiersz.

Jest też prawdziwa osoba, Sacha Dench, która latała na motolotni z łabędziami.

Może kojarzycie nazwisko, nosiła je tajemnicza M. (Judi Dench, brytyjska aktorka) z filmów o Jamesie Bondzie. Rosjanie lubią filmy o agencji 007 i pewnie dlatego udzielili zezwolenia na lot wzdłuż północnych wybrzeży Syberii. Nie wykluczam, że Sachę naśladował Władimir Putin, przeskądając w locie (chyba?) żurawiom.

Łabędzie Bewicka (bewiki) leciały aż do wysp brytyjskich, a Sacha towarzyszyła im w całej tej drodze, lądując tu i ówdzie, w Polsce też. Przeleciała, z jednym małym wypadkiem, 7 tysięcy km, przez 11 krajów.

Książka „Jej wysokość gęś” Jerzego Karczewskiego dostarczyła mi tych wszystkich wiadomości i anegdot w wielkiej liczbie. Czytałam ją w lipcu obok karmnika z nasionami słonecznika, w okolicy łąkowo-ogrodowej. Odwiedzały mnie sikorki, kowaliki, dzięcioły, synogarlice, mazurki. Od czasu zachłannej lektury tej książki szukam ludzi, których udałoby mi się do niej zachęcić... Udało się?

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)



Rozwiązanie zadania M 1651.

Zauważmy, że jeśli na ścianach pierwszej kości mam a_i oczek, a na ścianach drugiej kości mam b_i oczek ($i = 1, 2, \dots, 6$), to prawdopodobieństwo uzyskania sumy oczek równej s jest równe współczynniki przy x^s w wielomianie

$$\frac{1}{36} \sum_{i=1}^6 x^{a_i} \sum_{i=1}^6 x^{b_i}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^6 x^i \right)^2 &= (x(x^2 + x + 1)(x^3 + 1))^2 = \\ &= x(x^2 + x + 1)(x + 1) \cdot \\ &\quad \cdot x(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)^2 = \\ &= (x + 2x^2 + 2x^3 + x^4) \cdot \\ &\quad \cdot (x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8). \end{aligned}$$

W tej sytuacji kości, na których ściankach znajdują się następujące sekwencje oczek: (1, 2, 2, 3, 3, 4) oraz (1, 3, 4, 5, 6, 8), spełniają warunki zadania.

Optymalizacja ruchu pojazdów za pomocą kwantowego wyżarzania

*Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Paweł GORA*

W informatyce wielokrotnie spotykamy się z sytuacjami, gdy tworzone algorytmy są w pewnym stopniu inspirowane przyrodą. Mamy na przykład algorytmy genetyczne, mrówkowe, rojowe czy symulowane wyżarzanie. Okazuje się, że obliczenia mogą być nie tylko inspirowane przez przyrodę, ale również przez przyrodę wykonywane!

Dużo mówi się ostatnio o komputerach kwantowych, w których obliczenia przeprowadzane są zgodnie z prawami mechaniki kwantowej i dzięki tym prawom. Najmniejszą i niepodzielną jednostką informacji kwantowej jest kubit, jest on odpowiednikiem bitu, będącego podstawową jednostką informacji w przypadku komputerów klasycznych. Stany kubitu mogą być formalnie reprezentowane jako wektory jednostkowe w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta nad ciałem liczb zespolonych. Brzmi skomplikowanie? Cóż, wystarczy wyobrazić sobie, że mamy 2-wymiarową przestrzeń punktów oraz 2 wektory, które oznaczmy jako $|0\rangle$ i $|1\rangle$ (będą one odpowiadały wartościom 0 i 1, tak jak przy standardowych bitach w przypadku komputerów klasycznych). Wektory te stanowią będą ortonormalną bazę naszej przestrzeni (czyli ich norma to 1 oraz ich iloczyn skalarny to 0). Dowolny punkt naszej przestrzeni można wtedy zapisać jako $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, gdzie a i b są liczbami zespolonymi. Stany kubitów są wektorami o normie 1 w tej przestrzeni, czyli zawsze będzie $|a|^2 + |b|^2 = 1$ oraz – o ile oba współczynniki są niezerowe – mówimy, że stan kubitów jest w superpozycji stanów $|0\rangle$ i $|1\rangle$. Obliczenia kwantowe mogą sprawić, że zmieniają się stany kubitów, czyli zmieniają się wartości a i b (zachowując założenie, że $|a|^2 + |b|^2 = 1$), a na koniec obliczeń, aby otrzymać wyniki, należy jeszcze wykonać pomiar, który zaburza superpozycję – z prawdopodobieństwem $|a|^2$ odczytamy wartość 0, a z prawdopodobieństwem $|b|^2$ wartość 1 (wynik obliczeń może być więc niedeterministyczny). Oczywiście w komputerze kwantowym możemy mieć wiele kubitów (podobnie jak w komputerze klasycznym mamy wiele bitów), mając n kubitów, możemy przygotować stan będący superpozycją stanów, które reprezentują wszystkie 2^n liczby n -bitowe. Dzięki temu możemy w pewnym sensie wykonywać obliczenia na wszystkich tych liczbach jednocześnie.



Czym dokładnie są jednak te kwantowe obliczenia? Obecnie istnieją 2 główne podejścia do obliczeń kwantowych: bazujące na bramkach kwantowych (analogicznie do bramek logicznych w przypadku komputerów klasycznych) oraz bazujące na algorytmie kwantowego wyżarzania w przypadku tzw. komputerów adiabatycznych. O modelach obliczeń kwantowych Czytelniczy Delti mogli przeczytać w artykule *O modelach obliczeń komputerowych* (Δ_{17}^{12}), a o kwantowym wyżarzaniu w artykule *Kwantowe wyżarzanie „klasycznej” optymalizacji* (również Δ_{17}^{12}). Co ciekawe, te 2 modele obliczeń są równoważne, można za ich pomocą wykonywać takie same obliczenia (ale nie tak samo i niekoniecznie w takim samym czasie). W tym artykule przedstawiam interesujące zastosowanie kwantowego wyżarzania, przypomnę więc najpierw jego główne założenia.



Rozwiązanie zadania M 1653.
Jedno pytanie to za mało, gdyż dla dowolnego a wielomiany $P_1(x) = x - a$ i $P_2(x) = a - x$ dadzą tę samą odpowiedź. Okazuje się, że dwa pytania są już wystarczające! Na początku Małgosia może zapytać o wartość $s = P(1)$. Jest to suma wszystkich współczynników wielomianu P , zatem jest nie mniejsza od każdego ze współczynników. Teraz wystarczy poprosić o $c = P(s + 1)$; reprezentacja tej liczby w systemie o podstawie $s + 1$ da Małgosi szukane współczynniki wielomianu P .

Jak wspomniałem, kwantowe wyżarzanie może być realizowane na komputerach adiabatycznych (słowo „adiabatyczny” oznacza, że w trakcie obliczeń nie ma transferu ciepła do ani z otoczenia). Ważnym pojęciem związanym z obliczeniami adiabatycznymi jest Hamiltonian, który w tym przypadku można interpretować jako przyporządkowanie danemu stanowi układu fizycznego (np. układu kubitów) jego energii. Pomysł obliczeń na komputerach adiabatycznych bazuje na tym, że możemy stosunkowo łatwo przygotować układ początkowy kubitów, którego energia opisywana jest Hamiltonianem, dla którego minimum osiągane jest wtedy, gdy wszystkie kubity są w stanie superpozycji. Następnie poprzez modyfikację natężenia pola magnetycznego działającego na



Rozwiązanie zadania F 1010.

Niech masa meteoroidu wynosi m , masa Ziemi M , a stała grawitacji G . Podczas ruchu w polu grawitacyjnym Ziemi zachowany jest moment pędu $L = mv_0d$. Zachowana jest także energia całkowita E :

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{mv_0^2}{2},$$

gdzie r oznacza odległość meteoroidu od środka Ziemi. Ostatnia równość wynika z faktu, że bardzo daleko od Ziemi $r \rightarrow \infty$, energia potencjalna, $GMm/r \rightarrow 0$. W każdym punkcie toru ruchu prędkość meteoroidu możemy rozłożyć na składową v_r , równoległą do odcinka łączącego środki Ziemi i meteoroidu, oraz składową v_ϕ do tego odcinka prostopadłą. Mamy: $L = mrv_\phi = mv_0d$ oraz $GM = gR^2$, co pozwala energię całkowitą zapisać jako:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_\phi^2}{2} - \frac{gR^2m}{r}.$$

W punkcie toru najbliższym Ziemi ($r = D$) mamy $v_r = 0$. Po skorzystaniu z faktu, że $v_\phi = v_0d/r$, otrzymujemy równanie na poszukiwaną odległość D :

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2 d^2}{D^2} - \frac{2gR^2}{D} &= v_0^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow D^2 + \frac{2gR^2}{v_0^2} D - d^2 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest:

$$D = \sqrt{d^2 + \frac{g^2 R^4}{v_0^4}} - \frac{gR^2}{v_0^2}.$$

Ziemię ominą ($D > R$) meteoroidy, dla których

$$d > R \sqrt{1 + \frac{2gR}{v_0^2}} = R \sqrt{1 + \frac{v_{II}^2}{v_0^2}},$$

gdzie v_{II} oznacza drugą prędkość kosmiczną (prędkość ucieczki z powierzchni Ziemi): $v_{II}^2 = 2gR$.

ten układ kubitów możemy doprowadzić go do stanu, w którym energia układu opisywana jest za pomocą innego Hamiltonianu, związanego z problemem obliczeniowym, który nas interesuje i którego minimum odpowiadałoby rozwiązaniu naszego problemu. Przy założeniu, że zmiana natężenia pola magnetycznego odbywa się dostatecznie wolno i ewolucja układu kubitów odbywa się adiabatycznie, układ kubitów pozostanie cały czas w stanie podstawowym, czyli w takim, w którym Hamiltonian (zmieniający się tym razem w czasie) cały czas będzie osiągał minimum. Dzięki temu na końcu kubity powinny również być w stanie odpowiadającym minimum ostatecznego Hamiltonianu, czyli powinny wskazać nam rozwiązanie naszego problemu. Proces ten można opisać wzorem:

$$H(s) = (1 - s)H_0 + sH_1,$$

gdzie H_0 jest Hamiltonianem początkowego układu kubitów, H_1 jest Hamiltonianem docelowego układu, a s jest liczbą z przedziału $[0, 1]$ odpowiadającą natężeniu pola magnetycznego, zmieniającą się w sposób ciągły w czasie od 0 do 1. Zmieniając natężenie pola magnetycznego (a co za tym idzie – rozważany Hamiltonian) zachowujemy jednak cały czas warunek, że kubity są w stanie, który minimalizuje aktualny Hamiltonian układu. Ważną rolę w tym procesie odgrywa zjawisko kwantowego tunelowania, dzięki któremu kubity mogą zmieniać swój stan, aby układ „przeskakiwał” z minimum lokalnego do globalnego.

Taki model obliczeń jest obecnie nieco idealistyczny, ponieważ w praktyce trudno jest zapewnić adiabatyczność procesu obliczeń, a odpowiednio wolne tempo zmiany natężenia pola magnetycznego powodowałoby zbyt długi czas obliczeń. Oznacza to, że w praktyce układ może nie być w stanie pozostać cały czas w optimum globalnym. Proces, który realizuje odpowiednik obliczeń adiabatycznych w świecie rzeczywistym, nazywany jest *kwantowym wyżarzaniem*, a jego fizyczna realizacja jest obecnie dostępna w maszynach tworzonych przez kanadyjską firmę D-Wave. O szczegółach tego rozwiązania można przeczytać m.in. na stronach tej firmy, my zaś zajmiemy się w dalszej części artykułu obliczeniami, które można wykonywać za pomocą kwantowego wyżarzania.

