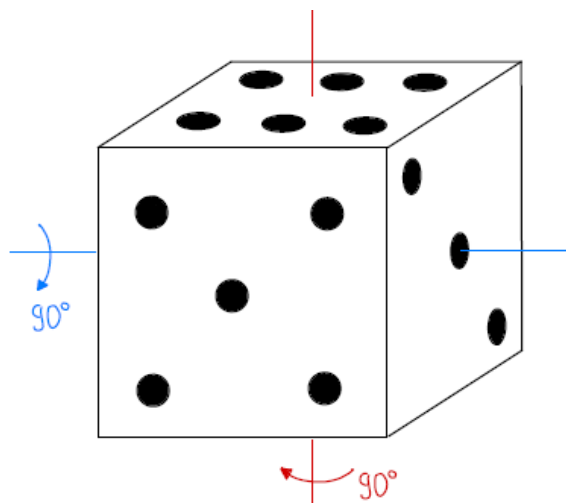


O obrotach w czasoprzestrzeni,  
czyli od sześcienniej kostki,  
przez strukturę grupy,  
do obrotu Wignera i precesji Thomasa  
**ZAŁĄCZNIK**

Bartłomiej Bąk, Bartosz Zawora

## 1 Obroty kostki

Zacznijmy od obrotów kostką. Każdy obrót można reprezentować za pomocą macierzy. Jako że mamy do czynienia z trzema wymiarami przestrzennymi, macierze są wymiaru  $3 \times 3$ . Interesują nas obroty, przedstawione na Rysunku 1.



Rysunek 1: Obroty wokół osi  $z$  (pionowej) oraz osi  $y$  (poziomej)

Macierz obrotu o kąt  $\psi$  wokół osi pionowej  $z$  reprezentowana jest przez następującą macierz:

$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

podczas gdy macierz obrotu o kąt  $\theta$  względem osi prostopadłej  $y$  to:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Mnożąc przez siebie te dwie macierze, otrzyma się różny wynik, w zależności od wybranej kolejności:

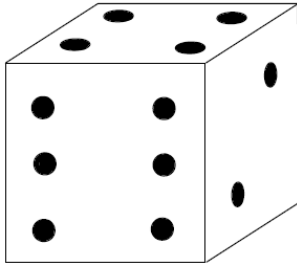
$$R_y(\theta)R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \sin \phi \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$R_z(\phi)R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \sin \phi & \cos \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \cos \theta & \cos \phi & -\sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (4)$$

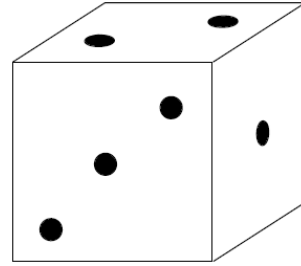
Biorąc miary kątów  $\phi = \theta = 90^\circ$  z Rysunku 1 uzyskamy:

$$R_y(90^\circ)R_z(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_z(90^\circ)R_y(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

co tylko uwydatnia różnicę pomiędzy tymi dwiema operacjami, a jest zaprezentowane na Rysunkach 2 i 3.



Rysunek 2: Kostka po wykonaniu obrotu  $R_z(90^\circ)$ , a następnie  $R_y(90^\circ)$ .



Rysunek 3: Kostka po wykonaniu obrotu  $R_y(90^\circ)$ , a następnie  $R_z(90^\circ)$ .

Jak było wspomniane w artykule, każdy taki podwójny obrót może być reprezentowany poprzez pojedynczy obrót, ale wokół innej osi. Aby znaleźć tę oś, należy znaleźć wektor, który pod wpływem obrotów nie ulegnie zmianie, tzn.

$$R_y(90^\circ)R_z(90^\circ)w = w, \quad R_z(90^\circ)R_y(90^\circ)v = v. \quad (6)$$

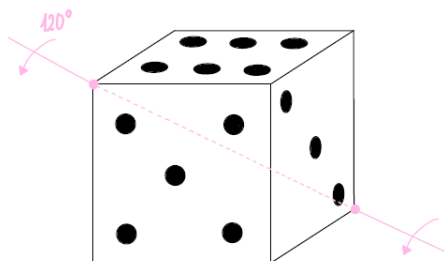
Na macierzach wygląda to następująco:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}. \quad (7)$$

