

# Stara Delta Środek ciężkości czy masy?

Wojciech KOPCZYŃSKI

Na początku było Słowo...

Przypominamy artykuł, który pierwotnie ukazał się w  $\Delta_{99}^6$ .

Wojciech Kopczyński (1946–2022) był fizykiem relatywistą, przez całą karierę naukową związanym z Katedrą Teorii Względności i Grawitacji na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Od grudnia 1996 roku do kwietnia 2000 roku był zastępcą redaktora naczelnego *Delty*.

Z pojęciem *środku ciężkości* zapoznałem się na szkolnych lekcjach fizyki. Natomiast z – wypranym z treści fizycznej – pojęciem *środku masy* zetknąłem się po raz pierwszy na wykładzie z matematyki, prowadzonym 34 lata temu przez Pana Andrzeja Mąkowskiego i mającym na celu przygotowanie do egzaminu wstępnego na Uniwersytet Warszawski. Studiowanie fizyki przekonało mnie, że środek masy jest czymś niezmiernie ważnym, a ze środkiem ciężkości ani w czasie studiów, ani podczas lektury fizycznej literatury naukowej chyba się nawet nie zetknąłem.

Zdziwił mnie ostatnio fakt, że obecnie uczniowie dowiadują się o środku masy na lekcjach fizyki (nie we wszystkich szkołach), a o środku ciężkości wyłącznie od matematyków: o „środku ciężkości trójkąta” z podręczników, a o innych „środkach ciężkości” z artykułów naszego Redaktora Naczelnego. Po co, pisząc o jednym – jak się wydaje – pojęciu, używać dwóch różnych określeń? A może pojęcia te czymś się różnią? Jeśli tak, to użycie którego z nich jest właściwsze?

Określimy te pojęcia, zaczynając od środka masy. Umieścimy w punktach zaznaczonych wektorami wodzącymi  $\mathbf{r}_k$  masy  $m_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Ważoną masami miarą odległości tego układu cząstek (a jeśli ktoś woli, to punktów materialnych) od punktu zaznaczonego wektorem wodzącym  $\mathbf{r}$  jest

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n m_k (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)^2.$$

Środek masy tego układu cząstek definiujemy jako punkt, w którym funkcja  $f$  osiąga minimum. Jeśli przez  $\mathbf{R}$  oznaczymy promień wodzący tego punktu, to warunek znikania pochodnej funkcji  $f$  względem  $\mathbf{r}$  daje

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k / M,$$

przy czym  $M = \sum_{k=1}^n m_k$  jest *całkowitą masą układu*. Żądanie, aby  $m_k > 0$  dla każdego  $k$ , jest w przypadku tej funkcji warunkiem dostatecznym na (ostre) minimum. (Nieco słabszy warunek „dla każdego  $k$  zachodzi  $m_k \geq 0$  oraz istnieje  $k$ , dla którego  $m_k > 0$ ” jest nie tylko dostateczny, ale i konieczny.) Nie będę zagłębiał się w to, że środek masy izolowanego układu fizycznego porusza się ruchem prostoliniowym i jednostajnym, ani w to, iż fakt ten poprzez twierdzenie Noether wiąże się z niezmienniczością lagranżjanu (patrz: *Delta* 5/1998) względem przekształceń Galileusza, ani w wiele innych ciekawych faktów związanych z pojęciem środka masy.

Przejdźmy do środka ciężkości. Nazwa ta sugeruje, że jest to pojęcie związane z układem sił grawitacyjnych. Niektórzy adepci fizyki są skłonni przypuszczać, że pojęcie środka dotyczy dowolnego układu sił. W *Delcie* podczas niedawnej dyskusji nad zadaniem na temat siły Coriolisa jeden z jej uczestników zauważył, że oprócz tej siły mogą pojawić się siły oporu i – o ile ich środek nie będzie pokrywał się ze środkiem masy – doprowadzą one do obrotu rozważanego w zadaniu ciała. Miał rację w tym względzie, że siły oporu mogą doprowadzić (łącznie z siłami Coriolisa) do obrotu, ale i nie miał racji, bo siły oporu ani siły Coriolisa na ogół nie mają środka. Tak czy inaczej środek układu sił  $\mathbf{F}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , działających na układ  $n$  cząstek, wiąże się z obrotem układu cząstek jako całości, a o tym decyduje *całkowity moment sił względem punktu O* (początku układu kartezjańskiego):

$$\mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k.$$

Gdy przesuwamy początek układu kartezjańskiego do punktu  $O'$ , takiego, że  $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{r}$ , to wtedy  $\mathbf{r}_k \mapsto \mathbf{r}_k - \mathbf{r}$ , a całkowity moment sił przekształca się następująco:

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

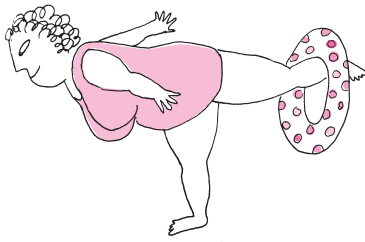
OGÓLNOPOLSKA Matematyczna KONFERENCJA STUDENTÓW

OMatKo!!!