Okazuje się, że projektowanie algorytmów rozwiązujących określone problemy w przypadku kwantowego wyżarzania wygląda zupełnie inaczej niż w przypadku tradycyjnych algorytmów projektowanych na maszyny Turinga (czy nawet na komputery bazujące na kwantowych bramkach). W tym przypadku istotą jest odpowiednie sformułowanie problemu obliczeniowego, a dokładnie: sformułowaniu go jako tzw. problem QUBO (Quadratic Unconstrained Binary Optimization), czyli problem minimalizacji wielomianu kwadratowego wielu zmiennych binarnych:

$$\text{QUBO}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i Q_{ij} x_i x_j,$$

gdzie $x_i \in \{0, 1\}$, $Q_{ij} \in \mathbb{R}$ dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Przy takim sformułowaniu, problem QUBO można następnie „przetłumaczyć” na model Isinga, który jest modelem ferromagnetyka, dla którego Hamiltonian odpowiada właśnie sformułowaniu QUBO. Dzięki temu dany problem ma już określoną interpretację fizyczną, można ją „zakodować” w komputerze kwantowym D-Wave. Dalej, zmieniając natężenie pola magnetycznego, sprawiamy, że obliczenia wykonuje przyroda, zgodnie z ideą kwantowego wyżarzania, ewoluując system zgodnie z równaniem Schrödingera.

Przyjrzyjmy się zatem, jak można za pomocą QUBO i kwantowego wyżarzania rozwiązywać problemy optymalizacyjne. Zaprezentuję dość prosty i pouczający przykład pochodzący z pracy *Traffic Flow Optimization Using a Quantum Annealer* autorstwa naukowców z D-Wave i Volkswagena. Dotyczy on zagadnienia optymalizacji kursowania taksówek w Pekinie. Naukowcy zbudowali najpierw graf reprezentujący rzeczywistą sieć drogową w Pekinie (oznaczymy



Rozwiązanie zadania F 1009.

(a) Początkowo obaj kierowcy jadą z tą samą prędkością v . Przyjmijmy, że podczas hamowania przyspieszenia obu pojazdów także są jednakowe i wynoszą $a = -gf$, ale drugi kierowca rozpoczyna hamowanie o τ później niż pierwszy. Odległość między pojazdami s_0 będzie „bezpieczna”, jeśli podczas hamowania odległość między nimi będzie stała dodatnia. Od rozpoczęcia hamowania do zatrzymania pojazdu każdy z nich przejedzie taką samą odległość, ale drugi przejedzie odcinek $v\tau$, nim zacznie hamować, i o tyle zmniejszy się odległość między pojazdami w chwili, gdy oba już się zatrzymają. Wynika stąd warunek $s_0 > v\tau$. Dla $\tau = 2$ s oznacza to, że

$$s_0 > 0,55v \text{ [km/h]}.$$

Przy prędkości 100 km/h $s_0 > 55$ m.

(b) Droga s , jaką przejedzie kierowca od chwili zauważenia przeszkody (np. kłody leżącej w poprzek drogi) do zatrzymania pojazdu wynosi

$$s = v\tau + \frac{v^2}{2a} = v\tau + \frac{v^2}{2fg}$$

i co najmniej taki odcinek drogi powinien widzieć kierowca, żeby uniknąć zderzenia z nieruchomą przeszkodą. Dla $f = 0,7$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ i prędkości $v = 100 \text{ km/h}$ otrzymujemy $s > 55 + 56 \text{ m} = 111 \text{ m}$. Na mokrym asfalcie, gdy $f \approx 0,3$, drugi składnik rośnie do 131 m i $s > 186 \text{ m}$.

jego zbiór krawędzi jako S) oraz pozyskali dane o 418 przejazdach taksówek z centrum Pekinu na lotnisko. Każda trasa przebiegała przez pewne krawędzie w grafie, trasy pochodziły z tygodnia kursowania taksówek (zbiór T-Drive), ale na potrzeby eksperymentu założono, że przejazdy odbywają się mniej więcej w tym samym czasie. Dla każdego przejazdu dodano 2 alternatywne trasy (z tego samego miejsca do tego samego celu). Poczyniono również założenie, że czas przejazdu przez dany odcinek drogi (krawędź grafu) jest proporcjonalny do kwadratu liczby pojazdów, które przejeżdżają przez daną krawędź (jest to pewne uproszczenie, ale rozsądne z punktu widzenia tych badań). Celem badań było znalezienie optymalnego (a przynajmniej lepszego niż początkowy) układu tras dla tych samych pojazdów, a więc dla każdego przejazdu trzeba było „wybrać” taką trasę (spośród 3 możliwych: początkowej oraz 2 dodanych), aby minimalizować łączny czas przejazdu wszystkich pojazdów. Jak można to zrobić za pomocą kwantowego wyżarzania?

Przyjmijmy, że mamy $n = 418$ pojazdów, każdy z nich ma do wyboru 3 różne trasy, a q_{ij} będą zmiennymi binarnymi określającymi, czy pojazd i wybrał trasę j (dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$), czyli $q_{ij} = 1$, jeśli pojazd i wybrał trasę j , w przeciwnym razie $q_{ij} = 0$. Dla każdego pojazdu i musi być spełniony warunek:

$$(1) \quad \left(\sum_{j=1}^3 q_{ij} - 1 \right)^2 = 0,$$

a ponieważ $q_{i1}^2 = q_{i1}$ (dla możliwych wartości 0 i 1), więc daje to warunek: $-q_{i1} - q_{i2} - q_{i3} + 2q_{i1}q_{i2} + 2q_{i1}q_{i3} + q_{i2}q_{i3} + 1 = 0$.

Przyjmijmy również, że $cost(s)$ jest łącznym kosztem (czasem) przejazdu wszystkich pojazdów przez krawędź s , a B_s jest zbiorem tych par (i, j) , które odpowiadają trasom zawierającym krawędź s . Zgodnie z założeniem, że czas przejazdu przez krawędź jest proporcjonalny do kwadratu liczby pojazdów, które przejeżdżają przez daną krawędź, możemy przyjąć, że $cost(s) = \left(\sum_{(i,j) \in B_s} q_{ij} \right)^2$.

W takim razie możemy zdefiniować optymalizowaną funkcję celu jako:

$$Obj = \sum_{s \in S} cost(s) + \lambda \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^3 q_{ij} - 1 \right)^2.$$

Pierwszy składnik odpowiada sumie kosztów przejazdu przez wszystkie krawędzie. Dodajemy drugi składnik z odpowiednio dużą wartością parametru λ , aby zapewnić, że w optymalnym rozwiązaniu ten składnik będzie równy 0, czyli zapewnione będzie spełnienie warunku (1) dla wszystkich pojazdów. Można już zauważyć, że optymalizowana funkcja kosztu Obj jest sformulowaniem QUBO dla $3n = 1254$ zmiennych q_{ij} . Autorzy pracy „zakodowali” to sformułowanie QUBO i przeprowadzili eksperymenty (kwantowe wyżarzanie) na maszynie

D-Wave 2X QPU. Obliczenia trwały 22 sekundy, po tym czasie udało im się znaleźć rozkład tras istotnie lepszy niż początkowy, co obrazuje poniższa grafika z tej pracy.

Kwantowe wyżarzanie nie jest doskonałą realizacją obliczeń adiabatycznych, nie możemy być więc pewni, że za każdym razem znajdziemy najlepsze rozwiązanie. Poza tym, o ile wiele praktycznych problemów da się zdefiniować jako problemy optymalizacji kombinatorycznej, to jednak nie zawsze łatwo jest znaleźć odpowiednią reprezentację QUBO. Jest to jednak ciekawa alternatywa dla obliczeń klasycznych i przypuszcza się, że to właśnie kwantowe wyżarzanie może przyczynić się do pierwszych praktycznych zastosowań obliczeń kwantowych.



Wizualizacja gęstości pojazdów na poszczególnych odcinkach – po lewej wynik dla początkowego układu tras, po prawej – dla tras znalezionych za pomocą kwantowego wyżarzania (im ciemniejszy obszar, tym większa gęstość pojazdów).

Kosinus kąta mrówczą pracą wyznaczany Grzegorz DERFEL*

* Politechnika Łódzka



Słońce jest pierwotnym źródłem energii dla naszej planety. Znakomita jej większość, bo ponad 99%, zawarta jest w promieniowaniu elektromagnetycznym. Widmo tego promieniowania, z maksimum w paśmie widzialnym, rozciąga się od nadfioletu do podczerwieni. Obejmuje fale o długościach z zakresu od 100 do 4000 nm. Jest zbliżone do widma ciała doskonale czarnego o temperaturze około 6000 K, zwłaszcza w części długofalowej. Dzięki tej energii średnia temperatura powierzchni Ziemi wynosi około 15°C. Wielkość tej energii określa się ilościowo tzw. stałą słoneczną. Jest to energia docierająca od Słońca do górnej granicy atmosfery ziemskiej przypadająca na jednostkę czasu i jednostkę powierzchni ustawionej prostopadle do kierunku promieni. Wbrew nazwie jej wartość nie jest stała, zmienia się bowiem w ciągu roku w granicach $\pm 4\%$ z powodu zmieniającej się odległości od Słońca. Jej średnia wartość wynosi 1381,6 W/m².

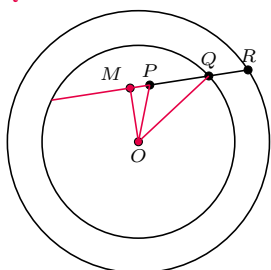
Z praktycznego punktu widzenia istotna jest ilość energii docierająca do powierzchni Ziemi. Na tę ilość mają wpływ zjawiska zachodzące w atmosferze, tj. pochłanianie i rozpraszanie energii. Uczestniczą w nich cząsteczki gazów atmosferycznych i cząstki zawieszonych w atmosferze pyłów i kropelek wody. Energię dostarczaną przez sumaryczne promieniowanie nazywa się nasłonecznieniem lub *insolacją*. To od niej zależy temperatura, do jakiej nagrzewa się powierzchnia Ziemi, choć skutek odbicia nie cała energia zostaje pochłonięta i zamieniona na ciepło.

Insolacja zależy od wielu czynników, między innymi od położenia Słońca na niebie, przezroczystości atmosfery, zachmurzenia, wysokości nad poziomem morza i ukształtowania powierzchni. Ilość energii pochłoniętej zależy od rodzaju nasłonecznianej powierzchni i jej nachylenia względem kierunku promieni padających. Niech I oznacza energię niesioną przez wiązkę o prostopadłym przekroju S . Na jednostkę takiej prostopadłej powierzchni przypada wtedy energia I/S . Jeśli ta sama wiązka pada na powierzchnię nachyloną tak, że normalna do niej tworzy z kierunkiem promieni kąt α , to energia rozkłada się na obszar $S/\cos \alpha$ i w konsekwencji na jednostkę powierzchni przypada $I \cos \alpha$. Ta prosta prawidłowość ma znaczące konsekwencje. W skali globalnej zachodząca w ciągu roku zmienność kąta padania promieni słonecznych jest przyczyną zmian pór roku. W mniejszej skali czynnik $\cos \alpha$ decyduje o mikroklimacie, np. wpływając w terenie pofałdowanym na jakość upraw winorośli. Przykładu o jeszcze mniejszej skali dostarcza opisana poniżej obserwacja mrowiska.