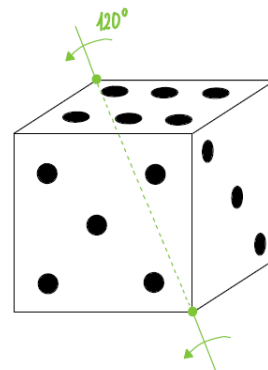
Dzięki temu:

$$w = w_x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = v_x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

co dokładnie odpowiada ułożeniu osi obrotu przedstawionych na Rysunkach 4 i 5.



Rysunek 4: Efektywny obrót uzyskany, wskutek złożenia  $R_y(90^\circ)R_z(90^\circ)$ .



Rysunek 5: Efektywny obrót uzyskany, wskutek złożenia  $R_z(90^\circ)R_y(90^\circ)$ .

Pozostaje jeszcze kwestia skąd się wzięła miara kąta  $120^\circ$ . Tu akurat wkracza prosta geometria, na podstawie której szukamy, jak przemieszczają się wierzchołki kostki. W przypadku z Rysunku 4, prawy górny wierzchołek frontowej ścianki (z pięcioma kropkami) przemieści się na miejsce lewego dolnego – por. Rysunek 2, podczas gdy w przypadku z Rysunku 5, prawy dalszy róg górnej ścianki (z sześcioma oczkami) przejdzie na pozycję lewego bliższego – por. Rysunek 3. Trzeba więc znaleźć kąt

poędzy przekątną sześcianu, a dwoma odpowiednimi wierzchołkami. Połączenie któregoś z tych wierzchołków wraz z wierzchołkami, przez które przechodzi oś obrotu, tworzy trójkąt prostokątny, którego boki to bok kostki, przekątna ścianki i przekątna kostki. Załóżmy, że bok kostki ma długość  $a$ , wtedy boki tego trójkąta wynoszą odpowiednio  $a$ ,  $a\sqrt{2}$  i  $a\sqrt{3}$ . Wobec tego odległość naszego przemieszczającego się wierzchołka od osi obrotu jest równa wysokości tego trójkąta, czyli  $a\sqrt{2/3}$ . Skoro nasz wierzchołek przemieścił się z jednego rogu ścianki na drugi, to odległość między nimi to dokładnie  $a\sqrt{2}$ . Zatem poszukiwany kąt obrotu, to kąt rozwarcia trójkąta równoramiennego o podstawie  $a\sqrt{2}$  i ramionach  $a\sqrt{2/3}$ . Wyznaczenie kąta rozwarcia nie powinno już nastroczać problemów. Jedną z możliwości jest zastosowanie twierdzenia cosinusów:

$$(a\sqrt{2})^2 = (a\sqrt{2/3})^2 + (a\sqrt{2/3})^2 - 2 \cdot a\sqrt{2/3} \cdot a\sqrt{2/3} \cdot \cos \alpha, \quad (9)$$

skąd otrzymujemy:

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2} \implies \alpha = 120^\circ. \quad (10)$$

## 2 Obrót Wignera

Przejdźmy teraz do części związanej z fizyką relatywistyczną. W układzie laboratoryjnym wprowadzamy współrzędne  $(t, x, y)$ , podczas gdy układ związany z podróżnikiem poruszającym się na wschód posiada współrzędne  $(t_W, x_W, y_W)$ , i odpowiednio w przypadku podróżnika udającego się na północ  $(t_P, x_P, y_P)$ . Stosowne transformacje Lorentza pomiędzy tymi układami znajdują się poniżej:

$$\begin{bmatrix} t_W \\ x_W \\ y_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \end{bmatrix}, \quad r_W = \hat{B}_W(\theta) r, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} t_P \\ x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \psi & 0 & -\sinh \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \psi & 0 & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \end{bmatrix}, \quad r_P = \hat{B}_P(\psi) r, \quad (12)$$

przy czym:

