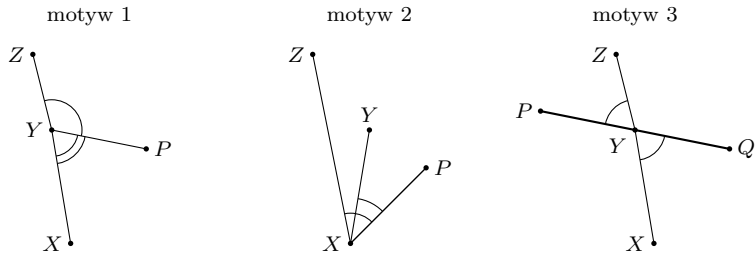


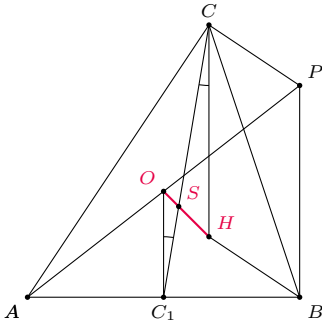
Współliniowość i kąty

Bartłomiej BZDEGA

Zacznę od trzech prostych motywów, na których opierają się zadania z bieżącego kącika (w trzecim punkcie Y leży na odcinku PQ).



X, Y, Z są współliniowe $\iff |\sphericalangle PYX| + |\sphericalangle PYZ| = 180^\circ$
 X, Y, Z są współliniowe $\iff |\sphericalangle PXY| = |\sphericalangle PXZ|$
 X, Y, Z są współliniowe $\iff |\sphericalangle XYQ| = |\sphericalangle ZYP|$



A oto zastosowanie motywu 3 w dowodzie twierdzenia o prostej Eulera (inny dowód, wykorzystujący jednokładność, pokazałem w 22. kąciku (Δ_{20}^{10}); ten jest znacznie bardziej elementarny). Standardowo przez H, O, S oznaczamy odpowiednio ortocentrum, środek okręgu wpisanego i środek ciężkości trójkąta ABC , niech ponadto C_1 będzie środkiem odcinka AB .

Wybermy taki punkt P , by czworokąt $CHBP$ był równoległobokiem. Wtedy $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ACP = 90^\circ$, więc AP jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC , w szczególności punkt O jest środkiem odcinka AP . Ponadto punkt C_1 jest środkiem odcinka AB , więc C_1O jest odcinkiem środkowym w trójkącie ABC , czyli $|C_1O| = \frac{1}{2}|BP| = \frac{1}{2}|CH|$. Z własności środkowych mamy $|C_1S| = \frac{1}{2}|CS|$, a z równoległości $OC_1 \parallel HC$ (obie proste są prostopadłe do prostej AB) mamy $\sphericalangle OC_1S = \sphericalangle HCS$. Z powyższych rozważań wynika, że trójkąt OC_1S jest podobny do trójkąta HCS , więc $|C_1OS| = |\sphericalangle CHS|$. Na mocy motywu trzeciego dowodzi to współliniowości punktów O, S, H .

Piękne zastosowanie motywu 2 można znaleźć w 82. *Deltoidzie* Joanny Jaszuskiej (Δ_{15}^{10}), w dowodzie twierdzenia o prostej Simsona.

Zadania.

- Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B . Odcinek AP jest średnicą okręgu o_1 , a odcinek AQ – okręgu o_2 . Wykazać, że punkty B, P, Q leżą na jednej prostej.
- Odcinek AB jest częścią wspólną siedmiokątów foremnych $ABCDEFG$ i $BAHIJKL$. Wykazać, że punkty oznaczone samogłoskami są współliniowe.
- Częścią wspólną kwadratów $ABCD$ i $DEFG$ jest odcinek DG , zawarty w odcinku AD . Okręgi opisane na tych kwadratach przecinają się w punkcie $P \neq D$. Udowodnić, że punkty C, G, P leżą na jednej prostej.
- Prosta ℓ oraz okręgi o_1 i o_2 są styczne w punkcie T . Okrąg o , przechodzący przez punkt T , przecina prostą ℓ oraz okręgi o_1 i o_2 w punktach odpowiednio P, K i L , różnych od T . Proste PK i PL przecinają po raz drugi okręgi o_1 i o_2 w punktach odpowiednio A i B . Wykazać, że punkty A, B i T leżą na jednej prostej.
- Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Punkty K i L leżą na odcinkach odpowiednio BD i DF , przy czym $|BK| = |DL| = |AB|$. Udowodnić, że punkty C, K, L leżą na jednej prostej.
- Środek S okręgu ω leży na okręgu o . Wspomniane okręgi przecinają się w dwóch punktach, jednym z nich jest A . Punkt P wybrano na okręgu o w ten sposób, by odcinek PS przecinał okrąg ω w punkcie B . Symetralna odcinka BP przecina okrąg o w punkcie C , leżącym po innej stronie prostej BP niż punkt A . Dowiedzieć, że punkty A, B, C są współliniowe.
- Równoległobok $ABCD$ ma kąt ostry przy wierzchołku A . Punkt P leży na odcinku CD . Prosta BP przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $Q \neq B$. Okręgi opisane na trójkątach ABC i DPQ przecinają się w punkcie $R \neq Q$. Wykazać, że punkty A, D, R leżą na jednej prostej.

Wskazówki do zadań

- Kąty $\sphericalangle PBA$ i $\sphericalangle QBA$ są proste.
- Na siedmiokątach można opisać okręgi. Kąt $\sphericalangle EAB$ jest wpisany, oparty na $\frac{1}{2}$ okręgu, a kąt $\sphericalangle BAI$ – na $\frac{1}{4}$ okręgu.
- Dobrze jest przyjąć się kątom $\sphericalangle CPD$ i $\sphericalangle GPD$.
- Zastosować twierdzenie o stycznej i cięciwie. Trzeba rozważyć dwa przypadki. Jeśli okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie, to wykazujemy, że $\sphericalangle ATB = 180^\circ$ (motyw 1), jeśli wewnętrznie – to ze $\sphericalangle ATP = |\sphericalangle BTP|$ (motyw 2).
- Kąty $\sphericalangle DCK$ i $\sphericalangle DCL$.
- Za miarę ukrywają się równości $|AS| = |BS|$ i $|BC| = |CP|$ oraz motyw 3.
- Można udowodnić, operując odpowiednio twierdzeniem o kącie wpisanym, że $\sphericalangle CDH = |\sphericalangle BAD|$. Są tu do rozważenia dwa przypadki – odcinki PQ i DH mogą się przecinać lub nie.