Pospolite mrówki z gatunku *Formica rufa* budują gniazda w postaci kopców z zeschniętego igliwia i drobnych szczątków roślinnych. W słoneczny letni dzień, gdy słońce oświetla kopiec, można zauważyć, że mrówki przebywają tylko na części jego oświetlonej powierzchni. Można wyróżnić ściśle ograniczony obszar, którego mrówki zdecydowanie unikają, pracując tylko na pozostałej części. Zachowanie takie wynika z ograniczonej odporności mrówek na wysoką temperaturę. Badania wykazały, że maksymalna temperatura tolerowana przez mrówki sięga prawie 43°C. (Co ciekawe, jest ona o dwa stopnie wyższa niż stwierdzona doświadczalnie temperatura, która może być dla mrówek zabójcza. Robotnice ryzykują więc, poświęcając się pracy dla kolonii.) Temperatura, w jakiej pracują mrówki na powierzchni kopca, zależy od energii zaabsorbowanej przez tę powierzchnię, a ta, będąc zależną w znacznym stopniu od kosinusa kąta padania promieni słonecznych, wzrasta, gdy kąt ten maleje. W upalny dzień temperatura obszarów oświetlonych prostopadle przewyższa 60°C. Graniczna temperatura 43°C ustala się na łuku pewnej krzywej, będącej szczególnym przykładem izotermy. Z dobrym przybliżeniem można uznać ją za miejsce geometryczne punktów, w których kosinus kąta padania przyjmuje określoną krytyczną wartość. Łuk ten oddziela obszar pełnej aktywności mrówek od obszaru całkowicie opustoszałego, bo zbyt rozgrzanego. Krzątania mrówek ograniczona tylko do wyodrębnionej części powierzchni mrowiska uwiadcza w osobliwy sposób rolę kosinusa kąta padania promieni słonecznych oświetlających powierzchnię.



Rozwiązanie zadania M 1652.



Niech O będzie środkiem okręgów ω i σ . Zauważmy, że długość odcinka QR jest malejącą funkcją kąta $\sphericalangle OQR$, czyli rosnącą funkcją kąta $\sphericalangle OQP$, więc również rosnącą funkcją odległości punktu O od prostej PR . Ta odległość jest nie większa od długości odcinka OP i jest równa OP tylko wtedy, gdy $\sphericalangle OPR = 90^\circ$. Ta ostatnia równość definiuje nam poszukiwany punkt R .

Zagłębiamy do środka gwiazdy

Alex SCHWARZENBERG-CZERNY*

* Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN

Znanym paradoksem jest, że o ile struktura Ziemi jest skomplikowana i do dziś słabo poznana, to wiemy, że gwiazdy są w pierwszym przybliżeniu „kulami gazowymi” – i tak właśnie zatytułował swoją książkę pierwszy badacz ich wnętrza, Robert Emden. Przyjął on, że zmiany ciśnienia P i gęstości ρ w funkcji odległości od środka r odbywają się przy zachowaniu relacji politropowej (politropowego równania stanu):

$$(1) \quad P(\rho) = K\rho^{(n+1)/n} \quad \text{czyli} \quad \rho(P) = \left(\frac{P}{K}\right)^{n/(n+1)},$$

gdzie K i n są stałymi, wynikającymi z własności materii danej gwiazdy; na przykład relatywistyczny gaz zdegenerowanych (ciasno upakowanych) elektronów jest dobrze opisany przez politropę z $n = 3$. Póki co pominiemy dokładność tego przybliżenia w ogólnym przypadku i skupimy się na pokazaniu, jak w oparciu o nie można samemu skonstruować model gwiazdy, używając krótkiego programu komputerowego. Zaczniemy od znalezienia stosownych równań opisujących gwiazdę. Jeśli przez m oznaczymy masę części gwiazdy zawartej w kuli o promieniu r , to powiększając ją o warstwę kulistą o grubości dr , otrzymamy przyrost masy równy $dm = 4\pi r^2 \rho dr$. Przyspieszenie grawitacyjne na takiej powierzchni to $g = Gm/r^2$, gdzie G to stała grawitacji, ponieważ wpływ mas zewnętrznych znika zgodnie z twierdzeniem Newtona. Zatem korzystając ze szkolnego wzoru $hg\rho$ na ciśnienie atmosfery o gęstości ρ i grubości h , dostajemy w warstwie dr spadek ciśnienia hydrostatycznego

$$(2) \quad dP = -\frac{Gm\rho}{r^2} dr \quad \text{oraz} \quad dm = 4\pi r^2 \rho dr.$$

Przed obliczeniami (patrz margines) pokażemy jeszcze, że wygodnie je wykonywać, wybierając pewne umowne jednostki oraz zmienne bezwymiarowe θ , μ i ξ :

$$(3) \quad \rho = \rho_c \theta, \quad P = K\rho_c^{(1+1/n)} \theta^{n+1}, \quad r = r_n \xi, \quad m = m_n \mu, \quad \text{skąd}$$

$$(4) \quad d\theta^{n+1} = -\frac{\rho_c G m_n}{(n+1)P_c r_n} \frac{(n+1)\mu\theta^n}{\xi^2} d\xi \quad \text{oraz} \quad d\mu = \frac{\rho_c 4\pi r_n^3}{m_n} \theta^n \xi^2 d\xi,$$

gdzie r_n i m_n możemy zdefiniować, wymagając, by wyróżnione fragmenty wynosiły 1, i otrzymując

$$(5) \quad m_n = \rho_c 4\pi r_n^3 \quad \text{oraz} \quad r_n^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{(1/n-1)}.$$

W nowych zmiennych warunki początkowe w centrum sprowadzają się do $\mu = 0$, $\theta = 1$ dla $\xi = 0$, a ich przybliżenia dla małych ξ wynoszą

$$(6) \quad \mu = \frac{1}{3}\xi^3, \quad \theta^{n+1} = 1 - \frac{n+1}{6}\xi^2.$$

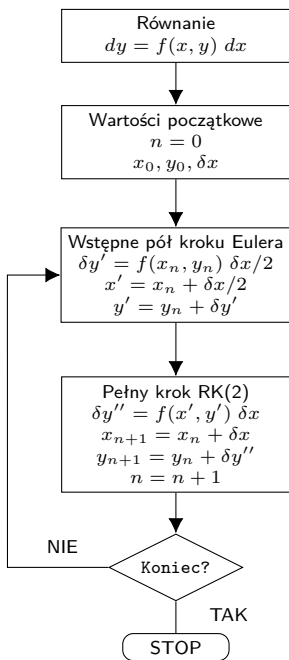
Stąd i z (4) wynika, że teraz rozwiązania na μ i θ zależą tylko od n . Rozwiązanie rozciąga się aż do powierzchni, gdzie dla $\xi = \xi_1$ mamy $\theta^{n+1} = 0$ oraz $\mu = \mu_1$.

Do wykonania obliczeń można się posłużyć krótkim programem napisanym w języku python do ściągnięcia ze stron autora. Obliczenia wykonujemy, korzystając z równań (4), startując z wartości otrzymanych z (6). Program rysuje wykresy przebiegu ciśnienia i gęstości w gwiazdzie, przykład wykresu na następnej stronie. Zestawienie dokładnych wyników na powierzchni dla różnych n mieści tabela pod wykresem.

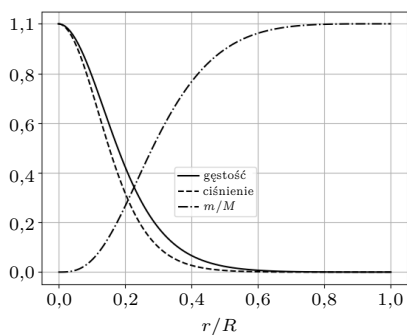
Dotąd nie korzystaliśmy z praw różniczkowania poza oczywistym $d(cx) = c dx$, z warunkiem $c = const$. Analityczne rozwiązania równań Emdena istnieją dla trzech wartości $n = 0, 1, 5$: $\theta^{(0)} = 1 - \xi^2/6$, $\theta^{(1)} = \sin \xi/\xi$ oraz $\theta^{(5)} = (1 + \xi^2/3)^{-1/2}$. To ostatnie rozwiązanie jest graniczne: $\xi_1 = \infty$. Dla $n > 5$ fizyczne rozwiązania nie istnieją, bo wykres θ nie przecina osi ξ . By sprawdzić te rozwiązania i wyrazić μ przez θ , trzeba jednak skorzystać z prawa różniczkowania $dx^a = ax^{a-1} dx$, wynikającego z dwumianu Newtona $(x + \delta x)^a - x^a \approx x^a + ax^{a-1}\delta x + \dots - x^a$. Użyjemy go tylko w tym akapicie i jego znajomość nie jest potrzebna w dalszej części. Wówczas lewa strona (4) przybiera postać $(n+1)\theta^n d\theta$, co po uproszczeniu

Ciśnienie i gęstość osiągają maksimum P_c , ρ_c w centrum gwiazdy i tam zmieniają się wolno, zatem kładąc $m \approx (4/3)\pi\rho_c r^3$ i $dP \approx (4/3)\pi G\rho_c^2 r dr$ dla małych r , unikamy dzielenia przez 0. Wybierając K , P_c i krok promienia δr , obliczenia można prowadzić tak: dla $r = 0$ kładziemy $m[0] = 0$, $P[0] = P_c$ i obliczamy ρ_c , δP i δm z (1) i (2), skąd $m[r + \delta r] = m[r] + \delta m$ oraz $P[r + \delta r] = P[r] + \delta P$ i tak dalej. W tej metodzie, zwanej metodą Eulera, zakładamy jednak, że zmiany parametrów w czasie kroku nie wpływają na δP i δm , co wymaga bardzo małego kroku. To jakby w ruchu jednostajnie przyspieszonym, gdzie $ds = (v_0 + gt)dt$ przyjmując jako średnią prędkość $v(t) = v_0$.

Ulepszeniem jest wersja metody Rungego-Kutty, w której oblicza się P i m w połowie kroku (jak u Eulera, tylko dla $r + \delta r/2$), a dopiero otrzymane wartości używa się do obliczenia δP i δm dla całego kroku δr . Czytelnik może się przekonać, że podobne postępowanie dla ruchu jednostajnie przyspieszonego daje poprawny wynik dla paraboli $s = v_0 t + gt^2/2$, stąd drugi rząd tej metody, RK(2). Z przybliżenia stałego ρ_c w pierwszym kroku otrzymujemy $\delta P \approx (4/3)\pi G\rho_c^2 (\delta r/2)\delta r$ i dalej: $m[\delta r] = (4/3)\pi\rho_c (\delta r)^3$ i $P[\delta r] = P_c - (2/3)\pi G\rho_c^2 (\delta r)^2$.