$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_W^2/c^2}}, \quad \sinh \theta = \frac{\mathbf{v}_W/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_W^2/c^2}}, \quad (13)$$

$$\cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_P^2/c^2}}, \quad \sinh \psi = \frac{\mathbf{v}_P/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_P^2/c^2}}. \quad (14)$$

Wprowadzenie powyższych funkcji „sinh” (sinus hiperboliczny) i „cosh” (cosinus hiperboliczny) jest standardową procedurą mającą na celu znaczące uproszczenie rachunków, natomiast  $\hat{B}_P(\psi)$  i  $\hat{B}_W(\theta)$  oznaczają boosty w odpowiednich kierunkach. Nietrudno zauważyć pewną analogię pomiędzy boostami a obrotami. Obroty związane są z funkcjami trygonometrycznymi, spełniającymi tzw. jedynkę trygonometryczną:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad (15)$$

podczas gdy boosty związane z funkcjami hiperbolicznymi spełniającymi tzw. jedynkę hiperboliczną:

$$\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1. \quad (16)$$

W układzie laboratoryjnym prędkości obu podróżników zadane są następującymi wektorami:

$$v_W^{(LAB)} = \begin{bmatrix} c \\ \mathbf{v}_W \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_P^{(LAB)} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ \mathbf{v}_P \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Jako sprawdzenie powyższych formuł, można pokazać, że obaj podróżnicy względem odpowiednich układów „spoczywają” tzn. że nie zmieniają swojego położenia w przestrzeni, natomiast zmienia się wyłącznie czas (uwzględniający dylatację):

$$\hat{B}_W(\theta) v_W^{(LAB)} = \begin{bmatrix} c\sqrt{1 - \mathbf{v}_W^2/c^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{B}_P(\psi) v_P^{(LAB)} = \begin{bmatrix} c\sqrt{1 - \mathbf{v}_P^2/c^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

co znaczy, że w układzie poruszającym się na wschód, odcinek czasu  $\Delta t_W$  jest dłuższy niż odcinek  $\Delta t$  w układzie laboratoryjnym:

$$c\sqrt{1 - \mathbf{v}_W^2/c^2} \Delta t_W = c\Delta t \implies \Delta t_W = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_W^2/c^2}} = \Delta t \cosh \theta. \quad (19)$$

Analogiczna sytuacja ma miejsce w przypadku podróżnika udającego się na północ.

Przejdźmy teraz do właściwych rachunków. Aby znaleźć transformację z układu poruszającego się na północ  $r_P$  do tego poruszającego się na wschód  $r_W$  należy najpierw przejść z układu  $r_P$  do układu laboratoryjnego  $r$  za pomocą transformacji odwrotnej, tzn.  $[\hat{B}_P(\psi)]^{-1}$ , a potem z układu laboratoryjnego  $r$  do układu  $r_W$

za pomocą transformacji  $\hat{B}_W(\theta)$ . Tak się ciekawie składa, że zachodzi następująca własność:

$$[\hat{B}_P(\psi)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cosh \psi & 0 & \sinh \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \psi & 0 & \cosh \psi \end{bmatrix} = \hat{B}_P(-\psi). \quad (20)$$

Wobec tego:

$$r_W = \hat{B}_W(\theta) \hat{B}_P(-\psi) r_P. \quad (21)$$

Obliczmy ściśle macierz przejścia pomiędzy tymi układami:

$$\begin{aligned} \hat{B}(\theta) \hat{B}(-\psi) &= \begin{bmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \psi & 0 & \sinh \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \psi & 0 & \cosh \psi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \theta \cosh \psi & -\sinh \theta & \cosh \theta \sinh \psi \\ -\sinh \theta \cosh \psi & \cosh \theta & -\sinh \theta \sinh \psi \\ \sinh \psi & 0 & \cosh \psi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