Serdecznie zapraszamy na tegoroczną IX edycję Ogólnopolskiej Matematycznej Konferencji Studentów OMatKo!!! Jest ona skierowana do wszystkich studentów zainteresowanych matematyką. Każdy znajdzie coś dla siebie, od czystej teorii po szeroki wachlarz zastosowań.

OMatKo!!! jest jedną z największych studenckich konferencji w Polsce. To idealna okazja, by podzielić się swoją wiedzą z innymi, nawiązać nowe znajomości i wspólnie poszerzać horyzonty. Każdy student może zgłosić referat lub plakat i pochwalić się tym, co urzekło go w teoretycznej czy praktycznej stronie Królowej Nauk. Do prezentacji zapraszamy też koła naukowe.

W tym roku spotkamy się w murach Politechniki Wrocławskiej w dniach 26–27 listopada. Formularz zapisowy można będzie odnaleźć pod koniec października na stronie konferencji: <http://im.pwr.edu.pl/~omatko/>



przy czym  $\mathbf{F} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k$  jest całkowitą siłą działającą na układ cząstek. Jeśli  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , to całkowity moment sił nie zależy od punktu, względem którego go obliczamy. Jeśli zaś  $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ , to całkowity moment sił nie zmienia się, gdy punkt, względem którego go obliczamy, pozostaje na prostej równoległej do  $\mathbf{F}$ ; mamy więc prawo powiedzieć, że moment sił obliczamy względem takiej prostej. Ponadto obowiązuje

**Twierdzenie (słuszne, gdy  $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ ).** Następujące warunki są równoważne:

1. Istnieje taki wybór prostej, względem której obliczamy całkowity moment sił, że ten ostatni znika.
2. Całkowity moment sił, obliczony względem dowolnego punktu, jest prostopadły do całkowitej siły.

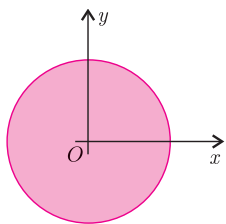
Dowód: Przy ustalonych  $\mathbf{M}_O$  i  $\mathbf{F}$  równanie

$$\mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

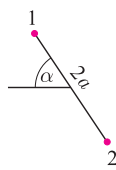
da się rozwiązać względem  $\mathbf{r}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{F}$ . ■

Wystąpienie sytuacji opisanej w Twierdzeniu zdarza się rzadko. Może ona zaistnieć, gdy wszystkie siły  $\mathbf{F}_k$  mają jednakowy kierunek – a więc w szczególności gdy mamy do czynienia z jednorodnym polem grawitacyjnym lub elektrycznym. Ale w przypadku jednorodnego pola elektrycznego sytuacja ta nie wystąpi, gdy całkowity ładunek układu cząstek wynosi zero. Tylko w przypadku jednorodnego pola grawitacyjnego – ze względu na dodatniość masy – sytuacja taka wystąpi zawsze. Można więc mówić o *prostej, wzdłuż której na układ cząstek działa siła grawitacji*. Wraz ze zmianą położenia cząstek prosta ta będzie się zmieniać względem zewnętrznego układu odniesienia, zachowując przy tym swój kierunek. Jeśli możemy związać z układem cząstek układ odniesienia, w którym cząstki te spoczywają (a więc gdy cząstki te tworzą ciało sztywne), to względem tego układu odniesienia powyższa prosta będzie się wprawdzie zmieniać, ale wszystkie tak otrzymane proste przetną się w jednym punkcie ciała sztywnego. O punkcie tym obrazowo mówi się, że jest *punktem przyłożenia siły ciężkości*, albo krócej, iż jest *środkiem ciężkości*. Zauważmy jeszcze, że pojęcie środka ciężkości można wprowadzić nie tylko dla ciała sztywnego *sensu stricto*, lecz także dla rotatora, tj. dla układu co najmniej dwóch cząstek, których wzajemne odległości pozostają niezmiennie i które leżą na jednej prostej. Środek ciężkości rotatora też znajdzie się na tej prostej.