Schemat blokowy działania metody RK(2)



Wykres dla $n = 3$

Parametry gwiazd politropowych:

n	ξ_1	μ_1	$\frac{\rho_c}{\langle \rho \rangle}$
0,0	2,44949	4,89898	1,00000
0,5	2,75270	3,78865	1,83514
1,0	3,14159	3,14159	3,28987
1,5	3,65375	2,71406	5,99070
2,0	4,35287	2,41105	11,40254
2,5	5,35528	2,18720	23,40646
3,0	6,89685	2,01824	54,18248
3,5	9,53581	1,89056	152,88366
4,0	14,97155	1,79723	622,40788
4,5	31,83646	1,73780	6189,47313
5,0	∞	1,73205	∞

Wynik dla $n = 5$ pochodzi z rozwiązania analitycznego.

po obu stronach daje rozwiązanie:

$$(7) \quad \mu = -\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}.$$

Mając z obliczeń ξ_1 i μ_1 na powierzchni, rzeczywisty promień R i masę gwiazdy M obliczamy z (3), otrzymując $R = r_n \xi_1 \sim \rho_c^{(1-n)/(2n)}$ i $M = m_n \mu_1 \sim \rho_c^{(1-n/3)}$.

Eliminując ρ_c , otrzymujemy:

$$(8) \quad M^{n-1} R^{3-n} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{K(n+1)}{G} \right]^n \mu_1^{n-1} \xi_1^{3-n} = const.$$

W podobny sposób średnia gęstość $\langle \rho \rangle$ to $M/(\frac{4}{3}\pi R^3) = 3\rho_c \mu_1 / \xi_1^3$, skąd przy pomocy (4)

$$(9) \quad \frac{\rho_c}{\langle \rho \rangle} = \frac{\xi_1^3}{3\mu_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{Gm_n}{(n+1)r_n} = \frac{GM}{(n+1)R} \frac{\xi_1}{\mu_1}.$$

Zależność 8 jest bardzo ważna i może być weryfikowana w oparciu o obserwacje astronomiczne. Odwracając problem, dla znanych M i R oraz n można obliczyć ρ_c i K .

Z równania (8) wynika, że dla $n = 3$ gwiazda o danej masie zachowując równowagę mechaniczną (hydrostatyczną), może przyjmować różne promienie. Oznacza to, że jej równowaga jest obojętna. Można pokazać, że w równowadze trwałe są kule gazowe dla $n < 3$. Przykładem jest Ziemia o wnętrzu złożonym z ciekłych metali, gdzie gęstość praktycznie nie zmienia się z ciśnieniem, co oznacza $n = 0$ w równaniu (1). Natomiast dla $n > 3$ gwiazda nie jest trwała: ulega albo rozproszeniu, albo kurczy się do momentu, w którym zmiana własności sprasowanego gazu spowoduje $n < 3$.

Używając równania (9), można także obliczyć temperaturę w centrum gwiazdy. Skorzystamy z równania stanu gazu doskonałego, zapisanego jako $P = kT\rho/\mu_g$, gdzie μ_g to masa cząsteczki gazu, a k to stała Boltzmanna. Jeśli m i V to masa i objętość gazu, to gęstość jest m/V , a stała liczba Avogadro N jest ilością cząsteczek w molu, to $N\mu_g$ jest masą mola; zatem liczba moli to $q = m/(N\mu_g)$ i stała gazowa jest równa $\mathcal{R} = kN$, to podstawiając, otrzymujemy $PV = qRT$, czyli zwykłą postać równania gazu. Wstawiając do (9), dostajemy

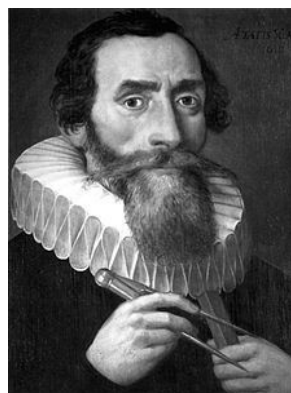
$$(10) \quad \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{kT_c}{\mu_g} = \frac{GM}{(n+1)R} \frac{\xi_1}{\mu_1}.$$

Dla Słońca w przybliżeniu można użyć $n = 3$, choć naprawdę n jest nieco mniejsze i zmienia się z promieniem. Wyjaśnienie, dlaczego tak się dzieje, to temat na inną opowieść: o porównaniu gwiazd zwykłych (takich jak Słońce) i „kwantowych”, czyli białych karłów.

Matematyka i jej historia. Nie tylko ciekawostki!

Drugie prawo Keplera i owale Newtona. Kontrowersje wokół Lematu XXVIII w *Principiach*

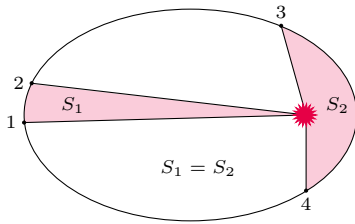
* Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Johannes Kepler (1571–1630)

Grzegorz ŁUKASZEWICZ, Mikołaj SIERŻĘGA**

Drugie prawo Keplera, mówiące o tym, że w równych odstępach czasu promień wodzący planety, poprowadzony od Słońca, zakreśla równe pola (patrz ilustracja na następnej stronie), było w dużym stopniu ignorowane w astronomii przednewtonowskiej. Na przykład w dziele *Astronomia Carolina*, z którego korzystał Newton, jest ono wyraźnie nieobecne. Wynikało to z jego niewielkiej przydatności do obliczeń położenia planet na ich orbitach. Załóżmy, że znamy okres T obiegu planety po orbicie eliptycznej. Promień wodzący planety zakreślił w tym czasie znane pole $S = \pi ab$, gdzie a i b są półosiami elipsy. Rozpoczynając wędrówkę po orbicie w danym punkcie Q , po czasie T jesteśmy znowu w Q . Położenie to jest funkcją czasu obiegu T , jak i pola S zakreślonego w tym czasie przez promień wodzący planety. Korzystając z drugiego prawa Keplera, możemy teraz znaleźć pole s sektora zakreślonego przez promień wodzący planety w dowolnym odcinku czasu o długości t . Wydawałoby się, że w tym ogólnym przypadku można także łatwo wyrazić i obliczyć położenie P planety na jej orbicie jako funkcję czasu t lub zakreślonego w czasie t pola s . Okazuje się, że tak nie jest.



Ilustracja drugiego prawa Keplera.

Przestępna jest np. relacja

$$F(x, y) = xy + \sin x = 0,$$

gdzie

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

w odróżnieniu np. od relacji wielomianowej

$$G(x, y) = y^2 - x + 2x^3 = 0.$$

Relacja $F(P, S) = 0$ wiążąca położenie P planety na orbicie z polem S sektora (lub z czasem zakreślenia sektora, gdy skorzystamy z drugiego prawa Keplera) jest *przestępna* i jej obliczenie prowadzi do szeregów nieskończonych.

Praktyczne obliczenia wymagałyby stosowania aproksymacji bardziej kłopotliwych rachunkowo od innych, obmyślonych w tamtych czasach, metod obliczania położenia planet na orbitach. W dodatku sama *eliptyczność orbit*, ze Słońcem w jednym z ognisk elipsy, stanowiąca treść pierwszego prawa Keplera, była jeszcze kwestionowana. Przykładowo dyrektor Obserwatorium Paryskiego, Giovanni Domenico Cassini, próbował przeforsować krzywe swego własnego pomysłu, znane jako *owale Cassiniego*.

Z kolei trzecie prawo Keplera, mówiące o tym, że *stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do sześciątej średniej odległości od Słońca jest stały dla wszystkich planet w Układzie Słonecznym*, było dość powszechnie przyjęte, co wynikało z jego zgodności z obserwacjami. Historia recepcji praw Keplera jest dość skomplikowana i ma wiele wątków. Spójny opis można znaleźć np. w książce I. Bernarda Cohena.

W swoich *Principiach*, czyli *Matematycznych Zasadach Filozofii Naturalnej*, Newton argumentował, że z drugiego prawa Keplera nie da się *ściśle obliczyć* położenia planety na orbicie ze względu na przestępność wspomnianej wyżej funkcji. Rozumowanie Newtona dotyczyło zresztą dużo szerszej od elips klasy torów owalnych, nazywanych w dyskusjach *owalami Newtona*.

Ponieważ Newton nie określił dokładnie, co rozumie przez owal, jego argumentacja została podważona poprzez kontrprzykłady. Jeden z pierwszych podał Gottfried Leibniz. W każdym razie w przypadku elips Newton miał rację. Fascynująca historia kontrowersji wokół poniższego Lematu XXVIII Newtona jest opisana w artykule Bruce'a Pourciau.

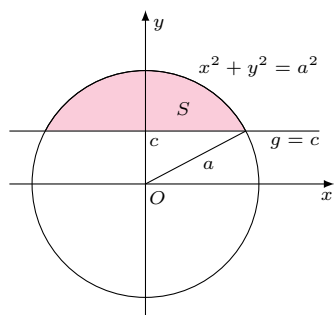
Lemat XXVIII (*Principia*, Księga 1) *Nulla extat figura Ovalis cujus area rectis pro lubitu abscissa possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.* [Nie istnieje figura owalna taka, że pola wszystkich jej segmentów odciętych przez dowolne

proste można wyznaczyć w sposób ogólny jako rozwiązania równań wielomianowych].

Możemy to rozumieć tak, że jeśli dowolna prosta $ax + by = c$ odcina z danego owalu segment o polu S , to nie istnieje równanie wielomianowe $W(S, a, b, c) = 0$ wiążące pole S ze współczynnikami a, b, c równania tej prostej.

Prawdziwość tego lematu, w przypadku elipsy, implikuje trudności z zastosowaniem drugiego prawa Keplera do obliczania położenia danej planety w dowolnej chwili.

Kontrowersje co do samego lematu wynikają z wątpliwości, co rozumiał Newton przez „figurę owalną”. Już Bernoulli, Huygens i Leibniz nie mieli co do tego pełnej jasności, natomiast „dowód” Newtona zdawał się pasować do dowolnej zamkniętej figury. Chcąc się temu zagadnieniu dokładniej przyjrzeć, w tym artykule podamy przykłady „figur owalnych”, dla których lemat jest prawdziwy bądź fałszywy. Oryginalny „dowód” Newtona można znaleźć w jego *magnum opus*.

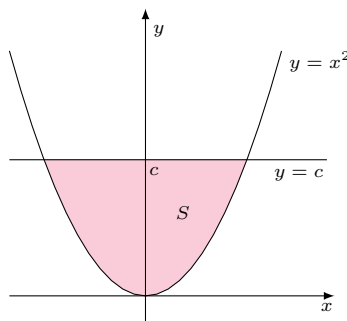


Przykład 1. Rozważmy koło, ograniczone okręgiem $x^2 + y^2 = a^2$, i jego górny segment odcięty prostą $y = c$, $0 \leq c < a$. Jeżeli przez S oznaczymy pole tej części, to można obliczyć, że

$$S = \pi \frac{a^2}{2} - a^2 \arcsin \frac{c}{a} - c\sqrt{a-c}\sqrt{a+c}.$$

W przypadku koła jest to ogólna sytuacja, stąd Lemat XXVIII jest prawdziwy dla tego owalu.

Powyższa zależność jest *przestępna*, gdyż nie da się jej sprowadzić do zależności wielomianowej. Wykonując obrót koła, a następnie spłaszczając je poprzez transformację $(x, y) \rightarrow (x, z)$, $z = \frac{b}{a}y$, otrzymujemy ogólny wzór wiążący pole segmentu elipsy o półosiach a, b , $b < a$ odciętego przez przecinającą ją prostą.