Powyższa macierz nie jest symetryczna, więc nie może być boostem. Zmienia również współrzędną czasową, więc nie może być obrotem. Okazuje się jednak, że jest złożeniem obrotu  $\hat{R}$  i boostu  $\hat{B}$ :

$$\hat{B}_W(\theta) \hat{B}_P(-\psi) = \hat{B} \hat{R}. \quad (23)$$

Spróbujemy znaleźć postać obu tych macierzy. Zaczniemy od obrotu o kąt  $\phi$ , który jest reprezentowany przez poniższą macierz  $\hat{R}(\phi)$ :

$$\hat{R}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Do wyznaczenia kąta  $\phi$  potrzebujemy zadziałać obrotem „odwrotnym”, tzn. macierzą  $\hat{R}^{-1}(\phi) = \hat{R}(-\phi)$  z prawej strony, bo jak pamiętamy, kolejność mnożenia macierzy ma znaczenie. Wychodzi na to, że:

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \hat{B}_W(\theta) \hat{B}_P(-\psi) \hat{R}(-\phi) = \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \psi \cosh \theta & -\sin \phi \sinh \psi \cosh \theta - \cos \phi \sinh \theta & \cos \phi \sinh \psi \cosh \theta - \sin \phi \sinh \theta \\ -\cosh \psi \sinh \theta & \sin \phi \sinh \psi \sinh \theta + \cos \phi \cosh \theta & \sin \phi \cosh \theta - \cos \phi \sinh \psi \sinh \theta \\ \sinh \psi & -\sin \phi \cosh \psi & \cos \phi \cosh \psi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

Jeśli powyższa macierz ma być boostem, to powinna być symetryczna, co jednoznacznie determinuje kąt  $\phi$ . Oczywiście, z powyższej macierzy możemy odczytać trzy kompatybilne warunki. Jeden z nich pozwala bardzo łatwo wyznaczyć tangens kąta:

$$-\sin \phi \cosh \psi = \sin \phi \cosh \theta - \cos \phi \sinh \psi \sinh \theta, \quad (26)$$

$$\tan \phi = \frac{\sinh \theta \sinh \psi}{\cosh \theta + \cosh \psi}, \quad (27)$$

co oczywiście nie zadaje jednoznacznie kąta  $\phi$ , dlatego z pozostałych dwóch warunków wyznaczamy sinus i cosinus kąta  $\phi$ :

$$\cos \phi = \frac{\cosh \theta + \cosh \psi}{\cosh \theta \cosh \psi + 1}, \quad \sin \phi = \frac{\sinh \theta \sinh \psi}{\cosh \theta \cosh \psi + 1}. \quad (28)$$

Właśnie obrót o ten kąt  $\phi$  to tytułowy *obróć Wignera*. Powstały boost  $\hat{B}$  wynosi:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \cosh \psi \cosh \theta & -\cosh \psi \sinh \theta & \sinh \psi \\ -\cosh \psi \sinh \theta & \frac{\sinh^2 \psi \sinh^2 \theta + \cosh \theta (\cosh \psi + \cosh \theta)}{\cosh \psi \cosh \theta + 1} & -\frac{\sinh \psi \cosh \psi \sinh \theta}{\cosh \psi \cosh \theta + 1} \\ \sinh \psi & -\frac{\sinh \psi \cosh \psi \sinh \theta}{\cosh \psi \cosh \theta + 1} & \frac{\cosh \psi (\cosh \psi + \cosh \theta)}{\cosh \psi \cosh \theta + 1} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

W związku z tym, że powyższy boost nie przypomina postacią ani  $\hat{B}_W(\theta)$  (11) ani  $\hat{B}_P(\psi)$  (12), wynika, że nie odbywa się wzdłuż osi wyznaczonych w układzie podróznika udającego się na wschód. I nic w tym dziwnego, przecież według niego, drugi podróznik nie porusza się wzdłuż osi  $y_W$  tylko pod pewnym kątem  $\alpha$  względem osi  $x_W$ . Aby wyznaczyć ten kąt, wystarczy zobaczyć, jak wygląda wektor prędkości  $v_P$  w układzie podróznika udającego się na wschód:

$$\hat{B}_W(\theta) v_P^{(LAB)} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ \mathbf{v}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cosh \theta \\ -c \sinh \theta \\ \mathbf{v}_P \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Oznacza to, że tangens kąta  $\alpha$  zadany jest przez iloraz składowych wektora prędkości:

