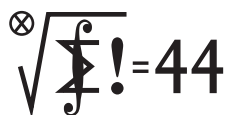


Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2022

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 823 ($WT = 2,55$) i 824 ($WT = 1,44$) z numeru 6/2021

Lukasz Merta	Kraków	44,45
Piotr Kumor	Olsztyn	44,08
Błażej Żmija	Kraków	40,50
Janusz Olszewski	Warszawa	39,34
Kacper Morawski	Warszawa	37,16
Witold Bednarek	Łódź	36,36
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Paweł Najman	Kraków	34,25

Linię 44p. przekraczają panowie: Lukasz Merta po raz drugi; Piotr Kumor po raz piątnasty.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2021

Przypominamy treść zadań:

825. Dany jest graf ważony G mający n wierzchołków; $n \geq 4$. Każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź (niezorientowana). Każdej krawędzi przyporządkowana jest jej *waga*: liczba rzeczywista różna od zera. Określamy *mignięcie* wierzchołkiem jako jednoczesną zmianę znaku wszystkich krawędzi wychodzących z tego wierzchołka.

Zakładamy, że zarówno w grafie G , jak i w każdym grafie ważonym, uzyskanym z G przez jednokrotne lub dwukrotne wykonanie operacji mignięcia (na dowolnie wybranym wierzchołku/wierzchołkach) suma wag wszystkich krawędzi grafu jest liczbą o module 1. Wyznaczyć zbiór wartości, jakie może mieć iloczyn wag wszystkich krawędzi grafu G .

826. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg o średnicy AB . Styczne do okręgu w punktach A i D przecinają się w punkcie F . Boki BC i CD są jednakowej długości; zaś przekątna CE połowi przekątną AD . Dowieść, że proste CE i EF są prostopadłe.

825. Określamy *walor* wierzchołka jako sumę wag wychodzących z niego krawędzi. Jeżeli suma wag wszystkich krawędzi grafu G wynosi s ($s \in \{1, -1\}$), to suma walorów wszystkich wierzchołków wynosi $2s$. Mignięcie wierzchołkiem, który ma walor t , powoduje zmianę sumy wag krawędzi z s na $s - 2t$. Ta nowa suma ma (z założenia) znów być równa s lub $-s$. Wobec tego $t = 0$ lub $t = s$. Tak więc każdy wierzchołek ma walor 0 lub s . Suma wszystkich walorów to $2s$. Zatem dokładnie dwa wierzchołki – nazwijmy je: *czerwone* – mają walor s ; pozostałe – *zielone* – mają walor 0.

Dzięki założeniu o „dwukrotnym mignięciu” można to samo rozumowanie odnieść do grafu uzyskanego w wyniku mignięcia dowolnie wybranym wierzchołkiem grafu G .

Wniosek:

W1. Zarówno w grafie G , jak i w każdym grafie powstałym z G przez jednokrotne mignięcie, są dwa wierzchołki czerwone (o jednakowym walorze równym 1 lub -1) oraz $n-2$ wierzchołków zielonych (o walorze 0).

Mignięcie dowolnym wierzchołkiem nie zmienia koloru tego wierzchołka (jego walor ulega przemnożeniu przez -1). Odnotujemy kilka własności nieco mniej oczywistych:

Zadania z matematyki nr 833, 834

Redaguje Marcin E. KUCZMA

833. Trzy niewspółliniowe punkty C, E, G leżą wewnątrz koła ograniczonego okręgiem Ω , który przecina prostą CE w punktach B, F ; prostą CG – w punktach A, I ; prostą EG – w punktach D, H ; oznaczenia ustalone są tak, by na każdej z tych trzech prostych cztery nazwane punkty leżały w porządku alfabetycznym. Trójkąt krzywoliniowy ABC posiada okrąg wpisany, styczny do odcinków AC, BC oraz styczny w punkcie K do łuku AB okręgu Ω . Analogicznie, okręgi wpisane w figury DEF i GHI są styczne do okręgu Ω odpowiednio w punktach L i M . Udowodnić, że proste CK, EL, GM mają punkt wspólny.