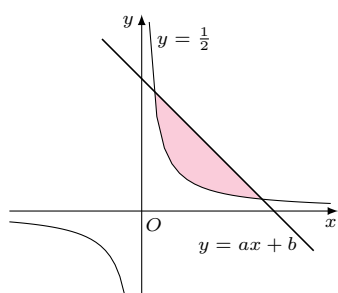
Przykład 2. Rozważmy teraz parabolę $y = x^2$ i ograniczony segment nad nią odcięty prostą $y = c$, $c > 0$. Nie jest to przypadek najogólniejszy, ale sprawdzamy, że pole S tak określonego obszaru wyraża się poprzez c zależnością

$$9S^2 - 16c^3 = 0,$$

a zatem Lemat XXVIII nie jest prawdziwy dla parabol. Można powiedzieć – zgoda, ale parabola nie jest owalem zamkniętym. Można jednak uzyskać (wypukły) owal zamknięty, zakrywając ją z góry częścią okręgu o promieniu np. 2 i środku na osi y .

Taki okrąg styka się z naszą parabolą w dwóch punktach i łatwo wykazać, że współczynnik kierunkowy stycznej do uzyskanej figury owalnej zmienia się w sposób ciągły. Mamy zatem gładki (na oko) owal, wypukły, zamknięty, ale

przykład 2 pokazuje, że Lemat XXVIII nie jest prawdziwy dla tego owalu, bo odcinanie wycinka paraboli daje zależność algebraiczną.



Przykład 3. Warto jeszcze sprawdzić, jak to jest dla hiperboli, następnej krzywej stożkowej istotnej w astronomii planetarnej. Niech $y = \frac{1}{x}$ i niech prosta $y = -ax + b$ odcina z hiperboli segment ograniczony. Łatwo sprawdzić, że w zależności pola S od a, b pojawi się funkcja logarytmiczna. Zatem zależność między polem wycinka i parametrami prostej go odcinającej z hiperboli jest przestępna. Zauważmy, że nasz „owal” nie jest zamknięty.

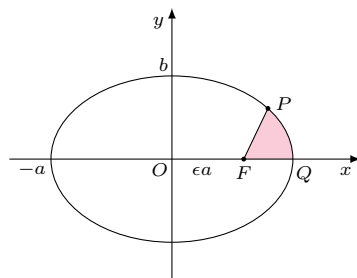
Zapytać można, czym w istocie różni się okrąg od krzywej Γ stanowiącej zamknięty owal z przykładu 2. Zarówno okrąg, jak i krzywa Γ są krzywymi algebraicznymi (można założyć, że tylko takie rozważał Newton – Pourciau, str. 5), zadanymi równaniami wielomianowymi postaci $W(x, y) = 0$. Dokładniej, nasz okrąg jest dany równaniem

$$(11) \quad x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

a każdy punkt krzywej Γ spełnia równanie

$$(12) \quad (y - x^2) \left(x^2 + \left(\frac{17}{4} - y \right)^2 - 4 \right) = 0.$$

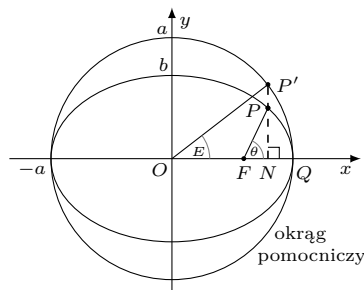
Może istotnej różnicy należy się doszukiwać w fakcie, że równanie (12) zawiera w sobie nie tylko naszą krzywą Γ , ale też „wąsy”, jeden będący półokręgiem, a drugi, ten nieskończony, kawałkiem paraboli. Naprowadza nas to na własność jednoznaczności, odróżniającej wykresy równań (11) i (12). Poruszając się po wykresie równania (11), nie mamy wyboru, pozostajemy na naszym owalu. Inaczej jest w przypadku wykresu równania (12), gdyż możemy zboczyć na któryś z „wąsów” na rozwidleniu w którymś z dwóch punktów styku paraboli z okręgiem. Jest to właściwy ślad, bo taka niejednoznaczność nie może zdarzyć się na krzywych *analitycznych*, które są w szczególności nieskończenie gładkie. A krzywa Γ jest gładka tylko na oko!



Sektor FQP o polu S i punkt P .

Jeśli umieścimy lokalny kartezjański układ współrzędnych na krzywej Γ w punkcie styku paraboli z okręgiem, tak aby styczna do niej w tym punkcie stanowiła oś odciętych, a prostopadła do stycznej w tym punkcie oś rzędnych, to wykres krzywej Γ w otoczeniu tego punktu nie jest w naszym lokalnym układzie współrzędnych wykresem funkcji posiadającej wszystkie pochodne. Łatwo sprawdzić, że w punkcie styku nie istnieje już druga pochodna.

Analityczność krzywej możemy określić w tym języku następująco. W każdym punkcie krzywej, w lokalnym układzie współrzędnych kartezjańskich opisanym wyżej, krzywa stanowi wykres funkcji mającej lokalnie przedstawienie w postaci szeregu potęgowego $y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$



Konstrukcja rozwiązania wykorzystująca równanie Keplera.

Powracamy teraz do drugiego prawa Keplera i zmagania Newtona ze znalezieniem położenia P planety w dowolnej chwili t , liczonej od przejścia przez perycentrum na orbicie eliptycznej o półosiach a, b , przy założeniu, że czas pełnego obiegu planety po trajektorii (okres obiegu) T jest znany. Relacja wiążąca P i t zadana jest słynnym *równaniem Keplera*

$$M = E - \epsilon \sin E,$$

gdzie M jest *anomaliami średnią*, E jest *anomaliami mimośrodkową*, a ϵ jest *mimośrodek orbity*.

Mamy $M = \frac{2\pi}{T}t$, gdzie czas t jest związany drugim prawem Keplera z polem S sektora elipsy zakreślonego przez promień wodzący planety,

$$\frac{S}{t} = \frac{2\pi ab}{T}.$$

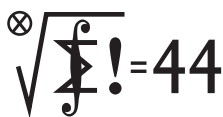
Z powyższych wzorów widać, że relacje wiążące pole zakreślonego w czasie t sektora elipsy, a także sam czas t z *anomaliami mimośrodkową* E , są przestępne. Obliczenie anomalii mimośrodkowej można uznać za wskazanie miejsca planety na orbicie (patrz rysunek). Znając E , obliczenie współrzędnych punktu P sprowadza się do prostego rachunku. Chcąc obliczyć E w danej chwili czasu t , obliczamy M i dalej obliczamy E z równania Keplera. Dla tego ostatniego obliczenia Newton zastosował metodę aproksymacji, którą obecnie nazywamy metodą Newtona–Raphsona.

O głębszych aspektach problemów przedstawionych powyżej postaramy się opowiedzieć w następnym artykule.

Literatura

- Jerzy Kierul: *Kepler*, PIW, 2007.
 Jerzy Kierul: *Newton*, PIW, 2010.
 I. B. Cohen: *The Newtonian Revolution*, CUP, 1980.
 I. Newton: *Matematyczne Zasady Filozofii Przyrody*, Kraków 2011.
 B. Pourciau: *The Integrability of Ovals: Newton's Lemma 28 and Its Counterexamples*, Arch. Hist. Exact Sci. 55 (2001) 479-499.
 D. T. Whiteside (ed.): *The mathematical papers of Isaac Newton*, vol. 6, CUP 1974. (Article VI).

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2020

Zadania z matematyki nr 807, 808

Redaguje Marcin E. KUCZMA

807. Dane są liczby $A, B > 0$; $AB < 1$. Funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ warunki

$$|f(x) - f(y)| \leq A \cdot |x - y|, \quad |g(x) - g(y)| \leq B \cdot |x - y|,$$

przy czym f jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru \mathbb{R} na cały zbiór \mathbb{R} ; ma więc funkcję odwrotną $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($f(h(x)) = h(f(x)) = x$). Udowodnić, że funkcja $g + h$ też jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru \mathbb{R} na cały zbiór \mathbb{R} .

808. Znaleźć wszystkie pary liczb wymiernych $x, y > 1$ spełniających równanie $x^y = xy$.

Zadanie 808 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2020

Przypominamy treść zadań:

803. Dane są liczby rzeczywiste $a > b > 0$. Udowodnić, że zbiór liczb rzeczywistych x spełniających równanie $\lfloor ax + b \rfloor = \lfloor bx + a \rfloor$ zawiera pewien przedział długości $1/a$. Pokazać też, że dla dowolnej liczby $b > 0$ można znaleźć liczbę $a > b$ tak, by rozważany zbiór zawierał przedział długości większej niż $1/a$.

804. Niech p będzie liczbą pierwszą; $p > 2$. Dla liczby całkowitej r niech A_r oznacza zbiór takich permutacji (x_1, \dots, x_p) zbioru wszystkich reszt (mod p), że

$$x_1 + 2x_2 + \dots + px_p \equiv r \pmod{p}.$$

Dowieść, że jeśli $0 < r < s < p$, to zbiory A_r i A_s są równoliczne.

803. Dla ustalonej liczby całkowitej n przedział $I_n = \left[\frac{n-b}{a}, \frac{n+1-b}{a} \right)$ jest zbiorem tych liczb x , dla których $\lfloor ax + b \rfloor = n$, zaś przedział $J_n = \left[\frac{n-a}{b}, \frac{n+1-a}{b} \right)$ jest zbiorem tych x , dla których $\lfloor bx + a \rfloor = n$. Należy wykazać, że dla pewnego n część wspólna $I_n \cap J_n$ zawiera przedział długości $1/a$. Ponieważ przedział I_n ma taką właśnie długość, wystarczy, żeby był on zawarty w J_n . Taka inkluzja ma miejsce, gdy jednocześnie zachodzą nierówności $\frac{n-b}{a} \geq \frac{n-a}{b}$, $\frac{n+1-b}{a} \leq \frac{n+1-a}{b}$. Po prostym przekształceniu ta koniunkcja przybiera postać

$$n(a-b) \leq a^2 - b^2 \leq (n+1)(a-b);$$

wobec założenia $a > b$ jest to równoważne nierówności podwójnej

$$(1) \quad n \leq a + b \leq n + 1.$$

Zatem dla $n = \lfloor a + b \rfloor$ rozważany w zadaniu zbiór zawiera przedział I_n długości $1/a$.

W dalszej części zadania należy wykazać, że dla każdego $b > 0$ istnieje liczba $a > b$, dla której rozważany zbiór zawiera przedział dłuższy niż $1/a$. W tym celu bierzemy dowolną liczbę $a > b$ taką, że $a + b$ jest liczbą całkowitą. Wówczas każda z liczb całkowitych $n = a + b$ oraz $n = a + b - 1$ spełnia warunki (1). Dla pierwszej z tych liczb dostajemy przedział $I_n = \left[1, 1 + \frac{1}{a} \right)$, zaś dla drugiej $I_n = \left[1 - \frac{1}{a}, 1 \right)$; i każdy z tych przedziałów zawiera się w rozważanym zbiorze. Łącząc je, dostajemy przedział długości $2/a$; więc większej niż $1/a$; a o to chodziło.

804. Teza wynika wprost z tego, że mnożenie przez element niezerowy jest bijekcją ciała \mathbb{Z}_p . W języku bardziej elementarnym: jeśli (x_1, \dots, x_p) jest permutacją zbioru $\{0, 1, \dots, p-1\}$, zaś r jest elementem zbioru $\{1, \dots, p-1\}$, to reszty z dzielenia liczb rx_1, rx_2, \dots, rx_p przez p są wszystkie różne – tworzą więc także permutację zbioru $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Przy tym jeśli wyjściowa permutacja należała do zbioru A_1 – czyli spełniała zależność $\sum_{i=1}^p ix_i \equiv 1 \pmod{p}$ – to po pomnożeniu wszystkich jej wyrazów przez r utworzy permutację, w której analogiczna suma przystaje do r – czyli permutację należącą do zbioru A_r .