$$\tan \alpha = -\frac{\mathbf{v}_P}{c \sinh \theta} = -\frac{\mathbf{v}_P \sqrt{1 - \mathbf{v}_W^2/c^2}}{\mathbf{v}_W} = -\frac{\tanh \psi}{\sinh \theta}, \quad (31)$$

co jest uogólnieniem formuły znanej z życia codziennego (tj. reżimu nierelatywistycznego), gdzie  $\tan \alpha = -\frac{\mathbf{v}_P}{\mathbf{v}_W}$ . Warto jeszcze doprecyzować wartości cosinusa i sinusa kąta  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{\tanh \psi}{\sqrt{\sinh^2 \theta + \tanh^2 \psi}}, \quad \cos \alpha = -\frac{\sinh \theta}{\sqrt{\sinh^2 \theta + \tanh^2 \psi}}, \quad (32)$$

gdzie ujemny znak cosinusa wynika pokrywa się z ujemnym znakiem  $x$ -owej składowej prędkości  $\hat{B}_W(\theta)v_P^{(LAB)}$ . W związku z tym, gdyby przejść do układu współporuszającego się z podróżnikiem udającym się na wschód, ALE obróconym o kąt  $\alpha$ , powinniśmy uzyskać postać boostu  $\hat{B}$  (29) dokładnie taką, jak boostu  $\hat{B}_W$  (11), tyle że z innym parametrem. Takie obracanie układu współrzędnych na poziomie boostów odpowiada następującej wielkości:

$$\hat{R}(-\alpha)\hat{B}\hat{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cosh \psi \cosh \theta & \sqrt{\cosh^2 \psi \cosh^2 \theta - 1} & 0 \\ \sqrt{\cosh^2 \psi \cosh^2 \theta - 1} & \cosh \psi \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Teraz jasno widać, że powyższa transformacja jest boostem, ponieważ kładąc:

$$\cosh \Theta := \cosh \psi \cosh \theta, \quad \sinh \Theta := -\sqrt{\cosh^2 \psi \cosh^2 \theta - 1}, \quad (34)$$

uzyskujemy standardowy boost w postaci takiej, jak  $\hat{B}_W(\theta)$  (11).

### 3 Precesja Thomasa

Pokazaliśmy, że jeśli w układzie laboratoryjnym dwaj podróżnicy posiadają prędkości pod kątem prostym, to kąt wyznaczający obrót pomiędzy nimi dany jest wzorem (27):

$$\tan \phi = \frac{\sinh \theta \sinh \psi}{\cosh \theta + \cosh \psi}. \quad (35)$$

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie wzoru na *precesję Thomasa* opisującą obrót obiektów, których kierunek prędkości uległ zmianie. Załóżmy, że w trakcie ruchu, prędkość  $v$  pewnej cząstki została minimalnie odchyłona od pierwotnego kierunku. Oznacza to, że występuje przyspieszenie, które możemy rozłożyć na część styczną do prędkości i prostopadłą. Z wcześniejszej dyskusji wiemy, że uwzględnienie zmian prędkości stycznych nie prowadzi do obrotu, bo boosty w tym samym kierunku tworzą podgrupę. Pozostaje więc tylko wpływ zmian prostopadłych. Tak się fortunnie składa, że powyższy wzór nie ulega zmianie przy zamianie parametrów  $\psi$  i  $\theta$  (można by rzec, że jest symetryczny), gdzie obie te prędkości były wzajemnie prostopadłe. Jednakże, w związku z tym, że przechodziliśmy do układu poruszającego się na wschód, wybieramy prędkość referencyjną naszej cząstki jako  $\mathbf{v}_W$  (wraz z parametrem  $\theta$ ). Oznacza to, że wartości funkcji prędkości naszej cząstki  $v$  w pewnej, wybranej przez nas chwili czasu  $t_0$  wynosi  $\mathbf{v}_W$ :