Odradzałbym nauczycielom obszernie omawianie pojęcia środka ciężkości na lekcjach fizyki, gdyż brak na to czasu. Odradzałbym też krótkie wytłumaczenie, że jest to punkt przyłożenia siły ciężkości, gdyż to skądinąd poprawne określenie sugeruje, iż istnieje jakiś punkt przyłożenia dowolnego układu sił. Użycie określenia „środek ciężkości” bez jakiegokolwiek wytłumaczenia też jest ryzykowne, gdyż pozwala domniemywać, że określenie to stosuje się do dowolnego, a nie tylko jednorodnego, pola grawitacyjnego. A to nie jest prawdą.



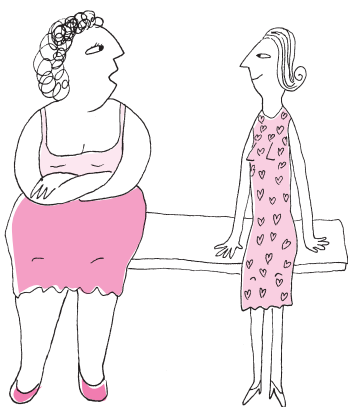
Dwupunktowy rotator w ziemskim polu grawitacyjnym



2 Rozważmy bowiem rotator, składający się z dwóch cząstek o jednakowych masach  $m$ , oddalonych o  $2a$ . Umieścimy ten rotator w ziemskim polu grawitacyjnym (które w rozsądnym przybliżeniu uznamy za sferycznie symetryczne), tak że jego środek geometryczny znajduje się w odległości  $r$  od środka Ziemi  $O$ , a jego oś nachylona jest pod kątem  $\alpha$  do prostej łączącej oba środki geometryczne (patrz rysunek). Ponieważ w polu sferycznie symetrycznym mamy  $\mathbf{F}_k \parallel \mathbf{r}_k$ , więc całkowity moment sił działających na rotator, obliczony względem środka Ziemi, znika:  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ .

Mimo że nie mamy tu do czynienia z polem jednorodnym, istnieje jednak prosta, wzdłuż której działa na rotator siła grawitacyjna: jest ona skierowana równoległe do całkowitej siły działającej na rotator i przechodzi przez środek Ziemi. Chcąc obliczyć całkowitą siłę działającą na rotator,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ , obliczmy najpierw siły  $\mathbf{F}_1$  i  $\mathbf{F}_2$ , działające na jego cząstki. Jeśli przez  $r_0$  oznaczymy promień Ziemi, przez  $g$  zaś przyspieszenie grawitacyjne na jej powierzchni i założymy, że rotator nie wnika w Ziemię, to

$$\mathbf{F}_1 = -mgr_0^2 \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} = -mgr_0^2 \frac{(r - a \cos \alpha, a \sin \alpha)}{(r^2 - 2ar \cos \alpha + a^2)^{3/2}}$$



i analogicznie

$$\mathbf{F}_2 = -mgr_0^2 \frac{(r + a \cos \alpha, -a \sin \alpha)}{(r^2 + 2ar \cos \alpha + a^2)^{3/2}}.$$

Łatwo zauważyć, że gdy  $\alpha \neq 0$  i  $\alpha \neq \pi/2$ , to wtedy składowa  $y$  siły  $\mathbf{F}$  jest różna od zera. A to znaczy, że prosta, wzdłuż której na rotator działa siła grawitacyjna, nie przechodzi na ogół przez jego geometryczny środek. Rotator w ziemskim polu grawitacyjnym nie ma środka ciężkości. Nie ma też środka ciężkości ocean ziemski w polu grawitacyjnym Ziemi i Księżyca. Czy gdyby go miał, możliwe byłyby pływy?

Czy istnieją pole grawitacyjne i ciało sztywne, które umieszczone w tym polu ma środek ciężkości, lecz środek ten nie pokrywa się ze środkiem masy? Na to pytanie nie umiem znaleźć zadowalającej odpowiedzi, skłonny jestem jednak sądzić, że jest ona pozytywna.

Matematyk, pisząc lub mówiąc o środku ciężkości, nie tłumaczy, czym on jest. On go definiuje, a następnie używa. Może to dobrze, że prowokuje ucznia do zadania pytania: – A jaki jest związek tego środka z ciężarem? Źle będzie dopiero wtedy, gdy to pytanie padnie, a matematyk nie będzie umiał na nie odpowiedzieć, nawet odwołując się do lekcji fizyki. Dlatego radzę, by w szkole słowo „środek” – jeśli zostanie użyte – zamiast „ciężkości” towarzyszyło zawsze słowo „masy”.

### Przykłady:

**1.** Umieścimy dwupunktowy rotator, opisany w niniejszym artykule, w cylindrycznie symetrycznym polu grawitacyjnym. (Abstrahujemy od jego niefizyczności.) Czy zawsze będzie dla niego istnieć prosta, wzdłuż której działa siła grawitacji?