Zostało w ten sposób określone odwzorowanie ze zbioru A_1 do zbioru A_r . Ono jest odwracalne; weźmy bowiem element $t \in \{1, \dots, p-1\}$, dla którego $rt \equiv 1 \pmod{p}$ (taki element t istnieje, bo reszty z dzielenia liczb $r, 2r, \dots, (p-1)r$ przez p są wszystkie różne i niezerowe). Jeśli teraz permutacja (y_1, \dots, y_p) znajduje się w zbiorze A_r , to po pomnożeniu wszystkich wyrazów przez t znajdzie się w zbiorze A_1 . Uzyskane odwzorowania $A_1 \rightarrow A_r$ (mnożenie przez r) oraz $A_r \rightarrow A_1$ (mnożenie przez t , gdzie $rt \equiv 1$) są wzajemnie odwrotne. To dowodzi, że zbiór A_r jest równoliczny ze zbiorem A_1 . Skoro tak jest dla każdej niezerowej reszty r , znaczy to, że wszystkie zbiory A_1, \dots, A_{p-1} są równoliczne.

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 797 (WT = 2,57) i 798 (WT = 2,11) z numeru 3/2020

Błażej Żmija	Kraków	48,34
Michał Adamaszek	Kopenhaga	47,63
Janusz Fiett	Warszawa	44,67
Zbigniew Skalik	Wrocław	43,94
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,91
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Marek Spychała	Warszawa	40,62
Jakub Węgrecki	Kraków	39,40
Andrzej Kurach	Ryjewo	38,41
Marcin Małogrosz	Warszawa	36,93
Karol Matuszewski	Rawicz	36,19

Trzej Panowie mijają linię magiczną 44 p.:
Michał Adamaszek po raz piąty – Weteran od 17 lat (potem długa przerwa);
Janusz Fiett po raz trzeci – Weteran od dziś;
Błażej Żmija – nowy przybysz do K44M!

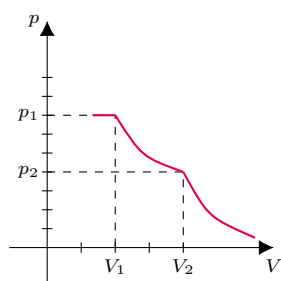
Klub 44 F



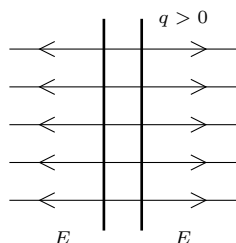
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2020

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 692 ($WT = 2,39$), 693 ($WT = 1,45$), 694 ($WT = 3,19$), 695 ($WT = 2,23$) z numerów 2/2020 i 3/2020

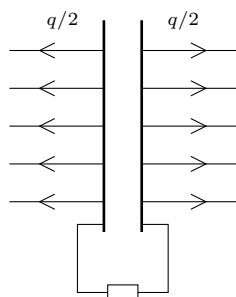
Paweł Perkowski	Ożarów	3-44 + 9,03
Michał Koźlik	Gliwice	42,82
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Krzysztof Magiera	Łosiów	39,55
Jacek Konieczny	Poznań	31,13
Ryszard Woźniak	Kraków	31,10
Aleksander Surma	Myszków	27,75
Sławomir Buć	Myszków	25,72
Tomasz Wietecha	Tarnów	24,58
Jan Zambrzycki	Białystok	23,16



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zadania z fizyki nr 704, 705

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

704. Wąska monochromatyczna wiązka światła laserowego pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną, której szczeliny ustawione są pionowo. Jak zmieni się obraz interferencyjny na ekranie, gdy siatkę obrócimy o kąt $\varphi < \pi/2$ wokół osi równoległej do szczelin siatki?

705. W jednorodnej kuli o promieniu $2R$ i gęstości ρ znajduje się współśrodkowa kulista wnęka o promieniu R . Znaleźć energię potencjalną punktu materialnego o masie m znajdującego się w wydrążeniu, w odległości $R/2$ od środka wydrążonej kuli. Oddziaływania zewnętrzne zaniedbujemy.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2020

Przypominamy treść zadań:

700. Jedna okładka powietrznego kondensatora płaskiego o pojemności c jest nienaładowana, druga jest naładowana ładunkiem q . Okładki połączone przewodnikiem o dużym oporze. Ile ciepła wydzieli się w przewodniku po długim czasie? Rozmiary okładek kondensatora są bardzo duże w porównaniu z odległością między nimi.

701. Mieszanina gazów złożona z $m_N = 100$ g azotu oraz nieznannej masy tlenu została poddana sprężaniu izotermicznemu w temperaturze $T = 74,4$ K. Wykres zależności ciśnienia tej mieszaniny od jej objętości przedstawia rysunek 1. Znaleźć masę tlenu oraz ciśnienie pary nasyconej tlenu w temperaturze T . Przy ciśnieniu normalnym T jest temperaturą wrzenia ciekłego azotu, a tlen wrze w wyższej temperaturze.

700. Przyjmijmy, że ładunek q jest dodatni, co nie zmniejsza ogólności rozważań. Linie pola elektrycznego przed połączeniem okładek przedstawione są na rysunku 2. Zgodnie z prawem Gaussa wartość wektora natężenia $E = q/(2\epsilon_0 S)$, gdzie ϵ_0 jest przenikalnością elektryczną próżni, a S powierzchnią okładek. Po połączeniu napięcie między okładkami wynosi zero, znika więc pole między okładkami, a ładunki na obu okładkach są równe $q/2$. Linie pola elektrycznego po połączeniu przedstawia rysunek 3, pole elektryczne na zewnątrz kondensatora jest takie samo jak przed połączeniem, czyli jego energia nie zmienia się.

Przed połączeniem pole między okładkami jest takie samo jak w kondensatorze naładowanym ładunkiem $q/2$. Ciepło wydzielone na oporniku jest równe energii takiego kondensatora: $W = q^2/(8c)$.

701. Z wykresu na rysunku 1 widać, że dla objętości $V < V_1$ tlen i azot skraplają się, a ciśnienie jest stałe i równe sumie ciśnień par nasyconych tlenu p_O i azotu p_N w temperaturze T , gdzie T jest temperaturą wrzenia ciekłego azotu pod ciśnieniem normalnym $p_a \cong 10^5 Pa$, zatem $p_1 = p_O + p_a$. Dla objętości $V_1 < V < V_2$ następuje skraplanie jednego z gazów, a dla objętości $V > V_2$ pary obu gazów są nienasycone.

Założmy, że w punkcie (p_1, V_1) rozpoczyna się skraplanie azotu, a w punkcie (p_2, V_2) skraplanie tlenu. Wtedy $p_2 = p_O + p_{2N}$, gdzie p_{2N} jest ciśnieniem pary nienasyconej azotu w punkcie (p_2, V_2) . Ponieważ dla objętości $V_1 \leq V \leq V_2$ azot jest tylko w stanie gazowym, zachodzi związek $p_{2N}V_2 = p_a V_1$. Zgodnie z wykresem $p_{2N} = p_a/2$ oraz $p_1/p_2 = 7/4 = (p_O + p_a)/(p_O + p_a/2)$. Stąd $p_O = p_a/6 \cong 17$ kPa.

Przy założeniu, że tlen zaczyna się skraplać w punkcie (p_1, V_1) , otrzymalibyśmy wynik $p_O = 6p_a$, sprzeczny z faktem, że tlen wrze w temperaturze wyższej niż azot, czyli ciśnienie jego pary nasyconej w temperaturze T powinno być niższe niż p_a .

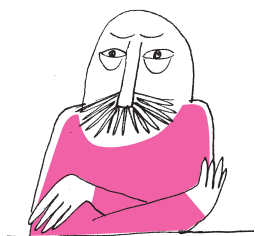
Masę tlenu m_O można znaleźć z równań Clapeyrona: $p_O V_2 = m_O RT/\mu_O$ oraz $p_a V_1 = m_N RT/\mu_N$, gdzie R jest stałą gazową, a μ_O, μ_N masami molowymi tlenu i azotu. Stąd $m_O \cong 38g$.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: 30 lat teleskopu Hubble'a



W kwietniu 2020 roku światowe media były przede wszystkim skupione na pierwszej fali pandemii COVID-19, dlatego ważny dla społeczności astronomicznej jubileusz pozostał nieco w cieniu zmagani z skutkami wirusa. Mam oczywiście na myśli 30-lecie Kosmicznego Teleskopu Hubble'a (*Hubble Space Telescope*, HST), który został umieszczony na orbicie 25 kwietnia 1990 roku; start promu Discovery z teleskopem Hubble'a na pokładzie nastąpił dzień wcześniej. HST nie jest największym ani też pierwszym w historii teleskopem kosmicznym, jednak przez 3 dekady swojej pracy zyskał rzadki status niemalże ikony nowoczesnego urządzenia astronomicznego i jest rozpoznawany zarówno przez specjalistów, jak i laików. Teleskop Hubble'a nosi imię astronoma Edwina Hubble'a, kojarzonego m.in. z obserwacją „ucieczki” galaktyk i przełomowego ich zastosowania w kosmologii. HST jest jednym z Wielkich Obserwatoriów NASA, wraz z Obserwatorium Promieniowania Gamma Compton, Obserwatorium Rentgenowskim Chandra i Teleskopem Kosmicznym Spitzera, obserwującym w podczerwieni. W odróżnieniu od innych wielkich teleskopów satelitarnych, do użytkowania HST potrzebne są czasem odwiedziny naziemnego personelu. W ciągu 30 lat pięć misji astronautów transportowanych na orbitę promem kosmicznym zainstalowało, naprawiło, zaktualizowało lub wymieniło różne części teleskopu. Pierwsza wizyta w 1993 roku dotyczyła pamiętnego „zakładania Hubble'owi okularów” w celu poprawienia ostrości obrazów skupianych na głównym lustrze. Obecnie na pokładzie HST znajdują się kamery ACS (*Advanced Camera for Surveys*) i szerokokątna WFC3 (*Wide Field Camera 3*), a także spektrografy COS (*Cosmic Origins Spectrograph*) i STIS (*Space Telescope Imaging Spectrograph*).

Prawie 2,5-metrowe główne lustro Hubble'a skupia światło ultrafioletowe, widzialne i w bliskiej podczerwieni, zbierając obrazy i dane spektroskopowe. Podczas swojej kariery HST dostarczył dane do ponad 15 tys. opublikowanych prac, badając Układ Słoneczny, atmosfery planet wokół innych gwiazd oraz śledząc życie gwiazd od momentu powstania, przez różnorodne procesy w trakcie ich „życia” aż do końcowych etapów ich ewolucji. W większej skali HST ukazał naszym oczom misterne szczegóły dotyczące kształtów, struktur i historii galaktyk, a także umożliwił obserwacje otoczenia supermasywnych czarnych dziur w centrach galaktycznych. W największych skalach (lub alternatywnie – śledząc dzieje wczesnego Wszechświata), czyli obserwując najbardziej odległe galaktyki i gromady galaktyk, HST przyczynił się do badania natury tajemniczej, słabo obecnie poznanej ciemnej materii i jeszcze bardziej tajemniczej ciemnej energii.