$$v(t_0) = \mathbf{v}_W. \quad (36)$$

Natomiast  $\mathbf{v}_P$  (wraz z parametrem  $\psi$ ) będzie małą (prostopadłą) zmianą w krótkim (dążącym do zera) odcinku czasu. Pozostaje jeszcze kwestia jak opisywać taką krzywą, bo przecież odniesienie do czasu, w przypadku fizyki relatywistycznej, traci nieco urok, bo przecież każdy z obserwatorów postrzega ten czas inaczej. W tym celu wprowadza się pojęcie *czasu własnego*<sup>1</sup>  $\tau$ . Epitet „własny” odnosi się do postrzegania czasu w układzie współporuszającym się z cząstką, co w pewien sposób wyróżnia go spośród wszystkich innych. Chcąc zobaczyć, jak kąt  $\phi$  będzie się zmieniał wraz z ruchem, należy obustronnie zróżniczkować po  $\tau$  (ozn. jako kropka):

$$\frac{\dot{\phi}}{\cos^2 \phi} = \frac{\dot{\psi} \sinh \theta \cosh \psi}{\cosh \theta + \cosh \psi} - \frac{\sinh \theta \sinh \psi \dot{\psi} \sinh \psi}{(\cosh \theta + \cosh \psi)^2}. \quad (37)$$

Zmiana  $\psi$  była mała i opisywała odstępstwo od prędkości  $\mathbf{v}_W$ , co oznacza, że do uzyskania właściwego wyniku musimy wziąć  $\psi = 0$ . Z matematycznego punktu widzenia, policzyliśmy pochodną w chwili czasu  $t_0$ , gdy funkcja prędkości cząstki przyjęła wartość  $\mathbf{v}_W$ :

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{\psi} \sinh \theta}{\cosh \theta + 1}. \quad (38)$$

Trzeba jeszcze policzyć ile wynosi  $\dot{\psi}(\psi = 0)$ :

$$\tanh \psi = \frac{\mathbf{v}_P}{c} \implies \dot{\psi} = \frac{\dot{\mathbf{v}}_P}{c}. \quad (39)$$

I znów trafiamy na pewną przeszkodę: ile to jest  $\dot{\mathbf{v}}_P$ ? Odpowiedź jest dość prosta: jest to dokładnie (prostopadła) zmiana funkcji prędkości cząstki  $v$  w wybranej przez nas chwili  $t_0$ , którą oznaczymy jako  $\dot{v}_\perp(t_0)$ . Wobec tego zmiana kąta  $\phi$  w chwili  $(t_0)$  wynosi:

$$\dot{\phi}(t_0) = \frac{\dot{v}_\perp(t_0) \mathbf{v}_W / c^2}{1 + \sqrt{1 - \mathbf{v}_W^2 / c^2}}. \quad (40)$$

Oczywiście, wybór chwili  $t_0$  był całkowicie arbitralny, więc korzystając z formuły (36), powyższy wzór można zapisać ogólnie i uprościć w następujący sposób:

$$\Omega = \dot{\phi} = \frac{\dot{v}_\perp v / c^2}{1 + \sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{1}{v^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - 1 \right) \dot{v}_\perp v \sqrt{1 - v^2 / c^2}. \quad (41)$$

---

<sup>1</sup>Matematycy preferują określenie *parametr afiniczny*.

Wzór na precesję Thomasa jest prawie gotowy, bo pozostało już tylko „naprawić” pochodną prędkości po parametrze  $\tau$  do pochodnej po czasie (w naszym układzie współrzędnych), by uzyskać przyspieszenie (prostopadłe!)  $a_{\perp}$ . Procedura jest bardzo podobna jak do tej zaprezentowanej przy dylatacji czasu (19). Zatem:

$$\dot{v}_{\perp} = \frac{dv_{\perp}}{d\tau} = \frac{dv_{\perp}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dv_{\perp}}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{a_{\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (42)$$

co prowadzi do wzoru:

$$\Omega = \frac{1}{v^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) a_{\perp} v. \quad (43)$$

