



# Twierdzenie OMGa

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

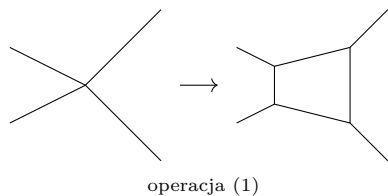
Z okazji jubileuszu w 50. Kąciku Początkującego Olimpijczyka zajmę się pewnym twierdzeniem bezpośrednio związanym z Olimpiadą Matematyczną Gimnazjalistów (obecnie pod nazwą Olimpiada Matematyczna Juniorów)...

W OMG było sporo zadań, w których pytano: *czy istnieje wielościan, który...* Odpowiedź na ogół była pozytywna i stąd powstał żart – niestety nieznanego mi autora. Jego treść wyraża

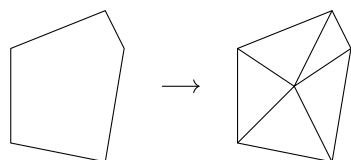
**Twierdzenie OMGa.** *Wielościan istnieje.*

A teraz już na poważnie. Aby wykazać, że istnieje jakiś obiekt, wystarczy go pokazać. Taki dowód nazywamy konstruktywnym i właśnie tym się w niniejszym kąciku zajmujemy. Będziemy dowodzić istnienia wielościanów, konstruując je.

Wspomniane zadania z OMG są bardzo różnej natury i każdemu z nich w zasadzie można by poświęcić oddzielny kącik. Ograniczę się tutaj do dwóch trików, które pozwalają zbudować wielościany o żądanej liczbie wierzchołków, krawędzi i ścian, a także wielościany z narzuconymi warunkami na liczby boków, ścian i stopnie wierzchołków (*stopniem* wierzchołka wielościanu nazywamy liczbę wychodzących z niego krawędzi). Wybierzmy dowolny wielościan wypukły jako punkt wyjścia. Będziemy wykonywać na nim następujące operacje:



operacja (1)



operacja (2)

- Ścięcie wierzchołka  $P$  stopnia  $d$  w taki sposób, by płaszczyzna cięcia przechodziła przez wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka  $P$ , ale nie przechodziła przez żaden wierzchołek tego wielościanu. Takie cięcie zagwarantuje płaszczyzna położona wystarczająco blisko wierzchołka  $P$ . Ta operacja spowoduje:
  - wzrost liczby ścian o 1 (powstaje ściana  $d$ -kątna);
  - wzrost liczby krawędzi o  $d$  (są to krawędzie nowo powstałej ściany);
  - wzrost liczby wierzchołków o  $d - 1$  (na miejsce wierzchołka  $P$  przychodzi  $d$  wierzchołków stopnia 3).

Ponadto wszystkie ściany, których wierzchołkiem był punkt  $P$ , zwiększają liczbę boków o 1.

- Dobudowanie ostrosłupa, którego podstawą jest ściana  $S$  mająca  $b$  boków, w taki sposób, by kąty dwuścienne między ścianami tego ostrosłupa a sąsiednimi ścianami wielościanu były miary mniejszej niż  $180^\circ$ . Można to zrobić, dobudowując wystarczająco niski ostrosłup. Ta zmiana powoduje:
  - wzrost liczby ścian o  $b - 1$  (na miejsce  $b$ -kąta pojawi się  $b$  trójkątów);
  - wzrost liczby krawędzi o  $b$  (są to krawędzie boczne dobudowanego ostrosłupa);
  - wzrost liczby wierzchołków o 1 (stopnia  $b$ ).

Ponadto wszystkie wierzchołki dawnej ściany  $S$  zwiększą stopień o 1.

Możemy bawić się dalej i budować na ścianach wielościanu bardziej złożone konstrukcje albo ścinać nie tylko wierzchołki, ale krawędzie lub nawet całe ściany. Zabawę oraz wnioski z niej pozostawiam Czytelnikowi.

## Zadania

### Czy istnieje wielościan wypukły,

- w którym liczba ścian i liczba wierzchołków są różnymi liczbami pierwszymi? (II Wielkopolska Liga Matematyczna Gimnazjalistów)
- który ma tyle samo wierzchołków i ścian, ale nie jest ostrosłupem?
- którego liczba krawędzi jest cztery razy większa od wartości bezwzględnej różnicy liczby jego ścian i wierzchołków?
- w którym każda krawędź jest bokiem pewnej ściany siedmiokątnej? (XI OMG)
- który ma dokładnie siedem ścian sześciokątnych?
- w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 i każde dwie ściany o wspólnej krawędzi mają różną liczbę boków?
- który ma nieparzystą liczbę ścian i wszystkie wierzchołki parzystego stopnia? (VIII OMG)

**Rozwiązania zadań**

- Po zastosowaniu operacji (1) do wszystkich wierzchołków wielościanu otrzymamy ostrosłupa sześciokątnego otrzymamy bryłę o 17 ścianach, w której każdy wierzchołek ma stopień 4.
- Po zastosowaniu operacji (2) do drugiej ściany bocznej graniastosłupa otrzymamy bryłę o 17 ścianach, w której każdy wierzchołek ma stopień 4.
- Sześcian po zastosowaniu operacji (1) na czterech jego wierzchołkach staje się bryłą o 24 krawędziach, 16 wierzchołkach i 10 ścianach.
- Stosujemy operację (1) do wszystkich wierzchołków sześciannu z wyjątkiem dwóch, które są konicami jego dowolnej przekątnej. Otrzymana bryła ma ściany siedmiokątne i siedmiokątne, ponadto żadne dwie ściany trójkątne nie mają wspólnej krawędzi.
- Jeden z wielościanów półforemnych, dwudziestosciann ścięty (przy pominięciu wygładzającym piłkę nożną), ma 12 ścian sześciokątnych. Za pomocą operacji (2) nadmiarowe sześciokątne ściany zastępujemy trójkątnymi.
- W graniastosłupie, którego podstawą jest osmiościan  $ABCDEFGH$ , wykonujemy operację (1) na wierzchołkach  $A, B, E, F$ .
- Po zastosowaniu operacji (2) do sześciokątnej ściany bocznej graniastosłupa otrzymamy bryłę o 17 ścianach, w której każdy wierzchołek ma stopień 4.