Następcą HST jest Kosmiczny – nie tylko z powodu miejsca, w którym będzie wykonywał swoje obserwacje, ale zwłaszcza z powodu ogromnego 6,5-metrowego lustra, złożonego z 18 sześciokątnych fragmentów – Teleskop Jamesa Webba (JWST). Wysłanie JWST na orbitę jest planowane na marzec 2021 roku. Z pewnością dostarczy równie pięknych i inspirujących zdjęć kosmosu, jak te zgromadzone z okazji 30-lecia HST.

Michał BEJGER

Niebo w październiku

W październiku **Słońce** wędruje przez gwiazdozbiór Panny, obniżając przez miesiąc wysokość o kolejne 11°. Wskutek tego wysokość przejścia przez południk lokalny zmniejsza się do 24°, a czas przebywania Słońca na nieboskłonie skraca się o ponad 2 godziny, do mniej niż 10 godzin. Jak co roku, w nocy z ostatniej soboty na ostatnią niedzielę października (w tym roku jest to noc z 24 na 25 października) nastąpi zmiana czasu z letniego na zimowy.

Początek i koniec miesiąca rozświetli powodowana przez **Księżyc** luna, natomiast ciemne noce czekają nas w środku miesiąca. W październiku Srebrny Glob dwukrotnie przejdzie przez pełnię: 1 i 31 dnia miesiąca. Za pierwszym razem na tle gwiazdozbioru Wieloryba,

jakieś 16° na południowy zachód od Marsa, a za drugim razem – na pograniczu Wieloryba i Barana, 25° od Czerwonej Planety, lecz tym razem na północny wschód od niej. Księżyc 10 października przejdzie przez ostatnią kwadrę na tle gwiazdozbioru Raka, w połowie drogi między Polluksem z Bliźniąt a znajdującą się w centrum Raka gromadą otwartą gwiazd M44. Sześć dni później Księżyc znajdzie się w nowiu na tle gwiazdozbioru Panny, zaś 23 października – w I kwadrze, na tle Koziorożca.

W nocy z 2 na 3 października naturalny satelita Ziemi spotka się z **Marsem**. Rano, tuż przed zachodem obu

ciał niebieskich, dystans między nimi na naszym niebie spadnie do 1° . Tej nocy w południowych Argentynie i Chile oraz na atlantyckim wybrzeżu Antarktydy dojdzie do zakrycia Czerwonej Planety przez Księżyc. Srebrny Glob spotka się z Marsem ponownie 29 października. Tym razem oba ciała przedzieli kąt ponad 3° , a faza Księżyca zmniejszy się do 96%.

Czerwona Planeta przez miesiąc przemierzy ruchem wstecznym odcinek prawie 9° na pograniczu gwiazdozbiorów Ryb i Wieloryba. Mars przejdzie przez opozycję względem Słońca 13 października, a tydzień wcześniej znajdzie się najbliżej Ziemi w tym sezonie obserwacyjnym, w odległości 0,415 AU, czyli 62 mln km od nas. Jest to 4,5 mln km więcej niż podczas opozycji dwa lata temu, ale planeta przecina południk lokalny ponad 30° wyżej niż wtedy, stąd jej obraz teleskopowy jest znacznie wyraźniejszy. Dodatkowo w październiku noc jest znacznie dłuższa, a zatem Marsa można obserwować o wiele dłużej. Do opozycji jasność i średnica tarczy Marsa szybko rośnie, do odpowiednio $-2,6^m$ oraz $23''$. Jednak po opozycji równie szybko obie wartości zaczną spadać i w związku z tym do końca miesiąca jasność Czerwonej Planety spadnie do $-2,1^m$, a jej średnica do $20''$.

W październiku przez opozycję przejdzie także planeta **Uran**. Zdarzy się to ostatniego dnia miesiąca i tego samego dnia planeta spotka się z Księżycem w pełni, który przejdzie jakieś 4° od niej. Srebrny Glob odwiedzi Urana także na początku miesiąca: 3 i 4 października Księżyc zbliży się doń na około 4° . Uran wędruje przez gwiazdozbiór Barana, około 10° na południowy wschód od Hamala, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji. Obecnie jasność Urana przekracza $+5,7^m$, a zatem w bezksiężycową noc można próbować dostrzec go gołym okiem. Wskazówką do odnalezienia Urana może być planeta Mars, jednak w ciągu miesiąca dystans między planetami zwiększy się od 15 do 22° .

Kreśląca swoją pętlę na tle gwiazdozbioru Wodnika, planeta **Neptun** w październiku przejdzie niecałe $0,5^\circ$ na południe od gwiazdy 5. wielkości 96 Aqr i zbliży się na 1° do jaśniejszej o ponad magnitudo gwiazdy φ Aqr. Natomiast jasność samej planety wynosi $+7,8^m$. Księżyc minie Neptuna 27 października, mając wtedy fazę ponad 80%.

Wieczorem pogarszają się warunki obserwacyjne pary planet **Jowisz-Saturn**. Planety przesuwają się na północny wschód przez gwiazdozbiór Strzelca i do końca miesiąca dystans między nimi spadnie do 5° . Obie znikają z nieboskłonu około godziny 22 i na ich obserwację jest coraz mniej czasu. Jowisz i Saturn są nisko nad widnokresem, stąd ich obraz teleskopowy najczęściej jest zniekształcony przez turbulencje atmosfery. Jasność Jowisza zmniejszy się do $-2,1^m$, a średnica tarczy do $37''$. A zatem na początku miesiąca jasność Marsa znacznie przewyższy jasność Jowisza, natomiast pod jego koniec obie jasności staną się prawie takie same. Obie planety wyraźnie różnią się barwą: Jowisz jest biało-żółty, zaś Mars –

rdzawo-pomarańczowy. Jednak porównywanie wyglądu obu planet jest utrudnione, gdyż dzieli je na niebie mniej więcej 90° . Saturn świeci blaskiem $+0,6^m$, a jego tarcza ma średnicę $16''$.

Przed świtem, dzięki korzystnie nachylonej ekliptyce, wysoko na niebie wspina się planeta **Wenus**, która przez miesiąc pokona 36° od gwiazdozbioru Lwa do Panny. Na początku miesiąca, 3 października, planeta wszędzie niecałe $10'$ od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa, a 11 dni później minie ją dążący do nowiu Księżyc w fazie 10%. W tym miesiącu Wenus jest już daleko od Ziemi, stąd jej jasność wyniesie $-4,1^m$, przy średnicy tarczy od $15''$ na początku miesiąca do $13''$ na jego koniec. Faza planety zwiększy się do ponad 80%, o świcie wznosi się na ponad 20° .

W październiku promieniują dwa coroczne roje meteorów. Najpierw maksimum swojej aktywności mają **Drakonidy**, promieniujące krótko, tylko od 6 do 10 października, z maksimum 8 dnia miesiąca. Są to wolne meteory, ich prędkość zderzenia z atmosferą wynosi 21 km/s. W tym roku obserwacje Drakonidów są możliwe w pierwszej części nocy, przed wschodem Księżyca w okolicach ostatniej kwadry. Dobrze jednak się składa, gdyż wieczorem radiant roju wznosi się na ponad 60° nad zachodnią częścią nieboskłonu, kilka stopni na zachód od głowy Smoka. Można spodziewać się kilkunastu meteorów na godzinę.

Drugim październikowym rojem są **Orionidy**, które promieniują przez cały miesiąc, z maksimum przypadającym na 21 października. W przeciwieństwie do Drakonidów są to szybkie meteory, zderzają się z naszą atmosferą z prędkością 66 km/s, a po ich przelocie często pozostają smugi, rozwiewane przez obecne na dużych wysokościach wiatry. Wyglądają niezwykle efektownie na wykonanych po sobie kilkunastu – kilkadziesiątu ekspozycjach, złożonych potem w animację. Radiant roju wschodzi po 21:30 i do końca nocy astronomicznej zdąży się wnieść na ponad 60° . W tym roku ich warunki obserwacyjne są bardzo dobre w związku z Księżycem kilka dni po nowiu. Tutaj można spodziewać się ponad 20 meteorów na godzinę.

Gwiazda zmienna **Mira Ceti** osiągnie maksimum swojej jasności 6 października, natomiast tydzień później największą jasność osiągnie kolejna **miryda R Leo**. Pierwsza z gwiazd góruje około godziny 2, mniej więcej 26° na południe od Hamala, najjaśniejszej gwiazdy Barana. R Leo wschodzi w momencie górowania Miry, a na koniec nocy astronomicznej wznosi się na prawie 20° . R Leo znajduje się 5° na zachód od Regulusa, czyli w jednym polu widzenia lornetki z najjaśniejszą gwiazdą Lwa. Na początku miesiąca niedaleko obu gwiazd znajduje się bardzo jasna planeta Wenus. Mira może osiągnąć jasność prawie 2^m , natomiast druga z gwiazd – jasność o 3^m mniejszą. Akurat podczas największego blasku obu gwiazd Księżyc jest blisko nowiu i nie przeszkadza w ich obserwacjach.

Ariel MAJCHER

GW190521: masywne wibracje

Mimo obiektywnych trudności związanych z globalną pandemią współpraca naukowa LIGO-Virgo-KAGRA nie zwalnia tempa. Zrzeszeni w niej naukowcy mają ciągle pełne ręce roboty przy opracowywaniu detekcji zarejestrowanych podczas kampanii obserwacyjnej O3, która zakończyła się pod koniec marca 2020 roku.

Kolejny niezwykły sygnał, GW190521, został zaobserwowany jednocześnie przez trzy detektory (dwa Advanced LIGO oraz jeden Advanced Virgo) 21 maja 2019 roku; oszacowany współczynnik wystąpienia fałszywego alarmu (przypadkowej koincydencji podobnego nieastrofizycznego zakłócenia w trzech detektorach jednocześnie) wynosi 1 na 4900 lat. GW190521 trwał jedynie 0,1 sekundy w stosunkowo niskich częstotliwościach (maksimum „głośności” przy 60 Hz). Wygląda jak standardowy „ćwierk”, czyli fale emitowane podczas ostatnich orbit układu podwójnego, po których zachodzi koalescencja (połączenie się składników układu), a następnie występują drgania powstałego w ten sposób obiektu („podzwonne”). Krótki czas trwania sygnału w zakresie czułości detektorów i niska częstotliwość świadczą o tym, że jeśli sygnał rzeczywiście został wyprodukowany przez układ podwójny, to składniki muszą być dużo masywniejsze niż rejestrowane do tej pory, ponieważ czas trwania i częstotliwość ćwierku skaluje się z masą składników (zob. Δ_{20}^9). Sygnał jest zgodny z modelem koalescencji układu czarnych dziur o masach $m_1 = 85^{+21}_{-14} M_\odot$ i $m_2 = 66^{+17}_{-18} M_\odot$ oraz powstania czarnej dziury o masie $m_f = 142^{+28}_{-16} M_\odot$. Energia równoważna około $9 M_\odot$ została wyemitowana w falach grawitacyjnych. Detekcja oznacza bezpośredni pomiar amplitudy fali, co przekłada się na bezpośredni pomiar jasnościowej – czy raczej „głośnościowej” – odległości do źródła (bo amplituda jest odwrotnie proporcjonalna do odległości). Wynosi ona $5,3^{+2,4}_{-2,6}$ Gpc. Mówimy więc nie o lokalnym Wszechświecie, tylko o odległościach prawdziwie kosmologicznych. Przeliczając gigaparseki na lata świetlne, odległość do źródła to ponad 17 miliardów lat świetlnych! Nie oznacza to jednak, że koalescencja nastąpiła przed Wielkim Wybuchem (wiek Wszechświata jest szacowany na około 13,8 miliardów lat). Ten paradoksalny wynik jest możliwy z powodu ekspansji Wszechświata. W rzeczywistości składniki układu GW190521 zderzyły się około 7 miliardów lat temu.