834. Podać przykład takiego nieskończonego rosnącego ciągu liczb naturalnych (a_1, a_2, a_3, \dots) , że dla każdego $n \geq 1$ suma

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{L_n}{M_n},$$

zapisana w postaci ułamka nieskracalnego L_n/M_n , ma w liczniku liczbę L_n podzieloną przez n . Dla znalezionej ciągu (a_n) obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (1/a_n)$ lub oszacować ją z dołu; to znaczy, wskazać dowolną liczbę D , nie przekraczającą owej sumy. Im większa wartość D , tym wyższa ocena.

Zadanie 834 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Tomasz Ordowski.

W2. Każda krawędź wychodząca z wierzchołka zielonego w (w grafie G) ma wagę $\pm 1/2$, zaś mignięcie jej przeciwnym końcem powoduje zmianę koloru wierzchołka w na czerwony.

Jest tak, bowiem jeśli taka krawędź ma wagę q , to mignięcie jej drugim końcem zmienia zerowy walor wierzchołka w o $2q$; jego nowy walor już nie jest zerowy, więc wynosi ± 1 , czyli w stał się czerwony; $q = \pm 1/2$.

W3. Z wierzchołka czerwonego może wychodzić co najwyżej jedna krawędź do wierzchołka zielonego.

Gdyby bowiem wychodziły dwie, to mignięcie tym czerwonym spowodowałoby (w myśl W2) zaczerwienienie ich zielonych końców; w nowym grafie byłyby już trzy wierzchołki czerwone, co (wobec W1) jest zabronione.

W4. W grafie G jest co najwyżej jedna krawędź o obu końcach zielonych.

Uzasadnienie: w wyniku mignięcia dowolnym końcem krawędzi zielono-zielonej drugi koniec staje się czerwony (W2); w nowym grafie nie może być trzech wierzchołków czerwonych (W1), więc wierzchołek, którym migamy, musi być też połączony z pewnym wierzchołkiem czerwonym (aby zmienić jego kolor). Gdyby istniały dwie krawędzie zielono-zielone, miałyby łącznie co najmniej trzy wierzchołki, a każdy z nich musiałby łączyć się z którymś z dwóch wierzchołków czerwonych. Pewien czerwony byłby połączony z dwoma zielonymi, wbrew W3.

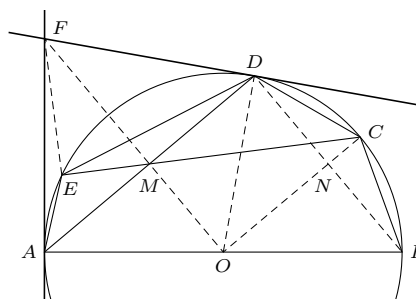
Dla dokończenia rozwiązania rozważymy dwa przypadki. Jeżeli istnieje w grafie G krawędź o obu końcach zielonych i wadze q ($q = \pm 1/2$), to z każdego z tych końców wychodzi krawędź o wadze $-q$ do wierzchołka czerwonego, i to nie tego samego (W3). Jednostkowy walor wierzchołków czerwonych wymusza ich połączenie krawędzią o wadze $-q$; innych krawędzi już nie ma (własności W3, W4) – pozostałe wierzchołki są izolowane. Czworobok krawędzi o wagach $q, -q, -q, -q$ spełnia wymagane warunki. Iloczyn wag wynosi $-q^4$, czyli $-1/16$.

Pozostaje przypadek, gdy w grafie G nie ma krawędzi o obu końcach zielonych. Wtedy wszystkie wierzchołki zielone są izolowane; bowiem gdyby z któregoś wychodziły krawędzie – z konieczności do obu wierzchołków czerwonych, jedna o wadze $-1/2$, druga o wadze $1/2$ – wówczas żadna liczba nie mogłaby być wagą krawędzi łączącej wierzchołki czerwone, dającą każdemu z nich walor ± 1 . Tak więc w tym przypadku graf G ma tylko jedną krawędź, o końcach czerwonych, z wagą 1 lub -1 .

Stąd odpowiedź: iloczyn, o który pyta zadanie, może mieć jedynie wartości $1, -1, -1/16$.

[Komentarz redaktora Ligi w elektronicznym wydaniu numeru.]