W powyższym wzorze pojawia się wyłącznie składowa przyspieszenia prostopadła do prędkości. Jedyną operacją na wektorach, która ma takie właściwości to *iloczyn wektorowy*. Tylko czy „ręczne” wprowadzenie iloczynu wektorowego będzie spójne z całością? Na szczęście tak, bo tak się fortunnie składa, że  $\Omega$  posiada naturalną interpretację *prędkości kątowej* i, z definicji, jest prostopadła do powierzchni wyznaczonej przez wektory z iloczynu wektorowego! Możemy więc zapisać:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{\mathbf{v}^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}} - 1 \right) \vec{a} \times \vec{v}, \quad (44)$$

gdzie  $\mathbf{v}$  oznacza długość wektora  $\vec{v}$ , odtwarzając tym samym podany w artykule wzór na precesję Thomasa. Ostatnim problemem jest znak powyższego wyrażenia, ponieważ wiadome jest, że iloczyn wektorowy zmienia znak w zależności od kolejności argumentów. Remedium na tę bolączkę jest uwikłane we własnościach składanych boostów i przyjętych przez nas konwencji. Otóż na samym początku przechodziliśmy z układu podróżnika udającego się na północ do układu podróżnika udającego się na wschód (21). Gdybyśmy dokonali odwrotnej konfiguracji, przejście miałyby postać:

$$r_P = \hat{B}_P(\psi) \hat{B}_W(-\theta) r_W. \quad (45)$$

Następnie znów dostalibyśmy złożenie boostu i obrotu, z tym że kąt obrotu Wignera byłby ten sam, ale miałyby przeciwny znak – por. wzór (23) – co oznacza, że obrót wystąpiłby w przeciwnym kierunku:

$$\hat{B}_P(\psi) \hat{B}_W(-\theta) = \hat{B}' \hat{R}(-\phi). \quad (46)$$

Tym razem tangens kąta obrotu wynosi:

$$\tan(-\phi) = -\tan \phi = -\frac{\sinh \theta \sinh \psi}{\cosh \theta + \cosh \psi} . \quad (47)$$

co jednoznacznie wynika ze wzoru (27). Dalej procedura jest taka sama, z tym że prędkością referencyjną byłoby  $\mathbf{v}_P$ . Wtedy mała zmiana  $\mathbf{v}_W$  generowałaby ruch zgodny z ruchem wskazówek zegara, a tym samym implikowała zmianę kierunku iloczynu wektorowego na przeciwny. Podsumowując, uzyskany przez nas znak w równaniu (43) został ustalony dużo wcześniej i konsekwentnie trzymany aż do teraz. Niedowiarków gorąco zachęcamy do weryfikacji tej obserwacji z pomocą powyższych wskazówek.

Na deser pozostało już tylko wyznaczenie precesji Thomasa dla elektronu poruszającego się z prędkością kątową  $\vec{\omega}$  na orbicie atomowej o promieniu  $\rho$ . Przyspieszenie dośrodkowe dane jest wzorem:

$$\vec{a} = -\frac{\mathbf{v}^2}{\rho} \mathbf{e}_\rho , \quad (48)$$

gdzie  $\mathbf{e}_\rho$  oznacza wektor jednostkowy (wersor) skierowany radialnie od środka okręgu na zewnątrz. Elektron porusza się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara:

$$\vec{v} = \mathbf{v} \mathbf{e}_T = \omega \rho \mathbf{e}_T , \quad (49)$$

co odpowiada tzw. *orientacji prawoskrętnej*, która zwyczajowo ma znak  $+$ , a wersor  $\mathbf{e}_T$  wskazuje ten kierunek (litera  $T$  pochodzi od słowa „transwersalny”, czyli poprzeczny). Z drugiej strony, oznacza to, że prędkość kątowa elektronu  $\vec{\omega}$  jest skierowana pionowo „ku górze” (zwyczajowo jest to kierunek  $z$ ), czyli:

$$\vec{\omega} = \omega \mathbf{e}_z . \quad (50)$$

Z iloczynu wektorowego (lub, jeśli ktoś woli, reguły śruby prawoskrętnej) mamy:

$$\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_T = \mathbf{e}_z , \quad (51)$$

skąd wynika, że kierunek precesji  $\vec{\Omega}$  jest przeciwny do kierunku ruchu obiegowego elektronu  $\vec{\omega}$  i zachodzi następująca zależność:

$$\vec{\Omega} = -\vec{\omega} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} - 1 \right) . \quad (52)$$