Zmierzone wartości są ciekawe z paru powodów. Po pierwsze, czarna dziura o masie m_1 znajduje się z wielkim prawdopodobieństwem w „teoretycznie zabronionej” przerwie masowej od około $60 M_\odot$ do około $130 M_\odot$. Zakres ten jest związany z masywnymi gwiazdami wybuchającymi jako supernowe z powodu niestabilności kreacji par (pisaliśmy o tym niedawno w Δ_{20}^4 przy okazji obserwacji elektromagnetycznych, donoszących o wykryciu kandydata na równie masywną czarną dziurę). Tego typu masywne gwiazdy-supernowe nie pozostawiają po sobie czarnej dziury ani gwiazdy neutronowej, jak to się dzieje w przypadku gwiazd

mniej masywnych. Mamy więc interesującą zagadkę: jak powstały masywne składniki układu? Najlepiej dopasowany model sygnału zawiera w sobie informacje o różnym od zera tempie obrotu obu składników (spinie czarnych dziur). Możliwe jest zatem, że obiekty te powstały w wyniku wcześniejszych hierarchicznych koalescencji, albo bardziej egzotycznych procesów (np. powstały tuż po Wielkim Wybuchu jako tzw. pierwotne czarne dziury).

Pozostałość po GW190521 o masie m_f jest natomiast bezsprzecznie *czarną dziurą o masie pośredniej* (od 100 do 100 000 M_\odot), czyli pomiędzy populacjami czarnych dziur „gwiazdowych” i supermasywnymi czarnymi dziurami o masach od milionów do miliardów M_\odot . Obserwacje elektromagnetyczne zidentyfikowały dotychczas bardzo niewielu kandydatów na czarne dziury o masie pośredniej, a GW190521 dostarcza pierwszego pomiaru masy takiego obiektu za pomocą fal grawitacyjnych. Przedział mas czarnych dziur od 100 do 1000 M_\odot od wielu lat był szczególnie tajemniczy z powodu braku obserwacji w tym zakresie. Zainteresowanie populacją czarnych dziur o masach pośrednich wiąże się z jedną z najbardziej fascynujących i trudnych zagadek stojących przed astrofizykami i kosmologami: dotyczy ona powstawania supermasywnych czarnych dziur. Ta i przyszłe podobne masywne detekcje pomogą w ustaleniu, czy supermasywne czarne dziury formują się poprzez akrecję lżejszych obiektów podobnych do pozostałości GW190521, czy też w jakiś inny sposób.

Dodatkowego kolorytu całej sprawie nadają niezależne od LIGO-Virgo-KAGRA obserwacje wykonane w ramach projektu Zwicky Transient Facility. Zespół ZTF twierdzi, że mniej więcej po miesiącu od alertu GW190521 zaobserwował promieniowanie optyczne z kierunku i w odległości zgodnych w granicach błędu z pomiarami detektorów LIGO i Virgo. Krzywa zmian blasku jest konsystentna z modelem masywnej (około 100 M_\odot) czarnej dziury przelatującej z dużą prędkością (około 200 km/s) przez dysk akrecyjny wokół supermasywnej czarnej dziury. Z powodu spinu i nierównych mas składników GW190521 utworzona czarna dziura może posiadać niezerowy pęd. Poruszając się z dużą prędkością, rozgrzewa ona gaz dysku, co powoduje charakterystyczne zmiany krzywej blasku, znacząco inne (według ZTF) od podobnych zjawisk przejściowych, takich jak mikrosoczewkowanie czy rozerwanie pływowe gwiazdy w pobliżu masywnego towarzysza. Model teoretyczny przewiduje, że po około 1,5 roku (dla supermasywnej czarnej dziury o $M = 10^8 M_\odot$) czarna dziura GW190521 znajdzie się z powrotem w pobliżu dysku i ponownie wywoła efekt optyczny. Jeśli ta prognoza się potwierdzi, będzie to kolejny po GW170817 przykład zastosowania astronomii wieloaspektowej.

Michał BEJGER

Abbott et al., *Phys. Rev. Lett.* 125, 101102 (2020).
Abbott et al., *ApJ*, 900:L13 (2020).
Graham et al., *Phys. Rev. Lett.* 124, 251102 (2020).



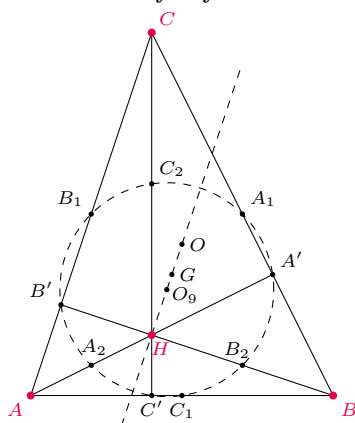
Jego Wysokości, część 2

Bartłomiej BZDEGA

Przed rozpoczęciem lektury niniejszego kącika warto zapoznać się z poprzednim, w którym zdefiniowany został *układ ortocentryczny* (na rysunku A, B, C, H) oraz jego *spodki* (A', B', C'), *odcinki* (AB, BC, CA, AH, BH, CH) i środki tych odcinków ($A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$).

Poruszając temat układów ortocentrycznych, byłoby nietaktem pominąć dwa słynne twierdzenia z nimi związane: o *okręgu dziewięciu punktów* i o *prostej Eulera*.

Układ ortocentryczny



Punkty A_1 i B_1 są środkami boków BC i CA , a punkty A_2 i B_2 – odcinków AH i BH , więc $A_1B_1 \parallel AB \parallel A_2B_2$. Analogicznie dowodzimy, że $A_1B_2 \parallel CH \parallel A_2B_1$. Proste AH i BC są prostopadłe, więc czworokąt $A_1B_1A_2B_2$ jest prostokątem. Z tego wynika, że odcinki A_1A_2 i B_1B_2 są równej długości i mają wspólny środek. To samo można udowodnić dla odcinków B_1B_2 i C_1C_2 . Te trzy odcinki – A_1A_2 , B_1B_2 i C_1C_2 – są zatem średnicami tego samego okręgu – nazwijmy go o_9 . Na okręgu o_9 leży również punkt A' , gdyż albo $A' \in \{A_1, A_2\}$, albo $\sphericalangle A_1A'A_2 = 90^\circ$; analogicznie jest dla punktów B' i C' . Okrąg o_9 to słynny *okrąg dziewięciu punktów* trójkąta ABC .

Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest jednokładny do trójkąta ABC w stosunku $-\frac{1}{2}$ względem ich wspólnego środka ciężkości G , zatem opisane na nich okręgi o i o_9 również są jednokładne względem G . Z tego wynika, że punkt G leży na odcinku OO_9 łączącym środki tych okręgów, przy czym $|O_9G| = \frac{1}{2}|OG|$. Co więcej, trójkąt $A_2B_2C_2$ jest jednokładny do trójkąta ABC w stosunku $\frac{1}{2}$ względem punktu H , więc punkt O_9 jest środkiem odcinka OH . Z tego wynika, że punkty H, G i O leżą w tej kolejności na jednej prostej i zachodzi równość $|OH| = 2|OG|$. Nazywamy ją prostą Eulera trójkąta ABC .

Na koniec zauważmy, że w przypadku zdegenerowanego układu ortocentrycznego ($H = C$) zachodzą równości $C = H = A' = B' = C_2$ oraz $A_1 = B_2$ i $A_2 = B_1$. Poza tym, że prostokąt $A_1B_1A_2B_2$ degeneruje się do odcinka, nie dzieje się nic, co mogłoby zaszkodzić przeprowadzonemu wyżej rozumowaniu.

Zadania

- Udowodnić, że jeśli punkty A, B, C, H tworzą układ ortocentryczny, to:
 - okręgi dziewięciu punktów trójkątów ABC, ABH, BCH, CAH pokrywają się (czyli można mówić o okręgu dziewięciu punktów danego układu ortocentrycznego);
 - proste Eulera trójkątów ABC, ABH, BCH, CAH mają punkt wspólny.
- Przy oznaczeniach z rysunku udowodnić, że punkty $A_1, B_1, A_2, B_2, C_1, C_2$ są środkami sześciu łuków, które na okręgu o_9 wyznaczają punkty A', B' i C' .
- Przy oznaczeniach z rysunku wykazać, że $|CH| = 2|OC_1|$.
- Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest równoramienny. Prosta ℓ przechodzi przez środek okręgu opisanego na tym trapezie, jest równoległa do jego podstaw i leży pomiędzy nimi, dwa razy bliżej prostej AB niż prostej CD . Punkt P jest rzutem punktu C na prostą ℓ . Dowieść, że $AP \perp BC$.
- W równoległoboku $ABCD$ kąt A jest ostry. Punkt K spełnia warunek $\sphericalangle KAD = \sphericalangle KCD = 90^\circ$. Prosta KB przecina odcinek AC w punkcie P . Udowodnić, że punkt P oraz środki odcinków AK, BK, CK leżą na wspólnym okręgu.
- Odcinki AA', BB' i CC' są wysokościami trójkąta różnobocznego ABC . Niech A^* oznacza punkt przecięcia prostych BC i $B'C'$, analogicznie definiujemy punkty B^* i C^* . Wykazać, że punkty A^*, B^*, C^* leżą na prostej prostopadłej do prostej Eulera trójkąta ABC .

Wskazówki do zadań
 1. (a) Spodki i środki odcinków układu ortocentrycznego nie zależą od tego, na jakiej prostej z tych trójkątów spojrzymy najpierw.
 (b) Każda z tych czterech prostych przechodzi przez punkt O_9 .
 2. Punkt H jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $A'B'C'$, wpisane w trójkąt $A'B'C'$, a dwusieczne kątów wewnętrznego i zewnętrznego przecinają okrąg opisany na trójkącie w środkach odpowiednich łuków (zob. kącik nr 3).
 3. Trójkąty CHG i C_1OG są podobne (kb).
 4. Prosta ℓ jest prostą Eulera trójkąta ABC , bo leży na niej środek ciężkości $A_1B_1C_1$ i środek okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt P jest ortocentrum trójkąta ABC , gdyż leży on na jego prostej Eulera oraz na wysokości poprowadzonej z wierzchołka C .
 5. Punkty A, B, C, K tworzą układ ortocentryczny, gdyż $AK \perp BC$ i $CK \perp AB$. Rozważycie okrąg dziewięciu punktów tego układu.
 6. Potęgi punktu A^* względem okręgów o , okręgu o średnicy BC oraz o_9 są równe, więc punkt A^* leży na osi potęgowej okręgów o i o_9 , czyli prostej prostopadłej do OO_9 (prostej Eulera). Analogicznie postępujemy z punktami B^* i C^* .
 (O) Potęgi punktu względem okręgu można przeczytać w kąciku nr 11).

delta
MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA
h=6,63·10⁻³⁴ J·s $\tau=3,141592...$

spotkanie on-line

MARATON WYKŁADOWY Z DELTA

19 listopada 2020 r.

15-minutowe wykłady
z matematyki, fizyki,
informatyki i astronomii

Od 47 lat wydajemy dla Was miesięcznik o nauce

Więcej informacji: mimuw.edu.pl/maraton2020



Delta.Czasopismo



UNIwersytet
Warszawski