826. Z podanych założeń wynika, że środek M odcinka AD leży na prostej CE , a środek N odcinka BD leży na prostej OC . Czworokąt $MOND$ jest równoległobokiem; skoro kąt ADB jest prosty, jest to prostokąt.



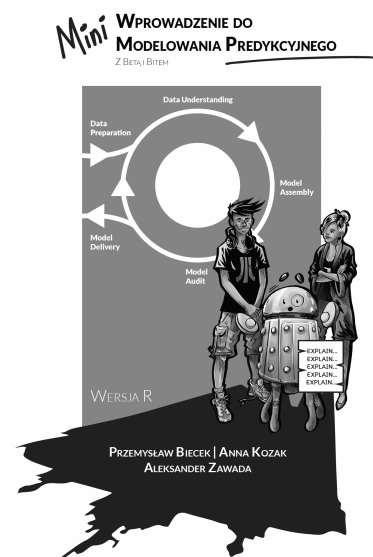
Deltoid $AODF$, z kątami prostymi przy wierzchołkach A, D , ma okrąg opisany. W punkcie M przecinają się cięciwy AD, OF tego okręgu, jak również cięciwy AD, CE okręgu o środku O . Stąd $FM \cdot MO = AM \cdot MD = CM \cdot ME$. Dostajemy proporcję $MO/MC = ME/MF$, która uzasadnia podobieństwo trójkątów MOC i MEF . Pierwszy z nich ma kąt prosty przy wierzchołku O , więc drugi ma kąt prosty przy wierzchołku E ; czyli $CE \perp EF$, jak należało wykazać.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Odpowiedź na wielkie pytanie o Uczenie Maszynowe i całą resztę



Elektroniczną wersję książki można odnaleźć na stronie <https://betaandbit.github.io/RML/>

Książka *Mini wprowadzenie do modelowania predykcyjnego* (tytuł oryginału *The Hitchhiker's Guide to Responsible Machine Learning*) autorstwa Przemysława Biećka, Anny Kozak i Aleksandra Zawady jest krótką, lecz pouczającą wycieczką po (jak sam tytuł wskazuje) uczeniu maszynowym. Składają się na nią dwie zreżymowane części. Jedną z nich to komiks (świetne rysunki A.Z.) przedstawiający historię rodzeństwa „naukodanowców” (ang. *data scientist*), Bety i Bity (nawiasem pisząc, gościli oni na łamach *Delty* jeszcze jako dzieci, patrz Δ_{16}^{12} i Δ_{21}^{02}), którzy pod presją czasu muszą wykorzystać swoje analityczne umiejętności, aby wspomóc walkę z rozprzestrzeniającym się po kraju wirusem. Pojawiające się w tej opowieści pojęcia i koncepcje z zakresu uczenia maszynowego są dokładnie wyjaśniane w ramach przeplatanej z komiksem części drugiej, o bardziej podręcznikowym (w pozytywnym tego słowa znaczeniu) charakterze. Zawarto w niej również kody w języku R, pozwalające na samodzielne odtworzenie kolejnych etapów analizy wykonywanej przez bohaterów komiksu. Całość obrazowo przybliży skomplikowany proces wnioskowania z danych, a przynajmniej to, jak powinien on przebiegać, jeśli chcemy mieć zaufanie do jego wyników. Warto tu podkreślić, że autorzy są dobrze zaznajomieni nie tylko z teorią, ale i praktyką *data science*, co pozwala wierzyć, że przedstawiona przez nich wizja jest bliska „naukodanowej” codzienności.

Podkreślmy, że w tej eskapadzie nie wymaga się od Czytelnika profesjonalnego, podróżniczego ekwipunku – otwarty umysł oraz solidne matematyczne przygotowanie na poziomie szkoły średniej to z pewnością wszystko, czego potrzeba, aby skorzystać z wyprawy. Nie trzeba chyba dodawać, że nie wystarczy powrócić z takiej wycieczki, aby stać się ekspertem w „data science” – jest to wszak ogromna (i fascynująca) dziedzina, która może być porównana do podróży tysiąca mil. Wiemy jednak doskonale, że takie podróże rozpoczynają się od pierwszego kroku... lub złapania autostopu!

E.R.