Nie. Umieścimy cząstki rotatora w równej odległości od osi cylindra i po przeciwnych stronach, choć niekoniecznie na równej „wysokości”. W takiej sytuacji całkowita siła, działająca na rotator, wynosi zero. (W analogicznej sytuacji w polu sferycznie symetrycznym, ponieważ całkowity moment sił znika, ciągle możemy mówić o tym, że siła grawitacji działa wzdłuż prostej – choć nie umiemy przypisać jej zwrotu.) Jeśli cząstki rotatora są istotnie na różnej „wysokości”, to całkowity moment sił nie będzie znikał. Proponuję opisać wzorami całkowitą siłę i całkowity moment sił przy dowolnym położeniu rotatora.

**2.** Jeśli do uproszczonej, sferycznie symetrycznej, ziemskiej siły grawitacyjnej dodać siłę odśrodkową – wywołaną obrotem Ziemi wokół jej osi – to otrzyma się efektywną siłę grawitacyjną, lepiej (choć niedoskonale) opisującą ziemskie pole grawitacyjne. Czy w takim modelowym polu będzie zawsze istnieć prosta, wzdłuż której na dwupunktowy rotator działa siła grawitacji?

Nie, bo sytuacja ta jest mieszaniną sytuacji opisanej w artykule i w przykładzie 1. Opisanie jej wzorami pomoże przekonać niedowiarków.

## Szkice rozwiązań zadań z artykułu *Poznajmy topologię przez dotyk*

**Zadanie 1.** Jeśli  $X$  rozkłada się na sumę  $A \cup B$  jak w definicji niespójności, to funkcja równa 0 na  $A$  i 1 na  $B$  okazuje się ciągłą. I odwrotnie, jeśli obie te wartości są przyjmowane, to ich przeciwobrazy zadają odpowiedni rozkład.

**Zadanie 2.** Odległości te są łatwo porównywalne:  $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2 \cdot d_\infty$  (dla dowolnej pary punktów  $p, q$ ). Oznacza to na przykład, że jeśli szukamy punktu  $q \in A$  spełniającego  $d_1(p, q) < \frac{1}{n}$ , to wystarczy spełnić warunek  $d_\infty(p, q) < \frac{1}{2n}$ .

**Zadanie 3.** Pomińmy (jako nieco rutynowe) sprawdzenie, że  $s$  jest bijekcją oraz warunek z definicji homeomorfizmu jest spełniony dla wszystkich par punktów  $(x, s(x))$  poza  $((0, 1), \infty)$ . Dla tych dwóch punktów zauważmy natomiast, że  $(0, 1)$  dotyka zbioru  $A \subseteq \mathbb{S}$  (niezawierającego  $(0, 1)$ ) dokładnie wtedy, gdy  $s(A)$  jest nieograniczonym podzbiorem  $\mathbb{R}$ , czyli wtedy, gdy  $\infty$  dotyka  $s(A)$ . Jeśli zbiór  $A \subseteq \mathbb{S}$  zawiera  $(0, 1)$ , taka równoważność wynika wprost z (D2).

**Zadanie 4.** Jednoznaczność jest jasna, bo każdy element  $X/\sim$  jest postaci  $[x]$  dla pewnego  $x \in X$ . Jednocześnie podany warunek jest niesprzeczny, bo jeśli jakaś klasa abstrakcji jest jednocześnie równa  $[x]$  i  $[y]$ , to  $x \sim y$ , a więc  $f(x) = f(y)$ . To gwarantuje istnienie funkcji. Żeby sprawdzić ciągłość, założmy, że punkt  $\tilde{x} \in X/\sim$  dotyka zbioru  $\tilde{A} \subseteq X/\sim$ . Zgodnie z definicją topologii ilorazowej możemy założyć, że  $\tilde{x} = [x]$  oraz  $\tilde{A} = q(A)$  dla pewnych  $x \in X$  i  $A \subseteq X$ , a ponadto  $x$  dotyka  $A$ . Z ciągłości  $f$  wnioskujemy wtedy, że  $f(x)$  dotyka  $f(A)$ , czyli że  $\tilde{f}(\tilde{x})$  dotyka  $\tilde{f}(\tilde{A})$ .

**Zadanie 5.** Założmy aksjomat (C0) i podstawmy w nim kolejne różne wybory  $A$  i  $B$ :

- $A := \emptyset, B := \emptyset$  daje (C1) i w konsekwencji  $A \cup \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ ;
- $A := \emptyset$  daje (C4') i w konsekwencji  $A \cup \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ ;
- $B := \emptyset$  daje (C2) i w konsekwencji (C3).

Wynikanie (C0) z zestawu (C1,2,3,4') jest bezpośrednie.